绪　论

0.1　理论力学的内容

力学是描述和预测固体和流体位置和形状随时间变化的科学。位置和形状的变化也被称为机械运动。位置和形状变化是自然界中最普遍的运动形态，包括大至宇宙，小至基本粒子的运动。更复杂的变化形态，如物理、化学乃至生物活动，也包含位置和形状的变化。同时，位置和形状变化也是工程系统中广泛存在的运动形态。对不同类型位置和形状变化的研究产生了不同的力学分支。力学虽然起源于物理学，但它的内容已经远远超过物理学的内容。由于在工程问题中应用的广泛性，力学在工程技术的推动下按自身逻辑演化，成为一门独立的学科。力学属于技术科学的范畴，是许多工程技术的理论基础，又在广泛的应用过程中不断得到发展。不论是历史较长的土木工程、建筑工程、水利工程、机械工程、船舶工程等，还是后起的航空航天工程、核技术工程、生物医学工程等，都越来越多地需要力学的支持，而有些就是在力学理论指导下发展起来的。力学同时也是一门基础科学，阐明具有普遍性的规律。力学的目的是解释和预测自然界和工程系统中的物理现象，并以此作为工程应用的基础。

作为一门力学课程，理论力学涉及力学的最普遍和最基本的概念和理论，是其他各门力学分支的共同基础。同时，理论力学也是相关专业后续课程的基础。为建立与力学有关的各种基本概念和理论，理论力学主要研究质点和质点系的位置随时间的变化。质点是只有质量没有体积的几何点。当所研究对象的运动范围远远超过它本身的几何尺度时，其形状对运动的影响极其微小，可以忽略不计。此时该研究对象可以简化为质点。有限或无限个有某种联系质点构成的系统称为质点系。刚体、变形固体、流体等都可以看作质点系。对于那些在运动中变形极小，或虽有变形但不影响其整体运动的系统，可以完全不考虑其变形而认为系统中各个质点间的距离保持

不变。这种不变形的质点系称为刚体。由多个刚体组成的系统称为刚体系。理论力学的研究对象包括质点、质点系、刚体和刚体系。

理论力学的特点是要求建立运用理论知识对从实际问题，特别是工程问题中抽象出来的各种力学模型进行分析和计算。所谓力学模型就是对自然界和工程技术中复杂的实际研究对象的合理简化。质点和刚体都是基本的力学模型。对实际物体简化为何种力学模型，取决于问题的性质。例如，分析航天器绕地球运行的轨道运动时，由于航天器的尺寸远远小于轨道半径，可以将航天器简化为质点。相应地，研究小卫星编队飞行时，编队飞行的小卫星可以简化为质点系。但在分析航天器绕质心转动的姿态运动时，需要将航天器简化为刚体。对于带有挠性太阳帆板的航天器，刚体模型仍过于简化，不能正确反映问题的实质，需要引入更复杂的模型。

理论力学由三部分内容组成：静力学、运动学和动力学。静力学（statics，其中拉丁词根 status 为站立的意思）主要分析系统平衡时所受力系应满足的条件，也讨论系统受力分析，以及力系简化的方法。运动学（kinematics，其中希腊词根 kinesis 为运动的意思）仅从几何角度分析系统的运动，如位移、速度和加速度等，而不考虑引起运动的物理原因。动力学（dynamics，其中希腊词 dynamis 的本意是力）分析系统的运动与作用于系统的力系之间的关系。静力学中所涉及的静止和平衡是运动的特殊形态。因此，也可以认为静力学是动力学的一种特殊情形。但为了满足工程技术的需要，静力学已经积累了丰富的内容，成为理论力学相对独立的组成部分。

0.2　理论力学发展简史

粗略划分，力学的发展经历古代、经典、近代和现代 4 个阶段。1600 年前为古代力学，有个别正确的力学结论并解决当时的工程问题，但还没有现代意义上的力学理论。1600 年到 1900 年的力学为经典力学，其中又可以分为奠基阶段、发展阶段和成熟阶段，各自历时大约 100 年。在经典力学奠基阶段，形成了力学的基本工作方法，将基本的物理原理表达为定量的数学关系（而不像以往那样只关注因果性解释），再利用数学论证预测新的物理现象。这一方法由伽利略（Galileo Galilei，1564—1642）开创并为牛顿（Isaac Newton，1642—1727）所继承和发扬。在经典力学发展阶段做出主要贡献的主要是数学家。在解决力学问题的同时，发展需要的数学方法。这都使得数学和力学密切结合，物理原理比较清晰的力学分支有了基本完善的数学结构。经典力学成熟阶段，在数学结构继续发展完善的同时，工程问题的需求也促进了力学的发展，力学已经不在完全是基础科学，逐步增加技术科学的色彩。1900 年后，力学从物理学中分离出来，成为独立的学科，侧重解决工程问题，形成近代力学。1960 年后，以计算机在力学中的广泛应用为标志，现代力学诞生。

力学是物理概念、数学方法、计算工具和实验技术以及时常还有工程目标的有机

结合。理论力学课程是全部力学学科的基础,其教学内容主要是在经典力学发展阶段,也涉及少量成熟阶段的成果。古代力学主要有历史方面的意义,是构成文明史、思想史、哲学史、科学史和技术史的重要部分;经典力学奠基阶段的内容通常属于大学物理的力学部分,而成熟阶段结果的系统阐述、近代力学和现代力学,基本都属于本科专业课或研究生课程。

力学的早期发展是作为物理学的主要组成部分。公元前四世纪,中国的墨翟便对力和重心的概念作了初步的解释。古希腊的亚里士多德(Aristotle,384—322 B.C.)和阿基米德(Archimdes of Syracuse,287—211 B.C.)分别在公元前四世纪和公元前三世纪总结了杠杆原理和浮力原理。经过人类对力学认识的不断深化的漫长过程,16 世纪后期伽利略正确地认识了惯性和加速度概念,提出了运动相对性原理。开普勒(Johanns Kepler,1571—1630)分析了大量天文观测数据而在 1609 年和 1619 年提出行星的运动定律。在他们研究成果的基础上,1687 年牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中提出了描述宏观物体运动的基本定律,即万有引力定律和运动三定律。人们在实践活动中对牛顿力学基本原理的无数次检验证实,对于速度远远小于光速和系统作用量(动量×位移或能量×时间)远大于普朗克(Max Planck,1858—1947)常数的运动物体,牛顿定律具有高度正确性。18 世纪后,随着工业技术的发展,提出大量需要解决的问题,促进了力学的发展。渐渐地,力学成为一门独立学科。

在动力学发展的同时,静力学也在相对独立地发展。静力学的发展始终与实际工程问题相关。1586 年,斯梯芬(Simon Stevin,1548—1620)从"永久运动不可能"出发解决了斜面上重物平衡问题并发现了力合成的平行四边形法则。伐里农(Pierre Varignon,1654—1722)在他 1687 年出版的《新力学大纲》首先对力矩的概念和计算方法做出科学的说明,并系统地应用该方法而不是以往所用的杠杆原理解决各种机械问题。他还进行实验研究,证明汇交力合成的平行四边形法则。在该书 1725 年最后版本中,首先使用了"静力学"一词。力系的简化和平衡的系统理论,即静力学理论体系的建立是潘索(Louis Poinsot,1777—1859)在 1803 年出版的《静力学原理》中完成的。首次提出力偶的概念并讨论力偶的合成与分解,提出力系简化和平衡的系统理论,明确定义了约束并提出解除约束原理。

前述静力学的理论体系本质上是以矢量为基本研究工具。静力学问题的研究还可以从能量观点进行,其核心结论是虚功原理。1594 年,伽利略在研究斜面上物体平衡时发现"力的节省,损失了相当的距离",已经有虚功原理的思想。1608 年,斯梯芬通过对滑轮和滑块系统的分析发现两侧重量与位移的乘积相等,"得之于力者,失之于速",为虚功原理的雏形。约翰·伯努利(Johann Bernoulli,1667—1748)在 1717 年给伐里农的信中,定义了约束允许的虚速度,定义力在虚速度方向投影与虚速度的乘积为能量,给出平衡条件为正能量与负能量的和为零。这已经非常接近虚功原理的现代表述。1788 年拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736—1813)首先以滑轮系

统的研究为基础给出该原理的物理证明。1798 年傅里叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768—1830）给出几何证明，在其中分析了单面的几何约束。1803 年潘索采用傅里叶的方法，对若干有实际背景的约束进行了深入的讨论。这些证明及其后人的努力，在证明充分性时都需要在“双面、理想”之外对约束另附加某些条件。能量法应用于平衡问题时，不仅能建立平衡条件，还能判断平衡的稳定性。1788 年拉格朗日指出保守平衡稳定的条件是势能取极小值。

就运动学而言，在伽利略提出加速度概念后，1673 年惠更斯（Christiaan Huygens，1629—1695）考虑了点在圆周运动中的加速度。刚体运动学的一般理论是由欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）建立的。他在 1765 年出版的《刚体运动理论》中，明确了刚体定点有限转动等价于绕过定点的某一轴的转动，刚体的定点运动可以用三个角度描述，还提出刚体运动分解的思路，事实上也应用了运动参考系。1830 年，夏莱（Michel Chasles，1793—1880）证明了刚体一般运动是以刚体上某点为基点的平行移动和相对通过该基点的轴的转动的合成。该结论的平面特例早在四世纪被古罗马的帕普斯（Pappus of Alexandria，290—350）所知，他证明了平面图形的位移可以分解为平移和转动。1834 年，安培（André-Marie Ampère，1775—1836）提出“运动学”一词，并建议将运动学作为力学的独立部分。1835 年，科里奥里（Gustave Gaspard Coriolis，1792—1843）发现物体在转动参考系中运动时会受到一种不同于离心力的惯性力作用，这种惯性力现在称为科里奥利惯性力或科里奥利效应，相应的加速度称为科里奥利加速度。

动力学的发展也是沿矢量和能量两条路径进行。虽然矢量的概念在后来才正式定义，矢量方法的精神开始于在碰撞问题研究中动量概念的引入。1644 年，笛卡儿（René Descartes，1596—1650）引入了动量概念，虽然他不理解动量的矢量性质。1677 年，马略特（Edme Mariotte，1602—1684）利用前人的碰撞实验证明了动量守恒定律。1687 年，牛顿发表的《自然哲学的数学原理》标志着对单自由度质点而言的动力学矢量方法的完成。在 18 世纪，随着机器生产的迅速发展，要求对构成机械系统的受约束质点系和刚体进行动力学分析。达朗贝尔（Jean le Rond d’Alembert，1717—1783）在 1743 年出版的《论动力学》中考虑受约束质点的运动。他认为质点所受的作用力并没有产生相应的运动，有一部分是损失力，损失力被质点所受的约束力平衡，该结论被称为达朗贝尔原理。该原理将约束归结为力的作用而提供了解决受约束质点系动力学问题的一般方法，其科学意义是把约束的分析从静力学扩展到动力学。拉格朗日认为达朗贝尔提出的原理可以把动力学问题转化为静力学问题求解。因此在动力学教材中达朗贝尔原理往往以动静法的形式出现，虽然该原理可能有更广泛的内涵。1758 年，欧拉建立刚体的动力学方程，将矢量方法应用于刚体动力学。动力学的矢量方法在一些当代文献中，也被称为牛顿—欧拉法。在计算机符号运算和数值运算能力大为提高的当代，牛顿—欧拉法仍是建立动力学系统数学模

型或计算模型的有效方法。

动力学的能量方法始于1669年,惠更斯在研究碰撞问题时事实上得到活力(动能的两倍)守恒。1686年,莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz 1646—1716)发表论文主张采用重量与速度平方的乘积来度量运动,并称这种度量为“活力”;在1695年发表的论文中,他更明确提出力与路程的乘积等于活力的增加。1807年,杨(Thomas Young,1773—1829)首先使用了“能量”一词。动能定理的现代形式是在19世纪20年代才由科里奥利明确引入功的概念后才建立的。动力学发展的里程碑是拉格朗日的《分析力学》(1788年初版),其中总结了从能量观点对受约束质点系运动的研究成果。《分析力学》中引进可完全描述系统运动状态的广义坐标,并建立了用系统动能表示的动力学方程,现在称为拉格朗日方程。这些工作的特点是引进标量形式的广义坐标、能量和功,完全摆脱了以矢量为特征的几何方法,为力学提供从变分原理出发的全新思路。把力分为主动力和约束力是德洛内(Charles-Eugène Delaunay,1816—1872)在1856年首先提出。能量方法中的重要概念理想约束的雏形无摩擦约束出现在阿佩尔(Paul Émile Appell,1855—1930)于1893年出版的著作中。应用能量方法分析受约束机械系统,可以避免系统内理想约束力的出现,在很大程度上克服矢量方法面临的运动方程中出现大量未知约束力的困难。

19世纪以后,特别是20世纪以来,动力学沿着矢量和能量路径继续发展,但这些内容已经超出理论力学课程的范围。对力学史的全面论述可参见有关专著。

理论力学的发展简史表明,相关力学的研究起源于观测和实验,在发展过程中与数学同步发展,将物理理论系统地表达为数学抽象的简洁形式。理论力学的发展也与工程技术的需求密切相关。

0.3　理论力学的学习方法

理论力学课程讨论物理现象,具有物理科学的特点;理论力学又与数学中的矢量运算,微积分,线性代数和微分方程关系密切;同时是工程专业后续课程的基础。理论力学的基础是物理中的力学部分,因此课程不依赖经验和独立观测。由于系统完整,逻辑严谨,演绎严密,理论力学在一定程度上具有数学课程的特点。同时,理论力学又不是抽象的纯理论学科,而是应用学科。事实上,对多数工科学生而言,理论力学是与工程技术有关的第一门力学课程,在从纯数理学科过渡到专业课程过程中起重要作用。

基于理论力学的上述特点,学习该课程时应注意下列问题。首先,理论力学系统性强,各部分联系紧密。学习时应循序渐进,及时解决不清楚的问题,以免影响后面内容的理解。其次,积极思考,善于发现问题并及时解决。注意各章的主要内容和重点,主次分明。注意各相关章节间内容和方法上的区别和联系。注意有关公式推导

的根据和关键，其物理意义及应用条件和范围。注意有关概念的来源、含义和用途。再次，培养分析和解决问题的能力。特别注重从工程实际中抽象出力学问题，应用理论力学知识对提炼出的力学问题进行数学描述，并求解相应的数学问题。在分析中，既要作定性的分析，又要作定量的计算。最后，做习题是运用理论解决问题的基本训练。做题前应复习有关内容，以达到应有效果。要注意例题的分析方法和解题步骤，从中受到启发，但不能机械地生搬硬套。做题时如果发现有的内容还没有透彻理解，应该再次复习，进一步掌握。推导和计算要一丝不苟，数值计算结果要有恰当的有效数字。这样，通过习题可以较深入地理解和掌握基本概念和基本理论。

如上所述，求解习题是理论力学学习的重要内容。同时，理论力学的习题求解也被大多数学生认为是难点。这里再进一步叙述理论力学习题求解的一般过程。首先，明确研究对象。把所研究的系统从所在的环境中分离出来。在静力学和动力学中，需要画受力图以明确系统受力情况。第二，用数学公式表达描述研究对象特性的物理或几何关系。在静力学中，主要是平衡方程。在运动学中，是运动质点或刚体的运动方程。在动力学中，是动力学方程的矢量或能量表达。用不同的方法可能导出形式不同的数学公式，它们将导致相同的结果，但求解难易程度可能存在差别。第三，求解数学方程。静力学中主要是线性代数方程组，偶尔也涉及非线性代数方程。运动学包括求导运算和矢量方程的求解。动力学中可能涉及代数方程，也可能涉及微分方程，这些方程可能是线性也可能是非线性的。最后，分析结果的物理意义及合理性。如果所得到的不合理，需要重新核对前面3个步骤。总之，一旦将问题清楚地表述，必须严格依据理论力学中的相关原理和公式进行分析而得到问题的解答，在此过程中不需要任何个人直觉和想象力。当然，校核答案时需要常识和个人经验。

只要方法适当，经过不懈的努力，学生完全可以达到理论力学课程的要求：准确理解基本概念，熟悉基本定理和公式并能灵活应用，了解一些力学研究和应用的基本方法。

第1章 力和约束

大学物理课程已经叙述了力的基本知识。在此基础上，本章第 1 节先从矢量运算的角度讨论力的投影、力系的分类、汇交力系的合成；随后引入描述力的转动效应的力矩，包括力对点的矩和力对轴的矩以及两者关系，力矩计算的两类逆问题；再讨论一种不能再简化的力系——力偶，并进行力偶系的合成。第 2 节分析约束，工程系统中的物体或构件一般都受有约束。约束可以理解为周围物体对所研究对象的力的作用，也可以理解为周围物体对所研究对象运动的限制。本章从前一观点分析约束，讨论工程中常见几类约束的约束力特性，第 9 章所叙述分析平衡问题的能量方法将从后一观点分析约束。第 3 节基于约束的特性，可以进行受力分析，即确定所研究物体受到的各个约束给予的力的作用位置和方向，绘制受力图。

力和约束的知识，不仅是静力学中力系简化和平衡问题分析的基础，也是动力学问题研究的前提，还是后续课程中相关力学计算的必要准备。受力图的绘制，是进行受力分析和计算的基础。

1.1 力、力矩和力偶

1.1.1 力、力系以及力的投影

力是物体间的相互机械作用，这种作用能使物体的运动状态和形状发生改变。所谓机械作用是指物体间的接触或场(例如重力场)的作用。力改变物体运动状态为力的**运动效应**，也称**外效应**。力改变物体形状为力的**变形效应**，也称**内效应**。力的运动效应和变形效应取决于**力的三要素**，即力的大小、方向和作用点。力的大小即物体之间机械作用的强度。力的量纲为 MLT^{-2}，在我国法定采用的国际单位制中，力的计量单位是牛顿，记为 N($1N=1kg \cdot m/s^2$)。力的方向即物体之间机械作用的方向。力的作用点，即物体之间机械作用的部位。力作用在刚体上时，力的作用点可以用作

用线代替。物体之间的接触都不可能是点接触，因此，力作用的区域抽象为点是一种简化，此时称为**集中力**。当不能这样简化时，就称为**分布力**。如果力是在空间分布的，称为**体积力**，如重力；如果力是沿面分布的，称为**面积力**，如接触力。沿线的分布力也是一种力学简化。分布力的强度称为**载荷集度**，用字母 $\boldsymbol{q}$ 表示，它是单位体积（或单位面积或单位长度）上的作用力。

由于力的三要素以及同一作用点的两个力的加法遵循后面将叙述的平行四边形法则，因此，**力是矢量**。力一般为定位矢量。几何上可以表示为带箭头按比例的有向线段，用黑体字母 $\boldsymbol{F}$ 表示。

如绪论所述，本门课程研究对象是质点和刚体，质点可以认为是刚体体积趋于一点的退化情形，因此这里侧重研究刚体上所受的力。刚体忽略了变形，因此只关注力的运动效应。忽略变形效应时，力沿作用线移动不改变运动效应。所以作用于刚体时力为滑移矢量，即力对刚体的运动效应取决于力的大小、方向和作用线。

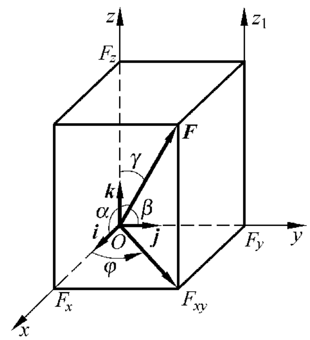


图 1.1.1　力在空间的表示

矢量可以用相对于某个坐标系的投影表示。以力的作用点 O 为原点建立直角坐标系 $Oxyz$，沿各坐标轴方向的单位矢量称为此坐标系的**基矢量**，用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示。力矢量 $\boldsymbol{F}$ 与 $Oxyz$ 各坐标轴的夹角依次为 α，β 和 γ，称为**方向角**，如图 1.1.1 所示，则力 $\boldsymbol{F}$ 在各轴上的**投影** F_x，F_y 和 F_z 可以表示为

$$F_x = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = F\cos\alpha,\quad F_y = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j} = F\cos\beta,\quad F_z = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k} = F\cos\gamma \tag{1.1.1}$$

其中 $F=|\boldsymbol{F}|$ 为力矢量的模，即力的大小，方向角 α，β 和 γ 的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 称为**方向余弦**。力矢量 $\boldsymbol{F}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.2}$$

$F_x\boldsymbol{i}$，$F_y\boldsymbol{j}$，$F_z\boldsymbol{k}$ 也分别称为力 $\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴、y 轴、z 轴的**分量**。几何上，F_x，F_y 和 F_z 等于以力矢量 $\boldsymbol{F}$ 为对角线的平行正六面体的 3 条棱的长度。

式(1.1.1)给出了已知力的大小和 3 个方向角计算力的投影的计算公式。反过来，也可以根据力的 3 个投影来计算力的大小和方向

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};\quad \cos\alpha = \frac{F_x}{F},\quad \cos\beta = \frac{F_y}{F},\quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \tag{1.1.3}$$

将式(1.1.1)代入式(1.1.3)前一式，等式两边平方后约去 F，导出方向余弦间关系

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1.1.4}$$

这表明 3 个方向角中只有 2 个是独立的。确定力在空间的方位只需 2 个坐标，如用 φ 和 γ 表示，φ 是力在平面 Oxy 内的分量与 x 轴的夹角，如图 1.1.1 所示。此时，力在 3 个坐标轴上投影为

$$F_x = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = F\sin\gamma\cos\varphi,\quad F_y = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j} = F\sin\gamma\sin\varphi,\quad F_z = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k} = F\cos\gamma \tag{1.1.5}$$

这种计算力的投影的方法称为**二次投影**。

前面讨论的力在轴上的投影是力和轴共面的情况。投影计算式(1.1.1)和式(1.1.5)同样适合当力和轴不共面的情形。如图1.1.1中的力和 z_1 轴,我们定义

$$F_{z_1} = F_z = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k} = F\cos\gamma \tag{1.1.6}$$

这样,**力在所有平行轴上的投影都相等**。

除了向轴投影外,力还可以向平面投影。设力与平面的夹角为 θ,则力 $\boldsymbol{F}$ 向 Π 平面的投影 $\boldsymbol{F}_\Pi$ 仍为矢量,其大小为

$$F_\Pi = F\cos\theta \tag{1.1.7}$$

也可以认为,力在平面上的投影,是对该平面中的特定的轴的投影,这特定的轴就是包含力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线并与投影平面 Π 垂直的平面与平面 Π 的交线轴 η,如图1.1.2所示。

刚体受到的作用力往往不止一个而是一组,这一组力称为**力系**。为研究的方便,往往将比较特殊力系先行考察。若力系中各力的作用线相交一点,则称该力系为**汇交力系**,**一般力系**不要求各力作用线通过同一点;若力系中各力的作用线在同一平面内,则称该力系为**平面力系**,而**空间力系**的作用线不限定于同一平面。另一类特殊的力系是力作用线互相平行的力系,称为**平行力系**。若一个力与一个力系对刚体作用的运动效应相同,则称这个力是该力系的**合力**,而力系中的各个力是该力的**分力**。计算力系合力的过程称为**力的合成**。

汇交力合成所遵循的基本规律为**平行四边形法则**。作用同一点的两个力可以合成为一个力,合力也作用于这一点,合力的大小和方向由表示两力的有向线段为边所构成的平行四边形的对角线确定,如图1.1.3(a)所示。

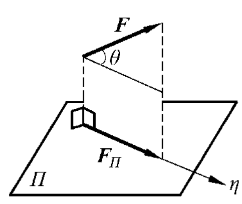
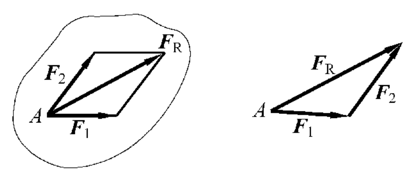


图1.1.2　力在平面上的投影



(a) 力的平行四边形法则　　(b) 力的三角形法则

图1.1.3　两个共点力的合成

设作用于同一点 A 的两个力为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,则合力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{R}$ 用矢量式表示为

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1.1.8}$$

由于合力将平行四边形分成两个全等的三角形,因此,求合力无须作出平行四边形,只需将相加的两个力首尾连接作出力的三角形即可,这种方法称为**力的三角形法则**,

如图 1.1.3(b)所示。这一力的合成方法可以推广到汇交力系。设在物体的 A 点作用有 4 个力组成的汇交力系 $\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_4$，按力的可传性原理将这些力的作用点都沿作用线移到 A 点，不失一般性，按自然数顺序用力的三角形法则计算合力：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{R1} &= \boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2,\\ \boldsymbol{F}_{R2} &= \boldsymbol{F}_{R1}+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3,\\ \boldsymbol{F}_{R} &= \boldsymbol{F}_{R2}+\boldsymbol{F}_4=\boldsymbol{F}_1+\cdots+\boldsymbol{F}_4\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

图 1.1.4 表明，计算 $\boldsymbol{F}_{R1}$ 和 $\boldsymbol{F}_{R2}$ 的中间过程可以省略。只要将诸力矢量首尾相连，从第一个力的起点（汇交点 A）向最后一个力的终点作出的矢量就是该汇交力系的合力 $\boldsymbol{F}_R$。这一方法对任意有限个力 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 组成的汇交力系都成立，这种求合力的方法称为**力的多边形法则**。用矢量式表示为

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{1.1.10}$$

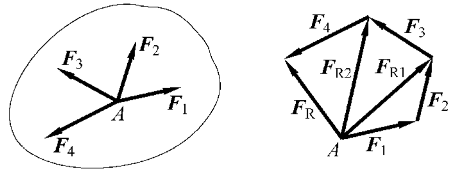


图 1.1.4　汇交力系的合成：力的多边形法则

将汇交力系中各力表示成式(1.1.2)的形式

$$\boldsymbol{F}_i=F_{ix}\boldsymbol{i}+F_{iy}\boldsymbol{j}+F_{iz}\boldsymbol{k}\quad(i=1,\cdots,n) \tag{1.1.11}$$

代入式(1.1.10)，按基矢量提取公因子，化作

$$\boldsymbol{F}_R=\left(\sum_{i=1}^{n}F_{ix}\right)\boldsymbol{i}+\left(\sum_{i=1}^{n}F_{iy}\right)\boldsymbol{j}+\left(\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.1.12}$$

基矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 前的系数即为合力的投影，即

$$F_{Rx}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix},\quad F_{Ry}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy},\quad F_{Rz}=\sum_{i=1}^{n}F_{iz} \tag{1.1.13}$$

由此可知，**汇交力系合力在任一轴上的投影等于分力在同一轴上投影的代数和**，此结论称为**合力投影定理**。合力的大小 F_R 及其方向余弦 $\cos\alpha_R$，$\cos\beta_R$，$\cos\gamma_R$ 分别为

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2+F_{Rz}^2}, \tag{1.1.14}$$

$$\cos\alpha_R=\frac{F_{Rx}}{F_R},\quad\cos\beta_R=\frac{F_{Ry}}{F_R},\quad\cos\gamma_R=\frac{F_{Rz}}{F_R} \tag{1.1.15}$$

这种求合力的方法称为**解析法**。

力系的平衡是指力系中各力对刚体的作用互相抵消，其运动效应等同于无此力系作用的情况。最简单的平衡力系是由两个力组成，显然，这两个力一定是大小相等、方向相反并且作用在一直线上，这是刚体受两力作用而平衡的充分和必要条件，