第七章　无 穷 级 数

第一节　无穷级数的概念

先看一个实际问题：把 $\triangle ABC$ 的三边中点连接起来得到 $\triangle A_1B_1C_1$，再把 $\triangle A_1B_1C_1$ 三边中点连接起来得到 $\triangle A_2B_2C_2$，依次无限做下去，求 $\triangle ABC$，$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\cdots$ 面积的总和，即计算

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2a+\left(\frac{1}{4}\right)^3a+\cdots(a\text{ 为 }\triangle ABC\text{ 的面积}) \tag{7.1}$$

这是一个无限项相加的问题，利用极限的方法可解决. 像式(7.1)这样的无限个项相加的表达式称为无穷级数. 一般地，把给定数列 $\{u_n\}$ 所有项相加得到的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{7.2}$$

称为无穷级数(简称级数). 其中第 n 项 u_n 称为级数的通项，式(7.2)也可简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

把级数前 n 项的和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为级数的(第 n 次)部分和. 部分和

$$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$$

构成一个数列.

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$($S$ 为常数)，则称级数(7.2)收敛，其和为 S(或收敛于 S)，可记为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

如果数列 $\{S_n\}$ 的极限不存在，则称级数(7.2)发散，发散级数没有和.

当级数收敛时，其和与部分和的差

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的余项.

用 S_n 作为 S 的近似值所产生的误差即为 $|R_n|$.

例 7-1 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{7.3}$$

称为几何级数(或等比级数).其中 $a \neq 0$,q 称为级数的公比.

现在讨论几何级数(7.3)的敛散性(收敛或发散).

(1) 当 $|q| \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

如果 $|q| < 1$,则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

如果 $|q| > 1$,则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

(2) 当 $q = 1$ 时,由于 $S_n = na$,则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

(3) 当 $q = -1$ 时,则级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + a - a + \cdots$$

当 n 为偶数时,$S_n = 0$;当 n 为奇数时,$S_n = a$.所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在.

综上可得,几何级数(7.3)当 $|q| < 1$ 时收敛,其和 $S = \dfrac{a}{1-q}$;当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.即得结论几何级数收敛的充要条件是其公比 q 满足 $|q| < 1$.由这一结论可得级数(7.1)是收敛的,其和为 $\dfrac{4}{3}a$(平方单位).

例 7-2 把循环小数 $0.\dot{9}\dot{8}$ 化成分数的形式.

解 $0.\dot{9}\dot{8} = \dfrac{98}{100} + \dfrac{98}{100^2} + \dfrac{98}{100^3} + \cdots$(几何级数)

$$= \frac{\frac{98}{100}}{1 - \frac{1}{100}} \text{(几何级数求和公式)}$$

$$= \frac{98}{99}$$

例 7-3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 由于 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

因此 $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

从而

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

所以级数收敛，其和为 1.

例 7-4 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

解 由于 $\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$

因此 $S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \ln(n+1)$$

从而 $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = +\infty$

所以级数发散.

第二节 无穷级数的基本性质

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S、W，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且和为 $S \pm W$.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n、W_n，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和 $T_n = S_n \pm W_n$.

因此 $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(S_n \pm W_n) = S \pm W$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

定理 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，和为 S，则它的每一项都乘以一个不为零的常数 k 后，所得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且和为 kS.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和 $W_n = kS_n$.

因此 $\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} kS_n = kS$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

由定理 2 可得结论：级数的每一项同乘以非零常数后，其敛散性不变.

例 7-5 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} + \ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ 的敛散性.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$,

所以该级数为收敛的几何级数.

又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n}$,

由例 7-4 及定理 2 可推得该级数发散.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} + \ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ 发散(想一想，为什么?).

定理 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

证明略.

定理 4 如果一个级数收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数也收敛，且其和不变；反之，如果加括号后所成的级数发散，则原级数也必发散.

证明略.

发散级数加括号后有可能收敛，即加括号后级数收敛，原级数未必收敛.

例如，发散级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

加括号后所成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0(\text{收敛})$$

反之，收敛级数去括号后未必收敛.

对于正项级数(各项 $u_n \geqslant 0$，见第三节)，加括号或去括号都不影响它的敛散性.

定理 5 （收敛的必要条件）如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

证　设级数的部分和为 S_n，和为 S，则 $u_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= S-S \\ &= 0.\end{aligned}$$

由此可知，如果级数的通项不是无穷小量($n\to\infty$ 时)，则级数发散. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$ 是发散的，因为其通项的极限为 1(并非无穷小量). 但需注意，通项趋于零的级数不一定收敛(见例 7-4).

第三节　正项级数

一、正项级数判敛基本定理

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称其为正项级数.

正项级数有一个特点是，其部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调不减的，即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_{n-1}\leqslant S_n\leqslant\cdots$$

由数列极限的存在准则(单调有界数列必收敛)可知，如果数列 $\{S_n\}$ 有上界，则它收敛；否则发散. 因此可得定理 6.

定理 6 正项级数收敛的充要条件是:它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

二、比较判别法

定理 7 如果两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的通项满足$u_n \leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则

(1) 当后者收敛时,前者也收敛;

(2) 当前者发散时,后者也发散.

证 (2)是(1)的逆否命题,所以只需证(1)即可.

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和分别为$S_n$、$W_n$,由$u_n \leqslant v_n$可推得$S_n \leqslant W_n$.

由定理 6 可知,如果后者收敛,则数列$\{W_n\}$有上界,因此数列$\{S_n\}$也有上界,所以前者也收敛.

该命题也可简称为:"大"收则"小"收;"小"发则"大"发.

例 7-6 判定调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$(自然数倒数的和)的敛散性.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=(1+\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8})+\cdots$(按一定的规则加括号),其各项均大于级数

$$\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

的对应项,而后者是发散的.由比较判敛法可知,调和级数发散.

例 7-7 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots$的敛散性(该级数称为$p-$级数).

解 当$p \leqslant 1$时,$\dfrac{1}{n^p} \geqslant \dfrac{1}{n}$.由例 7-6 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散.

当$p>1$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p})+(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p})+(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p})+\cdots,$$

其各项均不大于级数$1+(\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{2^p})+(\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{4^p})+(\dfrac{1}{8^p}+\cdots+\dfrac{1}{8^p})+\cdots$的对应项,而后者是几何级数,公比$q=\dfrac{1}{2^{p-1}}<1$,所以收敛.因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛.

综上可知，p 一级数收敛的充要条件是 $p>1$.

例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{t}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^{-\frac{1}{t}}$ 收敛的充要条件是 $-1<t<0$.

在应用比较判别法时，经常把几何级数、调和级数或 p 一级数作为比较对象(参照级数).

例 7-8 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 的敛散性.

解 因 $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 也收敛.

在应用比较判别法时，建立不等式、寻求比较对象往往比较困难，而下面极限形式的比较法更为方便.

定理 8 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，两个级数敛散性相同；

(2) 当 $l=0$ 时，若后者收敛，则前者也收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，若后者发散，则前者也发散.

例 7-9 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$.

解 (1) 当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，由定理 8 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 也发散.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛，由定理 8 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$ 也收敛.

三、比值判别法

定理 9 (达朗贝尔(D'Alembert) 判别法) 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n>0, n=1,2,\cdots)$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则

(1) 当 $l<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;

(3) 当 $l=1$ 时,级数可能收敛,也可能发散(这意味着此法失效,需用别的方法进行判定).

例 7-10 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin\dfrac{\pi}{n}}{2^n}$ 的敛散性.

解 由 $\sin\dfrac{\pi}{n}\leqslant 1$ 可推得 $\dfrac{n\sin\dfrac{\pi}{2}}{2^n}\leqslant\dfrac{n}{2^n}$,

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的通项满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$,

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin\dfrac{\pi}{n}}{2^n}$ 收敛.

例 7-11 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$ 的敛散性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10}=+\infty$.

所以级数发散.

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$,而前者收敛,后者发散.可见当 $l=1$ 时不能用达朗贝尔判别法进行判定.

四、根值判别法

定理 10 (柯西判别法)如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,则

(1) 当 $l<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;

(3) 当 $l=1$ 时,级数可能收敛,也可能发散(定理失效情形).

例 7-12 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{an}{n+b}\right)^n(a>0,b>0)$ 的敛散性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an}{n+b}=a$,

所以当 $0<a<1$ 时，级数收敛；当 $a>1$ 时，级数发散；当 $a=1$ 时，根值判别法失效，但此时有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+b}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{b}{n}\right)^n}=\frac{1}{e^b}\neq 0$$

所以 $a=1$ 时，级数发散.

若把根值判别法应用于 $p-$ 级数，则有

$$\sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to 1(n\to\infty)$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}$（洛必达法则）$=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，这说明 $l=1$ 时级数可能收敛，也可能发散.

比值与根值判别法也称为自身判别法，这与比较判别法有所不同.

第四节　任意项级数与绝对收敛

一、交错级数

各项为任意实数的级数称为任意项级数或一般项级数. 在任意项级数中有一种特殊情形，即正负项交替出现，这种级数称为交错级数，其形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k}+\cdots \tag{7.4}$$

其中 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$.

关于交错级数有下面的定理.

定理 11　（莱布尼茨定理）如果交错级数(7.4)满足条件

(1)$u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

则级数收敛，和 $S\leqslant u_1$，余项的绝对值 $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.

例如，交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

满足条件

(1) $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

所以收敛,且其和 $S<1$. 如果取前 n 项的和 $S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 作为 S 的近似值,所产生的误差 $|R_n|\leqslant\frac{1}{n+1}$.

例 7-13 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性.

解 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\geqslant 3$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在区间$[3,+\infty)$上单调减少. 又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,由定理 11 可知,从第 3 项开始的级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 是收敛的,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 也收敛(见定理 3).

二、绝对收敛与条件收敛

关于任意项级数有下面的定理.

定理 12 如果任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项绝对值组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛. 设

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)(n=1,2,\cdots)$$

显然 $v_n\geqslant 0$ 且 $v_n\leqslant|u_n|(n=1,2,\cdots)$. 由比较判别法可知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2v_n$ 也收敛. 而 $u_n=2v_n-|u_n|$,由级数的基本性质可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 为绝对收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为条件收敛.

定理 12 的意义在于，对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果用正项级数的判别法判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则此级数收敛. 这就使得一大类级数的收敛性判别问题转化为正项级数的收敛性判别问题.

但要注意，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，不能推断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

基于上述讨论，有下面的判定定理.

定理 13　如果任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$，则

(1) 当 $l<1$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $l>1$ 时，级数发散.

例 7-14　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的敛散性.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x| = |x|$.

所以，当 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，级数发散；当 $x=1$ 时，级数为调和级数，发散；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，条件收敛（参见交错级数）.

例 7-15　证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ 绝对收敛；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

证　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}<1$.

所以级数绝对收敛.

(2) 由级数收敛的必要条件可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

绝对收敛级数有很多性质是条件收敛级数所没有的,下面给出关于绝对收敛级数的一条性质,将在概率论中用到.

定理 14 绝对收敛级数经改变项的位置后构成的级数也收敛,且与原级数有相同的和(即绝对收敛级数的项具有可交换性).

该定理说明,绝对收敛级数与各项的排列位置或顺序无关. 例如,设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,和为 S,则重排后的级数

$$u_1+u_3+u_2+u_4+u_5+u_7+u_6+u_8+\cdots$$

也收敛于 S.

对于条件收敛级数,这个性质就不一定成立. 例如,交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

是条件收敛的,设其和为 S(利用函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式可求得 $S=\ln 2$,参见本章幂级数内容),即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots=S \tag{7.5}$$

等式两边乘以常数 $\dfrac{1}{2}$ 后,有

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{S}{2}$$

即

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{S}{2} \tag{7.6}$$

将级数(7.5)与级数(7.6)的对应项相加,得

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}S$$

而该级数是级数(7.5)的重排. 由此可见,条件收敛级数重排后并不一定收敛于原来的和,还可证明条件收敛级数适当重排后可得到发散级数,或收敛于任何事先给定的数.

第五节 幂 级 数

一、幂级数及其收敛特性

定义 1 $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{7.7}$$

称为关于 $x - x_0$ 的幂级数，常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ 分别称为幂级数的零次项、一次项、二次项、…、n 次项、… 的系数.

定义 2 $a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (7.8)

称为关于 x 的幂级数，常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ 分别称为幂级数的零次项、一次项、二次项、…、n 次项、… 的系数.

用自变量的变换 $x - x_0 = t$ 可把关于 $x - x_0$ 的幂级数(7.7) 化为关于 t 的幂级数(7.8) 来研究，因此，以下主要讨论幂级数(7.8).

当自变量 $x = x_0$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 变成数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$，若数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则称幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处收敛，并称点 $x = x_0$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛点.

定义 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的全体收敛点组成的集合 I 称为该幂级数的收敛域.

不难发现，任何幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = 0$ 处总是收敛的，从而幂级数的收敛域 I 不是空集.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 I，当 $x \in I$ 时把幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x 处的和记为 $S(x)$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)(x \in I) \tag{7.9}$$

则 $S(x)$ 是以 I 为定义域的函数,称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

例 7-16 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域与和函数.

解 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ 是首项 $a = 1$、公比 $q = x$ 的几何级数,从而幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛,且其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}(|x| < 1)$$

此外,当 $|x| \geqslant 1$ 时幂级数发散.

故幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域 $I = (-1,1)$,和函数 $S(x) = \dfrac{1}{1-x}(|x| < 1)$.

下面给出有关幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的敛散性的重要结论.

定理 15 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0(x_0 \neq 0)$ 处收敛,则当 $|x| < |x_0|$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;反之,若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处发散,则当 $|x| > |x_0|$ 时幂级数发散.

基于定理 15,可以得出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域只有以下三种情形:

(1) 对任何 x,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛. 这时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域 $I = (-\infty, +\infty)$.

(2) 对任何 $x \neq 0$,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都发散. 这时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域 $I = \{x \mid x = 0\}$.

(3) 存在常数 $R > 0$,使得当 $|x| < R$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;而当 $|x| > R$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. 这时称幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,并把开区间 $(-R,R)$ 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域就是它的收敛区间加上使幂级数收敛的端点 $x = R$ 或 $x = -R$ 组成的集合.

为了统一起见，当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对任何 x 都绝对收敛时，规定它的收敛半径 $R=+\infty$；当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对任何 $x \neq 0$ 都发散时，规定它的收敛半径 $R=0$.

定理 16 （幂级数收敛半径的求法）若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 $a_n \neq 0(n=1,2,\cdots)$，且存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

则当 $l=0$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$；当 $l=+\infty$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=0$；当 $0<l<+\infty$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{l}$.

证 利用比值判别法判定 $x \neq 0$ 时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的绝对收敛性，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l|x| = \begin{cases} 0, & l=0 \\ l|x|, & 0<l<+\infty \\ +\infty, & l=+\infty \end{cases}$$

由此可见，当 $l=0$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对任何 x 绝对收敛，即它的收敛半径 $R=+\infty$；当 $l=+\infty$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对任何 $x\neq 0$ 都发散，即它的收敛半径 $R=0$；当 $0<l<+\infty$ 时，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对满足 $l|x|<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{l}$ 的 x 绝对收敛，而对满足 $l|x|>1 \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{l}$ 的 x 发散，即它的收敛半径 $R=\frac{1}{l}$.

例 7-17 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n}$ 的收敛半径和收敛域.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$，所以收敛半径 $R=2$. 当 $x=2$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$，其通项极限不为零($n\to\infty$)，故发散；当 $x=-2$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$，

同理可知它是发散的,所以收敛域为$(-2,2)$.

例 7-18 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$的收敛半径和收敛域.

解 因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0.$$

所以收敛半径$R=+\infty$,幂级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

例 7-19 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$的收敛半径和收敛域.

解 因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n(n+1)}}{\frac{1}{3^{n-1}n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\frac{1}{3},$$

所以收敛半径$R=3$.

当$x=3$时,级数成为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,该级数是发散的;当$x=-3$时,级数成为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$,该级数是收敛的,所以收敛域为$[-3,3)$.

例 7-20 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$的收敛半径与收敛域.

解 因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^p}{(n+1)^p}\right|=1$,

故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$的收敛半径$R=1$.

当$x=1$时,幂级数成为$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,从而当$p>1$时幂级数收敛,当$p\leqslant 1$时幂级数发散;当$x=-1$时,幂级数成为交错$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$,从而当$p>1$时幂级数绝对收敛,当$0<p\leqslant 1$时幂级数条件收敛,当$p\leqslant 0$时发散. 故当$p>1$时幂级数的收敛域

$I=[-1,1]$，当 $0<p\leqslant 1$ 时幂级数的收敛域 $I=[-1,1)$，当 $p\leqslant 0$ 时幂级数的收敛域 $I=(-1,1)$.

若幂级数有无穷多个系数 a_n 等于零，则可直接求级数中后项与前项绝对值之比的极限，并利用比值判别法得出幂级数的收敛半径。

例 7-21 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2^n(4n^2-3)}$ 的收敛半径与收敛域.

解 当 $x\neq 0$ 时，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^{n+1}[4(n+1)^2-3]}\cdot\frac{2^n(4n^2-3)}{(-1)^{n-1}x^{2n}}\right|$$

$$=\frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{4(n+1)^2-3}=\frac{x^2}{2}.$$

由比值判别法知，当 $\dfrac{x^2}{2}<1\Leftrightarrow|x|<\sqrt{2}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2^n(4n^2-3)}$ 绝对收敛，且当 $\dfrac{x^2}{2}>1\Leftrightarrow|x|>\sqrt{2}$ 时，发散，即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2^n(4n^2-3)}$ 的收敛半径 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，幂级数成为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-3}$，因为

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-3}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}(n=2,3,4,\cdots)$$

故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2^n(4n^2-3)}$ 在点 $x=\pm\sqrt{2}$ 处绝对收敛，即幂级数的收敛域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

二、幂级数的性质

定理 17 如果幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $R_1>0$ 和 $R_2>0$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x)\tag{7.10}$$

幂级数(7.10)的收敛半径 R 大于等于 R_1 与 R_2 中较小的一个.

定理 18 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

定理 19 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积,并有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ (x \in I) \tag{7.11}$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

定理 20 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导,且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ (|x| < R) \tag{7.12}$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

反复应用上述结论可得:幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内具有任意阶导数.

例 7-22 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解 先求收敛域,由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$,得收敛半径 $R = 1$.

当 $x = -1$ 时,幂级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$,是收敛的交错级数;当 $x = 1$ 时,幂级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$,是发散的.因此收敛域 $I = [-1,1)$.

设和函数为 $S(x)$,即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, x \in [-1,1)$$

于是
$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

利用定理 20,逐项求导,并由

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots (-1 < x < 1)$$

得 $$[xS(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}(|x|<1)$$

对上式从 0 到 x 积分，得

$$xS(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x)(-1<x<1)$$

于是，当 $x \neq 0$ 且 $-1<x<1$ 时，有 $S(x) = -\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$.

当 $x=-1$ 时，$S(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} S(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left[-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)\right] = \ln 2$.

而 $S(0)$ 可由 $S(0) = a_0 = 1$ 得出，也可由和函数的连续性得到

$$S(0) = \lim_{x\to 0}S(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x}\ln(1-x)\right] = 1$$

故 $S(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x \in [-1,0)\cup(0,1) \\ 1, & x=0 \end{cases}$.

第六节　函数的幂级数展开式

一、泰勒公式

当研究一些复杂函数的性质时，希望用一些简单的函数来代替复杂的函数. 利用微分代替函数的增量，就是采用“以直代曲”的思想方法. 但是这种近似表达式存在着不足之处. 首先是精确度不高，其次是不能具体估算出误差. 因此我们就想到用高次多项式来近似表达函数，同时给出误差公式.

故有以下问题：设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间内具有直到 $n+1$ 阶导数，试找出一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \tag{7.13}$$

来近似表达 $f(x)$，要求 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 之差是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小，并给出误差 $|f(x)-p_n(x)|$ 的具体表达式.

下面我们来讨论这个问题. 假设 $p_n(x)$ 在 x_0 处的函数值及它的直到 n 阶导数在 x_0 处的值依次与 $f(x_0), f'(x_0), \cdots, f^{n}(x_0)$ 相等，即满足

$$p_n(x_0)=f(x_0),p'_n(x_0)=f'(x_0),p''_n(x_0)=f''(x_0),\cdots,p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

按这些等式来确定式(7.13)的系数. 为此,对式(7.13)求各阶导数,然后分别代入以上等式,得

$$a_0=f(x_0),1\cdot a_1=f'(x_0),2!\cdot a_2=f''(x_0),\cdots,n!a_n=f^{(n)}(x_0)$$

即得

$$a_0=f(x_0),a_1=f'(x_0),a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

将求得的系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 代入式(7.13),有

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

定理 21 (泰勒中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在含有点 x_0 的区间(a,b)内,有一阶到 $n+1$ 阶的导数,则当 x 取区间(a,b)内任何值时,$f(x)$ 可以按$(x-x_0)$的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\tag{7.14}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})\tag{7.15}$$

式(7.14)称为函数 $f(x)$ 的泰勒公式,余项(7.15)称为拉格朗日型余项.

证 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$. 只需证明 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$($\xi$ 在 x_0 与 x 之间).

由假设可知,$R_n(x)$ 在(a,b)内具有直到 $n+1$ 阶的导数,且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

对两个函数 $R_n(x)$ 和$(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上应用柯西中值定理(显然,这两个函数满足柯西中值定理的条件),得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}(\xi_1\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

再对两个函数 $R_n'(x)$ 与$(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西中值定理,得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}(\xi_2\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间}).$$

依照此方法继续做下去，经过 $n+1$ 次后，得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }\xi_n\text{ 之间，因此也在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

注意到 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$（因 $p_n^{(n+1)}(x)=0$），则由上式得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

在式(7.14)中，当 $n=0$ 时，得到

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

这就是拉格朗日中值定理，泰勒中值定理是它的推广.

在式(7.14)中，当 $x_0=0$ 时，得到

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)\tag{7.16}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\tag{7.17}$$

或令 $\xi=\theta x$，$0<\theta<1$，则 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$. 式(7.16)称为麦克劳林公式.

二、泰勒级数

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，则对于任意的正整数 n，泰勒公式都成立. 当 $n\to\infty$ 时，如果 $R_n(x)\to 0$，则得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$$

由于上式右端方括号内的式子是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的前 $n+1$ 项组成的部分和式，所以此级数收敛，且其和为 $f(x)$. 因此函数 $f(x)$ 可以写为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\tag{7.18}$$

该式称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数.

特别地，当 $x_0=0$ 时，式(7.18)成为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\tag{7.19}$$

该式称为函数 $f(x)$的麦克劳林级数.

由上面的讨论,将函数 $f(x)$ 展开成 x(或$(x-x_0)$) 的幂级数的步骤如下:

(1) 求出 $f(x)$ 的各阶导数值 $f^{(n)}(0)$(或 $f^{(n)}(x_0)$)$(n=1,2,3,\cdots)$.

(2) 写出幂级数式(7.19) 或式(7.18),并求出其收敛域.

(3) 检验$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 在收敛域内是否成立. 如果成立,则 $f(x)$ 在此收敛域内有幂级数展开式(7.19) 或(7.18).

例 7-23　将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解　因为 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$,所以 $f^{(n)}(0)=1$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

其收敛域为$(-\infty,+\infty)$,再由

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

因 $\mathrm{e}^{|x|}$ 是有限数,$\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}(-\infty<x<+\infty)$ 的通项,所以对任意 x 上式均成立. 因此得到

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-\infty<x<+\infty)\tag{7.20}$$

例 7-24　将函数 $\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解　因为 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$,所以

$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1,\cdots$$
$$f^{(2k)}(0)=0,f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\cdots$$

得
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots.$$

因为
$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k-1)!}{(2k+1)!}|x|^2,$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k(2k+1)}|x|^2=0$$

所以它的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

又因$\lim\limits_{k\to\infty}|R_n(x)|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\sin\left(\theta x+\frac{(2k+3)\pi}{2}\right)\cdot\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\right|\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}=0$

对任意 x 都成立，所以得到

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-\infty<x<+\infty)\tag{7.21}$$

例 7-25 函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的幂级数展开式是一个重要的展开式，下面略去过程，给出 $f(x)$的麦克劳林级数展开式.

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots(-1<x<1)\end{aligned}\tag{7.22}$$

其中 α 是实数. 级数(7.22) 称为二项式级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$$

所以该级数的收敛区间为$(-1,1)$. 当 $x=\pm 1$ 时，级数是否能表示为$(1+x)^\alpha$ 取决于 α 的值.

可以证明：当 $\alpha\leqslant-1$ 时，收敛域为$(-1,1)$；当 $-1<\alpha<0$ 时，收敛域为$(-1,1]$；当 $\alpha>0$ 时，收敛域为$[-1,1]$. 例如：

当 $\alpha=-1$ 时，由式(7.22) 得到

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1}&=\frac{1}{1+x}\\&=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots(-1<x<1)\end{aligned}\tag{7.23}$$

当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，由式(7.22) 得到

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}&=(1+x)^{\frac{1}{2}}\\&=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)\end{aligned}\tag{7.24}$$

特别地，当 α 是正整数 n 时，由式(7.22) 可以看出含 x^n 项以后各项的系数都为 0. 这样得到二项式公式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+nx^{n-1}+x^n$$

间接展开法是以一些函数的幂级数展开式[式(7.20) ~ 式(7.23)] 为基础，利用幂

级数的性质、变量变换等方法，求出函数的幂级数展开式.

例 7-26 将函数 $\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数，并求收敛域.

解 已知 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots(-1<x<1)$ 成立，

对上式两边分别从 0 到 x 逐项积分，可以得到 $\ln(1+x)$ 的展开式：

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$
$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots(-1<x<1) \tag{7.25}$$

可以证明：在 $x=1$ 处上式收敛，在 $x=-1$ 时上式发散. 因此收敛域为 $(-1,1]$.

例 7-27 将函数 $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并求收敛域.

解 将式(7.23)中的 x 换成 x^2，可以得到 $\arctan x$ 的展开式为：

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\cdots$$

上式两边分别从 0 到 x 逐项积分，得

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots(-1<x<1) \tag{7.26}$$

当 $x=1$ 时，它是交错级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$，收敛；

当 $x=-1$ 时，它是交错级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{2n-1}$，收敛.

因此，级数(7.26)的收敛域为 $[-1,1]$.

例 7-28 将函数 $\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $(\sin x)'=\cos x$，利用式(7.21)得

$$\cos x=(\sin x)'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]'$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty) \tag{7.27}$$

例 7-29 将函数 e^{-x^2} 展开成 x 的幂级数.

解 将式(7.20)中的 x 换成 $-x^2$，得

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2\ \ !}+\cdots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}(-\infty<x<+\infty) \end{aligned}$$

例 7-30　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

解　$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+3)}=\frac{1}{4\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\dfrac{x-1}{4}\right)} \end{aligned}$$

因为$$\frac{1}{4\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n\quad(-1<x<3)$$

$$\frac{1}{8\left(1+\dfrac{x-1}{4}\right)}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n\quad(-3<x<5)$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n(-1<x<3)$$

例 7-31　将函数 $\ln x$ 展开成 $x-1$ 的幂级数,并求收敛域.

解　由式(7.25)得

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+\cdots(-1<t\leqslant 1)$$

所以 $\ln x=\ln[1+(x-1)]$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots$$

由 $-1<x-1\leqslant 1$,得 $0<x\leqslant 2$,即收敛域为$(0,2]$.

*第七节　幂级数的应用举例

第六节得到的一些函数的幂级数展开式可以用来进行近似计算,下面举例说明.

例 7-32　计算$\sqrt{e}$ 的近似值(计算前三项).

解 由 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$

取 $x=\frac{1}{2}$,可得

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot 2^n}+\cdots$$

取前三项作近似值,则

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=1.6250$$

例 7-33 计算定积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx$ 的近似值,要求误差不超过 0.0001(取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\approx 0.56419$).

解 根据例 7-29 可知,$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}(-\infty<x<+\infty)$. 于是,根据幂级数在收敛区间内可逐项积分,得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right]dx\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2n}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 1!}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}+\cdots\right)\end{aligned}$$

取前四项的和作为近似值,其误差为

$$|R_4|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2^8\cdot 9\cdot 4!}<\frac{1}{90000}$$

所以 $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 1!}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)$$

因此 $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx\approx 0.5205.$$

习 题 七

(A)

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$，求 u_n 及 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

2. 利用级数把循环小数 $0.\dot{7}$ 化成分数.

3. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2} + \cdots$;

(3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2^2}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3^2}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{4}} + \dfrac{1}{4^2}\right) + \cdots$;

(4) $\dfrac{\sqrt{1+1^2}}{1} + \dfrac{\sqrt{1+2^2}}{2} + \dfrac{\sqrt{1+3^2}}{3} + \cdots$.

4. 证明：对任意给定的实数 k，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^n$ 不能同时收敛.

5. 用比较判别法判定下列级数的敛散性.

(1) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \cdots$;

(2) $1 + \dfrac{1+2}{1+2^2} + \dfrac{1+3}{1+3^2} + \dfrac{1+4}{1+4^2} + \cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(1+n)}$.

6.用比值判别法(达朗贝尔判别法)判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

7.用根值判别法(柯西判别法)判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{2n!+1}\right)^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{1+n^2}\right)^n\right]^n$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$.

8.判定下列交错级数的敛散性.

(1) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$;

(2) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$.

9.判定下列级数哪些是绝对收敛,哪些是条件收敛.

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{(n+1)^2}$.

10. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2\cdot 4\cdots(2n)}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(x+3)^{2n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)2^n x^{2n}$.

11. 求下列幂级数的收敛域，并求和函数.

(1) $2x+4x^3+6x^5+8x^7+\cdots$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$.

12. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求其收敛域.

(1) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；　　(2) $\ln(a+x)(a>0)$；

(3) $\cos^2 x$；　　(4) $\frac{x}{x^2-2x-3}$.

13. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $(x+\frac{\pi}{3})$ 的幂级数.

14. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

15. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值(计算前三项).

(1) $\sqrt[5]{240}$；　　(2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$.

(B)

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数中发散的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10u_n$；　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+10)$；

C. $10+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$；　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+10}$.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$；

B. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$($S_n$ 为级数的部分和)；

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 任意加括号后所成的级数必发散；

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 任意加括号后所成的级数可能收敛.

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下述结论不正确的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛；　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ku_n+\frac{1}{2^k})(k>1)$ 收敛；

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{u_n}{k}+\frac{1}{k^n})(k>1)$ 收敛；　D. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\sin n=0$.

4. 下列级数发散的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}$；　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$；

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$；　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\frac{1}{n^2})^{n^2}}{3^n}$.

5. 设 $0\leqslant u_n<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则下列级数必定收敛的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$；　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$；

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})u_n$；　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n^2$.

6. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}x^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$.

7. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的和函数 $S(x)$.

8. 将函数 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 展开成 x 的幂级数.