

拉普拉斯变换与 z 变换 及信号系统的复频域分析

3.1 引言

在本书的第 2 章中,我们系统介绍了傅里叶理论的基本内容,包括连续时间周期信号的傅里叶级数、离散时间周期信号的傅里叶级数、连续时间信号的傅里叶变换和离散时间傅里叶变换的概念、理论与方法等。实际上,由傅里叶变换对信号与系统的分析,通常称为信号与系统的频域分析(frequency domain analysis)。频域分析最主要的特点是可以明确了解信号与系统的频率特性,同时对于信号与系统的运算具有显著的简化作用。

本章系统介绍信号与系统的复频域分析(complex frequency domain analysis)方法。所谓复频域分析,就是将信号或系统由时域经由拉普拉斯变换(Laplace transform)或 z 变换(z -transform)变换到复频域,然后再在复频域进行分析和处理。与频域分析方法相似,信号与系统的复频域分析一方面可以显著简化信号与系统的计算,另一方面,复频域分析在某种程度上包含了频域分析的内容,其不仅可以方便我们了解信号与系统的频率特性,还特别方便对系统因果性和稳定性等进行分析 and 判定。因而,信号与系统的复频域分析得到广泛的重视和应用。

所谓复频域,对于连续时间信号与系统来说,对应于由拉普拉斯变换得到的 s 域,对于离散时间信号与系统来说,对应于由 z 变换得到的 z 域。由于变量 s 和 z 都是复变量,分别定义为

$$s = \sigma + j\Omega \quad (3.1)$$

$$z = re^{j\omega} \quad (3.2)$$

式(3.1)中, σ 表示复变量 s 的实部, Ω 表示其虚部。显然,傅里叶变换是实部为 0 的拉普拉斯变换;式(3.2)中, r 为变量 z 的模, $e^{j\omega}$ 为其相位,可见离散时间傅里叶变换是模为 1 的 z 变换。从以上分析可见,拉普拉斯变换和 z 变换均包含了傅里叶变换所对应频率域的信息,因此以这两个变量为基本变量的 s 域和 z 域均称为复频域。前者对应于连续时间信号与系统的分析,后者则对应于离散时间信号与系统的分析。

我们将会看到,拉普拉斯变换和 z 变换都有很多有用的性质,它们不仅包括了一些能够用傅里叶变换进行分析的性质,而且还提供了许多不能应用傅里叶变换的分析方法。例如,在傅里叶变换中,若信号在所关注的区间是无界的,则其傅里叶变换是不收敛或不存在的。但是,对于拉普拉斯变换来说,可以通过适当选择收敛区域而使在频域傅里叶变换不收敛的

信号在 s 域收敛,以便进行下一步的分析处理。因此在某种意义上来说,信号与系统的复频域分析是一种比傅里叶分析更为有用的工具。

3.2 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换是工程数学中常用的一种积分变换,又称为拉氏变换。拉普拉斯变换是一种线性变换,在电子信息技术领域,拉普拉斯变换的作用是将连续时间信号与系统由时间域变换到以 s 为自变量的复频域,从而实现对信号与系统的分析和简化处理。

3.2.1 拉普拉斯变换的定义

1. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

第2章给出了连续时间信号 $x(t)$ 傅里叶变换的定义为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (3.3)$$

对于某些随时间增长的信号,傅里叶变换可能不收敛。例如,若信号 $x(t) = e^{at}$, $a > 0$,则该信号的傅里叶变换不收敛。

为了使更多的函数能够收敛,拉普拉斯变换的思路是对信号 $x(t)$ 引入一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为任意实数)。将衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 与信号 $x(t)$ 相乘,再对乘积 $x_1(t) = e^{-\sigma t}x(t)$ 做傅里叶变换,收敛性就容易满足了,即

$$X_1(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t}x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\Omega)t} dt \quad (3.4)$$

将式(3.4)中的 $\sigma+j\Omega$ 记为一个新的变量 s ,则得到双边拉普拉斯变换(bilateral Laplace transform)的定义。

定义 3.1 连续时间信号 $x(t)$ 的双边拉普拉斯变换定义为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.5)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3.6)$$

式(3.5)和式(3.6)分别为双边拉普拉斯变换及其逆变换。可以分别记为

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] \quad (3.7)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (3.8)$$

双边拉普拉斯变换也常记为

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

其中“ \leftrightarrow ”表示拉普拉斯变换。为了与傅里叶变换中的“ \leftrightarrow ”有所区别,也可以在“ \leftrightarrow ”上加拉普拉斯变换的标记,记为“ $\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}$ ”。

拉普拉斯变换与傅里叶变换的基本区别在于,拉普拉斯变换的复频率变量 s 是复变量,因此,通常称 s 为复频率,称 s 域为复频域。

2. 根据定义的计算

【例 3.1】 设信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$, 试计算其傅里叶变换 $X(j\Omega)$ 和拉普拉斯变换 $X(s)$ 。

解 傅里叶变换为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{j\Omega + a}, \quad a > 0$$

拉普拉斯变换为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}[s] > -a$$

在例 3.1 关于拉普拉斯变换的计算中,实际上考虑了 $\sigma+a>0$ 的条件,从而保证对应的傅里叶变换的收敛性。而 $\sigma+a>0$,通常表示为: $\text{Re}[s]>-a$ 。其中 $\text{Re}[s]$ 表示对复变量 s 求实部。使拉普拉斯变换 $X(s)=0$ 的 s 值称为“零点”(zeros),使拉普拉斯变换 $X(s)\rightarrow\infty$ 的 s 值称为“极点”(poles)。在 s 平面内用零点和极点来表示 $X(s)$ 及其特性的图示称为 $X(s)$ 的零极图(pole-zero plot)。

【例 3.2】 设信号 $x(t)=-e^{-at}u(-t)$,求其拉普拉斯变换 $X(s)$ 。

$$\text{解} \quad X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} u(-t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}[s] < -a$$

比较例 3.1 和例 3.2 可以发现,两个例题中不同的时间信号却对应相同的拉普拉斯变换式。但是需要注意的是,使这个变换式成立的 s 取值范围是不同的。例 3.1 使变换式收敛的区域是 $\text{Re}[s]>-a$,而例 3.2 使变换式收敛的区域是 $\text{Re}[s]<-a$ 。通常,称拉普拉斯变换式收敛的 s 的取值范围为拉普拉斯变换的收敛域(region of convergence, ROC)。图 3.1 给出了对应于例 3.1 和例 3.2 的 s 平面收敛域的示意图,其中阴影部分表示拉普拉斯变换的收敛域,符号“×”表示拉普拉斯变换式的极点。图 3.1 中,横轴 $\text{Re}[s]$ 表示复变量的实部 σ ,也可以写为 σ 的形式,纵轴 $\text{Im}[s]$ 表示复变量的虚部 $j\Omega$,也可以写为 $j\Omega$ 的形式。

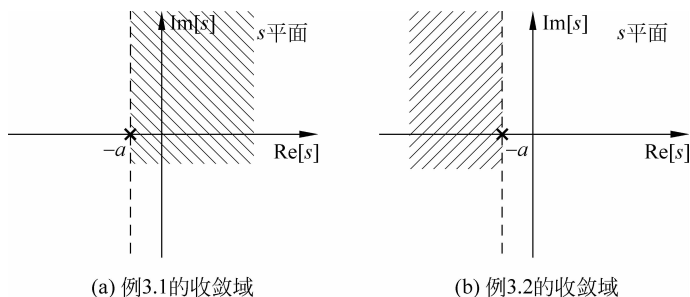


图 3.1 拉普拉斯变换收敛域示意图

3.2.2 拉普拉斯变换收敛域的性质

所谓收敛域就是使拉普拉斯变换 $X(s)$ 收敛的复变量 s 的取值范围。拉普拉斯变换收敛域有以下主要性质,我们不加证明地给出如下:

性质 3.1 $X(s)$ 的 ROC 是由 s 平面内平行于 $j\Omega$ 轴的带状区域所组成。

性质 3.2 有理拉普拉斯变换的 ROC 内不包含任何极点。

性质 3.3 若信号 $x(t)$ 是有限时宽(finite duration)的,且绝对可积,则其 ROC 为整个 s 平面。

性质 3.4 若信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是有理的,则其 ROC 被极点所界定或延

伸到无穷远处。另外,在 ROC 内不包含任何极点。

性质 3.5 若信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是有理的,且若 $x(t)$ 为右边信号(right sided signal),则其 ROC 在 s 平面上位于最右边极点的右边;若 $x(t)$ 为左边信号(left sided signal),则其 ROC 在 s 平面上位于最左边极点的左边。

以上性质中提到的“有理拉普拉斯变换”是指拉普拉斯变换式 $X(s)$ 为有理多项式的形式。

【例 3.3】 已知 $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其他 } t \end{cases}$, 试求其拉普拉斯变换 $X(s)$ 。

解 根据定义,

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]$$

由于 $x(t)$ 为有限时宽信号且绝对可积,根据性质 3.3,其拉普拉斯变换 $X(s)$ 的 ROC 应为整个 s 平面。但是从 $X(s)$ 的形式上看,该式有一个极点在 $s = -a$ 处,与性质 3.3 不符。

实际上, $X(s)$ 的表达式在 $s = -a$ 处有一个零点,即在该处 $X(s)$ 为 $\frac{0}{0}$ 的形式。这样,对 $X(s)$ 在 $s = -a$ 处应用罗比塔法则(L'Hôpitals rule),可以得到

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left\{ \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \right\} = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT} = T$$

这样,仍然符合性质 3.3 的规律。

3.2.3 拉普拉斯逆变换

式(3.6)给出了拉普拉斯逆变换的定义式,现再次给出如下

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (3.6)$$

上式表明,时间信号 $x(t)$ 可以用一个复指数信号的加权积分来表示。式中的积分路径对应于 s 平面内满足 $\text{Re}[s] = \sigma$ 的全部 s 点平行于 $j\Omega$ 轴的直线,在 $X(s)$ 的 ROC 中可以任意选取这样一条直线。通常,式(3.6)的计算需要利用复平面上的曲线积分,一般不采用。本节介绍 $X(s)$ 的部分分式求解法和留数求解法。

1. 拉普拉斯逆变换的部分分式求解法

拉普拉斯逆变换的部分分式求解法适用于 $X(s)$ 为有理分式的情况,其基本思想是将一个有理的代数表达式展开成低阶次项的线性组合,然后分别对每一个低阶次项求取拉普拉斯逆变换。

假定 $X(s)$ 没有重阶极点(即多个极点重合在一起的情况),且分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次,这样, $X(s)$ 可以展开为

$$X(s) = \sum_{i=1}^m X_i(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s+a_i} \quad (3.9)$$

根据 $X(s)$ 的 ROC,该式中每一项 $X_i(s)$ 的 ROC 都可以确定,然后可以对每一个 $X_i(s)$ 求取拉普拉斯逆变换。式(3.9)中的每一个 $X_i(s) = \frac{A_i}{s+a_i}$ 的逆变换都有两种可能。

若 ROC 位于极点 $s = -a_i$ 的右边,则逆变换为 $X_i(s) = \frac{A_i}{s+a_i} \leftrightarrow A_i e^{-a_i t} u(t) = x_i(t)$, 是一

个右边信号。

若 ROC 位于极点 $s = -a_i$ 的左边, 则逆变换为 $X_i(s) = \frac{A_i}{s+a_i} \leftrightarrow -A_i e^{-a_i t} u(-t) = x_i(t)$,

是一个左边信号。

对每一个 $x_i(t)$ 求和, 则得到拉普拉斯逆变换 $x(t)$, 即

$$x(t) = \sum_{i=1}^m x_i(t) \quad (3.10)$$

【例 3.4】 已知信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, $\text{Re}[s] > -1$, 试求 $x(t)$ 。

解 先对 $X(s)$ 进行部分分式展开, 有

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

利用待定系数法确定系数 A 和 B 的值, 得到

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

对于 $X(s)$ 展开式的第一项 $X_1(s) = \frac{1}{s+1}$ 来说, $X(s)$ 的 ROC 位于其极点 $s = -1$ 的右边, 故对应的时间信号 $x_1(t)$ 应为右边信号, 进而得到

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] = e^{-t} u(t)$$

对于 $X(s)$ 展开式的第二项 $X_2(s) = -\frac{1}{s+2}$ 来说, $X(s)$ 的 ROC 也位于其极点 $s = -2$ 的右边, 故对应的时间信号 $x_2(t)$ 也为右边信号, 即

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_2(s)] = -e^{-2t} u(t)$$

因此, $X(s)$ 对应的时间信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] u(t), \quad \text{Re}[s] > -1$$

若例 3.4 拉普拉斯变换变为 $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, $\text{Re}[s] < -2$, 则部分分式分解后得到的 $\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$ 中, $X(s)$ 的 ROC 均位于这两项对应极点的左边, 因此这两项对应的时间信号均为左边信号, 从而有

$$x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t}) u(-t), \quad \text{Re}[s] < -2$$

若例 3.4 拉普拉斯变换变为 $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, $-2 < \text{Re}[s] < -1$, 则部分分式分解后得到的 $\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$ 中, $X(s)$ 的 ROC 位于第一项极点的左边, 第二项极点的右边。这样, 第一项对应一个左边信号, 第二项对应于一个右边信号, 即

$$x(t) = -e^{-t} u(-t) - e^{-2t} u(t), \quad -2 < \text{Re}[s] < -1$$

【例 3.5】 求 $X(s) = \frac{s^2+4s+7}{(s+1)(s+2)}$, $\text{Re}[s] > -1$ 的拉普拉斯逆变换。

解 利用长除法得到 $X(s) = \frac{s^2+4s+7}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{s+5}{(s+1)(s+2)}$, 再进一步进行部分分式分解, 有 $X(s) = 1 + \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2}$ 。求其拉普拉斯逆变换, 有 $x(t) = \delta(t) + 4e^{-t} u(t) - 3e^{-2t} u(t)$ 。

2. 拉普拉斯逆变换的留数求解法

考虑因果信号 $x(t)$, 根据复变函数理论中的留数定理, 有

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(s) e^{st} ds = \sum_i \text{Res}_i \quad (3.11)$$

式中左边的曲线积分是在 s 平面内沿一不通过 $X(s)$ 极点的闭合曲线(称为围线) C 上进行的。上式右边则表示此围线 C 中 $X(s)$ 各极点上留数之和。比较式(3.11)与式(3.6)给出的拉普拉斯逆变换定义式, 可见, 要利用留数定理来计算拉普拉斯逆变换, 需要在式(3.6)的积分线上补充一条积分路径以构成一条封闭曲线。通常考虑该补充的积分路径为半径无穷大的圆弧, 如图 3.2 所示。同时还要满足

$$\int_{ACB} X(s) e^{st} ds = 0 \quad (3.12)$$

根据复变函数理论中的约当辅助定理, 上述条件一般是可以满足的。这样, 拉普拉斯逆变换的运算就转变为求 $X(s)$ 各极点上留数的运算, 从而使计算明显简化。

当 $X(s)$ 为有理函数时, 一阶极点 $s=p_i$ 的留数为

$$\text{Res}_i = [(s-p_i)X(s)e^{st}]_{s=p_i} \quad (3.13)$$

k 阶极点的留数为

$$\text{Res}_i = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s-p_i)^k X(s) e^{st} \right]_{s=p_i} \quad (3.14)$$

将式(3.13)和式(3.14)与拉普拉斯逆变换的部分分式法相比, 可以看出两者是一致的。不过, 留数法除了可以处理有理拉普拉斯变换式之外, 还可以处理无理拉普拉斯变换式, 因此适用范围更广。需要注意的是, 由于冲激函数及其导数不符合约当引理, 因此当 $X(s)$ 所对应的时间信号 $x(t)$ 中存在冲激函数及其导数时, 需先将 $X(s)$ 分解为多项式与真分式之和(参见例 3.5), 由多项式决定冲激函数及其导数项, 再对真分式求留数。

【例 3.6】 试用留数法求 $X(s) = \frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换。

解 $X(s)$ 有 2 个单极点 $p_1=0, p_2=-3$ 和一个二重极点 $p_3=-1$ 。按照式(3.13)和式(3.14)求各极点上的留数

$$\text{Res}_1 = [(s-p_1)X(s)e^{st}]_{s=p_1=0} = \left[\frac{s+2}{(s+3)(s+1)^2} e^{st} \right]_{s=p_1=0} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Res}_2 = \left[(s+3) \frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2} e^{st} \right]_{s=p_2=-3} = \frac{1}{12} e^{-3t}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_3 &= \frac{1}{(p-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s-p_3)^k X(s) e^{st} \right]_{s=p_3=-1} \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \left[\frac{d}{ds} (s+1)^2 \frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2} e^{st} \right]_{s=p_3=-1} = -\frac{1}{2} \left(t + \frac{3}{2} \right) e^{-t} \end{aligned}$$

这样, 拉普拉斯逆变换为

$$x(t) = \sum_{i=1}^3 \text{Res}_i = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{12} e^{-3t} - \frac{1}{2} \left(t + \frac{3}{2} \right) e^{-t} \right] u(t)$$

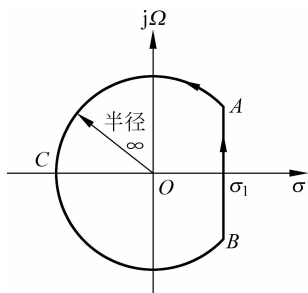


图 3.2 $X(s)$ 的围线积分路径

3.2.4 拉普拉斯变换的性质和常用变换对

1. 拉普拉斯变换的性质

与傅里叶变换类似,拉普拉斯变换也有一系列非常重要的性质。这些性质的学习与掌握,对于深刻理解拉普拉斯变换的理论方法,并熟练解决拉普拉斯变换相关的问题具有重要意义。表 3.1 给出了拉普拉斯变换的主要性质。

表 3.1 拉普拉斯变换的主要性质

序号	性质	连续时间信号 $x(t), x_1(t), x_2(t)$	拉普拉斯变换 $X(s), X_1(s), X_2(s)$	ROC R, R_1, R_2
1	线性性质	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	至少 $R_1 \cap R_2$
2	时移性质	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
3	s 域平移性质	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s-s_0)$	R 的平移
4	时域尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R}{a}$
5	共轭对称性质	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
6	卷积性质	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) X_2(s)$	至少 $R_1 \cap R_2$
7	时域微分性质	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	至少 R
8	时域积分性质	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	至少 $R_1 \cap \{\text{Re}[s] > 0\}$
9	s 域微分性质	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
10	初值和终值定理	若 $t < 0, x(t) = 0$, 且在 $t = 0$ 处不包括任何冲激或高阶奇异函数, 则 $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} X(s)$		

【例 3.7】 求 $x(t) = te^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解 由于 $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \text{Re}[s] > -a$, 根据频域微分性质, 有

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds} \frac{1}{s+a} = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{Re}[s] > -a$$

2. 常用拉普拉斯变换对

与傅里叶变换的情况相同,拉普拉斯变换也有一些常用的变换对。这些变换对于解决拉普拉斯变换相关问题有很大帮助。表 3.2 给出了常用拉普拉斯变换对。

表 3.2 常用拉普拉斯变换对

序号	信号名称	信号 $x(t)$ 表达式	拉普拉斯变换 $X(s)$	ROC
1	单位冲激信号	$\delta(t)$	1	全部 s
2	单位阶跃信号	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}[s] > 0$
3	反向单位阶跃信号	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}[s] < 0$

续表

序号	信号名称	信号 $x(t)$ 表达式	拉普拉斯变换 $X(s)$	ROC
4	单边幂函数信号	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}[s] > 0$
5	反向单边幂函数信号	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}[s] < 0$
6	单边指数信号	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}[s] > -a$
7	反向单边指数信号	$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}[s] < -a$
8	由单边指数的频谱运算导出的信号	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}[s] > -a$
		$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}[s] < -a$
9	单位冲激时移信号	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	全部 s
10	单边余弦信号	$[\cos\Omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > 0$
11	单边正弦信号	$[\sin\Omega_0 t]u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > 0$
12	余弦调制单边指数信号	$[e^{-at} \cos\Omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > -a$
13	正弦调制单边指数信号	$[e^{-at} \sin\Omega_0 t]u(t)$	$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > -a$

3.3 连续时间信号与系统的复频域分析

本章 3.2 节介绍了拉普拉斯变换的基本概念和基本原理,可以看到,拉普拉斯变换与傅里叶变换有许多相似之处。实际上,拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广,或者说傅里叶变换是拉普拉斯变换当 $\sigma=0$ 的特例。对于系统分析来说,傅里叶变换比较适合分析信号与系统的频率特性,而拉普拉斯变换除了可以用于分析信号与系统频率方面的问题外,更多的是用于求解线性系统时域微分方程,对系统进行因果性和稳定性分析,并且更方便地将信号与系统用方框图或信号流图的方式表示出来。本节重点介绍拉普拉斯变换用于 LTI 系统的分析问题,同时简单介绍单边拉普拉斯变换(unilateral Laplace transform)及其应用。

3.3.1 微分方程的拉普拉斯变换与系统函数

一般来说,线性时不变系统可以用线性常系数微分方程来表示。式(3.15)给出了 N 阶 LTI 系统的微分方程表示

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.15)$$

式中, M, N 分别表示输入项和输出项的阶数,通常满足 $N \geq M$, b_k, a_k 分别表示输入项和输

出项的加权系数。若对上式两边做拉普拉斯变换,有

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k s^k\right)Y(s) = \left(\sum_{k=0}^M b_k s^k\right)X(s) \quad (3.16)$$

定义系统函数(system function) $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (3.17)$$

一个由线性常系数微分方程所表示的系统,其系统函数总是有理的。由式(3.17)还可以得到进一步的信息。第一,系统的零点和极点可以分别通过令上式的分子为0和分母为0而得到。由系统的零点和极点以及系统的ROC,可以进一步分析系统的因果性、稳定性等性质;第二,上式反映了LTI系统输入信号、输出信号与系统函数的关系。由式(3.17),可以得到

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (3.18)$$

式(3.18)实际上是拉普拉斯变换的卷积性质。它表明,在时域由

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.19)$$

表示的卷积积分运算,可以由拉普拉斯变换而转变为系统函数与输入信号拉普拉斯变换的代数运算。并且, $h(t)$ 与 $H(s)$ 为一对拉普拉斯变换对。第三,如果在 $H(s)$ 中令 $\sigma=0$ (或令 $s=j\Omega$),则可以得到系统的频率响应(或称为传递函数) $H(j\Omega)$,并可以由此进一步分析系统的频率特性。

【例 3.8】 给定一因果LTI系统,其输入输出关系由以下常系数微分方程给出

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t)$$

试求(1)系统函数 $H(s)$; (2)系统的单位冲激响应 $h(t)$; (3)判定系统的稳定性。

解 (1)对给定微分方程两边求拉普拉斯变换,有

$$sY(s) + 5Y(s) = 2X(s)$$

整理,可以得到

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s+5}$$

(2)对系统函数求拉普拉斯逆变换,并根据系统的因果性,可以得到系统的单位冲激响应为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+5}\right) = 2e^{-5t}u(t)$$

(3)由于系统单位冲激响应为因果信号,随着时间的增加而指数衰减,因此是有界的,即满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

因此,该系统是稳定的。

3.3.2 LTI 系统因果性和稳定性分析

在本书的第1章中,我们曾经介绍了系统因果性和稳定性的时域分析判定方法。在这里,我们将会看到,LTI系统的因果性和稳定性问题,可以依据拉普拉斯变换或系统函数得

到更为有效的分析和判定。

1. LTI 系统的因果性判定

我们知道,一个因果 LTI 系统的单位冲激响应满足

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (3.20)$$

即 $h(t)$ 满足严格的右边信号条件(即因果信号条件)。根据 3.2.2 节关于拉普拉斯变换收敛域性质的讨论, $h(t)$ 所对应系统函数 $H(s)$ 的 ROC 应为某个右半 s 平面。即:

性质 3.6(必要条件) 一个因果系统的系统函数 $H(s)$ 的 ROC 是某个右半 s 平面。

需要注意的是,性质 3.6 的相反结论是不一定成立的。即位于最右边极点右边的 ROC 并不能充分保证系统的因果性。

性质 3.7(充分必要条件) 若系统函数 $H(s)$ 是有理的,则系统的因果性等效于 ROC 位于最右边极点的右边的右半 s 平面。

【例 3.9】 试判定下列系统的因果性:

$$(1) H_1(s) = \frac{1}{s+1}, \operatorname{Re}[s] > -1; \quad (2) H_2(s) = \frac{-2}{s^2+1}, -1 < \operatorname{Re}[s] < 1;$$

$$(3) H_3(s) = \frac{e^s}{s+1}, \operatorname{Re}[s] > -1.$$

解 (1) 由于给定系统 $H_1(s)$ 为有理系统,且满足 ROC 为右半 s 平面,根据性质 3.7,可以判断该系统是因果系统。

(2) 给定系统 $H_2(s)$ 为有理系统,但因其 ROC 不满足右半 s 平面条件,所以该系统为非因果系统。

如果由拉普拉斯逆变换求上面各系统函数的单位冲激响应,也可以得到相同的结论。

(3) 尽管 $H_3(s)$ 的 ROC 为右半 s 平面,但是其系统函数不是有理的,因此不能判定其因果性。这时需要求 $H_3(s)$ 的拉普拉斯逆变换,得到 $h_3(t) = e^{-(t+1)} u(t+1)$ 。显然,该系统是非因果的。

2. LTI 系统的稳定性判定

系统的稳定性可以在时间域来进行判定。对于 LTI 系统而言,系统的稳定性对应着其单位冲激响应的绝对可积性,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (3.21)$$

在拉普拉斯变换域(复频域),我们也可以进行系统稳定性的判定。

性质 3.8 当且仅当系统函数 $H(s)$ 的 ROC 包含 $j\Omega$ 轴时,则该 LTI 系统是稳定的。

性质 3.9 当且仅当 $H(s)$ 的全部极点都位于左半 s 平面时,则有理因果系统 $H(s)$ 是稳定的。

【例 3.10】 试判定下列因果系统的稳定性:

$$(1) H_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)}, \operatorname{Re}[s] > 2; \quad (2) H_2(s) = \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}[s] > -2.$$

解 (1) 由于 $H_1(s)$ 为因果系统,且其 ROC 位于最右边极点 $p=2$ 的右边。这样,其 ROC 不包括 $j\Omega$ 轴(如图 3.3(a)所示),故由性质 3.9 判定该系统是不稳定的。

(2) 由于 $H_2(s)$ 为因果系统,且其 ROC 位于极点 $p=-2$ 的右边。这样,其 ROC 包括了 $j\Omega$ 轴(如图 3.3(b)所示),故由性质 3.9 判定该系统是稳定的。

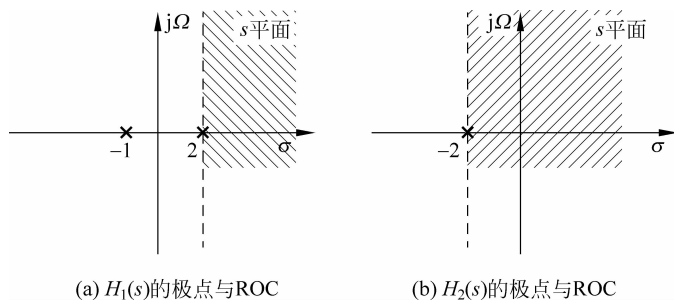


图 3.3 给定系统的收敛域与极点分布图

将系统函数 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 进行拉普拉斯逆变换, 求得系统单位冲激响应 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$, 我们也可以得到相同的结论。

3.3.3 单边拉普拉斯变换及其应用

本章由式(3.5)定义的拉普拉斯变换, 实际上是双边拉普拉斯变换(bilateral Laplace transform), 即其对于时间变量的积分区间为 $(-\infty, +\infty)$, 对应于定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续时间信号。在自然界和工程实际中, 许多信号都是因果信号, 对于因果信号, 在进行拉普拉斯变换时, 可以不考虑 $t < 0$ 区间的影响, 而仅在 $(0, +\infty)$ 对信号进行积分。这就是单边拉普拉斯变换, 这种变换对于分析具有非零初始条件的系统是非常有用的。

定义 3.2 连续时间信号 $x(t)$ 的单边拉普拉斯变换定义为

$$X_u(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (3.22)$$

式中, $X_u(s)$ 表示单边拉普拉斯变换; 积分下限 0^- 表示在积分区间中包括位于 $t=0$ 时刻的任何冲激信号或高阶奇异信号。由于单边拉普拉斯变换总是对 $t > 0$ 的区间进行信号积分, 因此其 ROC 总是对应于某个右半 s 平面。

对比双边拉普拉斯变换 $X(s)$ 和单边拉普拉斯变换 $X_u(s)$, 可以直观地看到, 对于任意在 $t < 0$ 区间为 0 的信号, 其双边和单边拉普拉斯变换是相同的。而对于任意两个在 $t < 0$ 区间不同, 在 $t \geq 0$ 区间相同的信号, 二者的双边拉普拉斯变换是不同的, 而单边拉普拉斯变换则是相同的。

【例 3.11】 给定连续时间信号为: $x(t) = e^{-a(t+1)} u(t+1)$, 试求其双边拉普拉斯变换 $X(s)$ 和单边拉普拉斯变换 $X_u(s)$ 。

解 先求双边拉普拉斯变换: 由于 $e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \text{Re}[s] > -a$, 由双边拉普拉斯变换的时移性质, 有 $e^{-a(t+1)} u(t+1) \leftrightarrow \frac{e^{-s}}{s+a}, \text{Re}[s] > -a$, 因此

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s+a}, \quad \text{Re}[s] > -a$$

再求单边拉普拉斯变换

$$X_u(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-a} e^{-(s+a)t} dt = \frac{e^{-a}}{s+a}, \quad \text{Re}[s] > -a$$

显然, $X(s)$ 和 $X_u(s)$ 是不同的。

单边拉普拉斯变换的主要性质与双边拉普拉斯变换的基本相同,例如线性性质、 s 域平移性质、时域尺度变换性质、共轭性质和 s 域微分性质等,初值定理与终值定理也成立。但是,其时域微分和时域积分等性质是不同的,现将与双边拉普拉斯变换不同的单边拉普拉斯变换性质列于表 3.3 中。

表 3.3 单边拉普拉斯变换的主要性质

序号	性 质	连续时间信号 $x(t)$	单边拉普拉斯变换 $X_u(s)$
1	时域微分性质	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX_u(s) - x(0^-)$
2	高阶时域微分性质	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$s^k X_u(s) - s^{k-1}x(0^-) - s^{k-2}x'(0^-) - \dots - x^{(k-1)}(0^-)$
3	时域积分性质	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}X_u(s)$

表 3.3 没有给出收敛域,是由于单边拉普拉斯变换的 ROC 总是在某个右半 s 平面。

【例 3.12】 计算下列信号的单边拉普拉斯变换:

(1) $x(t) = \delta(t) + e^t u(t)$; (2) $x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$ 。

解 (1) 由于信号 $x(t)$ 为因果信号,故单边拉普拉斯变换与双边拉普拉斯变换相同,有

$$X_u(s) = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}, \quad \text{Re}[s] > 1$$

(2) $x(t)$ 为因果信号,计算其单边拉普拉斯变换,得到

$$X_u(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}[s] > -1$$

【例 3.13】 利用单边拉普拉斯变换求解具有非零初始条件的线性常系数微分方程。已知,系统的微分方程、初始条件和输入信号为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad y(0^-) = b, \quad y'(0^-) = c, \quad x(t) = au(t)$$

解 对上式两边求单边拉普拉斯变换,有

$$s^2 Y_u(s) - bs - c + 3sY_u(s) - 3b + 2Y_u(s) = \frac{a}{s}$$

经整理,有

$$Y_u(s) = \frac{b(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{c}{(s+2)(s+2)} + \frac{a}{s(s+2)(s+2)}$$

上式中右边最后一项,实际上是系统初始状态为 0(称为初始松弛条件)时的响应,称为零状态响应(zero-state response)。而上式右边的前两项实际上是系统输入为 0 时的响应,称为零输入响应(zero-input response)。由此,系统总的响应为系统的零状态响应与零输入响应之和。进一步整理,得到

$$Y_u(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

再求拉普拉斯逆变换,有

$$y(t) = (1 - e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

3.4 z 变换

z 变换(z -transform)是对离散时间信号进行的一种数学变换。它在离散时间信号与系统中的地位,如同拉普拉斯变换在连续时间信号与系统中的地位。 z 变换是分析线性时不变系统的重要工具,在数字信号处理、计算机控制系统等领域有广泛的应用。

3.4.1 z 变换的定义

1. 定义 z 变换

定义 3.3 离散时间信号 $x(n)$ 的 z 变换定义为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.23)$$

其逆变换为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz \quad (3.24)$$

式中, z 为复变量,常写为极坐标形式如下

$$z = re^{j\omega} \quad (3.25)$$

式中, r 表示复变量 z 的模,即 $r=|z|$, ω 表示其相位。

式(3.23)和式(3.24)给出了双边 z 变换(bilateral z -transform)的定义,其中,式(3.23)为 z 变换的正变换,式(3.24)为其逆变换。 \oint 表示半径为 r 的以原点为中心的封闭圆上逆时针方向环绕一周的积分。

式(3.23)和式(3.24)给出的双边 z 变换可以记为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] \quad (3.26)$$

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] \quad (3.27)$$

也常记为 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ 或 $x(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z)$ 。

2. z 变换与离散时间傅里叶变换的关系

将式(3.25)代入式(3.23),有

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n} \quad (3.28)$$

由上式可见, $X(z) = X(re^{j\omega})$ 实际上是离散时间信号 $x(n)$ 乘以实指数信号 r^{-n} 之后的离散时间傅里叶变换。可以写为

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)r^{-n}] \quad (3.29)$$

实指数信号 r^{-n} 可能是指数上升的,也可能是指数衰减的,取决于 r 的取值。若 $r=1$,则 z 变换退化为离散时间傅里叶变换。参照图 3.4 进行进一步的讨论,在 z 平面中,横轴表示复变量 z 的实部,用 Re 表示,纵轴表示其虚部,用 Im 表示。若 z 的模为 $r=1$,则 $z=e^{j\omega}$,在 z 平面中是一个半径为 1 的圆,称为单位圆(unit circle),如图 3.4 所示。因此,离散时间傅里叶变换实际上是单位圆上的 z 变换,或者说, z 变换是离散时

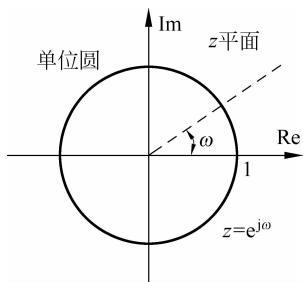


图 3.4 z 平面及单位圆

间傅里叶变换在整个 z 平面上的扩展。

与拉普拉斯变换相似, z 变换也存在一个收敛域的问题。使 z 变换收敛的 z 值集合称为收敛域, 也记为 ROC。

3. z 变换计算举例

【例 3.14】 计算单边指数序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的 z 变换(离散时间信号又常称为“序列”)。

解 将 $x(n)$ 代入 z 变换的定义式(3.23), 有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

为了使 $X(z)$ 收敛, 要求满足 $\sum_{n=0}^{+\infty} |az^{-1}|^n < \infty$, 即要求满足 $|az^{-1}| < 1$, 或写为 $|z| > |a|$ 。这样

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

式中, $|z| > |a|$ 即为该 z 变换的收敛域。上式也可以写为 $X(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$ 。

在给定序列 $x(n)$ 中, 若 $a=1$, 则 $x(n)=u(n)$ 为单位阶跃信号, 其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

与连续时间信号的拉普拉斯变换相同, z 变换的零点和极点也是非常重要的概念。使 z 变换 $X(z)$ 为 0 的 z 值称为零点, 使 z 变换 $X(z)$ 趋于无穷的 z 值称为极点。在例 3.14 中, $z=0$ 为零点, $z=a$ 为极点。图 3.5 给出了例 3.14 z 平面上收敛域和零极点的示意图。

【例 3.15】 试计算 $x(n)=-a^n u(-n-1)$ 的 z 变换。

解 由于 $X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$, 若满足 $|a^{-1}z| < 1$, 或写为 $|z| < |a|$, 则 $X(z)$ 收敛为

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

比较例 3.14 和例 3.15 的结果, 可以看出, 对于不同的离散时间序列, 二者的 z 变换计算式是相同的, 但是二者的收敛域不同。因此需要特别注意的是, 表示序列的 z 变换时, 一定要标注 z 变换表达式的收敛域, 否则 z 变换是不完整的。图 3.6 给出了例 3.15 的零极点图和收敛域示意图。

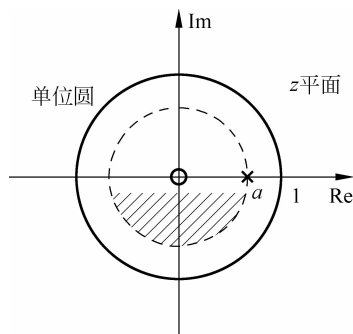
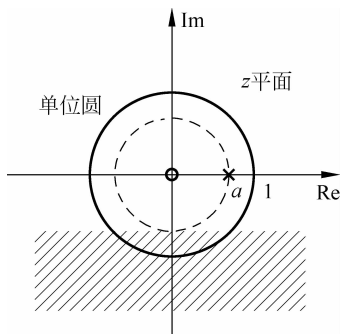


图 3.5 z 平面上收敛域和零极点示意图(例 3.14) 图 3.6 z 平面上收敛域和零极点示意图(例 3.15)

3.4.2 z 变换收敛域的性质

本节不加证明地给出 z 变换收敛域(ROC)的主要性质。

性质 3.10 $X(z)$ 的 ROC 是在 z 平面内以原点为中心的圆环。

性质 3.11 ROC 内不包含任何极点。

性质 3.12 若 $x(n)$ 是有限长序列, 则 $X(z)$ 的 ROC 为整个 z 平面, 可能除去 $z=0$ 和(或) $z=\pm\infty$ 。

性质 3.13 若 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的, 则其 ROC 被极点所界定, 或者延伸至无穷远处。

性质 3.14 若 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的, 且若 $x(n)$ 是右边序列, 则其 ROC 位于 z 平面内最外层极点的外边。特别地, 若 $x(n)$ 是因果序列, 则其 ROC 包括 $z=\pm\infty$ 。

性质 3.15 若 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的, 且若 $x(n)$ 是左边序列, 则其 ROC 位于 z 平面内最里层极点的里边, 且向内延伸可能包括 $z=0$ 。特别地, 且若 $x(n)$ 是反因果序列(anti-causal sequence), 则其 ROC 包括 $z=0$ 。

【例 3.16】 设序列 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})}$ 。

(1) 试分析 $X(z)$ 的零极点情况; (2) 绘出 $X(z)$ 可能的收敛域的示意图。

解 (1) $X(z)$ 有二阶零点, 均为 $z=0$ 。 $X(z)$ 有 2 个极点, 分别为 $z=1/2$ 和 $z=2$ 。

(2) 根据 $X(z)$ 有 2 个不同的极点, 其有 3 种可能的 ROC。即① $|z| > 2$; ② $|z| < 1/2$; ③ $1/2 < |z| < 2$ 。绘出 $X(z)$ 上述 3 种不同情况的收敛域, 如图 3.7 所示。

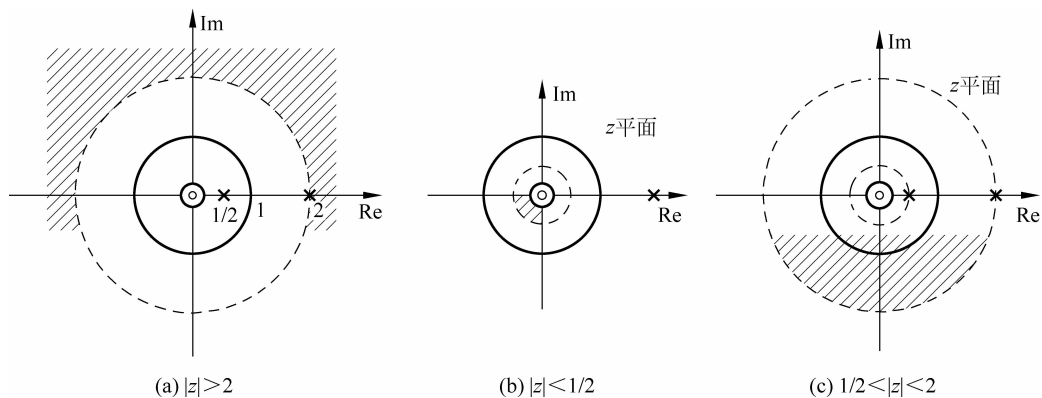


图 3.7 3 种不同情况的收敛域

3.4.3 z 逆变换

式(3.24)给出了 z 逆变换的定义式, 现再次给出如下

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

式中, \oint 表示在 z 平面上以半径为 r , 原点为中心的封闭圆上沿逆时针方向环绕一周的积分。

与拉普拉斯逆变换式(3.6)相对应,对式(3.24)的求解需要利用复平面上的围线积分。 z 逆变换的计算一般并不采用由定义直接计算的方式,本节介绍几种常用的 z 逆变换的求解方法。

1. z 逆变换的部分分式求解法

设离散时间信号 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 可以表示为一组一阶项的线性组合的形式,如式(3.30)所示

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}} \quad (3.30)$$

其中每个 z^{-1} 的一阶项的逆变换均可以直接得到。实际上,对于上式中的每个一阶项的 z 逆变换,根据 ROC 与极点的关系有两种可能。

若 $X(z)$ 的 ROC 位于极点 $z=a_i$ 所对应的圆的外面,则相应一阶项的 z 逆变换为 $X_i(z) = z^{-1} \left(\frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}} \right) = A_i a_i^n u(n)$;

若 $X(z)$ 的 ROC 位于极点 $z=a_i$ 所对应的圆的里面,则相应一阶项的 z 逆变换为 $X_i(z) = z^{-1} \left(\frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}} \right) = -A_i a_i^n u(-n-1)$ 。

实际上,采用部分分式展开法求 z 逆变换,并不局限于式(3.30)所示的一阶项线性组合的形式,也可以包括其他 z 逆变换易于直观求解的项。

【例 3.17】 试求 $X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$, $|z| > \frac{1}{3}$ 的 z 逆变换。

解 $X(z)$ 有 2 个极点,即 $z=1/3$ 和 $z=1/4$ 。由于 $X(z)$ 为 z 的有理函数,且其 ROC 位于最外面极点的外面,因此, $X(z)$ 对应的离散时间信号 $x(n)$ 为右边信号。这样,将 $X(z)$ 展开为部分分式,有

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

对上式的每一项求取 z 逆变换,再合成,有

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

【例 3.18】 试求 $X(z)$ 的 z 逆变换。设 $X(z)$ 的表达式与例 3.17 的相同,但收敛域分别为(1) $|z| < \frac{1}{4}$; (2) $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ 。

解 (1) 由于 $X(z)$ 的 ROC 在 $X(z)$ 最里面极点的里面,故对应的离散时间信号 $x(n)$ 为左边信号,有

$$x(n) = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1) - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

(2) 由于 $X(z)$ 的 ROC 位于 $X(z)$ 两个极点之间,即 $X(z)$ 的 ROC 位于极点 $z=1/4$ 的外面,但位于极点 $z=1/3$ 的里面。故对应 $z=1/4$ 这一项的时间信号为右边信号,对应 $z=1/3$ 这一项的时间信号为左边信号。有

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

2. z 逆变换的留数求解法

借助于复变函数的留数定理,可以把式(3.24)所示的 z 逆变换表示为各极点的留数之和,即

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz = \sum_m \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (3.31)$$

式中,Res 表示极点的留数; z_m 为 $X(z) z^{n-1}$ 的极点。

若 $X(z) z^{n-1}$ 在 $z=z_m$ 有一阶极点,则其留数为

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} = [(z - z_m) X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (3.32)$$

若 $X(z) z^{n-1}$ 在 $z=z_m$ 有 k 阶极点,则其留数为

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_m)^k X(z) z^{n-1} \right]_{z=z_m} \quad (3.33)$$

【例 3.19】 试求 $X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$, $|z|>1$ 的 z 逆变换。

解 $X(z)$ 有 2 个一阶极点,分别为 $z_1=1$ 和 $z_2=1/2$ 。这样

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_1} = \left[(z - 0.5) \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} z^{n-1} \right]_{z=1} = 2$$

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_2} = \left[(z - 0.5) \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} z^{n-1} \right]_{z=0.5} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

由此

$$x(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

3. z 逆变换幂级数展开法

由于 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$ 定义为 z^{-1} 的幂级数,因此只要在给定的 ROC 内将 $X(z)$ 展开成幂级数,其系数就是所求的序列 $x(n)$ 。

考虑 $X(z)$ 为有理函数的情况,将 $X(z)$ 写为分子多项式 $N(z)$ 和分母多项式 $D(z)$ 的形式如下

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (3.34)$$

若 $X(z)$ 的 ROC 满足 $|z|>R_1$ 的形式,则 $x(n)$ 为因果序列,此时 $N(z)$ 和 $D(z)$ 按 z 的降幂(或 z^{-1} 的升幂)次序排列;若 $X(z)$ 的 ROC 满足 $|z|<R_2$ 的形式,则 $x(n)$ 为左边序列,此时 $N(z)$ 和 $D(z)$ 按 z 的升幂(或 z^{-1} 的降幂)次序排列。再利用长除法,可以求得 $x(n)$ 。这里的 R_1 和 R_2 分别表示 $X(z)$ 收敛域边界所对应的圆。

【例 3.20】 试利用长除法求 $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$ 的 z 逆变换。

解 利用长除法,有

$$1 - az^{-1} \sqrt{1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots}$$

$$\frac{1 - az^{-1}}{az^{-1}}$$

$$\frac{az^{-1} - a^2 z^{-2}}{a^2 z^{-2}}$$

或可以写为

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$

由于 $|az^{-1}| < 1$, 故该级数收敛。将上式与 z 变换的定义式(3.23)比较, 可得: $x(n) = 0$, 若 $n < 0$, 且 $x(0) = 1, x(1) = a, x(2) = a^2, \dots$, 则有

$$x(n) = a^n u(n)$$

3.4.4 z 变换的性质和常用变换对

1. z 变换的性质

与傅里叶变换和拉普拉斯变换一样, z 变换也具有许多性质。这些性质在离散时间信号与系统的分析中是非常重要的工具。表 3.4 给出了 z 变换的主要性质。

表 3.4 z 变换的主要性质

序号	性 质	离散时间信号 $x(n), x_1(n), x_2(n)$	z 变换 $X(z), X_1(z), X_2(z)$	ROC R, R_1, R_2
1	线性性质	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_2$
2	时移性质	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$	R (可能增加或去除原点或 ∞ 点)
3	z 域尺度变换性质	$e^{jn_0} x(n)$	$X(e^{-jn_0} z)$	R
		$z_0^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 R$
		$a^n x(n)$	$X(a^{-1} z)$	R 的比例伸缩
4	时间反转性质	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	R^{-1}
5	时间扩展性质	$x_{(k)}(n) = \begin{cases} x(r), & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$	$X(z^k)$	$R^{1/k}$
6	共轭对称性质	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
7	卷积性质	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) X_2(z)$	至少 $R_1 \cap R_2$
8	一阶差分	$x(n) - x(n-1)$	$(1 - z^{-1}) X(z)$	至少 $R_1 \cap \{ z > 0\}$
9	时域累加性质	$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	至少 $R_1 \cap \{ z > 1\}$
10	z 域微分性质	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R
11	初值定理	若 $n < 0, x(n) = 0$	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
12	终值定理		$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z)$	

【例 3.21】 已知单位阶跃信号 $u(n)$ 的 z 变换为 $\frac{1}{1-z^{-1}}$, 试求 $x(n) = nu(n)$ 的 z 变换。

解 由 z 域微分性质, 有

$$\mathcal{Z}[nu(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[u(n)] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

【例 3.22】 已知 $X(z) = \ln(1+az^{-1})$, $|z| > |a|$, 试求其 z 逆变换。

解 根据 z 域微分性质, 有 $\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z) = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$, $|z| > |a|$ 。上式右边的 z 逆变换可以利用时移性质求得

$$a(-a)^n u(n) \leftrightarrow \frac{a}{1+az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

将上式与时移性质结合, 有

$$a(-a)^{n-1} u(n-1) \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

因此

$$x(n) = \frac{-(-a)^n}{n} u(n-1)$$

2. 常用的 z 变换对

与傅里叶变换和拉普拉斯变换的情况相同, z 变换也有一些常用的变换对。这些变换对对于解决 z 变换相关的问题很有帮助。表 3.5 给出了常用的 z 变换对。

表 3.5 常用 z 变换对

序号	信号名称	信号 $x(n)$ 表达式	拉普拉斯变换 $X(z)$	ROC
1	单位脉冲信号	$\delta(n)$	1	全部 z
2	单位阶跃信号	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3	反向单位阶跃信号	$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4	单位脉冲时移信号	$\delta(n-m)$	z^{-m}	全部 z , 除去 0 或 ∞
5	单边指数信号	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6	反向单边指数信号	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7	由单边指数的频谱运算导出的信号	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
		$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
8	单边余弦信号	$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - (\cos\omega_0)z^{-1}}{1 - (2\cos\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	单边正弦信号	$(\sin\omega_0 n)u(n)$	$\frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1 - (2\cos\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10	余弦调制单边指数信号	$(r^n \cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - (r\cos\omega_0)z^{-1}}{1 - (2r\cos\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
11	正弦调制单边指数信号	$(r^n \sin\omega_0 n)u(n)$	$\frac{(r\sin\omega_0)z^{-1}}{1 - (2r\cos\omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

3.5 离散时间信号与系统的复频域分析

本章 3.4 节介绍了 z 变换的基本概念和基本原理,可以看到, z 变换与离散时间傅里叶变换有许多相似之处。实际上, z 变换是离散时间傅里叶变换的推广,或者说离散时间傅里叶变换是 z 变换当 $|z|=1$ 的特例。对于系统分析来说,傅里叶变换比较适合分析信号与系统的频率特性,而 z 变换除了可以用于分析信号与系统频率方面的特性外,更多的是用于求解线性系统时域的差分方程,对系统进行因果性和稳定性分析,并且更方便地将信号与系统用方框图等方式表示出来。本节重点介绍 z 变换用于 LTI 系统的分析问题,同时简单介绍单边 z 变换(unilateral z -transform)及其应用。

3.5.1 差分方程的 z 变换与系统函数

离散时间 LTI 系统的差分方程一般形式如式(3.35)所示

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (3.35)$$

式中, M 、 N 分别表示输入项和输出项的阶数; b_k 、 a_k 分别表示输入项和输出项的加权系数。对上式两边做 z 变换,得到

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (3.36)$$

由此定义系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.37)$$

一个由线性常系数差分方程所表示的系统,其系统函数总是有理的。系统函数是对 LTI 系统进行分析的强有力工具。由式(3.37)表示的系统函数,我们还可以得到进一步的信息。

第一,系统的零点和极点可以分别令式(3.37)的分子为 0 和分母为 0 而得到。由系统的零点和极点以及系统的 ROC,可以进一步分析系统的因果性、稳定性等方面的问题。

第二,式(3.37)反映了 LTI 系统输入信号、输出信号与系统函数之间的关系,并由此可以得到

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.38)$$

式(3.38)实际上是 z 变换的卷积性质。它表明,在时域由

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (3.39)$$

表示的卷积和运算,可以由 z 变换而转变为系统函数 $H(z)$ 与输入信号 $X(z)$ 的 z 变换的代数运算,显著减小了计算量。并且, $h(n)$ 与 $H(z)$ 为一对 z 变换对。

第三,如果在 $H(z)$ 中令 $|z|=1$ (或 $z=e^{j\omega}$),则可以得到离散时间系统的频率响应(或称为传递函数) $H(e^{j\omega})$,并可以由此进一步分析系统的频率特性。

【例 3.23】 给定离散时间因果系统的差分方程为 $y(n) - by(n-1) = x(n)$ 。若输入信号 $x(n) = a^n u(n)$,初始松弛条件,试求:

(1) 系统函数 $H(z)$; (2) 系统的单位脉冲响应 $h(n)$; (3) 系统的输出信号 $y(n)$; (4) 分析系统的稳定性。

解 (1) 对给定系统差分方程两边求 z 变换, 得到

$$Y(z) - bz^{-1}Y(z) = X(z)$$

整理, 得到系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > |b|$$

(2) 对 $H(z)$ 求取 z 逆变换, 并考虑 $H(z)$ 的因果性, 得到

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{1 - bz^{-1}}\right) = b^n u(n)$$

(3) 由于 $X(z) = \mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$, 故有

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{1}{(1 - bz^{-1})(1 - az^{-1})} \\ &= \frac{1}{a - b} \left(\frac{a}{1 - az^{-1}} - \frac{b}{1 - bz^{-1}} \right), \quad |z| > \max(|a|, |b|) \end{aligned}$$

若满足 $a \neq b$, 则对 $Y(z)$ 求取 z 逆变换, 得到

$$y(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{a - b} \left(\frac{a}{1 - az^{-1}} - \frac{b}{1 - bz^{-1}} \right)\right] = \frac{1}{a - b} (a^{n+1} - b^{n+1}) u(n), \quad a \neq b$$

若满足 $a = b$, 则有 $Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}, |z| > |a|$, 需另外进行 z 逆变换。请读者自行完成。

(4) 在满足 $a \neq b$ 的条件下, 根据系统的单位脉冲响应 $h(n) = b^n u(n)$, 若 $|b| < 1$, 则系统是稳定的; 若 $|b| > 1$, 则系统是不稳定的; 若 $|b| = 1$, 则系统是临界稳定的。

3.5.2 LTI 系统的因果性与稳定性分析

本书的第 1 章, 我们介绍了系统因果性和稳定性的时域判定方法。本节我们将会看到, 系统的因果性和稳定性等特性, 可以依据 z 变换或系统函数 $H(z)$ 而得到更为简洁有效的判定。

1. 离散时间 LTI 系统的因果性判定

一个离散时间因果 LTI 系统的单位脉冲响应满足

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (3.40)$$

即 $h(n)$ 满足严格的右边序列条件。根据 3.4.2 节关于 z 变换收敛域性质的讨论, 因果系统 $h(n)$ 所对应系统函数 $H(z)$ 的 ROC 应位于 z 平面内某个圆的外面, 即

性质 3.16 一个离散时间 LTI 系统当且仅当其系统函数 $H(z)$ 的 ROC 位于 z 平面某一圆的外面, 且包含无穷远点, 则该系统是因果的。

性质 3.17 一个具有有理系统函数 $H(z)$ 的离散时间 LTI 系统是因果的, 当且仅当 (a) 其 ROC 位于最外层极点外面某一圆的外面; 且 (b) 若 $H(z)$ 表示为 z 的多项式之比, 则其分子的阶次不能高于分母的阶次。

【例 3.24】 给定离散时间系统的系统函数 $H(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^2 + 5z + 2}$, 试判定系统的因

果性。

解 根据性质 3.17, 由于给定系统 $H(z)$ 的分子阶次高于分母阶次, 故该系统是非因果系统。

【例 3.25】 给定离散时间系统 $H(z) = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$, $|z| > 2$, 试判定系统的因果性。

解 该系统有 2 个极点, 即 $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 2$, 由于系统的 ROC 在最外面极点的外面, 且 $H(z)$ 分子的阶次不高于分母阶次, 故该系统是因果的。

2. 离散时间 LTI 系统的稳定性判定

对于 LTI 系统来说, 在时域判定其系统的稳定性, 需满足绝对可和条件, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty \quad (3.41)$$

而在 z 变换对应的复频域, 我们也可以根据系统函数 $H(z)$ 的特性进行系统稳定性的判定。

性质 3.18 当且仅当 LTI 系统的系统函数 $H(z)$ 的 ROC 包括单位圆 $|z| = 1$ 时, 该系统是稳定的。

性质 3.19 具有有理系统函数 $H(z)$ 的因果 LTI 系统, 当且仅当 $H(z)$ 的全部极点都位于单位圆内时, 系统是稳定的。

【例 3.26】 判定离散时间系统 $H(z) = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$, $|z| > 2$ 的稳定性。

解 由于该系统 $H(z)$ 的收敛域不包括单位圆, 因此该系统是不稳定的。

【例 3.27】 试确定因果系统 $H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$, $|z| > |a|$ 满足稳定性的条件(式中 $a \neq 0$)。

解 该系统有一个极点, 即 $z = a$ 。要使该系统稳定, 必须使极点在单位圆内, 即需满足 $|a| < 1$

这与其单位脉冲响应 $h(n) = a^n u(n)$ 满足稳定性的条件是一致的。

3.5.3 离散时间系统的方框图表示

LTI 系统的输入和输出可以由单位冲激响应(单位脉冲响应)或系统函数联系起来, 其一般原理框图如图 3.8 所示。

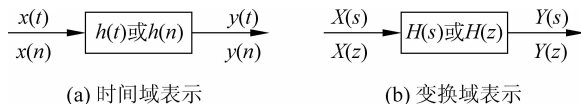


图 3.8 线性时不变系统的一般原理框图表示

图 3.8 综合考虑了连续时间与离散时间 LTI 系统的时域和变换域的代表问题。为了后续数字信号处理学习的需要, 本节重点介绍离散时间系统的变换域方框图表示方法。

1. 系统基本运算的描述

系统的方框图表示是建立在信号基本运算规则基础上的。通常, 有 3 种常用的离散时

间信号运算表示,即信号相加运算、信号乘系数运算和信号单位延迟运算。这3种运算的方框图表示如图3.9所示

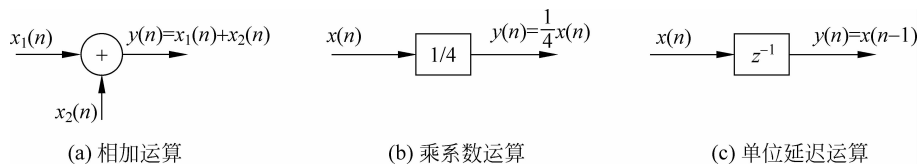


图 3.9 信号运算的 3 种基本方式

2. 系统的基本互连方式

LTI 系统主要有以下 3 种基本互连方式,即系统的级联(cascade)、并联(paralle)和反馈(feedback)。图 3.10 给出了这 3 种连接形式的方框图。

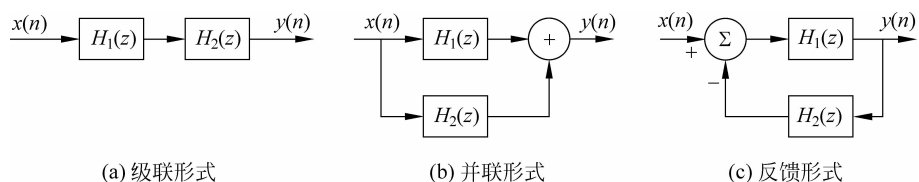


图 3.10 系统互连的 3 种基本形式

对于图 3.10 所示的各互连系统,设整个系统的系统函数为 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$,则对于图 3.10(a)所示的级联系统,有

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (3.42)$$

对于图 3.10(b)所示的并联系统,有

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad (3.43)$$

对于图 3.10(c)所示的反馈系统,有

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} \quad (3.44)$$

其中, $H_1(z)$ 为前向支路; $H_2(z)$ 为反馈支路。

3. 一阶系统与二阶系统的方框图表示

设一阶因果 LTI 系统的系统函数为 $H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$,该系统可以用反馈系统的方框图表示,如图 3.11 所示。其中,前向支路 $H_1(z) = 1$,反馈支路 $H_2(z) = az^{-1}$ 。

设因果 LTI 系统的系统函数为 $H(z) = \frac{1+bz^{-1}}{1+az^{-1}}$,该系统可以用一个反馈系统 $\frac{1}{1+az^{-1}}$ 与一个前向系统(forward system) $1+bz^{-1}$ 的级联表示,如图 3.12 所示。

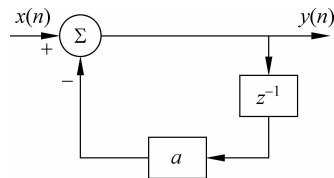


图 3.11 一阶反馈系统的方框图表示

设二阶因果 LTI 系统的系统函数为 $H(z) = \frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$,该系统可以用二阶反馈系统的方框图表示,如图 3.13 所示。

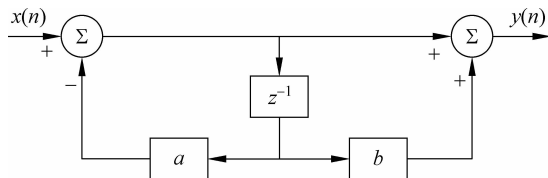


图 3.12 一阶反馈和前向级联系统的方框图表示

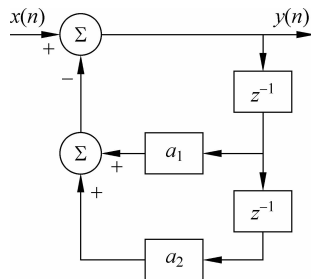


图 3.13 二阶反馈系统的方框图表示

设二阶因果 LTI 系统的系统函数为 $H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$, 该系统可以用一个二阶反馈系统 $\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ 与一个二阶前向系统 $1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$ 的级联表示, 如图 3.14 所示。

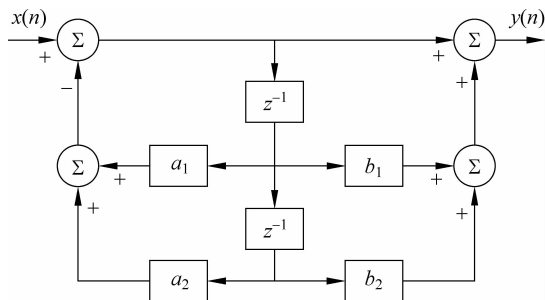


图 3.14 二阶反馈和前向级联系统的方框图表示

需要注意的是,在上述各方框图中,输入信号 $x(n)$ 与反馈信号均为相减关系。若均改为相加关系,则各方框图中反馈支路对应的系数应改变符号。

以上给出的系统方框图均为系统方框图的直接实现形式(direct-form)。实际上,根据系统函数的级联分解或并联分解,系统方框图还可以用级联方式(cascade-form)和并联方式(paralle-form)实现。读者可以参考有关文献,这里不再赘述。

3.5.4 单边 z 变换及其应用

本章式(3.23)给出的 z 变换定义,实际上是双边 z 变换的定义,即离散时间信号的取值范围可以由 $-\infty$ 延伸到 $+\infty$,计算 $X(z)$ 的积分区间也是 $(-\infty, +\infty)$ 。与单边拉普拉斯变换类似, z 变换也有单边的形式,称为单边 z 变换(unilateral z -transform)。

定义 3.4 离散时间序列 $x(n)$ 的单边 z 变换定义为

$$X_u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (3.45)$$

记为

$$X_u(z) = \mathcal{U}\mathcal{Z}[x(n)] \quad (3.46)$$

与双边 z 变换不同,单边 z 变换的求和运算仅在 n 为非负值的区间进行,而无论当 $n < 0$

时 $x(n)$ 是否为零。由于单边 z 变换相当于总是对右边信号进行 z 变换, 因此其收敛域总是位于 z 平面上某个圆的外面。另外, 单边 z 逆变换的计算与双边 z 逆变换的计算基本相同。

【例 3.28】 设离散时间信号为 $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1)$ 。

(1) 求该信号的双边 z 变换; (2) 求该信号的单边 z 变换。

解 (1) 根据双边 z 变换的定义和性质, 有

$$X(z) = \frac{z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

(2) 根据单边 z 变换的定义, 有

$$X_u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{-n} = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

显然, 二者的结果是不一样的。

单边 z 变换的许多性质是与双边 z 变换相同的, 例如线性性质、共轭性质、卷积性质、 z 域尺度变换性质和 z 域微分性质等, 但是也有一些是不同的。表 3.6 给出了单边 z 变换所特有的一些性质。

表 3.6 单边 z 变换的主要性质

序号	性 质	离散时间信号 $x(n)$	单边 z 变换 $X_u(z)$
1	时间延迟性质	$x(n-1)$	$z^{-1}X_u(z) + x(-1)$
2	时间超前性质	$x(n+1)$	$zX_u(z) - zx(0)$
3	一阶差分性质	$x(n) - x(n-1)$	$(1 - z^{-1})X_u(z) - x(-1)$

表 3.6 没有给出单边 z 变换的收敛域, 是由于单边 z 变换的收敛域总是在 z 平面上某个圆的外面。单边 z 变换是求解带有非零初始条件差分方程的有力工具。

【例 3.29】 给定离散时间因果系统的差分方程为 $y(n] + 3y(n-1) = x(n)$, 其输入信号为 $x(n) = 8u(n)$, 系统初始条件为 $y(-1) = 1$ 。试求系统的输出信号 $y(n)$ 。

解 对给定差分方程两边做单边 z 变换, 并利用线性性质和时间延迟性质, 有

$$Y_u(z) + 3 \times 1 + 3z^{-1}Y_u(z) = \frac{8}{1 - z^{-1}}$$

对 $Y_u(z)$ 求解, 得到

$$Y_u(z) = -\frac{3 \times 1}{1 + 3z^{-1}} + \frac{8}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{3}{1 + 3z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

对上式求单边 z 逆变换, 得到

$$y(n) = [3(-3)^n + 2]u(n)$$

习题

3.1 试说明拉普拉斯变换的特点。

3.2 试说明单边拉普拉斯变换的特点。

3.3 试比较双边拉普拉斯变换与单边拉普拉斯变换,并说明各自的特点和用途。

3.4 试说明 z 变换的特点。

3.5 试说明单边 z 变换的特点。

3.6 试比较双边 z 变换与单边 z 变换,并说明各自的特点和用途。

3.7 试计算下列连续时间信号的拉普拉斯变换,并确定其收敛域,画出零极点图。

(1) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$; (2) $x(t) = e^{-4t}u(t) + e^{-5t}(\sin 5t)u(t)$;

(3) $x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t)$; (4) $x(t) = te^{2|t|}$;

(5) $x(t) = |t|e^{-2|t|}$; (6) $x(t) = |t|e^{2t}u(-t)$ 。

3.8 求下列拉普拉斯变换的逆变换。

(1) $X(s) = \frac{1}{s^2+9}, \operatorname{Re}[s] > 0$; (2) $X(s) = \frac{s}{s^2+9}, \operatorname{Re}[s] < 0$;

(3) $X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9}, \operatorname{Re}[s] < -1$; (4) $X(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}, -4 < \operatorname{Re}[s] < -3$;

(5) $X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}, -3 < \operatorname{Re}[s] < -2$ 。

3.9 设有两个右边信号 $x(t)$ 和 $y(t)$, 满足微分方程 $\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t)$ 和 $\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)$ 。试确定 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 及其收敛域。

3.10 设有一 LTI 系统, 输入信号为 $x(t) = e^{-t}u(t)$, 单位冲激响应为 $h(t) = e^{-2t}u(t)$ 。

(1) 试确定 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的拉普拉斯变换;

(2) 利用卷积性质求输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$;

(3) 由 $Y(s)$ 求 $y(t)$;

(4) 将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 直接卷积, 并验证结果。

3.11 试证明: 若连续时间信号满足 $x(t) = x(-t)$, 则其拉普拉斯变换满足 $X(s) = X(-s)$ 。

3.12 试证明: 若连续时间信号满足 $x(t) = -x(-t)$, 则其拉普拉斯变换满足 $X(s) = -X(-s)$ 。

3.13 判断下列说法正确与否。

(1) $t^2u(t)$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方均不收敛。

(2) $e^{t^2}u(t)$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方均不收敛。

(3) $e^{j\omega_0 t}u(t)$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方均不收敛。

(4) $e^{j\omega_0 t}$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方均不收敛。

(5) $|t|$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方均不收敛。

3.14 计算下列各信号的 z 变换。

(1) $x(n) = \delta(n+2)$; (2) $x(n) = \delta(n-2)$;

(3) $x(n) = (-1)^n u(n)$; (4) $x(n) = (1/2)^{n+1} u(n+3)$ 。

3.15 计算下列 z 变换的逆变换。

(1) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$; (2) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, |z| < \frac{1}{2}$;

$$(3) X(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}; \quad (4) X(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}.$$

3.16 判断下列稳定 LTI 系统是否为因果系统。

$$(1) H(z) = \frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}; \quad (2) H(z) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{3}{16}}.$$

3.17 已知 $a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$, 试求 $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}, |z| > 2$ 的逆变换。

3.18 已知信号 $y(n] = x_1(n+3) * x_2(-n+1)$, 其中 $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ 。试利用 z 变换的性质求 $Y(z)$ 。

3.19 设有一因果 LTI 系统的差分方程为 $y(n] = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$ 。

(1) 试求系统的系统函数, 并画出 $H(z)$ 的零极图, 指出其收敛域;

(2) 求系统的单位脉冲响应;

(3) 若该系统是不稳定的, 求一个满足上面差分方程的稳定系统(非因果)的单位脉冲响应。

3.20 试利用 z 变换求解因果 LTI 系统的差分方程 $y(n] - \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) = x(n]$ 。已知 $x(n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 。

3.21 设有一因果 LTI 系统如图 P3.1 所示。

(1) 试求该系统的差分方程; (2) 试判定系统的稳定性。

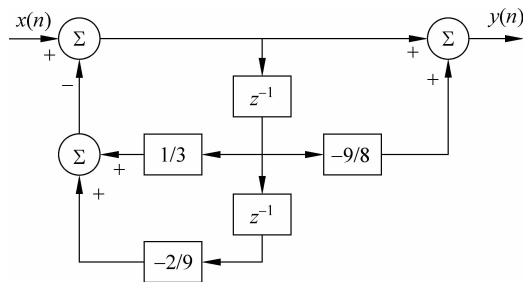


图 P3.1 给定因果 LTI 系统的方框图

3.22 求下列离散时间信号的单边 z 变换。

$$(1) x(n] = \delta(n+5); \quad (2) x(n] = 2^n u(-n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1); \quad (3) \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} u(n-2).$$

3.23 给出下面各系统的差分方程和初始条件, 试用单边 z 变换求系统的输出信号。

$$(1) y(n) + 3y(n-1) = x(n), x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), y(-1) = 1;$$

$$(2) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1), x(n) = u(n), y(-1) = 1;$$

$$(3) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1), x(n) = u(n), y(-1) = 0.$$

3.24 设 $x(n] = x(-n)$, 其有理 z 变换为 $X(z)$ 。

$$(1) \text{ 根据 } z \text{ 变换的定义证明 } X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right);$$

(2) 若 $X(z)$ 的一个极点出现在 $z = z_0$, 则在 $z = 1/z_0$ 也一定有一个极点;

(3) 根据 $\delta(n+1) + \delta(n-1)$ 验证(2)的结果。

$$3.25 \text{ 已知因果 LTI 系统的系统函数为: } H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

(1) 写出系统的差分方程;

(2) 画出该系统的方框图;

(3) 求系统的频率响应, 并画出 $a=0, 0.5, 1$ 三种情况下系统的幅频响应曲线。