第3章 动态电路时域分析

3.1 知识提要

3.1.1 动态元件

1. 电容元件

(1) 定义

一个二端元件,在任意时刻,其电荷 q、电压 u 关系能用 $q \sim u$ 平面上的曲线确定,则称此二端元件为电容元件。

线性时不变电容元件(简称线性电容)。若 $q \sim u$ 平面上的曲线是通过原点的一条直线,且不随时间变化。电荷 q 与其两端电压 u 的关系为

$$q = Cu$$

式中 C 称为线性电容的电容。其电路模型及库伏特性如图 3-1 所示。

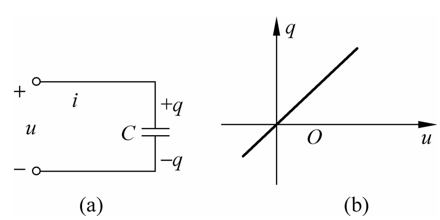


图 3-1

电容的单位为法拉(F),简称法。常用 μF(10^{-6} F)和 pF(10^{-12} F)等。

(2) 电容元件的伏安关系

当电容电压 u 发生变化时,聚集在电容极板上的电荷也相应地发生变化,形成电容电流。在电压和电流关联参考方向下,线性电容的伏安关系为

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

写成积分形式为

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)d\xi$$

重要结论:

(a) 任何时刻,线性电容的电流与该时刻电压的变化率成正比。如果电容电压不变,即 du/dt 为零,此时电容上虽有电压,但电容电流为零,这时的电容相当于开路,故电容有隔断直流的作用。

(b) 如果在任何时刻,通过电容的电流是有限值,则 du/dt 就必须是有限值,这就意味着电容电压不可能发生跃变而只能是连续变化的。

(c) 积分形式表明在某一时刻 t，电容电压的数值并不取决于该时刻的电流值，而是取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值，即与电流全部过去历史有关。所以，电容具有"记忆"电流的作用，是一种"记忆元件"。

如果只对某一任意选定的初始时刻 t_0 以后的电容电压情况感兴趣，便可将积分形式写为

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

上式表明如果已知由初始时刻 t_0 开始作用的电流 $i(t)$ 以及电容的初始电压 $u(t_0)$，就能确定 $t\geqslant t_0$ 时的电容电压 $u(t)$。

(3) 电容元件的功率与储能

在电压和电流关联参考方向下，线性电容吸收的瞬时功率

$$p=ui=Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

电容吸收的能量以电场能量形式储存在电场中。在任何时刻 t 电容储存的电场能量 w_C 等于该电容所吸收的能量，即

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

上式表明，电容在任何时刻的储能只与该时刻电容电压值有关。在电容电流是有限值时，电容电压不能跃变，实质上也就是电容的储能不能跃变的反映。如果电容储能跃变，则功率将无限大，当电容电流是有限值时，这种情况是不可能的。

2. 电感元件

(1) 定义

一个二端元件，在任意时刻，其磁链 Ψ_L、电流 i 关系能用 $\Psi_L\sim i$ 平面上的曲线确定，则称此二端元件为电感元件。

线性时不变电感元件(简称线性电感)。若 $\Psi_L\sim i$ 平面上的曲线是通过原点的一条直线，且不随时间变化。设电感上磁通 Φ_L 的参考方向与电流 i 的参考方向之间满足右螺旋定则，则任何时刻线性电感的自感磁链 Ψ_L 与其中电流 i 的关系为

$$\Psi_L=Li$$

式中 L 称为线性电感的自感或电感。其电路模型及韦安特性如图 3-2 所示。

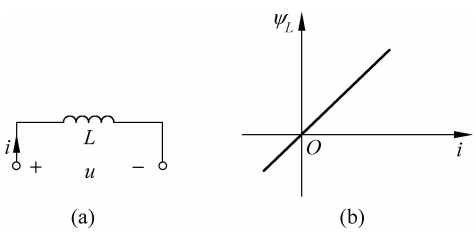


图 3-2

电感的单位为亨利(H)，简称亨。常用单位还有 mH(10^{-3} H)和 μH(10^{-6} H)等。

(2) 电感元件的伏安关系

当电感电流发生变化时，自感磁链也相应地发生变化，于是该电感上将出现感应电压 u。根据电磁感应定律，在电感电流与自感磁链的参考方向符合右螺旋定则、电压和电流参考方向关联时，有

$$u=\frac{\mathrm{d}\Psi_L}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

写成积分形式为

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

重要结论：

(a) 任何时刻，线性电感的电压与该时刻电流的变化率成正比。如果电感电流不变，即 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 为零，则此时电感中虽有电流但电感电压为零，这时的电感相当于短路。

(b) 如果在任何时刻，电感的电压是有限值，则 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 就必须是有限值，这就意味着电感电流不可能发生跃变而只能是连续变化的。

(c) 积分形式表明在某一时刻 t，电感电流的数值并不取决于该时刻的电压值，而是取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电压值，即与电压全部过去历史有关。所以，电感具有“记忆”电压的作用，也是一种“记忆元件”。

如果只对某一任意选定的初始时刻 t_0 以后的电感电流情况感兴趣，便可将积分形式写为

$$\begin{aligned}i(t)&=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

上式表明如果知道了由初始时刻 t 开始作用的电压 $u(t)$ 以及电感的初始电流 $i(t_0)$，就能确定 $t\geqslant t_0$ 时的电感电流 $i(t)$。

(3) 电感元件的功率与储能

在电压和电流关联参考方向下，线性电感吸收的瞬时功率

$$p_L=ui=Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

电感吸收的能量以磁场能量形式储存在磁场中。在任何时刻 t 电感所储存的磁场能量 w_L 等于该电感所吸收的能量，即

$$w_L=\frac{1}{2}Li^2(t)$$

上式表明，电感在任何时刻的储能只与该时刻的电感电流值有关。当电感电压是有限值时，电感电流不能跃变，实质上也就是电感的储能不能跃变的反映，如果电感储能跃变，则功率将无限大，当电感电压是有限值时这种情况是不可能的。

3. 电感、电容的串联和并联

电感及电容的串并联，利用等效概念最终可以证明等效为一个电感或电容。

(1) 电感的串联(如图 3-3 所示)

图　3-3

其中，$L=L_1+L_2+\cdots+L_n$。

（2）电感的并联（如图 3-4 所示）

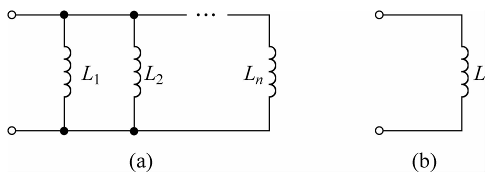


图 3-4

其中，$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}$。

（3）电容的串联（如图 3-5 所示）

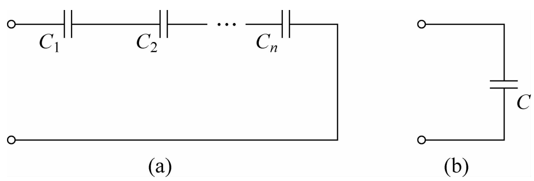


图 3-5

其中，$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$。

（4）电容的并联（如图 3-6 所示）

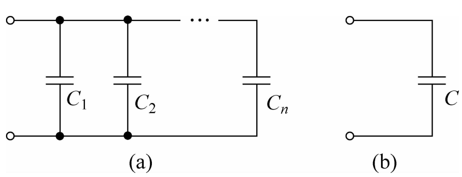


图 3-6

其中，$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$。

3.1.2 动态电路方程的建立及其解

1. 动态方程的建立

建立电路方程的基本依据是基尔霍夫定律和元件的伏安关系。由于动态元件的伏安关系是微积分关系，因此根据两类约束所建立的动态电路方程是以电流、电压为变量的微分一积分方程，一般可归为微分方程。

（1）几个名词

一阶电路和 n 阶电路。如果电路中只有一个独立的动态元件，则描述该电路的是一阶微分方程，相应的电路称为一阶电路。如果电路中有 n 个独立动态元件，那么描述该电路的将是 n 阶微分方程，则相应的电路称为 n 阶电路。

换路。通常把电路中开关的接通、断开或者元件参数的突然变化等统称为换路（以下讨

论以 $t=0$ 时的换路为主)。

状态变量。在动态电路的许多电压变量和电流变量中,电容电压和电感电流具有特别重要的地位,它们确定了电路储能的状况。常称电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 为状态变量。通常选择状态变量建立电路方程。

(2) 建立动态方程的一般步骤

(a) 根据电路建立 KCL 和 KVL 方程,写出各元件的伏安关系;

(b) 在以上方程中消去中间变量,得到所需变量的微分方程。

(3) 典型动态电路的方程(换路后)

(a) 一阶 RC 电路方程(如图 3-7 所示)

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_S$$

或

$$\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{1}{RC}u_S$$

(b) 一阶 RL 电路方程(如图 3-8 所示)

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=u_S$$

或

$$\frac{di_L}{dt}+\frac{R}{L}i_L=\frac{1}{L}u_S$$

(c) 二阶电路方程(RLC 串联电路,如图 3-9 所示)

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=\frac{1}{LC}u_S$$

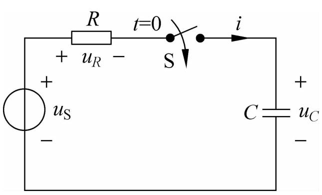


图 3-7

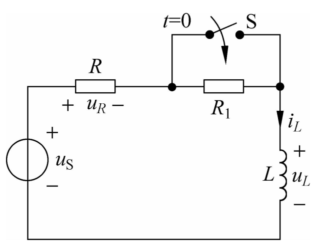


图 3-8

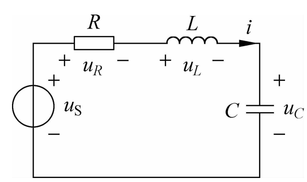


图 3-9

2. 动态电路方程的求解

典型一阶电路的方程,其一般形式可归为

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=bf(t)$$

$f(t)$表示激励源或激励源的运算函数(如微分等),$y(t)$表示响应。求解微分方程时,需已知或确定该方程成立之时的初始值。现设 $t=0$ 时换路,并已知响应的初始值为 $y(0_+)$。

线性常系数微分方程的解由两部分组成,即

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

其中,$y_h(t)$是齐次方程 $\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=0$ 的通解(齐次解),解的形式为 $y_h(t)=Ae^{pt}$。

p 由特征方程 $p+\frac{1}{\tau}=0$ 确定，即 $p=-\frac{1}{\tau}$。故通解为 $y_h(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$。

其中 $y_p(t)$一般具有与激励形式相同的函数形式。则完全响应为

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=Ae^{pt}+y_p(t)$$

其中 A 由初始值确定

$$y(0_+)=A+y_p(0_+)$$

$$A=y(0_+)-y_p(0_+)$$

故得一阶电路的方程的解为

$$y(t)=y_p(t)+[y(0_+)-y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3-1}$$

3.1.3 电路的初始值

描述动态电路的方程是常系数微分方程，在求解常系数微分方程时，需要根据初始值 $y(0_+)$确定待定系数。

初始值的计算分独立初始值与非独立初始值。

独立初始值。状态变量的初始值，也称初始状态，它们由电路的初始储能决定。

非独立初始值。除状态变量以外其余变量的初始值，它们由电路激励和独立初始值来确定。

1. 换路定律

如果在换路期间，电容电流 $i_C(t)$和电感电压 $u_L(t)$为有限值，则电容电压和电感电流不发生跃变，称为换路定律。设 $t=0$ 时换路，则有

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

2. 独立初始值的计算

由换路定律可见，独立初始值即 $u_C(0_+)$和 $i_L(0_+)$一般可由 $t=0_-$ 时的 $u_C(0_-)$和 $i_L(0_-)$来确定。

求初始值的步骤如下。

(1) 画出 $t=0_-$ 时电路。对于直流电路，若原电路已处于稳态，电容可视为开路，电感可视为短路，然后求出 $u_C(0_-)$和 $i_L(0_-)$。

(2) 用换路定律求出独立初始条件，$u_C(0_+)=u_C(0_-)$、$i_L(0_+)=i_L(0_-)$。

3. 非独立初始值的计算

求非独立初始值，关键是画出 $t=0_+$ 时的等效电路。其基本步骤可归纳如下。

(1) 由 $t=0_-$ 时电路求出 $u_C(0_-)$和 $i_L(0_-)$。

(2) 由换路定律做出 $t=0_+$ 时的等效电路，此时电容可用大小和方向同 $u_C(0_+)$的电压源替代，电感可用大小和方向同 $i_L(0_+)$的电流源替代。

(3) 运用电阻电路分析方法计算初始值。

注意点：上述换路定律仅在电容电流和电感电压为有限值的情况下才成立。在某些理想情况下，电容电流和电感电压可以为无限大，这时电容电压和电感电流将发生跃变，换路

定律不再适用。此时，可根据电荷守恒和磁链守恒原理确定独立初始值。

3.1.4 动态电路的响应

1. 零输入响应

零输入响应即换路后仅由电路初始储能作用产生的响应。

显然，当外加激励为零时，由式(3-1)可知，一阶电路方程的特解 $y_p(t)=0$，$y_p(0_+)=0$，于是得到零输入响应的一般形式为

$$y(t) = y(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中，$\tau=RC$(RC 电路)或 $\tau=\dfrac{L}{R}$(RL 电路)。

关键：确定初始值 $y(0_+)$及方程中的 τ 值。

重要结论

(1) 一阶电路中任意变量的响应具有相同的时间常数。其公式中的 R 值为电容或电感以外电路的戴维南等效电阻。

(2) 零输入响应(任意响应)均正比于独立初始值，即反映动态元件初始储能的电容电压和电感电流，称此为零输入线性。

2. 零状态响应

零状态响应即初始储能为零，换路后仅由外加激励作用产生的响应。

当外加激励为直流电源时，由式(3-1)可知，$y_p(t)=y_p(0_+)=K$(常数)，于是得到零状态响应的一般形式为

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = K + [y(0_+) - K]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

显然，$y(\infty)=K$，即电路达到新的稳定状态时对应的稳态值。

当初始储能为零时，即 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$，$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$，但非独立初始值 $y(0_+)$不一定为零(它取决于外加激励)，故可先考虑计算状态变量的零状态响应(通过状态变量再求其他响应)，并得如下通式。

$$u_C(t) = K - K\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_L(t) = K - K\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$

关键：确定初始值 $y(\infty)$及方程中的 τ 值，由状态变量可得其他响应。

重要结论

零状态响应(任意响应)均正比于外加激励值，称此为零状态线性。

3. 全响应

全响应即换路后既有初始储能作用，又有外加激励作用下电路的响应。

在激励为直流电源时，全响应即为微分方程全解，即有

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0)_+]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \underbrace{K}_{\substack{\text{强迫响应}\\\text{(稳态响应)}}} + \underbrace{[y(0_+) - K]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{\text{固有响应}\\\text{(暂态响应)}}} \end{aligned}$$

全响应的几种分解方式

如果除独立电源外，视动态元件的初始储能为电路的另一种激励，那么根据线性电路的叠加性质，电路响应就是两种激励各自作用所产生的响应的叠加。也就是说，根据响应引起原因的不同，可将全响应分解为零输入响应(由初始储能产生)和零状态响应(由独立电源产生)两种分量，全响应＝零输入响应＋零状态响应，即

$$y(t)=\underbrace{y_x(t)}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{y_f(t)}_{\text{零状态响应}}$$

基于以上不同观点，电路全响应的几种分解方式为

全响应＝强迫响应＋固有响应
＝稳态响应＋暂态响应
＝零输入响应＋零状态响应

3.1.5 直流一阶电路的三要素法

1. 直流一阶电路的三要素法概述

设 $y(t)$为直流一阶有耗电路中的任意变量(电流或电压)，$t=0$ 时换路，则 $t>0$ 时 $y(t)$的表达式为

$$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}},\quad t>0$$

其中，$y(0_+)$为换路后 $y(t)$相应的初始值。

$y(\infty)$为换路后电路达稳态时 $y(t)$相应的稳态值。

τ 为换路后电路的时间常数。对 RC 电路，$\tau=RC$；对 RL 电路，$\tau=\frac{L}{R}$。其中的 R 值为电容或电感以外电路的戴维南等效电阻。

2. 三要素法分析直流一阶电路

依据三要素法分析电路的基本步骤如下。

(1) 确定电压、电流初始值 $y(0_+)$；

关键：利用 L、C 元件的换路定律，做出 $t=0_+$ 时的等效电路。

(2) 确定换路后电路达到稳态时的 $y(\infty)$；

关键：电路达稳态时，L 相当于短路，C 相当于开路。

(3) 确定时间常数 τ 值；

关键：求 R 值。而 R 的含义是动态元件两端以外令其独立源置零时的等效电阻，具体方法即与戴维南定理和诺顿定理中求内部电阻的方法一样。

(4) 代公式，$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$，$t>0$。

3. 注意点

(1) 三要素法只适用于一阶电路，但可以解决一些特殊的二阶电路问题。

(2) 若电路换路时刻为 $t=t_0$，则三要素法公式为：

$$y(t)=y(\infty)+[y(t_{0+})-y(\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}},\quad t>t_0$$

3.1.6　一阶电路的阶跃响应

1. 阶跃函数

阶跃函数定义

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

它在$(0_-,0_+)$时域内发生单位阶跃,称单位阶跃函数。其波形如图 3-10 所示。

2. 阶跃函数的作用

(1) 阶跃函数可以用来描述动态电路中接通或断开直流电压源或电流源的开关动作。

(2) 阶跃函数可用来表示分段常量信号。对如图 3-11 所示的幅度为 A 的矩形脉冲波,其表达式可写为

$$f(t)=A[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)]$$

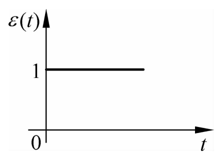


图　3-10

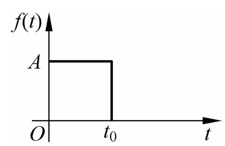


图　3-11

(3) 阶跃函数可用来表示任意函数 $f(t)$作用的区间。

$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ f(t) & t>t_0\end{cases}$$

3. 阶跃响应

(1) 阶跃响应定义

电路在单位阶跃函数激励下产生的零状态响应称为单位阶跃响应,简称阶跃响应。用 $g(t)$表示。

阶跃函数 $\varepsilon(t)$作用于电路相当于单位直流源(1V 或 1A)在 $t=0$ 时接入电路,因此对于一阶电路,电路的阶跃响应可用三要素法求解。

(2) 分段常量信号作用于动态电路的响应

在线性时不变动态电路中,零状态响应与激励之间的关系满足线性和时不变性质。即激励与响应之间有以下基本对应关系。

激励 $\varepsilon(t)$　→　响应 $g(t)$

激励 $A\varepsilon(t)$　→　响应 $Ag(t)$

激励 $\varepsilon(t-t_0)$　→　响应 $g(t-t_0)$

如果分段常量信号作用于动态电路,则可把该信号看成若干个阶跃激励共同作用于电路,则其零状态响应等于各个激励单独作用时产生的零状态响应的叠加。

3.1.7 正弦激励下一阶电路响应

当一阶电路外加电源为正弦量时，其响应也为稳态分量和暂态分量之和。稳态分量是同频率的正弦量，以 $y_p(t)=Y_{pm}\cos(\omega t+\theta)$ 表示，可直接代入方程比较系数求得(第 4 章介绍的相量法更容易求得)。若响应的初始值为 $y(0_+)$，稳态分量初始值为 $y_p(0_+)$，则可得一阶电路在正弦激励下全响应的形式为

$$\begin{aligned}y(t)&=y_p(t)+[y(0_+)-y_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\\&=Y_{pm}\cos(\omega t+\theta)+[y(0_+)-Y_{pm}\cos\theta]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\quad t>0\end{aligned}$$

3.2 知识结构

- 动态电路的时域分析
  - 基本概念
    - 动态元件
      - 电容元件
      - 电感元件
    - 几个名词
      - 一阶和 n 阶电路
      - 换路
      - 状态
      - 状态变量
      - 初始值
    - 换路定律
      - $u_C(0_+)=u_C(0_-)$
      - $i_L(0_+)=i_L(0_-)$
    - 几种响应
      - 零输入响应
      - 零状态响应
      - 全响应
      - 暂态响应与稳态响应
      - 强迫响应与固有响应
      - 阶跃响应
  - 分析方法
    - 经典法 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$
      - 建立电路微分方程
      - 初始值计算
      - 齐次方程的通解为一阶 $y_h(t)=A\mathrm{e}^{pt}$
      - 非齐次方程的特解为直流激励时 $y_p(t)=K$
      - 初始值确定系数 A
    - 叠加法 $y(t)=y_x(t)+y_f(t)$
      - 零输入响应 $y_x(t)=y_x(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
      - 状态变量零状态响应 $y_f(t)=y_f(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$
      - 一般变量零状态响应由状态变量在具体电路中确定
    - 三要素法 $y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
      - 初始值 $y(0_+)$
      - 稳态值 $y(\infty)$
      - 时间常数 τ
        - $\tau=RC$(RC 电路)
        - $\tau=\dfrac{L}{R}$(RL 电路)

3.3 教学要求

(1) 理解电容、电感元件的定义,掌握线性电容元件和电感元件的端口伏安关系及储能性质。

(2) 理解电容元件和电感元件的换路定律,掌握电压、电流初始值的计算方法。

(3) 掌握一阶动态电路方程的建立方法,了解其经典解法。

(4) 理解零输入响应的概念。掌握一般 RC 电路和 RL 电路的零输入响应求解方法。理解固有频率和时间常数等概念。

(5) 理解电路的状态、零状态响应的概念。掌握一般 RC 电路和 RL 电路的零状态响应求解方法。

(6) 理解全响应、暂态响应、稳态响应的概念。掌握全响应的求解方法。理解全响应的几种分解方式。

(7) 掌握三要素法。

(8) 理解阶跃函数的定义、阶跃响应的概念。了解一阶电路阶跃响应的计算方法。

(9) 了解换路后正弦函数激励下一阶电路的分析过程。

3.4 解题指导

(1) 简单电路问题可直接利用两类约束求解。应熟练掌握两个动态元件的端口伏安关系。

(2) 求直流电源作用下的电路稳态值时,关键是把电容元件看作开路,电感元件看作短路,然后利用直流电阻电路的分析方法进行求解。

(3) 求电路变量的初始值时,关键是利用换路定律做出换路后初始时刻的等效电路,电容用电压源替代,电感用电流源替代。然后利用直流电阻电路的分析方法进行求解。

(4) 求解电路的时间常数时,关键是求出动态元件以外二端网络的戴维南等效电阻。其方法可参见戴维南定理中求等效电阻的几种方法。然后代入时间常数计算式即 $\tau=RC$(RC 电路)或 $\tau=\dfrac{L}{R}$(RL 电路)。

(5) 求电路的任意响应,可先求状态变量,通过状态变量及其他电路条件再求所求响应。这种求解过程,有时会很方便。

(6) 求零输入响应时,可运用零输入响应通式或三要素法求解。

(7) 求零状态响应时,可运用状态变量的零状态响应通式,先求取状态变量再求出所求响应。亦可直接运用三要素法。

(8) 求解电路的全响应方法共有三种。一是经典法(直接列解微分方程);二是叠加法;三是“三要素法”。重点掌握三要素法。

(9) 求分段常量信号作用下的一阶电路响应,可运用三要素法或阶跃响应概念进行。

(10) 对具体电路问题作具体分析、比较,选用合适的方法。

3.5 典型题解

1. 图3-12电路原已处于稳态，S在$t=0$时闭合，求$t>0$时的$i_C(t)$和$i_1(t)$。

【分析】 根据三要素公式和两类约束求解。

【解】 先求解电压$u_C(t)$。

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0\text{V}$$

$$u_C(\infty)=6\times\frac{3}{3+6}\times 3=6\text{V}$$

$$\tau=0.5\times 10^{-6}\times[3\ /\!/\ (3+3)]=10^{-6}\text{s}=1\mu\text{s}$$

故由三要素法，换路后电容电压

$$u_C(t)=(6-6\text{e}^{-10^6 t})\text{V},\quad t\geqslant 0$$

电容电流

$$i_C(t)=0.5\times 10^6\times\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}=3\text{e}^{-10^6 t}\text{A},\quad t>0$$

$$i_1(t)=\frac{u_C}{3}=2-2\text{e}^{-10^6 t}\text{A},\quad t>0$$

2. 图3-13电路，开关S闭合前已处于稳态。在$t=0$时，S闭合，试求$t\geqslant 0$时的$u_L(t)$。

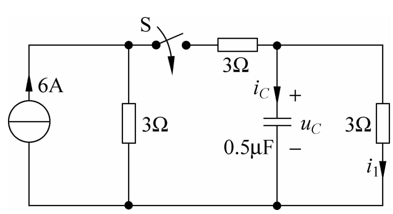


图 3-12

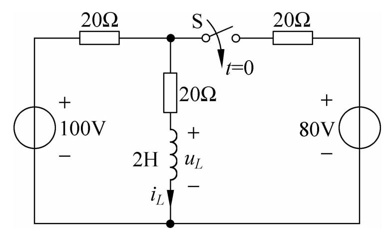


图 3-13

【分析】 根据三要素法求解。

【解】 先求状态变量$i_L(t)$。电路原已处于稳态，故

$$i_L(0_+)=\frac{100}{20+20}=2.5\text{A}$$

$$i_L(\infty)=\left(\frac{100}{20}+\frac{80}{20}\right)\times\frac{20\ /\!/\ 20}{20\ /\!/\ 20+20}=3\text{A}$$

$$\tau=\frac{2}{20\ /\!/\ 20+20}=\frac{1}{15}\text{s}$$

从而有

$$i_L(t)=[3+(2.5-3)\text{e}^{-15t}]\text{A}=(3-0.5\text{e}^{-15t})\text{A},\quad t\geqslant 0$$

$$u_L(t)=2\frac{\text{d}i_L}{\text{d}t}=15\text{e}^{-15t}\text{A},\quad t>0$$

3. 电路如图3-14所示，电容的初始电压$u_C(0_+)$一定，激励源均在$t=0$时接入。已知当$u_S=2\text{V}$，$i_S=0$时，全响应$u_C=(1+\text{e}^{-2t})\text{V}$，$t\geqslant 0$。当$u_S=0$，$i_S=2\text{A}$

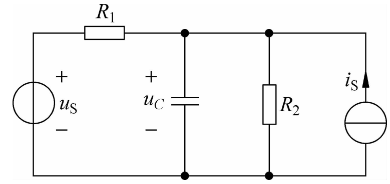


图 3-14

时，全响应 $u_C=(4-2e^{-2t})\text{V}, t\geqslant 0$。

（1）求 R_1、R_2 和 C 的值。

（2）求当 $u_S=2\text{V}, i_S=2\text{A}$ 时，电路的全响应。

【分析】 由题目的已知条件和三要素公式，求出三要素的表达式，代入相应的数值即可求出对应的参数。全响应可分解为零输入响应加上零状态响应，先由已知条件求解出零输入响应，再根据叠加定理，求解全响应。

【解】（1）① 当 $u_S=2\text{V}, i_S=0$ 时

$$u_C(t)=(1+e^{-2t})\text{V}$$

$$u_C(\infty)=\frac{R_1}{R_1+R_2}u_S=1\text{V}$$

则有 $R_1=R_2$。

② 当 $u_S=0, i_S=2\text{A}$ 时

$$u_C(t)=(4-2e^{-2t})\text{V}$$

$$u_C(\infty)=4\text{V}$$

即有

$$(R_1 /\!/ R_2)i_S=4$$

$$R_1 /\!/ R_2=2\Omega$$

显然有

$$R_1=R_2=4\Omega$$

又

$$\tau=\frac{1}{2}=(R_1 /\!/ R_2)C=2C$$

$$C=\frac{1}{4}\text{F}$$

（2）由已知条件 $u_C(0_+)=1+1=2\text{V}$ 可知

零输入响应

$$u_{Cx}(t)=2e^{-2t}\text{V}, \quad t\geqslant 0$$

则根据叠加定理，当 $u_S=2\text{V}, i_S=2\text{A}$ 时，电路的全响应为

$$u_C(t)=(1+e^{-2t})+(4-2e^{-2t})-u_{Cx}(t)=(5-3e^{-2t})\text{V}, \quad t\geqslant 0$$

4. 如图 3-15 所示电路，在 $t<0$ 时开关 S 位于“1”，电路已处于稳态，$t=0$ 时开关闭合到“2”。

（1）若 $C=0.1\text{F}$，求 $u_C=\pm 3\text{V}$ 时的时间 t；

（2）为使 $t=1\text{s}$ 时的 u_C 为零，求所需电容 C 的值。

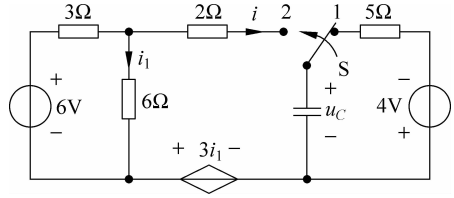


图 3-15

【分析】 利用三要素法求解出 u_C 的表达式，代入已知条件求解。

【解】 $u_C(0_-)=-4\text{V}=u_C(0_+)$

$t>0$ 时，为求电容 C 以左等效电路，将该部分电路用图 3-16 表示。列出端口伏安关系。

$$u=-2i+6i_1+3i_1=-2i+9i_1$$
$$3(i+i_1)+6i_1=6$$

消去 i_1 得

$$u=6-5i$$

于是原电路图可化简为如图 3-17 所示。该图中有

$$u_C(\infty)=6\text{V}$$
$$\tau=RC=5C$$
$$u_C(t)=(6-10\mathrm{e}^{-\frac{t}{5C}})\text{V}\quad t\geqslant 0$$

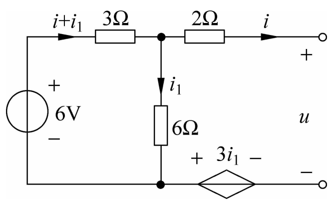


图 3-16

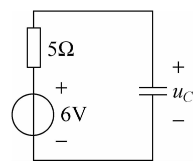


图 3-17

(1) 若 $C=0.1\text{F}$，则 $u_C(t)=(6-10\mathrm{e}^{-2t})\text{V}$

当 $u_C=-3\text{V}$ 时，则 $\mathrm{e}^{-2t}=0.9$，$t=0.0527\text{s}$；

当 $u_C=3\text{V}$ 时，则 $\mathrm{e}^{-2t}=0.3$，$t=0.602\text{s}$。

(2) 若 $t=1\text{s}$ 时，$u_C=0$，即 $6-10\mathrm{e}^{-\frac{1}{5C}}=0$，解得 $C=0.392\text{F}$。

5. 在图 3-18 电路中，已知当 $u_S(t)=1\text{V}$，$i_S(t)=0$ 时，$u_C(t)=\left(2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\right)\text{V}$，$t\geqslant 0$；若 $i_S(t)=1\text{V}$，$u_S(t)=0$ 时，$u_C(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+2\text{V}$，$t\geqslant 0$。电源在 $t=0$ 时作用于电路。

(1) 求 R_1、R_2 和 C；

(2) 当 $u_S(t)=1\text{V}$，$i_S(t)=1\text{A}$ 时，求电路的响应 $u_C(t)$，其暂态分量等于多少？为什么？

【分析】 (1)写出三要素的表达式，代入已知条件，即可求出对应的参数。(2)由三要素法计算 $u_C(t)$。

【解】 (1) $0.5=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\times 1$ 且 $2=(R_1/\!/R_2)\times 1\Rightarrow R_1=R_2=4\Omega$，

$0.5=(R_1/\!/R_2)C\Rightarrow C=0.25\text{F}$

(2) 因为 $u_C(\infty)=u_C(0_+)=2.5\text{V}$ 所以 $u_C(t)\equiv 2.5\text{V}$，$t\geqslant 0$

电路一换路即达到稳态值，故没有暂态分量。

6. 已知 $t=0$ 换路后的电路(如图 3-19 所示)响应为 $u_C(t)=(2+3\mathrm{e}^{-t})\text{V}$，求换路后的 $i(t)$，并指出其零输入响应和零状态响应分量。

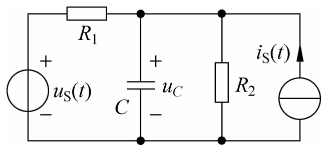


图 3-18

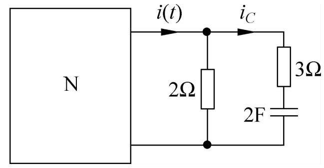


图 3-19

【分析】 $i(t)$可以直接根据两类约束求解,其零输入响应可借助$u_C(t)$的零输入响应来求得。

【解】 $i_C(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=-6\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}$

$$i(t)=[3i_C(t)+u_C(t)]/2+i_C(t)=(1-13.5\mathrm{e}^{-t})\mathrm{A},\quad t>0$$

其零输入响应,因$u_C(0_+)=5\mathrm{V}$,则有

$$u_C'(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-t}=5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}$$

$$i_C'(t)=-10\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A},\quad t>0$$

$$i'(t)=-22.5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A},\quad t>0$$

其零状态响应

$$i''(t)=i(t)-i'(t)=(1+9\mathrm{e}^{-t})\mathrm{A},\quad t>0$$

7. 换路前图 3-20 电路已达稳态,试求$i(t)$,$t\geqslant0$。

【分析】 这是一个特殊的二阶电路,求解电感电流和电容电流时都可以看成一阶电路,如图 3-21 所示。先根据三要素公式求出$i_L(t)$和$i_C(t)$,再由 KVL 求出$i(t)$。

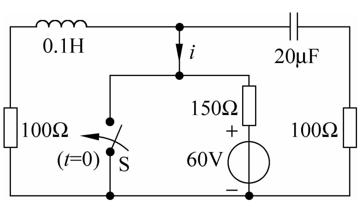


图 3-20

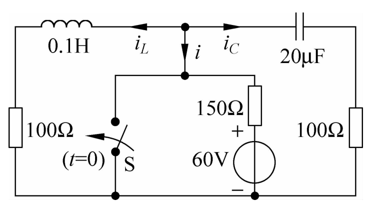


图 3-21

【解】

$$i_L(0_+)=\frac{60}{250}=0.24(\mathrm{A}),\quad u_C(0_+)=0.24\times100=24\mathrm{V}$$

$$i_C(0_+)=-\frac{24}{100}=-0.24(\mathrm{A}),\quad \tau_{\mathrm{RC}}=2\mathrm{ms},$$

$$i_C(t)=-0.24\mathrm{e}^{-500t}\mathrm{A},\quad \tau_{\mathrm{RL}}=1\mathrm{ms},\quad i_L(t)=0.24\mathrm{e}^{-1000t}\mathrm{A}$$

所以

$$i(t)=-i_C(t)-i_L(t)=0.24(\mathrm{e}^{-500t}-\mathrm{e}^{-1000t})\mathrm{A},\quad t\geqslant0$$

8. 如图 3-22 所示单口电路 N,欲使其开路电压$u(t)$的零状态响应为$(10-5\mathrm{e}^{-10t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$,现有下列规格的元件,电阻有 1Ω,5Ω,10Ω;电容有 1F,0.1F,0.01F;电压源有$\varepsilon(t)\mathrm{V}$,$5\varepsilon(t)\mathrm{V}$,$10\varepsilon(t)\mathrm{V}$。试选用上述元件构造该单口电路,$\varepsilon(t)$表示单位阶跃函数(结构尽量简单)。

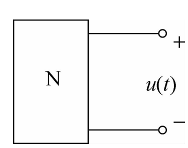
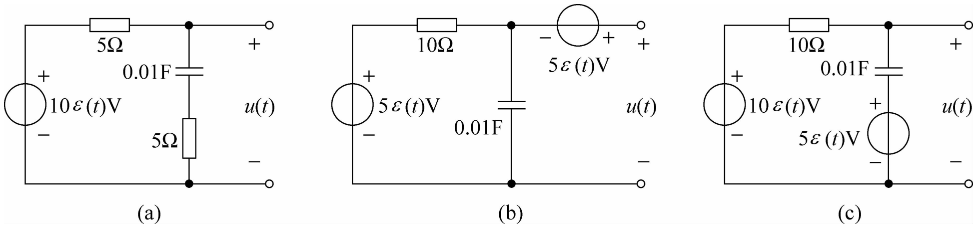


图 3-22

【分析】 结合三要素公式和已知条件设计。

【解】 几种方案如图 3-23 所示。



(a) (b) (c)

图 3-23

9. 图 3-24 所示电路中，N 为含恒定激励的二端线性电阻网络，$C=25\mu\text{F}$，电容 C 上无初始电压。已知 $R_X=800\Omega$ 时，闭合开关 S 后 $u_C(t)=8(1-\mathrm{e}^{-250t})\text{V}$，若 $R_X=300\Omega$，求 S 闭合后的 $u_C(t)$。

【分析】 N 为含恒定激励的二端线性电阻网络，根据等效电源定理它可以等效为电压源和电阻的串联形式，由已知条件可以求出电压源和电阻的值。然后由等效后的电路求解 $u_C(t)$。

【解】 将网络 N 用戴维南电路等效，则原电路可用图 3-25 表示。

$$\tau=\frac{R_0\times 800}{R_0+800}\times 25\times 10^{-6}=\frac{1}{250},\quad R_0=200\Omega$$

$$u_C(\infty)=\frac{800}{800+200}U_S=8\text{V}\quad\Rightarrow\quad U_S=10\text{V}$$

当 $R_X=300$ 时，

$$\tau=\frac{200\times 300}{500}\times 25\times 10^{-6}=3\text{ms};\quad u_C(\infty)=10\times\frac{300}{500}=6\text{V};\quad u_C(t)=6(1-\mathrm{e}^{-333.3t})\text{V}$$

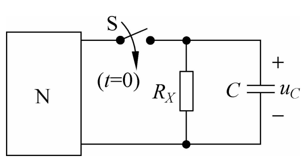


图 3-24

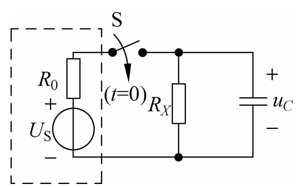


图 3-25

10. 如图 3-26 所示电路，电容初始储能为零，$t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时的电流 i_1。

【分析】 断开电容元件，求出其余二端网络的最简等效电路。先求 u_C（标出 u_C、i_C 如图 3-27 所示），再列 KVL 方程求电流 i_1。

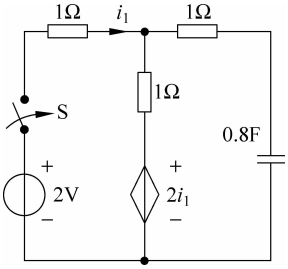


图 3-26

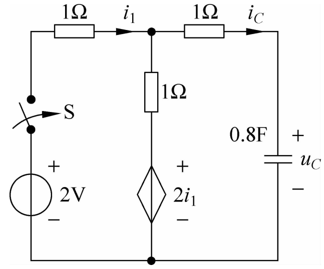


图 3-27

【解】　列出 u_C、i_C 在 $C=0.8\text{F}$ 以外端口的伏安关系($t>0$ 时)。

$$\begin{cases}u_C=-1\times i_C-1\times i_1+2\\u_C=-1\times i_C+1\times(i_1-i_C)+2i_1\end{cases}$$

消去 i_1 得

$$u_C=-\frac{5}{4}i_C+1.5$$

于是,原电路可等效为如图 3-28 所示。电路时间常数为

$$\tau=\frac{5}{4}\times0.8=1\text{s}$$

$$u_C(t)=1.5(1-\mathrm{e}^{-t})\text{V},\quad t\geqslant0$$

$$i_C=0.8\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0.8\times1.5\mathrm{e}^{-t}=1.2\mathrm{e}^{-t}\text{A},\quad t>0$$

在原图中列出独立电源支路及电容支路构成回路的 KVL 方程并求解。

$$1\times i_1+1\times i_C+u_C=2$$

$$\begin{aligned}i_1(t)&=2-i_C-u_C=2-1.2\mathrm{e}^{-t}-1.5+1.5\mathrm{e}^{-t}\\&=0.5+0.3\mathrm{e}^{-t}(\text{A}),\quad t>0\end{aligned}$$

11. 如图 3-29 所示电路原处于稳态,在 $t=0$ 时,受控源的控制系数 r 突然由 10Ω 变为 5Ω,求 $t>0$ 时的电压 $u_C(t)$。

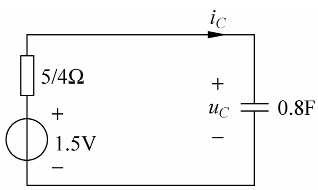


图　3-28

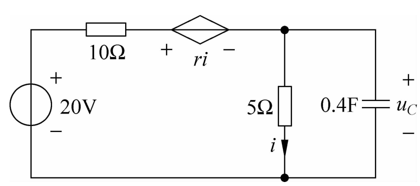


图　3-29

【分析】　根据三要素法求解。

【解】　$t=0_-$ 时,C 相当于开路,则有 KVL 方程($r=10\Omega$)为

$$15i+ri=20$$

$$i=\frac{20}{25}=0.8\text{A}$$

$$u_C(0_-)=5i=4\text{V}$$

$t=\infty$时,$r=5\Omega$,有 KVL 方程为

$$15i+ri=20$$

$$i=\frac{20}{15+5}=1\text{A}$$

$$u_C(\infty)=5i=5\text{V}$$

令电容 C 短路(为求其左侧电路等效电阻,如图 3-30 所示),则 $i=0$,端口短路电流为

$$i_{\text{SC}}=\frac{20}{10}=2\text{A}$$

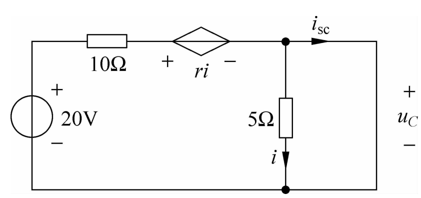


图　3-30

其戴维南等效电阻

$$R = \frac{u_C(\infty)}{i_{SC}} = 2.5\Omega$$

$$\tau = 0.4 \times 2.5 = 1\text{s}$$

代入三要素法公式得

$$u_C(t) = (5 - e^{-t})\text{V}, \quad t \geqslant 0$$

3.6 习题解答

3-1 选择合适的答案填入括号内，只需填入 A、B、C 或 D。

(1) 如题 3-1(1)图所示电路，$i_L = e^{-2t}$A，则其端口电压 u_{ab} =（ D ）。

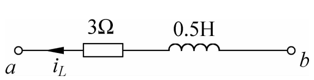
A. $3e^{-2t}$V　　B. $2e^{-2t}$V　　C. e^{-2t}V　　D. $-2e^{-2t}$V

(2) 如题 3-1(2)图所示电路原已处于稳定，$u_C(0_-) = 3$V，$t=0$ 时开关 S 合上，则 $i_C(0_+)$ =（ B ）。

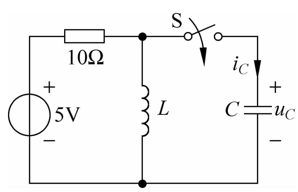
A. 0　　B. −0.3A　　C. 0.7A　　D. 0.5A

(3) 如题 3-1(3)图所示电路在 $t=0$ 时换路，其电容电压 u_C 的零状态响应为（ A ）。

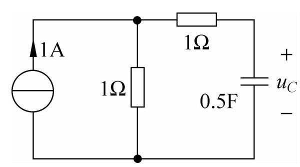
A. $(1-e^{-t})$V　　B. $(1-e^{-4t})$V　　C. e^{-t}V　　D. 1V



题 3-1(1)图



题 3-1(2)图



题 3-1(3)图

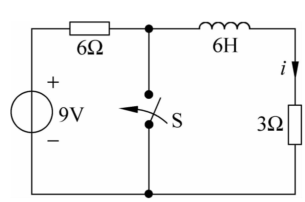
(4) 如题 3-1(4)图所示电路原已处于稳定，$t=0$ 时 S 闭合，则 $t>0$ 时电流 i =（ C ）。

A. 0　　B. e^{-2t}A　　C. $e^{-0.5t}$A　　D. $(1.5-e^{-2t})$A

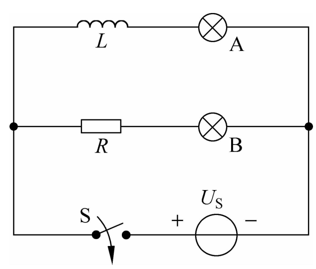
(5) 如题 3-1(5)图所示电路中，灯 A 和灯 B 规格相同，当开关 S 闭合后，则（ C ）。

A. A、B 两灯同时亮　　B. A 灯先亮，B 灯后亮

C. B 灯先亮，A 灯后亮　　D. A 灯灭，B 灯亮



题 3-1(4)图

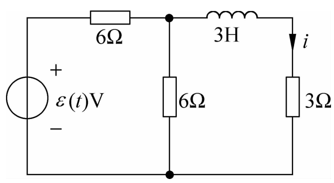


题 3-1(5)图

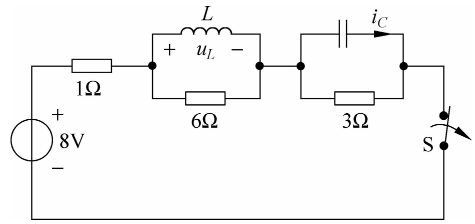
3-2 将合适的答案填入空内。

(1) 如题 3-2(1)图所示电路,电流 i 的阶跃响应为 $i(t)=$ $\underline{\frac{1}{12}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)\text{A}}$ 。

(2) 如题 3-2(2)图所示电路原已处于稳态,$t=0$ 时开关 S 打开,则 $u_L(0_+)=$ $\underline{-12\text{V}}$,$i_C(0_+)=$ $\underline{-2\text{A}}$ 。



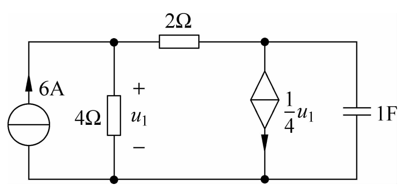
题 3-2(1)图



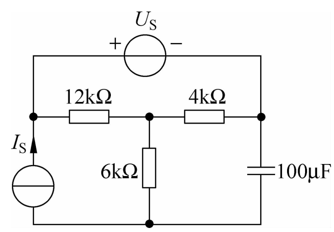
题 3-2(2)图

(3) 如题 3-2(3)图所示电路在 $t=0$ 时换路,其 $u_1(\infty)=$ $\underline{12\text{V}}$ 。

(4) 换路后的电路如题 3-2(4)图所示,其时间常数 $\tau=$ $\underline{0.9\text{s}}$ 。



题 3-2(3)图



题 3-2(4)图

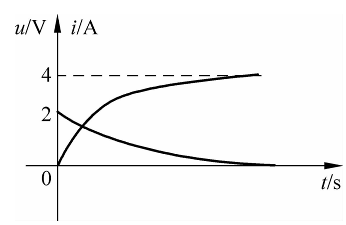
(5) 在 $t=0$ 时换路的一阶 RC 电路中,电容电压为 $u_C(t)=(5-10e^{-4t})\text{V},t>0$。则其零输入响应分量为 $\underline{-5e^{-4t}\text{V},t>0}$,零状态响应分量为 $\underline{(5-5e^{-4t})\text{V},t>0}$ 。

3-3 一电容 $C=0.5\text{F}$,其电流电压为关联参考方向。如其端电压 $u=4(1-e^{-t})\text{V},t\geqslant 0$,求 $t\geqslant 0$ 时的电流 i,粗略画出其电压和电流的波形。电容的最大储能是多少?

【解】 根据电容元件的端口伏安关系,电流 i 为

$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0.5\times 4e^{-t}=2e^{-t}\text{A},\quad t\geqslant 0$$

据此描绘电压、电流波形如题解 3-3 图所示。



题解 3-3 图

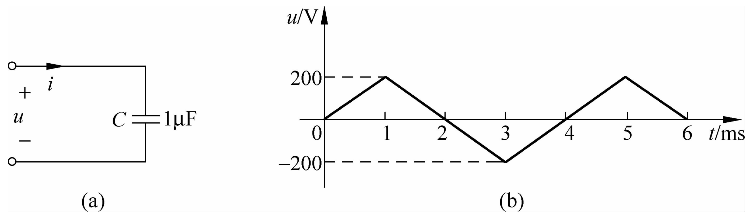
当 $t=\infty$ 时,$u(\infty)=4$ 即为电容电压最大值,其最大储能

$$W_{\max}=\frac{1}{2}Cu_{\max}^2=\frac{1}{2}\times 0.5\times 4^2=4\text{J}$$

3-4 如题 3-4 图(a)所示电路,电容电压随时间按三角波方式变化,如题 3-4 图(b)所示。试画出电容电流波形。

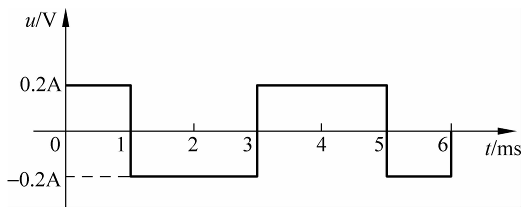
【解】

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}0.2\text{A} & 0\leqslant t\leqslant 1\text{ms},3\text{ms}\leqslant t\leqslant 5\text{ms}\\ -0.2\text{A} & 1\text{ms}\leqslant t\leqslant 3\text{ms},5\text{ms}\leqslant t\leqslant 6\text{ms}\end{cases}$$



题 3-4 图

画出电容电流波形如题解 3-4 图所示。



题解 3-4 图

3-5 一电容 $C=0.2\text{F}$，其电流如题 3-5 图所示，若已知在 $t=0$ 时，电容电压 $u(0)=0$，求其端电压 u，并画出波形。

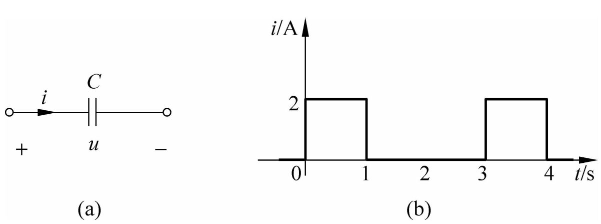
【解】 写出图中电流 i 的表达式。

$$i=\begin{cases}2\text{A} & 0\leqslant t<1\text{s 或 }3\text{s}\leqslant t<4\text{s}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

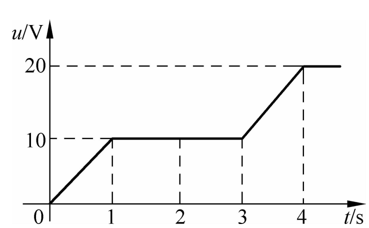
根据电容元件的伏安特性，其电压为

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i\mathrm{d}t=5\int_{-\infty}^{t}i\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & t<0\\ 10t & 0\leqslant t<1\text{s}\\ 10 & 1\text{s}\leqslant t<3\text{s}\\ 10t-20 & 3\text{s}\leqslant t<4\text{s}\\ 20 & t\geqslant 4\text{s}\end{cases}\quad(\text{V})$$

据此描绘电压波形如题解 3-5 图所示。



题 3-5 图

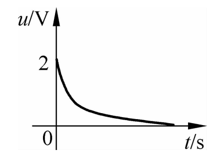


题解 3-5 图

3-6 一电感 $L=0.2\text{H}$，其电流电压为关联参考方向。如通过它的电流 $i=5(1-\mathrm{e}^{-2t})\text{A}$，$t\geqslant 0$，求 $t\geqslant 0$ 时的端电压，并粗略画出其波形。电感的最大储能是多少？

【解】 根据电感元件的伏安关系，其电压为

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.2\times 5\times 2\mathrm{e}^{-2t} = 2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{V},\quad t\geqslant 0$$



题解　3-6 图

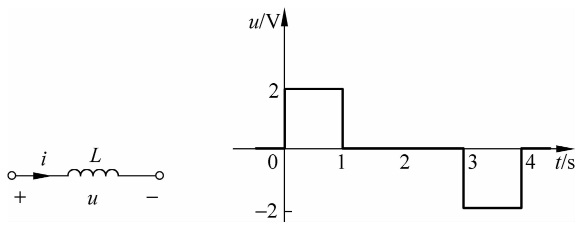
据此描绘电压波形如题解 3-6 图所示。当 $t\to\infty$时，

$$i_{\max} = i(\infty) = 5\mathrm{A}$$

电感的最大储能为

$$W_{\mathrm{Lmax}} = \frac{1}{2}Li_{\max}^2 = \frac{1}{2}\times 0.2\times 5^2 = 2.5\mathrm{J}$$

3-7　一电感 $L=4\mathrm{H}$,其端电压的波形如题 3-7 图所示,已知 $i(0)=0$,求其电流,并画出其波形。



题　3-7 图

【解】　写出图中电感电压的表达式。

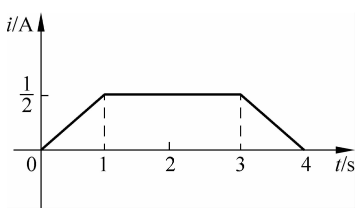
$$u = \begin{cases} 2\mathrm{V} & 0\leqslant t<1\mathrm{s} \\ -2\mathrm{V} & 3\mathrm{s}\leqslant t<4\mathrm{s} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

根据电感元件的伏安特性,其电流为

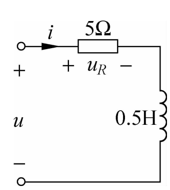
$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^t 2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}t & t\in[0,1] \\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2} & t\in[1,3] \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_3^t(-2)\,\mathrm{d}t = 2-\dfrac{t}{2} & t\in[3,4] \\ 0 & t\in[4,\infty) \end{cases}\qquad(\mathrm{A})$$

据此描绘电压波形如题解 3-7 图所示。

3-8　如题 3-8 图所示电路,已知电阻端电压 $u_R=5(1-\mathrm{e}^{-10t})\mathrm{V}$, $t\geqslant 0$,求 $t\geqslant 0$ 时的电压 u。



题解　3-7 图



题　3-8 图

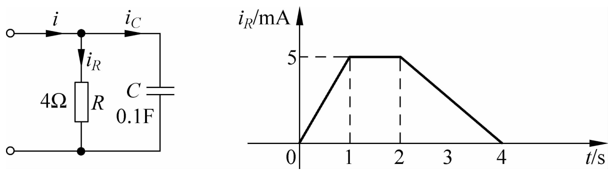
【解】 由电阻电压可求得支路电流为

$$i(t)=\frac{u_R}{5}=1-e^{-10t}\text{A},\quad t\geqslant 0$$

由 KVL 及电感元件伏安关系，得

$$u(t)=u_R+L\frac{di}{dt}=5(1-e^{-10t})+0.5\times(-1)\times(-10)e^{-10t}=5\text{V},\quad t\geqslant 0$$

3-9 如题 3-9 图所示电路，已知电阻中的电流 i_R 的波形如题 3-9 图所示，求总电流 i。



题 3-9 图

【解】 写出电阻电流的表达式。

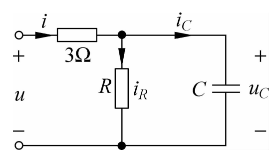
$$i_R=\begin{cases}5t & 0\leqslant t<1\text{s}\\ 5 & 1\text{s}\leqslant t<2\text{s}\\ 10-\dfrac{5}{2}t & 2\text{s}\leqslant t<4\text{s}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad(\text{mA})$$

则由 KCL 及电容元件的伏安关系得

$$i=i_R+i_C=i_R+C\frac{du_C}{dt}=i_R+CR\frac{di_R}{dt}=i_R+0.4\frac{di_R}{dt}$$

$$=\begin{cases}5t+2 & 0\leqslant t<1\text{s}\\ 5 & 1\text{s}\leqslant t<2\text{s}\\ -2.5t+9 & 2\text{s}\leqslant t<4\text{s}\\ 0 & t\geqslant 4\text{s}\end{cases}\quad(\text{mA})$$

3-10 电路如题 3-10 图所示，已知 $u=(5+2e^{-2t})$V，$t\geqslant 0$，$i=(1+2e^{-2t})$A，$t\geqslant 0$，求电阻 R 和电容 C。



题 3-10 图

【解】 设各支路电流及电容电压如题 3-10 图所示。则由 KVL 得电容电压为

$$u_C(t)=u(t)-3i=5+2e^{-2t}-3-6e^{-2t}=2-4e^{-2t}\text{V}$$

电容电流为

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=C\times(-4)\times(-2)\times e^{-2t}=8C\cdot e^{-2t}\text{A}$$

电阻电流为

$$i_R=\frac{u_C}{R}=\left(\frac{2}{R}-\frac{4}{R}e^{-2t}\right)\text{A}$$

由 KCL 得

$$i=i_R+i_C=\frac{2}{R}+\left(8C-\frac{4}{R}\right)e^{-2t}=(1+2e^{-2t})\text{A}$$

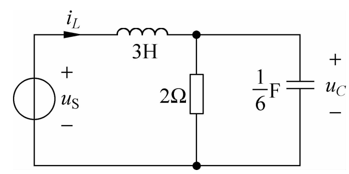
比较系数有

$$\begin{cases}\dfrac{2}{R}=1\\[2mm] 8C-\dfrac{4}{R}=2\end{cases}$$

解得

$$R=2\Omega\quad C=0.5\text{F}$$

3-11　列写题 3-11 图电路 u_C 的微分方程和 i_L 的微分方程。



题　3-11 图

【解】（1）以 u_C 为变量，列出 KCL 方程为

$$i_L=\frac{u_C}{1}+1\times\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=u_C+\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\qquad ①$$

列出 KVL 方程为

$$1\times\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+3i_L+u_C=0\qquad ②$$

将①代入②得 u_C 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+4u_C=0$$

（2）以 i_L 为变量，列出 KVL 方程为

$$u_C=-1\times\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}-3i_L\qquad ③$$

由电容元件的伏安关系得

$$i_C=1\times\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\qquad ④$$

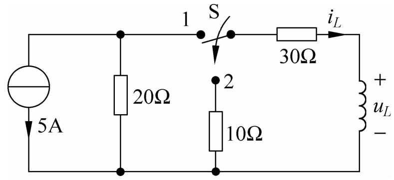
列出 KCL 方程为

$$i_L(t)-i_C-\frac{u_C}{1}=0\qquad ⑤$$

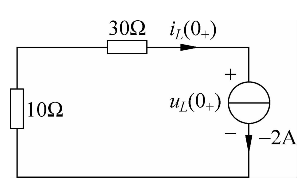
由③④⑤联立解得 i_L 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+4i_L=0$$

3-12　如题 3-12 图所示电路，在 $t<0$ 时开关 S 位于“1”，已处于稳态，当 $t=0$ 时开关 S 由“1”闭合到“2”，求初始值 $i_L(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$。



题　3-12 图



题解　3-12 图

【解】　根据题意，换路前的电感电流为

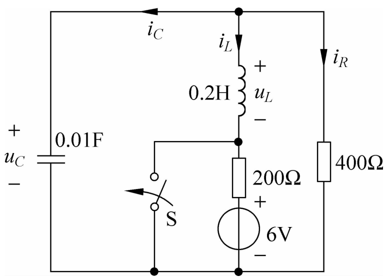
$$i_L(0_-)=-5\times\frac{20}{20+30}=-2\text{A}$$

由换路定律可知 $i_L(0_+)=-2\text{A}$，做出 $t=0_+$ 时的等效电路，如题解 3-12 图所示。

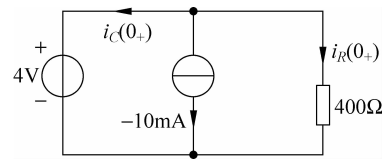
由该图可求得

$$u_L(0_+)=-(10+30)\times i_L(0_+)=80\text{V}$$

3-13 如题 3-13 图所示电路，开关 S 原是断开的，电路已处于稳态，当 $t=0$ 时开关闭合。求初始值 $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$、$i_C(0_+)$和 $i_R(0_+)$。



题 3-13 图



题解 3-13 图

【解】 换路前电路处于稳定，电容看作开路，电感看作短路，$t=0_-$ 时两个状态变量为

$$i_L(0_-)=-\frac{6}{200+400}=-\frac{1}{100}(\text{A})=-10\text{mA}$$

$$u_C(0_-)=\frac{400}{200+400}\times 6=4\text{V}$$

由换路定律可知两个状态变量的初始值为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=4\text{V}$$

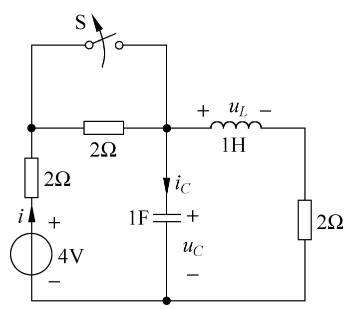
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=-10\text{mA}$$

做出 $t=0_+$ 时的等效电路，如题解 3-13 图所示。利用直流电阻电路分析方法有

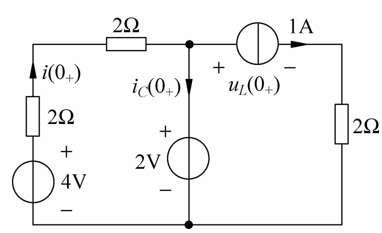
$$i_R(0_+)=\frac{u_C(0_+)}{400}=\frac{4}{400}=\frac{1}{100}(\text{A})=10\text{mA}$$

$$i_C(0_+)=-[i_L(0_+)+i_R(0_+)]=0$$

3-14 如题 3-14 图所示电路，开关 S 原是闭合的，电路已处于稳态，当 $t=0$ 时开关断开。求初始值 $u_L(0_+)$、$i(0_+)$ 和 $i_C(0_+)$。



题 3-14 图



题解 3-14 图

【解】 根据题意，$t=0_-$ 时电容看作开路，电感看作短路，两个状态变量为

$$i_L(0_-)=\frac{4}{2+2}=1\text{A}$$

$$u_C(0_-) = 2i_L(0_-) = 2\text{V}$$

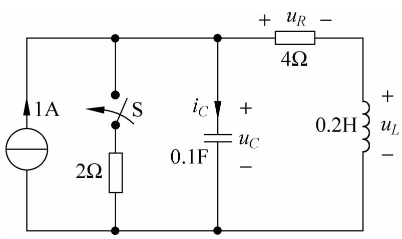
由换路定律可知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$$

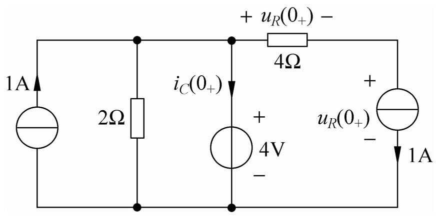
做出 $t=0_+$ 时的等效电路，如题解 3-14 图所示，由此电路可解得

$$u_L(0_+) = u_C(0_+) - 2i_L(0_+) = 2 - 2\times 1 = 0$$
$$i(0_+) = \frac{4-u_C(0_+)}{2+2} = \frac{4-2}{2+2} = 0.5\text{A}$$
$$i_C(0_+) = i(0_+) - 1 = 0.5 - 1 = -0.5\text{A}$$

3-15　如题 3-15 图所示电路，在 $t<0$ 时开关 S 断开时电路已处于稳态，当 $t=0$ 时开关闭合，求初始值 $u_R(0_+)$、$i_C(0_+)$和 $u_L(0_+)$。



题　3-15 图



题解　3-15 图

【解】　$t=0_-$ 时电容看作开路，电感看作短路，两个状态变量为

$$i_L(0_-) = 1\text{A}$$
$$u_C(0_-) = 4i_L(0_-) = 4\text{V}$$

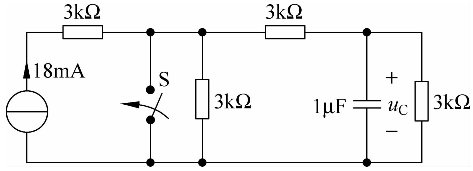
由换路定律可知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4\text{V}$$

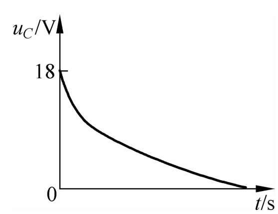
做出 $t=0_+$ 时的等效电路，如题解 3-15 图所示。由该图可求得

$$u_R(0_+) = 4\times i_L(0_+) = 4\times 1 = 4\text{V}$$
$$i_C(0_+) = 1 - \frac{u_C(0_+)}{2} - i_L(0_+) = 1 - \frac{4}{2} - 1 = -2\text{A}$$
$$u_L(0_+) = u_C(0_+) - u_R(0_+) = 4 - 4 = 0$$

3-16　如题 3-16 图所示电路，$t=0$ 时开关闭合，闭合前电路处于稳态，求 $t\geqslant 0$ 时的 $u_C(t)$，并画出其波形。



题　3-16 图



题解　3-16 图

【解】 根据电容电压初始值的计算方法，有

$$u_C(0_-) = 18 \times \frac{3}{3+6} \times 3 = 18(\mathrm{V}) = u_C(0_+)$$

电路时间常数为

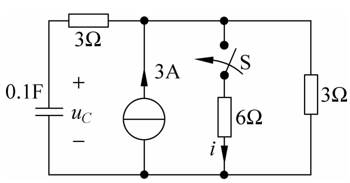
$$\tau = RC = (3 \mathbin{/\!/} 3) \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} = 1.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

根据零输入响应的通式，$t>0$ 时

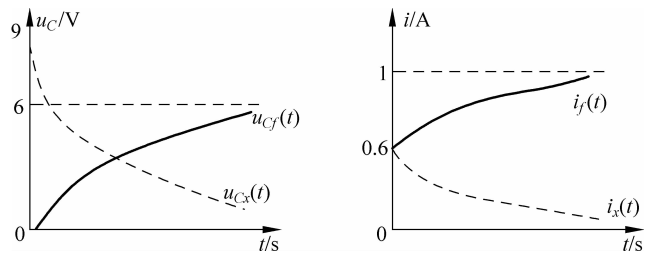
$$u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 18\mathrm{e}^{-\frac{10^3}{1.5}t} = 18\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\times 10^3 t}\,\mathrm{V}$$

据此描绘电压波形如题解 3-16 图所示。

3-17 电路如题 3-17 图所示，在 $t<0$ 时开关 S 是断开的，电路已处于稳态。当 $t=0$ 时开关闭合，求 $t\geqslant 0$ 时的电压 u_C、电流 i 的零输入响应和零状态响应，并画出其波形。



题 3-17 图



题解 3-17 图

【解】 根据电容电压初始值的计算方法，有

$$u_C(0_-) = 3 \times 3 = 9(\mathrm{V}) = u_C(0_+)$$

换路后电容以外的戴维南等效电阻为

$$R = 3 + 6 \mathbin{/\!/} 3 = 5\Omega$$

电路时间常数为

$$\tau = 0.1 \times 5 = 0.5\mathrm{s}$$

(1) 求 u_C 和 i 的零输入响应

根据零输入响应的通式，电容电压的零输入响应为

$$u_{Cx}(t) = u_C(0_+) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 9\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{V}, \quad t \geqslant 0$$

在题 3-17 图中把电流源看成开路，即可求得电流 i 的零输入响应为

$$i_x(t) = u_{Cx}(t) \times \frac{6 \mathbin{/\!/} 3}{3 + 6 \mathbin{/\!/} 3} \times \frac{1}{6} = 0.6\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{A}, \quad t > 0$$

(2) 求 u_C 和 i 的零状态响应

换路后，电容电压的稳态值为

$$u_{Cf}(\infty) = 3 \times (6 \mathbin{/\!/} 3) = 6\mathrm{V}$$

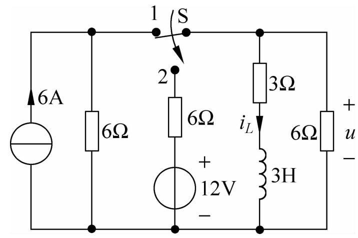
根据状态变量零状态响应的通式，有

$$u_{Cf}(t) = 6(1 - \mathrm{e}^{-2t})\mathrm{V}, \quad t \geqslant 0$$

利用电容支路的伏安关系及 6Ω 电阻的欧姆定律，得

$$i_f(t) = \frac{3 \times 0.1 \dfrac{\mathrm{d}u_{Cf}}{\mathrm{d}t} + u_{Cf}}{6} = 1 - 0.4\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{A}, \quad t > 0$$

据此描绘出电压、电流零输入响应和零状态响应波形如题解 3-17 图所示。



题　3-18 图

3-18　电路如题 3-18 图所示，在 $t=0$ 时开关 S 位于“1”，电路已处于稳态。当 $t=0$ 时开关闭合到“2”，求 i_L 和 u 的零输入响应和零状态响应，并画出其波形。

【解】　利用状态变量的零输入响应和零状态响应通式求解。先求出 i_L，再通过电感支路的伏安关系求出 u 的零输入响应和零状态响应。根据题意，有

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=6\times\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}=3\text{A}$$

$$i_L(\infty)=\frac{12}{6+\frac{6\times 3}{6+3}}\times\frac{6}{6+3}=1\text{A}$$

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{3}{\frac{6\times 6}{6+6}+3}=\frac{1}{2}\text{s}$$

于是，i_L 和 u 的零输入响应分别为

$$i_{Lx}(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=3\mathrm{e}^{-2t}\text{A},\quad t\geqslant 0$$

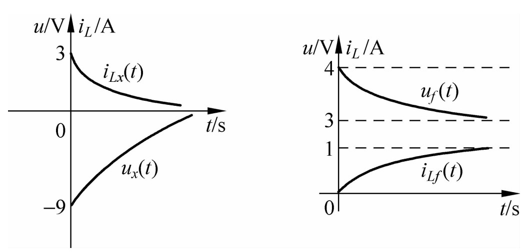
$$u_x(t)=3i_{Lx}+3\frac{\mathrm{d}i_{Lx}}{\mathrm{d}t}=3\times 3\mathrm{e}^{-2t}+3\times 3\times(-2)\mathrm{e}^{-2t}=-9\mathrm{e}^{-2t}\text{V},\quad t\geqslant 0$$

i_L 和 u 的零状态响应分别为

$$i_{Lf}(t)=i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=(1-\mathrm{e}^{-2t})\text{A},\quad t\geqslant 0$$

$$\begin{aligned}u_f(t)&=3i_{Lf}+3\frac{\mathrm{d}i_{Lf}}{\mathrm{d}t}=3(1-\mathrm{e}^{-2t})+3(-1)\times(-2)\mathrm{e}^{-2t}\\&=3(1+\mathrm{e}^{-2t})\text{V},\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

据此描绘出电压、电流零输入响应和零状态响应波形如题解 3-18 图所示。



题解　3-18 图

3-19　如题 3-19 图所示电路，电容初始储能为零，当 $t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时的电压 u_C。

【解】　根据题意，$u_C(0_-)=0$，$t\geqslant 0$ 时的电压 u_C 应为零状态响应。

先求出 $t>0$ 时电容以外的等效电路。设 a、b 端口及其电压、电流为 u、i，则列出 ab 端

以左端口伏安关系式为

$$u=-5i+3i_1+2i_1=-5i+5i_1$$

而由 KCL 得

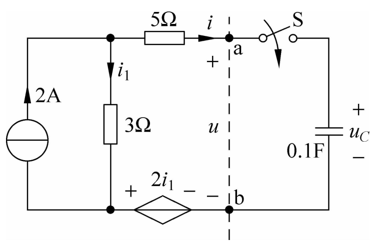
$$i_1+i=2$$

由上两式消去 i_1 得

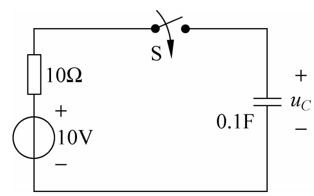
$$u=-5i+5(2-i)=10-10i$$

可见,原电路图可化为题解 3-19 的等效电路。其电容电压表达式为

$$u_C(t)=10(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{10\times0.1}})=10(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{V},\quad t\geqslant0$$

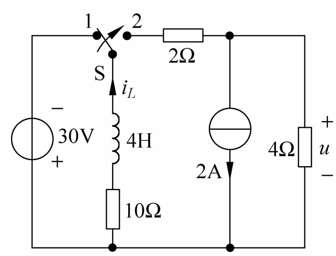


题　3-19 图



题解　3-19 图

3-20　电路如题 3-20 图所示,在 $t<0$ 时开关 S 位于“1”,电路已处于稳态。当 $t=0$ 时开关由“1”闭合到“2”,求 $t\geqslant0$ 时的 i_L 和 u。



题　3-20 图

【解】　三要素法先求 i_L,通过 i_L 再求 u。

$$i_L(0_-)=\frac{30}{10}=3(\mathrm{A})=i_L(0_+)$$

$$i_L(\infty)=2\times\frac{4}{4+12}=\frac{1}{2}\mathrm{A}$$

$$\tau=\frac{4}{2+4+10}=\frac{1}{4}\mathrm{s}$$

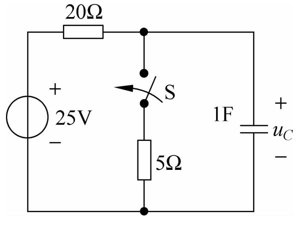
代入三要素法公式得

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_-)-i_L(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-4t}\right)\mathrm{A},\quad t\geqslant0$$

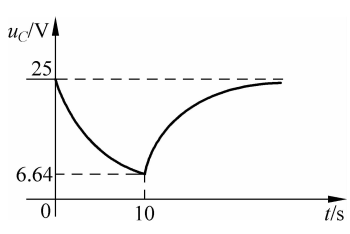
由 KCL 及欧姆定律得

$$u(t)=(i_L-2)\times4=-6+10\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{V},\quad t>0$$

3-21　电路如题 3-21 图所示,当 $t<0$ 时电路已处于稳态,当 $t=0$ 时开关 S 闭合,闭合后经过 10s 后,开关又断开,求 $t\geqslant0$ 时的 u_C,并画出其波形。



题　3-21 图



题解　3-21 图

【解】 三要素法求解。在 $0 \leqslant t \leqslant 10\text{s}$ 时

$$u_C\begin{cases}u_C(0_+)=u_C(0_-)=25\text{V}\\u_C(\infty)=25\times\dfrac{5}{20+5}=5\text{V}\\\tau=1\times(20\,/\!/\,5)=4\text{s}\end{cases}$$

代入三要素法公式,得

$$u_C(t)=(5+20\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}})\text{V},\quad 0\leqslant t\leqslant 10\text{s}$$

$t \geqslant 10\text{s}$ 时

$$u_C\begin{cases}u_C(10_+)=u_C(10_-)=5+20\mathrm{e}^{-2.5}=6.64\text{V}\\u_C(\infty)=25\text{V}\\\tau=20\times1=20\text{s}\end{cases}$$

$$u_C(t)=(25-18.36\mathrm{e}^{-\frac{t-10}{20}})\text{V},\quad t>10\text{s}$$

故有

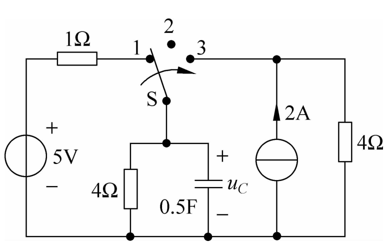
$$u_C(t)=\begin{cases}5+20\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & 0\leqslant t\leqslant 10\text{s}\\25-18.36\mathrm{e}^{-\frac{t-10}{20}} & t>10\text{s}\end{cases}\quad(\text{V})$$

据此描绘出电压波形如题解 3-21 图所示。

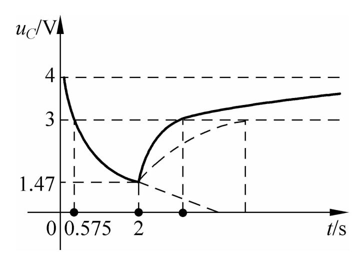
3-22 电路如题 3-22 图所示,当 $t<0$ 时开关 S 位于“1”,电路已处于稳态。当 $t=0$ 时开关由“1”闭合到“2”,经过 2s 后,开关又由“2”闭合到“3”。

(1) 求 $t \geqslant 0$ 时的电压 u_C,并画出其波形。

(2) 求电压 u_C 恰好等于 3V 的时刻 t 的值。



题　3-22 图



题解　3-22 图

【解】 三要素法求解。

(1) 当 $0 \leqslant t \leqslant 2\text{s}$ 时,有

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=5\times\frac{4}{4+1}=4\text{V}$$

$$u_C(\infty)=0$$

$$\tau_1=CR_1=0.5\times4=2\text{s}$$

故有

$$u_C(t)=4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\text{V}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\text{s}$$

当 $t>2\text{s}$ 时,有

$$u_C(2_+)=u_C(2_-)=4\times\mathrm{e}^{-\frac{2}{2}}=1.47\text{V}$$

$$u_C(\infty)=4\times 2\times\frac{4}{4+4}=4\text{V}$$

$$\tau_2=CR_2=0.5\times\frac{4\times 4}{4+4}=1\text{s}$$

故有

$$u_C(t)=(1.47-4)\mathrm{e}^{-(t-2)}+4=[4-2.53\mathrm{e}^{-(t-2)}]\text{V}$$

于是，可写出 $t\geqslant 0$ 时的 u_C 表达式为

$$u_C(t)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & 0\leqslant t<2\text{s}\\ 4-2.53\mathrm{e}^{-(t-2)} & t\geqslant 2\text{s}\end{cases}\quad(\text{V})$$

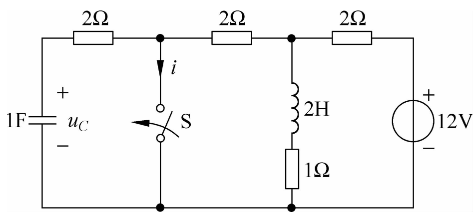
据此描绘出电压 u_C 波形如题解 3-22 图所示。

（2）$u_C=3\text{V}$ 时，应在 u_C 表达式中分时间范围求取 u_C 恰好等于 3V 的时刻 t 的值。

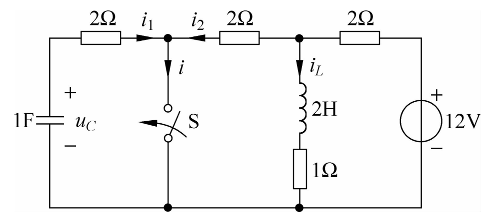
当 $0\leqslant t\leqslant 2\text{s}$ 时，$4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}=3\Rightarrow t=-2\ln\frac{3}{4}=2\ln\frac{4}{3}=0.575\text{s}$

当 $t>2s$ 时，$4-2.53\mathrm{e}^{-(t-2)}=3\Rightarrow t=-\ln\frac{1}{2.53}+2=2+\ln 2.53=2.928\text{s}$

3-23 电路如题 3-23 图所示，在 $t<0$ 时开关 S 是断开的，电路已处于稳态，当 $t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时的电流 i。



题 3-23 图



题解 3-23 图

【解】 此题有两个动态元件，但对电容、电感支路的变量来说仍为一阶电路(可自行画出两个一阶电路来)，故仍可用三要素法求出 u_C 及 i_L，通过这两个变量，再求 i_1、i_2、i 等，如题解 3-23 图所示。

$t\geqslant 0$ 时，在其中的 RC 电路中有

$$u_C(0_-)=12\times\frac{1}{2+1}=4\text{V}=u_C(0_+)$$

$$u_C(\infty)=0$$

$$\tau=1\times 2=2(\text{s})$$

代入三要素法公式得

$$u_C(t)=4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\text{V},\quad t\geqslant 0$$

$t\geqslant 0$ 时，在其中的 RL 电路中有

$$i_L(0_-)=\frac{12}{2+1}=4\text{A}=i_L(0_+)$$

$$i_L(\infty)=12\times\frac{1}{2+\frac{2}{3}}\times\frac{2}{1+2}=3\text{A}$$

$$\tau_L = \frac{2}{1+2 /\!/ 2} = 1\mathrm{s}$$

代入三要素法公式得

$$i_L(t) = (3 + \mathrm{e}^{-t})\mathrm{A}, \quad t \geqslant 0$$

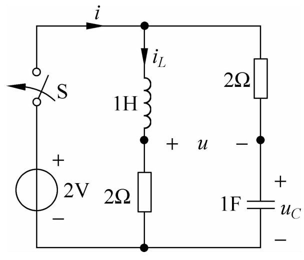
故在 $t \geqslant 0$ 时的原电路图中

$$i_1(t) = \frac{u_C}{2} = 2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{A}, \quad t \geqslant 0$$

$$i_2(t) = \frac{1 \times i_L + 2\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}}{2} = \frac{3 + \mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t}}{2} = 1.5 - 0.5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{A}, \quad t \geqslant 0$$

$$i(t) = i_1 + i_2 = (2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 1.5 - 0.5\mathrm{e}^{-t})\mathrm{A}, \quad t \geqslant 0$$

3-24 电路如题 3-24 图所示，已知 $u_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$，当 $t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t \geqslant 0$ 时的电流 i 和电压 u。



题 3-24 图

【解】 此题对换路后电感、电容支路变量均为一阶电路（可自行画出两个一阶电路来），故可用三要素法求 u_C 及 i_L，通过这两个变量再求 $i(t)$、$u(t)$。换路后 u_C 及 i_L 的三要素为

$$u_C(0_-) = 0, \quad i_L(0_-) = 0$$

$$u_C(\infty) = 2\mathrm{V}, \quad i_L(\infty) = \frac{2}{2} = 1\mathrm{A}$$

$$\tau_C = 1 \times 2 = 2(\mathrm{s}), \quad \tau_L = \frac{1}{2}\mathrm{s}$$

代入三要素法公式得

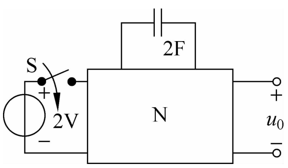
$$u_C(t) = 2(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})\mathrm{V}, \quad t \geqslant 0$$

$$i_L(t) = (1 - \mathrm{e}^{-2t})\mathrm{A}, \quad t \geqslant 0$$

由 KVL 和 KCL 可得

$$u(t) = 2i_L - u_C = 2 - 2\mathrm{e}^{-2t} - 2 + 2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = -2\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(\mathrm{V}), \quad t \geqslant 0$$

$$i(t) = i_L + 1 \times \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 1 - \mathrm{e}^{-2t} + 1 \times 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A}, \quad t \geqslant 0$$



题 3-25 图

3-25 如题 3-25 图所示电路，N 中不含储能元件，当 $t=0$ 时开关 S 闭合，输出电压的零状态响应为 $u_0(t)=(1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}})\mathrm{V}$，$t \geqslant 0$。如果将 2F 的电容换为 2H 的电感，求输出电压的零状态响应 $u_0(t)$。

【解】 三要素法求解。接电容时，零状态响应为 $u_0(t)=(1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}})\mathrm{V}$，其三要素可分别计算对应于接电感时的三要素。

$u_0(0_+)=1+1=2\mathrm{V}$ 相当于接电感时的 $u_0'(\infty)$

$u_0(\infty)=1\mathrm{V}$ 相当于接电感时的 $u_0'(0_+)$

$\tau=4=2\times R, R=2\Omega$ 则接电感时的时间常数 $\tau'=\dfrac{2}{2}=1\mathrm{s}$

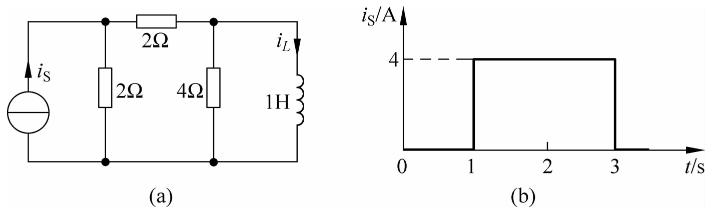
故当 2F 的电容换为 2H 的电感时，有

$$u_0'(t) = 2 + (1-2)\mathrm{e}^{-t} = 2 - \mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}, \quad t > 0$$

3-26 如题 3-26 图所示电路，如以 i_L 为输出。

(1) 求阶跃响应。

(2) 如输入信号 i_S 的波形如题 3-26 图(b)所示，求 i_L 的零状态响应。



题 3-26 图

【解】 (1) 当 $i_S=\varepsilon(t)$单位为 A 时，用三要素法求解。

$$i_L(0_+)=0$$

$$i_L(\infty)=\frac{1}{2}\text{A}$$

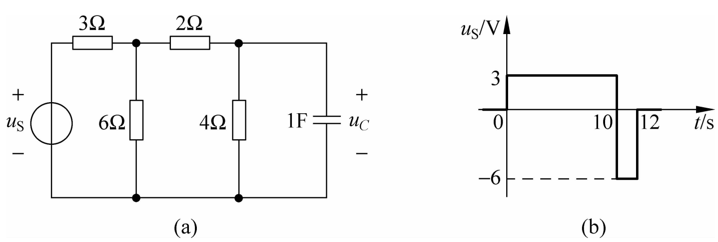
$$\tau=\frac{1}{4\,/\!/\,4}=\frac{1}{2}\text{s}$$

$$i_L(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)\quad(\text{单位为 A})$$

(2) 当 i_S 波形如题 3-26 图(b)所示时，即 $i_S(t)=4[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)]$，则有

$$\begin{aligned}i_L(t)&=\frac{4}{2}[1-e^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)-\frac{4}{2}[1-e^{-2(t-3)}]\varepsilon(t-3)\\&=2[1-e^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)-2[1-e^{-2(t-3)}]\varepsilon(t-3)\text{A}\end{aligned}$$

3-27 如题 3-27 图所示电路，若输入电压 u_S 如题 3-27 图(b)所示，求 u_C 的零状态响应。



题 3-27 图

【解】 先求 u_C 的阶跃响应 $s(t)$。

$u_S=\varepsilon(t)$，单位为 V

$$u_C(\infty)=\frac{4}{2+4}\times\frac{1}{3+\frac{6\times(2+4)}{6+(2+4)}}\times\frac{\frac{6\times(2+4)}{6+(2+4)}}{3+\frac{6\times(2+4)}{6+(2+4)}}=\frac{1}{3}\text{V}$$

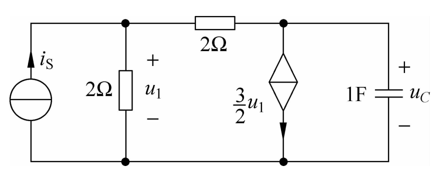
$$\tau=CR_0=\frac{4\times\left(2+\frac{6\times3}{6+3}\right)}{4+\left(2+\frac{6\times3}{6+3}\right)}\times1=2\text{s}$$

$$s(t)=\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

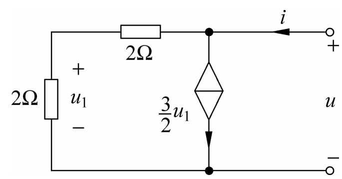
而题 3-27 图(b)中，$u_S=3\varepsilon(t)-9\varepsilon(t-10)+6\varepsilon(t-12)\mathrm{V}$，故有

$$\begin{aligned}u_C&=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)-3[1-\mathrm{e}^{-\frac{t-10}{2}}]\varepsilon(t-10)+2[1-\mathrm{e}^{-\frac{t-12}{2}}]\varepsilon(t-12)\\&=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} & 0\leqslant t<10\mathrm{s}\\-2+2.99\mathrm{e}^{-\frac{t-10}{2}} & 10\mathrm{s}\leqslant t<12\mathrm{s}\\0.93\mathrm{e}^{-\frac{t-12}{2}} & t\geqslant 12\mathrm{s}\end{cases}\quad(\mathrm{V})\end{aligned}$$

3-28　如题 3-28 图所示电路，若以 u_C 为输出，求其阶跃响应。



题　3-28 图



题解　3-28 图

【解】　三要素法求解。$i_S(t)=\varepsilon(t)\mathrm{A}$，电容电压初始值为零，稳态时相当于开路，则有

$$u_C(\infty)=-2\times\frac{3}{2}u_1+u_1=-2u_1$$

$$i_S=\frac{1}{2}u_1+\frac{3}{2}u_1=2u_1=1$$

$$u_C(\infty)=-1\mathrm{V}$$

求电容以外的等效电阻，令 $i_S=0$，将该部分电路如题解 3-28 图所示，列出端口 u,i 的关系式。

$$\begin{cases}u=2\times\left(i-\frac{3}{2}u_1\right)+u_1\\u=2\times\frac{u_1}{2}+u_1=2u_1\end{cases}$$

消去 u_1 得

$$u=i,\quad \text{即有 } R=1\Omega$$

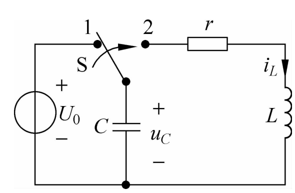
故阶跃响应

$$u_C(t)=-(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

3-29　在受控热核研究中，需要的强大脉冲磁场是靠强大的脉冲电流产生的。如题 3-29 图所示电路中 $C=2000\mu\mathrm{F}$，$L=4\mathrm{nH}$，$r=0.4\mathrm{m}\Omega$，直流电压 $U_0=15\mathrm{kV}$，如在 $t<0$ 时，开关 S 位于“1”，电路已处于稳态，当 $t=0$ 时，开关由“1”闭合到“2”。

(1) 求衰减常数 α、谐振角频率 ω_0 和 $t\geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$；

(2) 求 i_L 达到极大值的时间，并求出 $i_{L\max}$。



题　3-29 图

【解】　(1) 根据二阶电路的有关结论，衰减常数 α、谐振角频率率 ω_0 为

$$\alpha = r/2L = 0.4 \times 10^{-3}/2 \times 4 \times 10^{-9} = 5 \times 10^{4}(\mathrm{s}^{-1})$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2000 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-9}}} = 3.536 \times 10^{5}(\mathrm{rad/s})$$

电路初始值为

$$u_C(0) = U_0 = 15\mathrm{kV}$$
$$i_L(0) = 0$$

故 $t \geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$ 为

$$i_L(t) = \frac{u_C(0)}{\beta}\omega_0^2 C\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t = \frac{u_C(0)}{L}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\mathrm{e}^{-5\times 10^4 t}\sin\beta t$$

$$= \frac{15 \times 10^3 \times \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t}{4 \times 10^{-9} \times \sqrt{(3.536 \times 10^5)^2 - (5 \times 10^4)^2}} = 10.7 \times 10^6 \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t\,\mathrm{A}$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 3.5 \times 10^5(\mathrm{rad/s})$$

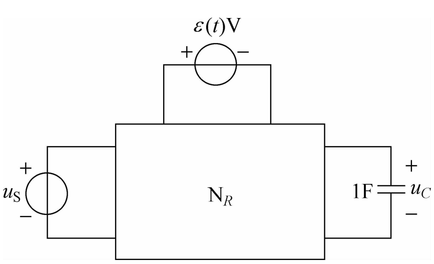
(2) 求 $i_L(t)$ 的极值

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \beta\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t - \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t = 0 \Rightarrow \tan(\beta t) = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$t_1 = \frac{1}{\beta}\arctan\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{3.5 \times 10^3} \times \arctan\left(\frac{3.5 \times 10}{5.0 \times 10^4}\right)$$
$$= 4.08 \times 10^{-6}(\mathrm{s}) = 4.08(\mu\mathrm{s})$$

$$i_{\max} = 10.7 \times 10^6 \mathrm{e}^{-\alpha t_1}\sin\beta t_1$$
$$= 10.7 \times 10^6 \mathrm{e}^{-5\times 10^4 \times 4.08 \times 10^{-6}}\sin(3.536 \times 10^5 \times 4.08 \times 10^{-6})$$
$$= 8.64 \times 10^6\,\mathrm{A}$$

3-30 如题 3-30 图所示电路中，N_R 只含电阻，电容的初始状态不详，$\varepsilon(t)$ 为单位阶跃电压，已知当 $u_S(t) = 2\cos t\varepsilon(t)$ 时，全响应为



题 3-30 图

$$u_C(t) = [1 - 3\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{2}\cos(t - 45^\circ)]\mathrm{V}, \quad t \geqslant 0$$

(1) 求在同样初始条件下，$u_S(t) = 0$ 时的 $u_C(t)$。

(2) 求在同样初始条件下，若两个电源均为零时的 $u_C(t)$。

【解】 根据全响应表达式可知电容初始值

$$u_C(0_+) = 1 - 3 + \sqrt{2}\cos(-45^\circ) = -1\mathrm{V}$$

故电路的零输入响应为

$$u_{Cx}(t) = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}, \quad t \geqslant 0$$

(1) 当 $u_S(t) = 0$ 时，电路响应由阶跃电压源和初始储能确定，$u_C(t)$ 解的形式为

$$u_C(t) = A + K\mathrm{e}^{-t}$$

其中，$A = 1$（参考全响应表达式而定，因为仅由 $u_S(t)$ 作用不可能为产生直流分量，而只有可能由阶跃电压源 $\varepsilon(t)$ 作用产生），由初始值确定 K 系数。

$$u_C(0_+) = A + K = 1 + K = -1\mathrm{V}$$

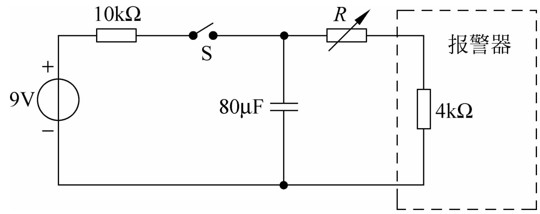
得 $K = -2$，故有

$$u_C(t) = (1 - 2\mathrm{e}^{-t})\mathrm{V}, \quad t \geqslant 0$$

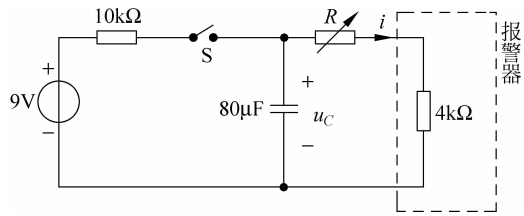
(2) 由题意，此时的 $u_C(t)$ 即为零输入响应。

$$u_{Cx}(t) = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}, \quad t \geqslant 0$$

3-31　如题 3-31 图所示的 RC 电路是用于报警的，当流过报警器的电流超过 $120\mu A$ 时就报警。若 $0 \leqslant R \leqslant 6k\Omega$，求 $t=0$ 时开关 S 闭合后，电路产生的报警时间延迟范围。



题　3-31 图



题解　3-31 图

【解】　设原电路处于稳定，$t=0$ 时开关闭合，在题解 3-31 图中观察报警过程。

关于 $i(t)$ 的三要素为

$$u_C(0_-) = 0, \quad u_C(0_+) = 0$$

$$i(0_+) = 0$$

$$i(\infty) = \frac{9}{10+R+4} = \frac{9}{R+14}\text{mA}$$

$$\tau = [10 \mathbin{/\!/} (R+4)] \times 80 \times 10^{-6} \times 10^3$$

现考虑值 R 的调节范围($0 \leqslant R \leqslant 6k\Omega$)，讨论电路报警时间延迟范围。

(1) 取 $R=0$，则有

$$i(\infty) = \frac{9}{14}\text{mA}$$

$$\tau = (10 \mathbin{/\!/} 4) \times 80 \times 10^{-6} \times 10^3 = \frac{1}{4.375}\text{s}$$

由三要素法公式，

$$i(t) = \frac{9}{14}(1-e^{-4.375t})\text{mA}$$

令 $i(t)=120\mu A$，则有

$$\frac{9}{14}(1-e^{-4.375t}) = 0.12$$

$$t = 0.047\text{s} = 47\text{ms} \quad (\text{即为 } R=0 \text{ 的电路报警时间})$$

(2) 取 $R=6k\Omega$，则有

$$i(\infty) = \frac{9}{20}\text{mA}$$

$$\tau = (10 \mathbin{/\!/} 20) \times 10^3 \times 80 \times 10^{-6} = \frac{1}{1.875}\text{s}$$

由三要素法公式，

$$i(t)=\frac{9}{20}(1-e^{-1.875t})\mathrm{mA}$$

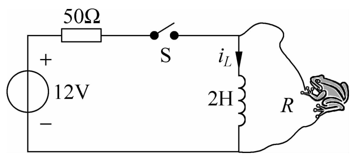
令 $i(t)=120\mu\mathrm{A}$，则有

$$\frac{9}{20}(1-e^{-1.875t})=0.12$$

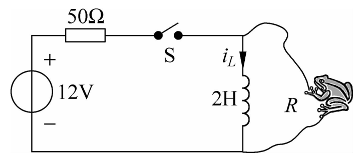
$$t=0.165\mathrm{s}=165\mathrm{ms}\quad（即为 R=6\mathrm{k}\Omega 的电路报警时间）$$

可见，电路产生的报警时间延迟范围为 47～165ms。

3-32 如题 3-32 图所示的电路用于生物课中让学生观察“青蛙的跳动”。学生注意到，当开关闭合时，青蛙只动一动，而当开关断开时，青蛙很剧烈地跳动了 5s，将青蛙的模型视为一电阻，计算该电阻值（假设青蛙激烈跳动需要 10mA 的电流）。



题　3-32 图



题解　3-32 图

【解】 做出题解 3-32 图，开关闭合时，电路可能很快处于稳定，电路电流主要流过电感，而致使青蛙只动一动。设 $t=0$ 时，开关打开，则有

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{12}{50}=0.24\mathrm{A}$$

$$i_L(\infty)=0$$

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{2}{R}\quad（R 为青蛙电阻）$$

当 S 打开时，电感电流全部流经过青蛙，致使青蛙连续跳动。

由三要素法公式，其表达式为 $i_L(t)=0.24e^{-\frac{R}{2}t}$，单位为 A。

由于 S 断开青蛙剧烈地跳动了 5s，又由假设青蛙跳动需要 10mA 的电流，则相当于 $i_L(t)$ 从 0.24A 到 0.01A 变化过程为 5s。

令 $i(t)=10\mathrm{mA}$，即

$$0.24e^{-\frac{R}{2}t}=0.01$$

代入，$t=5\mathrm{s}$，有

$$0.24e^{-\frac{R}{2}t\times 5}=0.01$$

解得

$$R=1.27\Omega$$

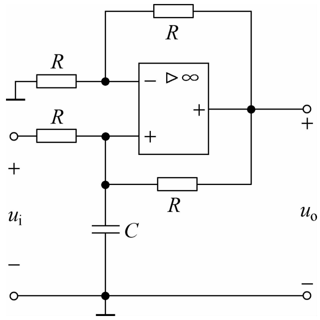
3-33 如题 3-33 图所示的电路是一同相积分器，请推导出输出电压 u_o 与输入电压 u_i 之间的关系。

【解】 标出有关变量如题解 3-33 图所示，由运放“虚断”、“虚短”分析得

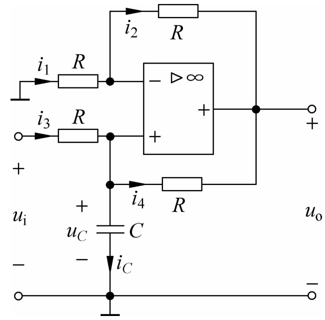
$$u_+=u_C=u_-$$

$$i_1=i_2\quad\Rightarrow\quad\frac{0-u_-}{R}=\frac{u_--u_0}{R}$$

$$\Rightarrow u_0=2u_-=2u_C\tag{1}$$



题 3-33 图



题解 3-33 图

又

$$
\begin{aligned}
i_3 &= i_C + i_4 \\
&= C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C - u_o}{R} = \frac{u_i - u_C}{R}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

由(1)式得 $u_C = \dfrac{1}{2}u_o$,代入(2)式得

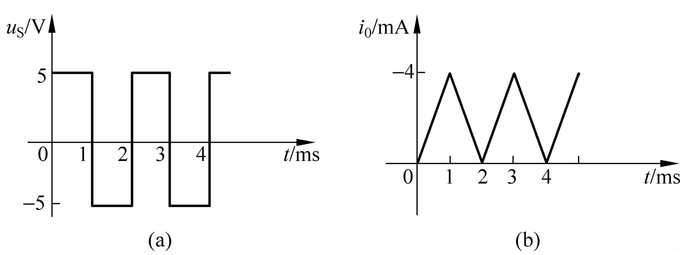
$$
\frac{1}{2}C\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t} + \frac{\frac{1}{2}u_o - u_o}{R} = \frac{u_i - \frac{1}{2}u_o}{R}
$$

化简得

$$
\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{RC}u_i
$$

$$
u_o = \frac{2}{RC}\int_{-\infty}^{t} u_i \mathrm{d}t = \frac{2}{RC}\int_{-\infty}^{t} u_i \mathrm{d}t
$$

3-34 一个方波发生器产生的电压波形如题 3-34 图(a)所示,设计一个运放电路将此电压波形转换为如题 3-34 图(b)所示的三角波电流波形。设电路的初始状态为 0。



题 3-34 图

【解】 对比输入输出波形图,设计二级运算放大电路如题解 3-34 图所示,第一级完成对输入反相运算,第二级再进行积分运算,并在负载产生输出电流。

其中,

$$
u_1 = -\frac{R_F}{R_1}u_S,
$$

取 $R_f = R_1 = 10\mathrm{k\Omega}$,则

$$u_1 = -u_S$$

$$u_0 = -\frac{1}{R_3C_F}\int_{-\infty}^{t} u_1 \mathrm{d}t = \frac{1}{R_3C_F}\int_{-\infty}^{t} u_S \mathrm{d}t$$

取 $R_L = 1\text{k}\Omega$,则

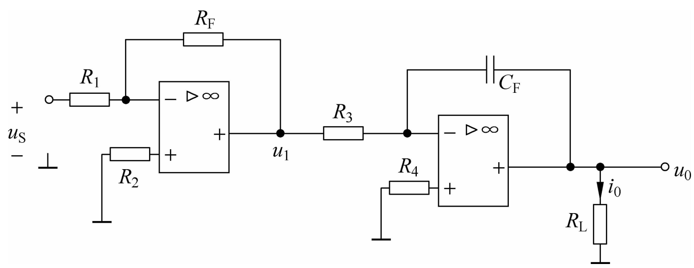
$$i_0 = \frac{u_0}{R_L} = \frac{1}{R_3C_F}\int_{-\infty}^{t} u_S \mathrm{d}t\text{,单位为 mA}$$

对题 3-34 图(a)、题 3-34 图(b)取特殊点计算(0～1ms)。令 $t=1\text{ms}$,在 0～1ms 区间,$u_S=5\text{V}$

$$i_0(1) = \frac{1}{R_3C_F}\int_0^1 u_S \mathrm{d}t = \frac{1}{R_3C_F}\int_0^1 5\times \mathrm{d}t = \frac{5}{R_3C_F} = 4\times 10^3 \mu\text{A}$$

取 $C_F = 0.1\mu\text{F}$,则有

$$R_3 = \frac{5}{4\times 10^3 \times C_F} = \frac{5}{4\times 10^3\times 0.1\times 10^{-6}}(\Omega) = 12.5\text{k}\Omega$$



题解 3-34 图