第1章 质点运动学

全球定位系统又称“全球卫星定位系统”，它可以为地球表面绝大部分地区(98%)提供准确的定位、测速和高精度的时间标准. 目前，全球共有四大卫星导航系统，那么它们的工作原理如何呢? 通过本章的学习，将会更加明了清楚. 如图1-0所示为美国的全球定位系统.

图1-0　GPS全球定位系统

物体之间或同一物体各部分之间相对位置的变动称为**机械运动**(简称为**运动**). 机械运动是自然界中最简单、最普遍的一种运动形式，物理学中把研究机械运动的规律及其应用的学科称为**力学**.

质点是力学中的理想模型之一，是为了研究问题的方便，突出主要矛盾，忽视次要矛盾而抽象出来的理想模型，它是有质量而无线度的物体. 任何物体都有一定的大小，但当其线度对所讨论的问题影响很小，且物体内部运动状态差别可忽略时，可把物体看作质点. 描述质点运动状态变化的物理量有：位置矢量、位移、速度和加速度等. 本章主要研究这4个物理量之间的相互关系及如何用它们来描述物体的机械运动. 研究物体位置随时间的变化或运动轨道问题而不涉及物体发生运动变化原因的学科称为**运动学**.

1.1 位置矢量和位移

1.1.1 参照系与坐标系

物体的机械运动是指它的位置随时间的改变.位置总是相对的,这就是说任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的.这个其他的物体或物体系就叫做确定运动物体位置的参照系,简而言之:被选做参照的物体或物体系称为**参照系**.

例如:确定交通车辆的位置时,我们用固定在地面上的一些物体,如房子或路牌作参照系,这样的参照系通常称为**地面参照系**.在物理实验中,确定某一物体的位置时,我们就用固定在实验室内的物体,如周围的墙壁或固定的实验桌作参照系,这样的参照系就称为**实验室参照系**.

经验告诉我们,相对于不同的参照系,同一物体的同一运动会表现为不同的运动形式.例如,一自由落体的运动,在地面参照系中观察时,它是竖直向下的直线运动,如果在近旁驶过的车厢内观察,即以一行进的车厢为参照系,则物体将作曲线运动.物体的运动形式随参照系的不同而不同,这个事实就是**运动的相对性**.由于运动的相对性,当我们确定一个物体的运动时就必须指明是相对于哪个参照系来说的.宇宙中的所有物体都处于永不停止的运动中,这就是与之相对应的**运动的绝对性**.

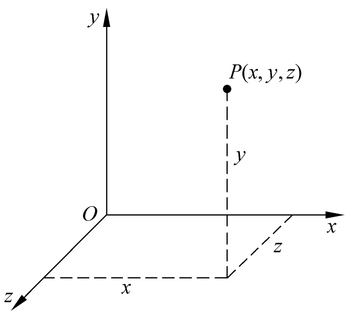


图1-1 质点的位置表示

当确定了参照系之后,为了确切地、定量地说明一个质点相对于此参照系的位置,就得在此参照系上固结一个**坐标系**.最常见的是笛卡儿直角坐标系,但有时为了研究问题的方便还选用极坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系等.对于笛卡儿直角坐标系而言,称一固结点为坐标原点,记作 O,从此原点沿三个相互垂直的方向引三条固定的且有刻度和方向的直线作为坐标轴,通常记作 x,y,z 轴,如图1-1所示.于是在这样的坐标系中,一个质点在任意时刻的位置将会准确给出,如 P 点就可以用坐标 (x,y,z) 来表示.

检测点1:描述物体运动为何要选择参照系?

1.1.2 位置矢量(运动方程)

由于运动是与时间有关的,在不同的时刻,质点的位置不同,也就是说位置是随时间而变化的,用数学函数的形式来表示,即

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

这样的一组函数称为**质点的运动函数**(**或运动方程**).将质点的运动方程消去时间参数 t,得到坐标相关的方程称为质点的轨道方程,在坐标系中可画出相应的轨道曲线.

为了确定质点在空间的位置，我们可以使用位置矢量这一更简洁、更清楚的概念. 图1-2中质点P的位置，可以用笛卡儿坐标系中的三个坐标x,y,z确定，如果从原点O向P作有向线段$\boldsymbol{r}$，显然，有向线段$\boldsymbol{r}$与P点的位置(x,y,z)有一一对应的关系，因此可以借用从参考点O到P的有向线段$\boldsymbol{r}$来表示P点的位置，我们称$\boldsymbol{r}$为P点的**位置矢量**. 若以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别表示沿$x,y,z$轴的单位矢量，则在笛卡儿坐标系中，$P$点的位置矢量为

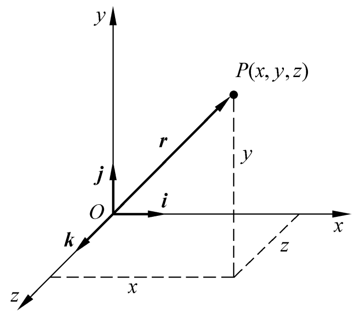


图1-2　位置矢量

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

式(1-1)中各函数表示质点位置的各坐标值随时间的变化情况，可以看作是质点沿各个坐标轴的分运动表示式. 质点的实际运动是由式(1-1)中的三个函数的总体式(1-2)表示. 同时式(1-2)也表明：质点的实际运动是各分运动的矢量和，这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系称为**运动叠加原理**.

在国际单位制(SI)中，位置矢量的量纲单位为m，大小和方向分别用其模和方向余弦来表示，即

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i})=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j})=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

例如，若质点P的位置为(2,3,4)，则质点P的位置矢量为$\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，质点$P$的位置矢量的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}\ \mathrm{m}$$

质点P的位置矢量的方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i})=\frac{2}{\sqrt{29}},\quad \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j})=\frac{3}{\sqrt{29}},\quad \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

检测点2：运动方程与轨道方程的关系如何？

1.1.3　位移矢量

从运动质点初始时刻所在位置指向运动质点任意时刻所在位置的有向线段称为在对应时间内的**位移矢量**(简称**位移**). 如图1-3所示，质点P沿图中曲线运动，t时刻位于P_1点，$t+\Delta t$时刻位于P_2点. P_1，P_2两点的位置矢量分别为$\boldsymbol{r}(t)$和$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，在时间$\Delta t$内质点的空间位置变化可用矢量$\Delta\boldsymbol{r}$来表示，其关系式为

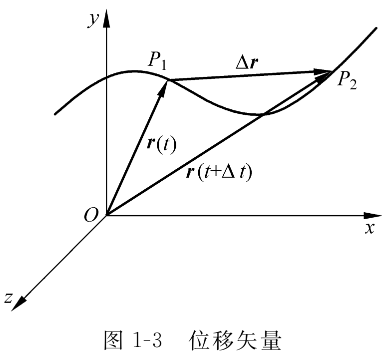


图1-3　位移矢量

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\Delta\boldsymbol{r} \tag{1-3}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$是描述质点空间位置变化的物理量，它同时也表示了质点位置变化的距离和方向.

位移不同于位置矢量. 在质点运动过程中，位置矢

量表示某时刻质点的位置，它描述该时刻质点相对于坐标原点的位置状态，是描述**状态**的物理量. 位移则表示**某段时间**内质点位置的变化，它描述该段时间内质点状态的变化，是与运动**过程**相对应的物理量.

位移也不同于路程. 质点从 P_1 运动到 P_2 所经历的路程 Δs 是图 1-3 中从 P_1 到 P_2 的一段曲线长，路程是标量，恒取正值. 在一般情况下，路程 Δs 与位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$（图 1-3 中 P_1 和 P_2 之间的弦长）并不相等. 只有当质点作单向的直线运动时，路程和位移的大小才是相等的. 此外，在时间间隔 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下，P_2 无限靠近 P_1，弦 P_1P_2 与曲线 P_1P_2 的长度无限接近，这时，路程 $\mathrm{d}s$ 与位移的大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 才相等，即

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$$

在笛卡儿坐标系中，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \\ &= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

例如，若 P_1 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$，$P_2$ 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$，则 P_1 与 P_2 间的位移为 $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

检测点 3：位移矢量与参照系的选择有关吗？

1.2 速度和加速度

1.2.1 速度

质点的位置随着时间变化，产生了位移，而位移一般也是随时间变化的，那么位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和产生这段位移所用的时间 Δt 之间有怎样的关系呢？$\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 是一个怎样的物理量呢？

从物理意义上来看，它描述的是质点位置变化的快慢和位置变化的方向. 由于它对应的是时间间隔而不是某一时刻或位置，所以我们称其为在 Δt 时间内的**平均速度**，以 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-4}$$

平均速度是矢量，它的方向就是相应位移的方向，如图 1-4 所示.

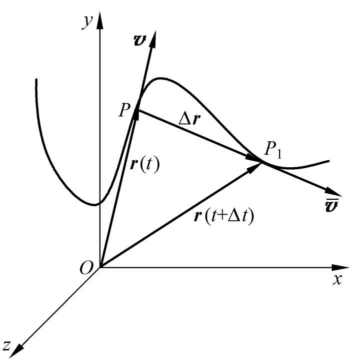


图 1-4 平均速度与速度

实际上当 Δt 趋近于零时，式(1-4)的极限就是质点位置矢量对时间的变化率，将其定义为质点在 t 时刻的**瞬时速度**（简称**速度**），以 $\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-5}$$

速度的方向就是 Δt 趋近于零时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向，如图 1-4 所示. 当 Δt 趋近于零时 P_1 点向 P 点趋近，而 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向最后将与质点运动轨道在 P 点的切线方向一致. 因此质点在时刻 t 的速度方向沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线指向运动的前方. 可见它能够反映某一时刻或某一位置时质点的运动快慢和运动方向. 这就是速度与平均速度的区别所在.

速度的大小定义为速率，以 v 表示，即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} \tag{1-5a}$$

以 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经历的路程. 当 Δt 趋近于零时,由于 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 和 Δs 将趋于相同,因此可以得到

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-5b}$$

这就是说速度的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率(即速率). 因此以后对速率与速度的大小不再区别.

注意: 位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr 是有区别的,一般来讲

$$v=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

若将式(1-2)代入式(1-5),由于三个坐标轴上的单位矢量都不随时间变化,所以有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-5c}$$

从式(1-5c)可以看出: 质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 是各分速度的矢量和,这一关系式是式(1-2)的直接结果,也是由空间几何性质所决定,这一关系式称为**速度叠加原理**(一般来讲,各分速度不一定相互垂直).

由式(1-5c)知各分速度相互垂直,所以 $\boldsymbol{v}$ 的大小和方向由下式决定:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}},\quad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}},$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

在国际单位制(SI)中速度的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

检测点 4: 速度叠加时各分速度要求必须垂直吗?

1.2.2 加速度

当质点的运动速度随时间改变时,常常要搞清速度的变化情况,速度的变化情况常以另一个物理量加速度来表示. 若以 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ 分别表示质点在 t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻的速度(如图 1-5 所示),则在 Δt 时间内的**平均加速度** $\bar{\boldsymbol{a}}$ 由下式来定义:

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-6}$$

当 Δt 趋近于零时,此平均加速度的极限,即速度对时间的变化率,称为质点在 t 时刻的**瞬时加速度**(简称**加速度**). 以 $\boldsymbol{a}$ 表示,即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

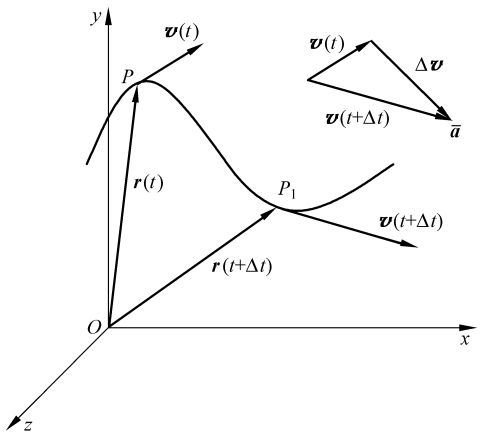


图 1-5 平均加速度矢量

加速度也是矢量,由于它是速度对时间的

变化率，所以不管是速度的大小发生变化，还是速度的方向发生变化，都有不为零的加速度存在. 利用式(1-5)，则

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-7a}$$

将式(1-5c)代入式(1-7a)可得加速度的分量表示式如下：

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1-7b}$$

加速度的大小和方向分别为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

在国际单位制(SI)中加速度的单位为 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

在定义速度和加速度时，都用到了求极限的方法. 这种做法，在物理学各部分经常出现. 求极限是人类对物质和运动作定量描述时在准确程度上的一次重大飞跃. 实际上极限概念是牛顿在17世纪对物体的运动作定量研究时提出的，可见微积分学的创立是与对物体运动的定量研究分不开的. 微积分学是数学的一个重要分支，也是研究物理学不可缺少的重要工具.

检测点5：牛顿提出极限概念的背景是什么？

例1-1　已知一质点的运动方程为 $x=2t$，$y=18-2t^2$，其中 x，y 以 m 计，t 以 s 计. 求：(1)质点的轨道方程并画出其轨道曲线；(2)质点的位置矢量；(3)质点的速度；(4)前 2 s 内的平均速度；(5)质点的加速度.

解　(1) 将质点的运动方程消去时间参数 t，得质点轨道方程为 $y=18-\dfrac{x^2}{2}$，质点的轨道曲线如图1-6所示.

(2) 质点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (18-2t^2)\boldsymbol{j}$$

(3) 质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

(4) 前 2 s 内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}(2)-\boldsymbol{r}(0)}{2-0} = \frac{1}{2}\{[2\times 2\boldsymbol{i} + (18-2\times 2^2)\boldsymbol{j}] - 18\boldsymbol{j}\}$$
$$= 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

(5) 质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

例1-2　如图1-7所示，A，B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A，B 两物体可在光滑轨道上滑行. 若物体 A 以确定的速率 v 沿 x 轴正向滑行，α 为杆与 y 轴的夹角，当 $\alpha=\pi/6$ 时，物体 B 沿 y 轴滑行的速度是多少？

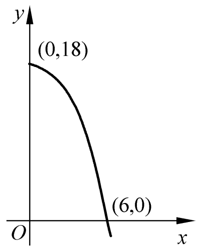


图 1-6　例 1-1 用图

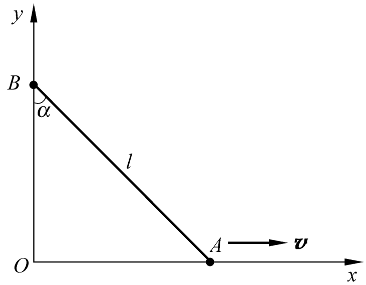


图 1-7　例 1-2 用图

解　根据题意,得

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} = v\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

因为
$$x^2(t) + y^2(t) = l^2$$

所以
$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

故
$$\boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -v\tan\alpha\boldsymbol{j}$$

当 $\alpha = \pi/6$ 时,
$$\boldsymbol{v}_B = -v\tan\frac{\pi}{6}\boldsymbol{j} = -\frac{\sqrt{3}}{3}v\boldsymbol{j}$$

1.3　运动的相对性

1.3.1　直线运动

质点在一条确定的直线上的运动称为**直线运动**.作直线运动的质点,其位置以坐标 x 来表示,如图 1-8 所示.因为研究质点的直线运动,总是以该直线作为坐标轴来讨论,于是可得

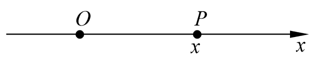


图 1-8　直线运动

质点 P 的位置矢量为　$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}$

质点 P 的位移为　$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}$

质点 P 的速度为　$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$

质点 P 的加速度为　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$

由于质点在 Ox 直线上运动,上述矢量中的每一个矢量只能取两个方向:或者与 x 轴的正向相同,或者与 x 轴的负向相同.例如,当质点速度的方向与 Ox 轴的正向相同时,$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$,相反时 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0$;当加速度的方向与 Ox 轴的正向相同时,$a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}>0$,相反时 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}<0$.由此可见,沿一直线运动时的矢量 $\boldsymbol{r}$,$\Delta\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的方向,可以用相应的代数量 x,Δx,v 和 a 的正负符号来表示.即,这些代数量的绝对值表示其大小,正负号表示其方向.如果 v 与 a 同号,则质点作加速直线运动;如果 v 与 a 异号,则质点作减速直线运动.

假定质点沿 x 轴作匀加速直线运动,加速度 a 不随时间变化,初位置为 x_0,初速度为 v_0,则

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$$

对上式两边取定积分可得

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t,\quad v=v_0+at \tag{1-8}$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0+at$$

所以

$$\mathrm{d}x=(v_0+at)\mathrm{d}t$$

对上式两边再取定积分可得

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(v_0+at)\mathrm{d}t,\quad x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1-9}$$

式(1-8)和式(1-9)消去时间参数可得

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0) \tag{1-10}$$

式(1-8)、式(1-9)和式(1-10)正是中学学过的匀变速直线运动公式.

可见:如果知道了质点的运动方程,我们就可以根据速度和加速度的定义用求导数的方法求出质点在任何时刻(或任何位置)时的速度和加速度.然而在许多实际问题中,往往先知道质点的加速度,而且要求在此基础上求出质点在各时刻的速度和位置.求解此类问题可采用积分法.

检测点6:对于直线运动而言,加速与减速的关系如何?

例1-3 一质点沿 x 轴正向运动,其加速度为 $a=kt$,若采用国际单位制(SI),则式中常数 k 的单位是什么?当 $t=0$ 时,$v=v_0$,$x=x_0$,试求质点的速度和质点的运动方程.

解 因为 $a=kt$,所以 $k=\dfrac{a}{t}$.故 k 的单位为$\dfrac{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{\mathrm{s}}=\mathrm{m\cdot s^{-3}}$.又因为 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=kt$,所以有 $\mathrm{d}v=kt\mathrm{d}t$,做定积分有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t kt\mathrm{d}t,v=v_0+\frac{1}{2}kt^2$$

而

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0+\frac{1}{2}kt^2$$

所以

$$\mathrm{d}x=\left(v_0+\frac{1}{2}kt^2\right)\mathrm{d}t$$

再做定积分有

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t\left(v_0+\frac{1}{2}kt^2\right)\mathrm{d}t$$

得

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{6}kt^3$$

1.3.2 相对运动

同一运动质点在不同的参照系中的位置矢量不同,速度不同,加速度也不同,这是由运

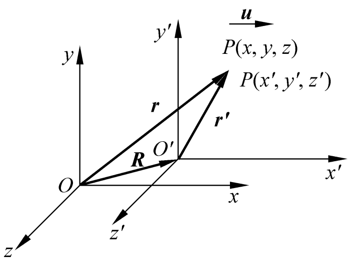


图 1-9　相对运动

动的相对性决定的. 下面来讨论相对运动中这三个物理量之间的定量关系.

如图 1-9 所示，设参考系 $O'x'y'z'$ 相对于参考系 $Oxyz$ 以速度 $\boldsymbol{u}$ 沿 x 轴正向运动，此时质点 P 在空间运动，$P(x,y,z)$ 相对于 $Oxyz$ 系的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，$P(x',y',z')$ 相对于 $O'x'y'z'$ 系的位置矢量为 $\boldsymbol{r}'$，O' 相对于 O 的位置矢量为 $\boldsymbol{R}$，则

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} \tag{1-11}$$

式(1-11)为相对运动位置矢量之间的关系，两端对时间求导，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}$$

于是上式可写为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \tag{1-12}$$

式(1-12)为相对运动速度之间的关系，两端对时间求导，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

于是上式可写为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \tag{1-13}$$

式(1-13)为相对运动加速度之间的关系.

若参考系 $O'x'y'z'$ 相对于参考系 $Oxyz$ 作匀速直线运动，即 $\boldsymbol{u}$ 为常矢量，则 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=0$. 于是式(1-13)变为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$，即在彼此作匀速直线运动的参照系中，质点 P 的加速度相同.

检测点 7：若在不同参照系中质点的加速度相同，则这些参照系之间有什么关系？

1.4　平面曲线运动

质点在确定的平面内作曲线运动，称为**平面曲线运动**. 常见的实例有抛体运动和圆周运动.

1.4.1　抛体运动

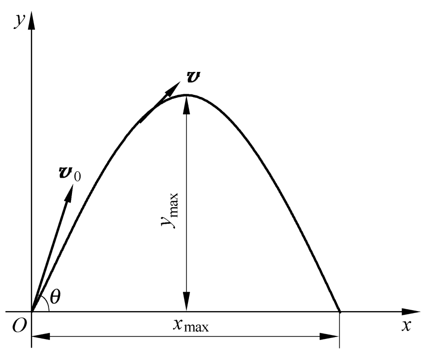


图 1-10　抛体运动

从地面上某点向空中抛出一物体，它在空中的运动称为**抛体运动**. 物体被抛出之后，若忽略风力及空气阻力的影响，它的运动轨迹总是被限制在通过抛射点的抛出方向和竖直方向所确定的平面内，因此描述这种运动，就可以把抛出点作为坐标原点，把水平方向和竖直方向分别作为 x 轴和 y 轴，如图 1-10 所示. 若从抛出时刻开始计时，则 $t=0$ 时，物体的初位置在原点即(0,0)，以 $\boldsymbol{v}_0$ 表示物体的初速度，以 θ 角表示抛射角，即初速度与 x 轴的夹角，则 $\boldsymbol{v}_0$ 沿

x 轴和 y 轴的分量分别为

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases}$$

物体在空中的加速度分别为

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

其中负号表示加速度的方向与 y 轴的方向相反. 利用这些条件，可以方便地得出物体在空中任意时刻的速度为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= v_0 \sin\theta - gt \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

也可以得出物体在空中任意时刻的位置坐标为

$$\left.\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\theta) t \\ y &= (v_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

式(1-14)和式(1-15)就是在中学已熟知的抛体运动的有关公式. 由这两式也可以求出物体在空中飞行回落到抛出点高度时所用的时间为

$$T = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

飞行中的最大高度(即高出抛射点的最大距离)为

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

飞行的射程(即回落到与抛出点的高度相同时所经过的水平距离)为

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

由上面的公式可以看出：

若 $\theta = 0$，则 $y_{\max} = 0$，此时为平抛运动；

若 $\theta = \frac{\pi}{4}$，则 $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$，此时射程最大；

若 $\theta = \frac{\pi}{2}$，则 $x_{\max} = 0$，此时为竖直上抛运动.

消去式(1-15)中的时间参数后可以得到抛体运动的轨迹方程为

$$y = x \tan\theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

对于一定的 v_0 和 θ，这一方程表示一条通过原点的二次曲线. 这一曲线就是数学上的“抛物线”.

必须特别注意，以上关于抛体运动的公式，都是在忽略空气阻力的情况下得出的. 只有在初速较小的情况下，它们的计算结果才比较符合实际. 实际中子弹和炮弹在空中飞行的规律和上述公式的计算结果有很大的差别. 子弹和炮弹的飞行规律，在军事技术中由专门的学科“弹道学”进行研究. 对于射程和射高极大的抛射体，如洲际导弹，弹头大部分时间内都在大气层以外的空间飞行，所受的空气阻力是很小的. 但是由于在这样大的范围内飞行，重力

加速度的大小和方向都有明显的变化，因而以上公式也不能适用.

检测点 8：对于抛体运动而言，在一个小范围内什么恒定不变？

1.4.2　圆周运动

在确定的平面上质点的运动轨迹为圆周的运动称为**圆周运动**.下面从加速度的定义出发，进一步分析讨论研究质点作圆周运动时的加速度.

如图 1-11 所示，设 t 时刻质点位于 P 点，其速度为 $\boldsymbol{v}_P$；$t+\Delta t$ 时刻质点位于 Q 点，其速度为 $\boldsymbol{v}_Q$.则在 Δt 这一段时间内，速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_Q-\boldsymbol{v}_P$.于是在由矢量 $\boldsymbol{v}_P$，$\boldsymbol{v}_Q$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}$ 组成的三角形 CPQ 中取 CP' 的长度等于 CP 的长度，那么速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 就可分解为两个矢量 $\Delta\boldsymbol{v}_n$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ 之和，即 $\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}_n+\Delta\boldsymbol{v}_\tau$.所以加速度

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}$$

令 $\boldsymbol{a}_n=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}$，$\boldsymbol{a}_\tau=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_\tau$.

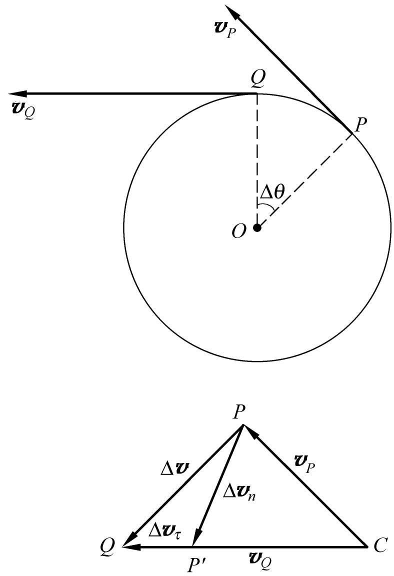


图 1-11　圆周运动

下面我们再来分析 $\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小、方向和物理意义.

当 $\Delta t\to 0$ 时，Q 点无限趋近于 P 点，OQ 与 OP 之间的夹角 $\Delta\theta\to 0$.$\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ 的极限方向与 $\boldsymbol{v}_P$ 相同，是 P 点处圆周的切线方向；$\Delta\boldsymbol{v}_n$ 的极限方向与 $\boldsymbol{v}_P$ 垂直，沿半径指向圆心.可见质点在 P 点处的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的两个分量 $\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_\tau$ 恰好分别指向圆周上 P 点处的法向和切向这两个特殊方向.顾名思义，我们将 P 点处的 $\boldsymbol{a}_n$ 称为该点处的**法向加速度**（对于圆周运动即为向心加速度），将 P 点处的 $\boldsymbol{a}_\tau$ 称为该点处的**切向加速度**.

平移 $\boldsymbol{v}_P$ 和 $\boldsymbol{v}_Q$ 矢量于 C 点，由图 1-11 可以看出，$|\Delta\boldsymbol{v}_\tau|$ 是速度大小的增量（即速率的增量 Δv），于是切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小为

$$a_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{v}_\tau|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

又因为 $\triangle OPQ\backsim\triangle CPP'$，所以

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{v}_n|}{v_P}=\frac{\overline{PQ}}{R}$$

故法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 的大小为

$$a_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{v}_n|}{\Delta t}=\frac{v_P}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{PQ}}{\Delta t}=\frac{v_P^2}{R}$$

由于 P 点是圆周上的任意一点，所以质点在圆周上的法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 的大小为

$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

其中，v 为对应点的速度大小（即速率）.

通过上面的分析和研究，我们发现：**切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与质点运动的速率改变相联系，法**

向加速度 a_n 与质点运动的方向改变相联系. 于是将其归纳为

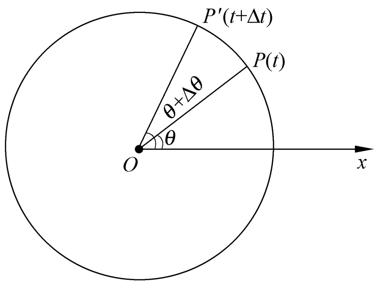


图 1-12 角量描述

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau \\ &a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \\ &\tan(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \frac{a_n}{a_\tau} \end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

质点作圆周运动,还通常用角量来描述,如图 1-12 所示.

质点作圆周运动时,在某一时刻 t 位于 P 点,质点的位置可由其半径 OP 与过圆心 O 的参考线 Ox 的夹角 θ 唯一地确定,θ 角称为质点的**角位置**. 角位置不断地随时间变化,它是时间的函数,即 $\theta=\theta(t)$. 它被称为质点作圆周运动时的**角量运动方程.**

在时刻 $t+\Delta t$,质点运动到达 P' 点时其角位置为 $\theta+\Delta\theta$,在 Δt 时间内,质点转过的角度 $\Delta\theta$ 称为**角位移**. 质点沿圆周运动的绕行方向不同,角位移的转向也不同. 一般情况下,规定质点沿逆时针方向绕行时角位移取正值,质点沿顺时针方向绕行时角位移取负值.

角位移 $\Delta\theta$ 与对应时间之比 $\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 称为 Δt 时间内的**平均角速度**. 当 $\Delta t \to 0$ 时,平均角速度的极限称为质点在 t 时刻对应的**瞬时角速度**(简称**角速度**),即

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-17}$$

同样的道理,质点的**角加速度**为

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-18}$$

在国际单位制(SI)中,角位置、角位移的单位为 rad,角速度的单位为 $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$,角加速度的单位为 $\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$,目前工程上还在继续使用 $\mathrm{r \cdot min^{-1}}$ 来表示转速,

$$1\ \mathrm{r \cdot min^{-1}} = \frac{\pi}{30} \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

质点作圆周运动时,如果角速度 ω 不随时间变化,即角加速度 β 为零,则质点作匀速圆周运动;如果角加速度 β 不随时间变化且不等于零,则质点作匀加速圆周运动. 对于匀加速圆周运动而言,可以用与研究匀变速直线运动一样的办法得到

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

如图 1-12 所示,因为质点在圆周上所经历的路程即弧长为 $\Delta s = R\Delta\theta$,两边同除以质点运动所经历的时间 Δt,得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$,两边取极限,得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\quad 即\quad v=R\omega$$

所以将等式 $v=R\omega$ 两边对时间求一阶导数,得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\quad 即\quad a_\tau=R\beta$$

对于法向加速度,有 $$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

综上所述,对于圆周运动其线量和角量之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}v&=R\omega\\a_\tau&=R\beta\\a_n&=R\omega^2\end{aligned}\right\}\tag{1-19}$$

检测点 9:匀速圆周运动的加速度是否存在?

例 1-4　一人乘摩托车跳越一个大矿坑,他以与水平成 22.5°夹角的初速度 $65\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 从西边起跳,准确地落在坑的东边.已知东边比西边低 70 m,忽略空气阻力,且取 $g=10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,问:(1)矿坑有多宽,他飞越的时间有多长?(2)他在东边落地时的速度多大?速度与水平面的夹角多大?

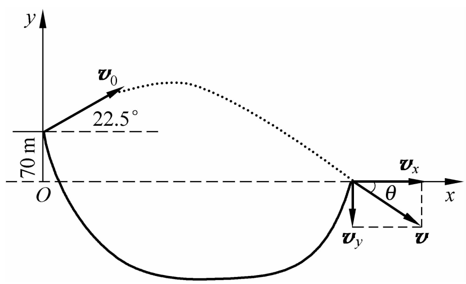


图 1-13　例 1-4 用图

解　根据题意建立坐标系,如图 1-13 所示.

(1) 若以摩托车和人作为一质点,则其运动方程为

$$\begin{cases}x=(v_0\cos\theta_0)t\\y=y_0+(v_0\sin\theta_0)t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

运动速度为

$$\begin{cases}v_x=v_0\cos\theta_0\\v_y=v_0\sin\theta_0-gt\end{cases}$$

当到达东边落地时 $y=0$ 有 $y_0+(v_0\sin\theta_0)t-\frac{1}{2}gt^2=0$,将 $y_0=70\ \mathrm{m}$,$g=10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,$v_0=65\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,$\theta_0=22.5°$代入解之,得到飞越矿坑的时间为 $t=7.0\ \mathrm{s}$(另一根舍去),矿坑的宽度为 $x=420\ \mathrm{m}$.

(2) 在东边落地时 $t=7.0\ \mathrm{s}$,其速度为

$$\begin{cases}v_x=v_0\cos\theta_0=60.1(\mathrm{m\cdot s^{-1}})\\v_y=v_0\sin\theta_0-gt=-44.9(\mathrm{m\cdot s^{-1}})\end{cases}$$

于是落地点速度的量值为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=75.0(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

此时落地点速度与水平面的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}=37°$$

例 1-5　一质点沿半径为 R 的圆周运动,其角位置与时间的函数关系式(即角量运动方程)为 $\theta=\pi t+\pi t^2$,取 SI 制,则质点的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度各是

什么？

解 因为
$$\theta=\pi t+\pi t^2$$
所以质点的角速度
$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\pi+2\pi t$$
质点的角加速度为
$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=2\pi$$
质点的切向加速度为
$$a_\tau=R\beta=2\pi R$$
质点的法向加速度为
$$a_n=\omega^2R=(\pi+2\pi t)^2R$$

*1.5 知识拓展——全球定位系统和质点运动学

1. 全球定位系统简介

1973年12月，美国国防部制订了“导弹星”全球定位系统（简称GPS）的国防导弹卫星计划，并建立了一个供各军种使用的统一的全球军用导弹卫星系统. 该系统能够向全球用户提供连续、实时、高精度的三维位置、三维速度和时间信息. 它是一种高精度卫星定位导航系统，是由地面监控网、多个卫星和大量用户接收机组成的.

全球定位系统在地面上空的空间部分由24颗卫星组成导航卫星星座，21颗卫星为工作卫星，3颗卫星为备份卫星，卫星在6条轨道上运转，轨道面倾角为55°，每条轨道上布设有3颗卫星，彼此相距120°，各轨道的升交点沿赤道等间隔配置，且相邻升交点之间的角距离为60°. 从一个轨道面的卫星到下一个轨道面的卫星之间错开40°，另外每隔一个轨道平面的轨道上布置有1颗预热备份卫星，每个卫星是在距地面2.02×10^7 m高度的轨道上运转，或者说轨道半径为2.65×10^7 m，运转一周为12 h. 每颗卫星都装有非常精确的原子钟，这样的卫星系统基本上保证了地球上任何位置的用户接收机能同时接收到4～8颗卫星发来的信号. 如图1-14所示.

现代战争具有大规模大纵深非线性的作战特点，这就要求分布在广大地域的地面部队、坦克、火炮、飞机、水面和水下的舰艇具有协同一致的作战行动，同时也要求他们具有高度精确且一致的时间基准，并且在任何时候都能确定自身的位置和速度. 全球定位系统是卫星无线电导航、定位和授时系统，其主要任务就是为分布在全球各地的各军兵种部队及武器装备、低轨道军用卫星提供全天候的精确实时的导航、定位和授时服务.

2. 全球定位系统的物理基础

由于全球定位系统能同时保证全球任何地点或近地空间的用户最低限度连续收看到4颗卫星，如图1-15所示. 每颗卫星又都能连续不断地向用户接收机发射导航信号，所以用户到卫星的距离等于电磁波的传播速度乘以电磁波传播所用的时间.

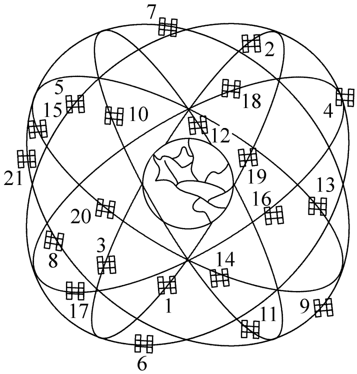


图 1-14　GPS 卫星星座

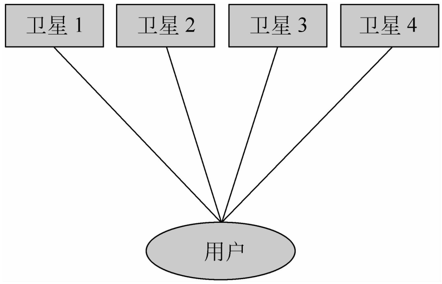


图 1-15　GPS 的定位原理

假设用户同时接收到 4 颗卫星信号，且 4 颗卫星发射信号时的精确位置和时间分别为：(x_1,y_1,z_1,t_1)，(x_2,y_2,z_2,t_2)，(x_3,y_3,z_3,t_3)，(x_4,y_4,z_4,t_4)，电磁波的传播速度为 u，用户此时所在的位置为(x,y,z,t)，则有

$$\begin{cases}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=u(t-t_1)\\\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}=u(t-t_2)\\\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2}=u(t-t_3)\\\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2}=u(t-t_4)\end{cases}$$

解此方程组可求得 x,y,z,t 的值，即用户此时所在的位置.

如果连续不断地定位，则可求出三维速度(v_x,v_y,v_z). 设 t 时刻用户的位置为(x,y,z)，设 t'时刻用户的位置为(x',y',z')，则用户的速度为

$$v_x=\frac{x-x'}{t-t'},\quad v_y=\frac{y-y'}{t-t'},\quad v_z=\frac{z-z'}{t-t'}$$

全球定位系统测量精度高. 据国内外 10 多年的众多实验和研究表明：该系统相对定位，若方法合适，软件精良，则短距离（15 千米以内）精度可达到厘米的数量级或更好；中长距离（几十千米到几千千米）相对精度可达到 $10^{-7}\sim10^{-8}$，其精度是相当惊人的.

3. 全球定位系统的军事应用

全球定位系统可为地面车辆、人员以及航空、航海、航天等领域的飞机、舰艇、潜艇、卫星、航天飞机等进行导航和定位；可用于洲际导弹的中段制导，作为惯性制导系统的补充，提高导弹的精度；还可用于照相制图和大地测量、空中交会和加油、空投和空运、航空交通控制和指挥、火炮的定位和发射、靶场测试、反潜战、布雷、扫雷、船只的保持和营救工作等. 全球定位系统首次成功地广泛用于军事行动始于海湾战争，且备受欢迎. 以美国为首的多国部队给海陆空三军装备了 1.7 万台全球定位系统接收机，为多国部队产生了难以估量的军事和经济效益.

例如，在实施“沙漠风暴”的第一天晚上，美军出动了 7 架 B—52G 战略轰炸机向伊拉克发射了 35 枚 AGM—80C 巡航导弹，这些导弹上都装有全球定位系统复合制导装置，能从区域目标转为定点目标命中，准确集中预定战略目标，使伊军通信、防空和供电系统陷于瘫痪

状态.北约对南联盟的行动中,更加广泛地使用远程巡航导弹和联合直接攻击弹药等精确打击武器,对南联盟军、民用目标进行精确打击,也是借助全球定位系统的精确定位.在2003年对伊拉克重点目标的打击中,全球定位系统又起到了巨大的作用.所以可以肯定全球定位系统在未来战争中必将发挥越来越大的作用.

由于全球定位系统具有巨大的实用价值,各国都在大力发展.除了美国的全球定位系统(GPS)外,俄罗斯导航系统(Gionass),由21颗工作卫星和3颗在轨备用卫星组成,均匀分布在3个轨道平面上;欧洲空间局(ESA)筹建的导航卫星系统(GALILEO),称为伽利略计划,其中包括赤道面上的6颗同步卫星(GEO)和12颗高椭圆轨道(HEO)卫星的混合卫星星座;截至2012年10月25日23时33分,我国的北斗卫星导航系统(BDS)导航工程区域组网顺利完成,它由5颗静止轨道卫星和30颗非静止轨道卫星组成.

阅读材料1　伽利略

伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)是意大利文艺复兴时期的天文学家、物理学家、力学家和哲学家,被称为近代科学之父.

伽利略为哥白尼的日心说提供了科学的支持,因名著《星际使者》的出版,被后人称为天空中的哥伦布;他在培根的基础上发展了科学的实验方法,把自然科学从单纯的思索与思辨过渡到了由实验检验了的科学理论;他总结了落体运动、抛体运动的规律,并给予了理论上的论证,著名的比萨斜塔实验彻底推翻了亚里士多德的物质观;他的斜面实验实现了不靠外力来维持的惯性运动,为惯性定律的诞生奠定了基础;他发现了摆的等时性,后被惠更斯利用制成了“伽利略钟”;他对液体与热学深有研究并发明了温度计;他对力学相对性原理思考后得出的结论,在物理学中留下了伽利略变换这一宝贵遗产.

伽利略的名著《关于两门新科学的对话与数学证明对话集》总结了他最成熟的科学思想及他在物理学与天文学方面的研究成果.他是勤奋的科学家,深信科学家的任务是探索并利用自然规律.虽然晚年被剥夺了人身自由,但他开创新科学的意志并不动摇,他追求科学真理的精神和成果永远为人们所景仰.

伽利略的科学观是观察——假设——推理——实验——总结规律.研究的特点是理想实验与科学推理紧密结合.

复习与小结

1．描写质点运动的 4 个物理量

位置矢量：描述质点在空间的位置情况.

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

位移：描述质点位置的改变情况.

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

速度：描述质点位置变动的快慢和方向.

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

加速度：描述质点速度的变化情况.

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

上述 4 个物理量均具有矢量性、瞬时性和相对性.

2．圆周运动的速度和加速度

（1）线量描述

线速度 $\boldsymbol{v}$：方向沿切向，大小为其运动的速率 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$：方向沿切向（$a_\tau>0$，$\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向，加速；$a_\tau<0$，$\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反向，减速），大小为 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$：方向指向圆心，大小为 $a_n=\frac{v^2}{R}$.

线加速度 $\boldsymbol{a}$：方向指向轨迹凹的一侧.

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n,\quad a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2},\quad \tan(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})=\frac{a_n}{a_\tau}$$

（2）角量描述

角位置：$\theta(t)$

角速度：$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度：$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

（3）线量与角量的关系：$s=R\theta$，$v=R\omega$，$a_\tau=R\beta$，$a_n=R\omega^2$

3．相对运动

相对运动位置矢量之间的关系：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{R}$

相对运动速度之间的关系：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$

相对运动加速度之间的关系：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$

若$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$，即在彼此作匀速直线运动的参照系中，质点的加速度相同.

练　习　题

1-1　速度与加速度的方向之间成________时，质点的运动为加速运动；速度与加速度的方向之间成________时，质点的运动为减速运动.

1-2　已知质点运动的位置矢量，即运动方程，求其速度与加速度，则采用________；已知质点运动的加速度，求其速度与位置矢量，则采用________.

1-3　若甲物体的运动速度为$\boldsymbol{v}_{甲}$，乙物体的运动速度为$\boldsymbol{v}_{乙}$，则甲物体相对于乙物体运动速度为________.

1-4　质点作抛体运动的过程中：________速度和________是固定不变的；________速度是时刻变化的.

1-5　质点作匀速率圆周运动的过程中，________加速度始终为零；质点作加速圆周运动的过程中，________加速度的方向始终与速度的方向相同.

1-6　下列关于质点运动的表述中，不可能出现的情况是（　　）.

A. 一质点向前的加速度减小了，其向前的速度也随之减小

B. 一质点具有恒定速率，却有变化的速度

C. 一质点加速度值恒定，而其速度方向不断改变

D. 一质点具有零速度，同时具有不为零的加速度

1-7　下列关于加速度的表述中，正确的是（　　）.

A. 质点作圆周运动时，加速度的方向总是指向圆心

B. 质点沿 x 轴运动，若加速度 $a<0$，则质点作减速运动

C. 若质点的加速度为恒矢量，则运动轨迹必为直线

D. 质点作抛物线运动时，其法向加速度 a_n 和切线加速度 a_τ 是不断变化的，因此其加速度 $a=\sqrt{a_n+a_\tau}$也是不断变化的

1-8　某质点沿着 y 轴运动，其运动方程为 $y=2t^2-3t^3$，取国际单位. 若 $t=1$ s，则质点正在（　　）.

A. 加速　　B. 减速　　C. 匀速　　D. 静止

1-9　某人骑自行车以速率 u 向西行驶，今有风以相同的速率 u 从北偏东 30°方向吹来，则人感觉风是从哪个方向吹来的？（　　）

A. 北偏东 30°　　B. 北偏西 30°　　C. 西偏南 30°　　D. 南偏东 30°

1-10　球Ⅰ系于长为 l 的轻绳下，球Ⅱ固定于长为 l 的轻杆的一端，二者都垂直悬挂于平衡位置. 分别撞击两小球，使其都以水平初速开始运动，并使它们恰好完成圆周运动. 设两球的初速率分别为 u_{I} 和 u_{II}，则有（　　）.

A. $u_{\mathrm{I}}<u_{\mathrm{II}}$　　B. $u_{\mathrm{I}}=u_{\mathrm{II}}$　　C. $u_{\mathrm{I}}>u_{\mathrm{II}}$　　D. 不能确定

1-11　某质点的速度为 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-8t\boldsymbol{j}$，已知 $t=0$ 时它过点（3，－7），求该质点的运动方程.

1-12　某质点在平面上作曲线运动，t_1 时刻位置矢量为 $\boldsymbol{r}_1=-2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$，$t_2$ 时刻的位置矢

量为 $\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，求：(1)在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内质点的位移矢量式；(2)该段时间内位移的大小和方向；(3)在坐标图上画出 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 及 $\Delta\boldsymbol{r}$(题中 r 以 m 计，t 以 s 计).

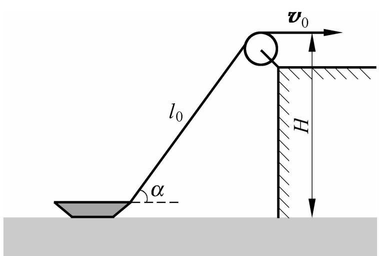
1-13　某质点作直线运动，其运动方程为 $x=1+4t-t^2$，其中 x 以 m 计，t 以 s 计. 求：(1)第 3 s 末质点的位置；(2)头 3 s 内的位移大小；(3)头 3 s 内经过的路程.

1-14　已知某质点的运动方程为 $x=2t$，$y=2-t^2$，式中 t 以 s 计，x 和 y 以 m 计. (1)计算并图示质点的运动轨迹；(2)求出 $t=1$ s 到 $t=2$ s 这段时间内质点的平均速度；(3)计算 1 s 末和 2 s 末质点的速度；(4)计算 1 s 末和 2 s 末质点的加速度.

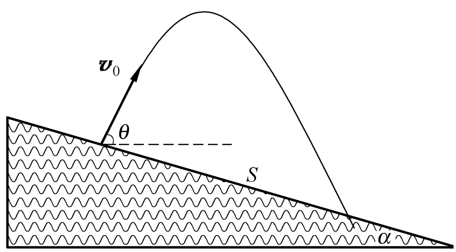
1-15　湖中有一小船，岸边有人用绳子跨过离河面高 H 的滑轮拉船靠岸，如题 1-15 图所示. 设绳子的原长为 l_0，人以匀速 $\boldsymbol{v}_0$ 拉绳，试描述小船的运动轨迹并求其速度和加速度.

1-16　大马哈鱼总是逆流而上，游到乌苏里江上游去产卵，游程中有时要跃上瀑布. 这种鱼跃出水面的垂直的速率可达 32 km·h^{-1}. 它最高可跃上多高的瀑布？和人的跳高记录相比如何？

1-17　一人站在山坡上，山坡与水平面成 α 角，他扔出一个初速为 v_0 的小石子，v_0 与水平面成 θ 角(向上)如题 1-17 图所示. (1)若忽略空气阻力，试证小石子落到了山坡上距离抛出点为 S 处，有 $S=\dfrac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$. (2)由此证明对于给定的 v_0 和 α 值，S 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$时有最大值 $S_{\max}=\dfrac{v_0^2(\sin\alpha+1)}{g\cos^2\alpha}$.



题 1-15 图



题 1-17 图

1-18　一人扔石子的最大出手速率为 $v=25$ m·s^{-1}. 他能击中一个与他的手水平距离为 $L=50$ m，高为 $h=13$ m 处的一目标吗？在这个距离上他能击中的最大高度是多少？

1-19　如果把两个物体 A 和 B 分别以初速度 $\boldsymbol{v}_{0A}$ 和 $\boldsymbol{v}_{0B}$ 抛出去. $\boldsymbol{v}_{0A}$ 与水平面的夹角为 α，$\boldsymbol{v}_{0B}$ 与水平面的夹角为 β，试证明在任意时刻物体 B 相对于物体 A 的速度为常矢量.

1-20　如果已测得上抛物体两次从两个方向经过两个给定点的时间，即可测出该处的重力加速度. 若物体沿两个方向经过水平线 A 的时间间隔为 Δt_A，而沿两个方向经过水平线 A 上方 h 处的另一水平线 B 的时间间隔为 Δt_B，设在物体运动的范围内重力加速度为常量，试求该重力加速度的大小.

1-21　以初速 v_0 将一物体斜向上抛，抛射角为 θ，不计空气阻力，试求物体在轨道最高点处的曲率半径.

1-22　某质点从静止出发沿半径为 $R=1$ m 的圆周运动，其角加速度随时间的变化规律是 $\beta=12t^2-6t$，试求质点的角速度及切向加速度的大小.

1-23　某质点作圆周运动的方程为 $\theta=2t-4t^2$(θ 以 rad 计，t 以 s 计). 在 $t=0$ 时开始逆

时针旋转，试求：(1)$t=0.5$ s时，质点以什么方向转动；(2)质点转动方向改变的瞬间，它的角位置θ等于多大？

1-24 质点从静止出发沿半径$R=3$ m的圆周作匀变速运动，切向加速度$a_t=3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 试求：(1)经过多少时间后质点的总加速度恰好与半径成45°角？(2)在上述时间内，质点所经历的角位移和路程各为多少？

1-25 汽车在半径为$R=400$ m的圆弧弯道上减速行驶. 设某一时刻，汽车的速率为$v=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，切向加速度的大小为$a_\tau=0.2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 求汽车的法向加速度和总加速度的大小和方向.