3 信号的傅里叶变换习题参考解答

3.1(3.1) 求下述序列的傅里叶变换，并分别给出其幅频特性和相频特性。

(1) $x_1(n)=\delta(n-n_0)$

(2) $x_2(n)=3-\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad |n|\leqslant 3$

(3) $x_3(n)=a^n[u(n)-u(n-N)]$

(4) $x_4(n)=|a|^n u(n+2) \qquad |a|<1$

解：

(1) 对 $x_1(n)$，有

$$X_1(e^{j\omega}) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

幅频响应为 $|X(e^{j\omega})|=|e^{-j\omega n_0}|=1$，相频响应为

$$\varphi(\omega)=-\omega n_0$$

(2) 对 $x_2(n)$，有

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-3}^{3}\left[3-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]e^{-j\omega n}$$

其中

$$\sum_{n=-3}^{3}3e^{-j\omega n} = 3+6\cos\omega+6\cos2\omega+6\cos3\omega$$

$$-\sum_{n=-3}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\omega n} =-1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}-3e^{j\omega}-\frac{1}{9}e^{-j2\omega}-9e^{j2\omega}-\frac{1}{27}e^{-j3\omega}-27e^{j3\omega}$$

将上述两项相加即得 $X_2(e^{j\omega})$。图 3.1.1(a)和(b)分别给出了用 MATLAB 求出的 $X_2(e^{j\omega})$ 的幅频响应和相频响应曲线，其中相频响应曲线没有求解卷绕。

(3) 对 $x_3(n)=a^n[u(n)-u(n-N)]$，有

$$X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}-\sum_{n=N}^{\infty}a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1}a^n e^{-j\omega n} = \frac{1-a^N e^{-j\omega N}}{1-ae^{-j\omega}}$$

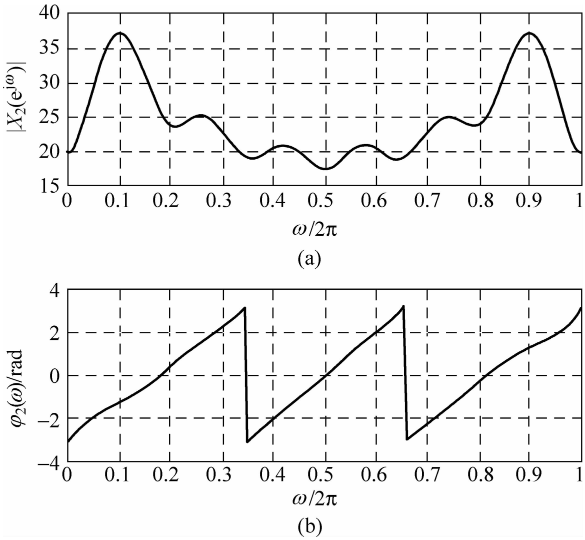

图 3.1.1

(a) 幅频响应；(b) 相频响应

幅频特性为

$$|X_3(e^{j\omega})| = \left|\frac{1-a^N e^{-j\omega N}}{1-ae^{-j\omega}}\right| = \frac{\sqrt{1+a^{2N}-2a^N\cos N\omega}}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{a^N\sin(\omega N)}{1-a^N\cos(\omega N)}\right) - \arctan\left(\frac{a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}\right)$$

（4）对 $x_4(n)=|a|^n u(n+2)$，$|a|<1$，有

$$X_4(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a|^n u(n+2) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-2}^{\infty} |a|^n e^{-j\omega n} = \frac{|a|^{-2} e^{2j\omega}}{1-|a|e^{-j\omega}}$$

幅频特性为

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\frac{|a|^{-2}e^{2j\omega}}{1-|a|e^{-j\omega}}\right| = \frac{|a|^{-2}}{\sqrt{1+|a|^2-2|a|\cos\omega}}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = 2\omega - \arctan\left(\frac{|a|\sin(\omega)}{1-|a|\cos(\omega)}\right)$$

3.2（3.2） 求下述两个序列的傅里叶变换。

（1）$x_1(n)=a^n\cos(\omega_1 n)u(n) \quad |a|<1$

（2）$x_2(n)=a^{|n|}\cos(\omega_2 n) \quad 0<a<1$

解：

(1) 对 $x_1(n)=a^n\cos(\omega_1 n)u(n)\quad |a|<1$,有

$$X_1(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(\omega_1 n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{e^{j\omega_1 n}+e^{-j\omega_1 n}}{2}e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{j\omega_1 n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega_1 n}e^{-j\omega n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{j(\omega_1-\omega)n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j(\omega_1+\omega)n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ae^{j(\omega_1-\omega)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega_1+\omega)}}\right]$$

$$=\frac{1-ae^{-j\omega}\cos\omega}{1-2ae^{-j\omega}\cos\omega+a^2e^{-2j\omega}}$$

(2) 对 $x_2(n)=a^{|n|}\cos(\omega_2 n)$,$0<a<1$,可求出

$$X_2(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}\cos(\omega_2 n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\frac{e^{j\omega_2 n}+e^{-j\omega_2 n}}{2}e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}\frac{e^{j\omega_2 n}+e^{-j\omega_2 n}}{2}e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{j\omega_2 n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-j\omega_2 n}e^{-j\omega n}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a^n e^{-j\omega_2 n}e^{j\omega n}+\sum_{n=1}^{+\infty}a^n e^{j\omega_2 n}e^{j\omega n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{j(\omega_2-\omega)n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-j(\omega_2+\omega)n}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a^n e^{-j(\omega_2-\omega)n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{j(\omega_2+\omega)n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ae^{j(\omega_2-\omega)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega_2+\omega)}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{ae^{-j(\omega_2-\omega)}}{1-ae^{-j(\omega_2-\omega)}}+\frac{ae^{j(\omega_2+\omega)}}{1-ae^{j(\omega_2+\omega)}}\right]$$

$$=\frac{1-a^2}{2}\left[\frac{1}{1-2a\cos(\omega_2+\omega)+a^2}+\frac{1}{1-2a\cos(\omega_2-\omega)+a^2}\right]$$

3.3(3.4) 已知理想低通和高通数字滤波器的频率响应分别是

$$H_{LP}(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

$$H_{HP}(e^{j\omega})=\begin{cases}0 & 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_c\\ 1 & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

求 $H_{LP}(e^{j\omega})$,$H_{HP}(e^{j\omega})$所对应的单位抽样响应 $h_{LP}(n)$,$h_{HP}(n)$。

解：

(1) 对

$$H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

当 $n \neq 0$ 时，有

$$h_{\mathrm{LP}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{j}n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$$

当 $n=0$ 时，有

$$h_{\mathrm{HP}}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\mathrm{d}\omega = \frac{\omega_c}{\pi} = \lim_{n\to 0}\frac{1}{\pi n}(\sin(\omega_c n))$$

所以

$$h_{\mathrm{LP}}(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

(2) 对

$$H_{\mathrm{HP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_c \\ 1 & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

当 $n \neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{HP}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{\mathrm{HP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\mathrm{j}2\pi n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\Big|_{-\pi}^{-\omega_c} + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\Big|_{\omega_c}^{\pi} = \frac{1}{\pi n}\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n}) - (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c n} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c n})}{2\mathrm{j}} \\ &= \frac{1}{\pi n}(\sin(\pi n) - \sin(\omega_c n)) = -\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \end{aligned}$$

当 $n=0$ 时，有

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{HP}}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_c} 1\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\pi} 1\mathrm{d}\omega = \frac{\pi - \omega_c}{\pi} = 1 - \frac{\omega_c}{\pi} \\ &= \lim_{n\to 0}\frac{1}{\pi n}(\sin(\pi n) - \sin(\omega_c n)) \end{aligned}$$

所以

$$h_{\mathrm{HP}}(n) = \delta(n) - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

3.4（3.9） 研究偶对称序列傅里叶变换的特点。

(1) 令 $x(n)=1, n=-N,\cdots,0,\cdots,N$，求 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$；

(2) 令 $x_1(n)=1, n=0,1,\cdots,N$，求 $X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$；

(3) 令 $x_2(n)=1, n=-N,-N+1,\cdots,-1$，求 $X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$；

(4) 显然，$x(n)=x_1(n)+x_2(n)$，试分析 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 和 $X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，$X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 有何关系。

解:

(1) 由 $x(n)=1, n=-N,\cdots,0,\cdots,N$,得

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}+\sum_{n=-N}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}+\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}-1 \tag{A}$$

$$=\frac{1-\cos\omega-\cos\omega(N+1)+\cos\omega N}{1-\cos\omega}-1$$

$$=\frac{\cos\omega N-\cos\omega(N+1)}{1-\cos\omega}$$

由于 $x(n)$ 是实的且是偶对称的序列,对称中心在 $n=0$ 处,所以其傅里叶变换始终是频率 ω 的实函数。

(2) 对 $x_1(n)=1, n=0,1,\cdots,N$,求得

$$X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} \tag{B}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N+1}{2}\omega}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{N+1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N+1}{2}\omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega N/2}\frac{\sin((N+1)\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

由于 $x_1(n)$ 的对称中心在 $N/2$ 处,所以其傅里叶变换有了相位延迟 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega N/2}$,因此,它是复函数。

(3) 对 $x_2(n)=1, n=-N,-N+1,\cdots,-1$,求得

$$X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-N}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}-1=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}-1 \tag{C}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{N+1}{2}\omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N+1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{N+1}{2}\omega}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega}}-1=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega N/2}\frac{\sin((N+1)\omega/2)}{\sin(\omega/2)}-1$$

同理,$x_2(n)$ 的傅里叶变换也是复函数。

(4) 由该题的(A)式,(B)式及(C)式,很容易发现 $X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。这一结论是显而易见的,因为 $x(n)=x_1(n)+x_2(n)$,而傅里叶变换又具有线性性质。

3.5(3.10) 当 $x(n)$ 是一个纯虚信号时,试导出其 DTFT 的"奇、偶、虚、实"的对称性质,并完成(教材中的)图 3.2.2。

解:

由于 $x(n)$ 是纯虚信号,所以 $x(n)$ 可以表示为 $\mathrm{j}x_{\mathrm{I}}(n)$。若将 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 表示为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+\mathrm{j}X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

则可得到下述结论：

（1）$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的实部 $X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是 ω 的奇函数，即

$$X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\sin(\omega n) = -X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

（2）$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的虚部 $X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是 ω 的偶函数，即

$$X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\cos(\omega n) = X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

（3）$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的幅频响应是 ω 的偶函数，即

$$|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = |X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})|，\text{式中 } |X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = [X_{\mathrm{R}}^2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + X_{\mathrm{I}}^2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]^{1/2}$$

（4）$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的相频响应是 ω 的奇函数，即

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})} = -\varphi(-\omega)$$

（5）由于 $X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\sin(\omega n)$和 $X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cos(\omega n)$都为偶函数，所以

$$x(n) = \mathrm{j}x_{\mathrm{I}}(n) = \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\sin(\omega n) + X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cos(\omega n)]\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{0}^{\pi}[X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\sin(\omega n) + X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cos(\omega n)]\mathrm{d}\omega$$

即积分只要从 $0\sim\pi$ 即可。

（6）若 $x(n)$是偶函数，那么

$$X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\sin(\omega n) = 0$$

$$X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\cos(\omega n) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\cos(\omega n) \tag{3.5.1}$$

$$x(n) = \mathrm{j}\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cos(\omega n)\mathrm{d}\omega \tag{3.5.2}$$

以上三式说明，若 $x(n)$是以 $n=0$ 为对称的虚偶信号，那么其频谱是 ω 的虚函数。因此，其相频响应恒为$\pi/2$，这样，$x(n)$可由(3.5.2)式的简单形式来恢复。

（7）若 $x(n)$是奇函数，那么

$$X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\sin(\omega n) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\sin(\omega n)$$

$$X_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\mathrm{I}}(n)\cos(\omega n) = 0 \tag{3.5.3}$$

$$x(n) = \mathrm{j}\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}X_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\sin(\omega n)\mathrm{d}\omega \tag{3.5.4}$$

以上三式说明，若 $x(n)$是以 $n=0$ 为对称的虚奇信号，那么其频谱是 ω 的实函数。因此，其相频响应恒为 0，这样，$x(n)$可由(3.5.4)式的简单形式来恢复。

结合教材第102、103页的结果,可将教材中的图3.2.2完成为图3.5.1。

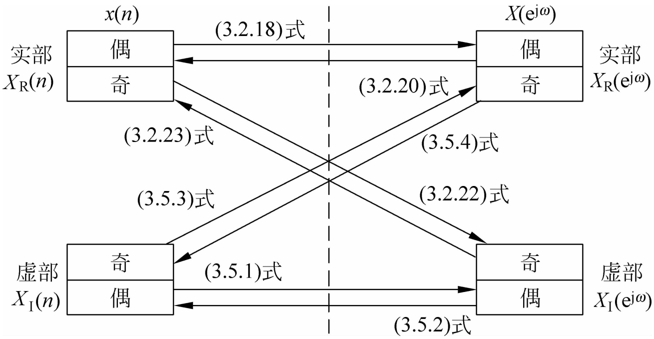

图3.5.1　傅里叶变换的奇、偶、虚、实对称性质

3.6　已知序列 $x(n)=\cos(n\pi/6)$,其中 $n=0,1,\cdots,N-1$,而 $N=12$,

(1) 求 $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$;

(2) 求 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$;

(3) 若在 $x(n)$ 后补 N 个零得 $x_1(n)$,即 $x_1(n)$ 为 $2N$ 点序列,再求 $x_1(n)$ 的 DFT $X_1(k)$。此题求解后,对正弦信号抽样及其 DFT 和 DTFT 之间的关系,能总结出什么结论?

解:

(1) $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{11}\cos(n\pi/6)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{11}\frac{e^{jn\pi/6}+e^{-jn\pi/6}}{2}e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{j12\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right)}}{1-e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right)}}+\frac{1-e^{-j12\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)}}{1-e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-j12\omega}}{1-e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\omega\right)}}+\frac{1-e^{-j12\omega}}{1-e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)}}\right)$$

$$=e^{-j6\omega}\cos 6\omega\frac{2-\sqrt{3}e^{-j\omega}}{1-\sqrt{3}e^{-j\omega}-e^{-j2\omega}}$$

(2) $x(n)$ 的 DFT $X(k)$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{11}\cos(n\pi/6)e^{-j\frac{2\pi}{12}kn}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{11}e^{jn\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{6}\right)}+\sum_{n=0}^{11}e^{-jn\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{6}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-j2k\pi}}{1-e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{6}\right)}}+\frac{1-e^{-j2k\pi}}{1-e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{6}\right)}}\right)$$

显然,只要 k 取整数,则上式括号中两项的分子均为零。但当 $k=1$ 和 $k=11$ 时,这两项的分母也分别为零,因此

$$X(1)=\lim_{k\to 1}\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-j2k\pi}}{1-e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{6}\right)}}+\frac{1-e^{-j2k\pi}}{1-e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{6}\right)}}\right)=\lim_{k\to 1}\frac{1}{2}\frac{1-e^{-j2k\pi}}{1-e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{6}\right)}}$$

$$= \lim_{k\to 1}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{j}2k\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{6}\right)}} = \lim_{k\to 1}\frac{1}{2}\frac{-2k\pi}{-\frac{k\pi}{6}} = 6$$

$$X(11) = \lim_{k\to 11}\frac{1}{2}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{6}\right)}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{6}\right)}}\right) = \lim_{k\to 11}\frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{6}\right)}}$$

$$= \lim_{k\to 11}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{j}2k\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{6}\right)}} = \lim_{k\to 11}\frac{1}{2}\frac{2k\pi}{\frac{k\pi}{6}} = 6$$

当 $k\neq 1,11$ 时，$X(k)=0$。

(3) 在 $x(n)$ 后补 N 个零后得 $x_1(n)$，这时 $x_1(n)$ 为 $2N$ 点序列。$x_1(n)$ 的 DFT $X_1(k)$ 为

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{23}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{24}kn} = \sum_{n=0}^{11}\cos(n\pi/6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{12}n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{11}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{12}\right)}+\sum_{n=0}^{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{12}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{12}\right)}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{12}\right)}}\right)$$

分析上式可知，

① 当 k 为奇数时，

$$X_1(k) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{12}\right)}}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{12}\right)}} = \frac{2-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi/12}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi/12}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi/6}}$$

② 当 k 为偶数时，$X_1(k)$ 表达式中两项的分子全为零，但当 $k=2$ 和 $k=22$ 时，这两项的分母也分别为零，因此

$$X_1(2) = \lim_{k\to 2}\frac{1}{2}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{12}\right)}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{12}\right)}}\right) = \lim_{k\to 2}\frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{12}\right)}}$$

$$= \lim_{k\to 2}\frac{1}{2}\frac{-2k\pi}{-\frac{k\pi}{12}} = 6$$

$$X_1(22) = \lim_{k\to 22}\frac{1}{2}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{12}\right)}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{12}\right)}}\right) = \lim_{k\to 22}\frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{12}\right)}}$$

$$= \lim_{k\to 22}\frac{1}{2}\frac{2k\pi}{\frac{k\pi}{12}} = 6$$

于是，当 k 为偶数，且 $k\neq 2,22$ 时，$X_1(k)=0$。

图 3.6.1(a)，(b)和(c)分别给出了 $x(n)$ 的 DTFT $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，DFT $X(k)$ 和 $x_1(n)$ 的 DFT $X_1(k)$ 的图形。

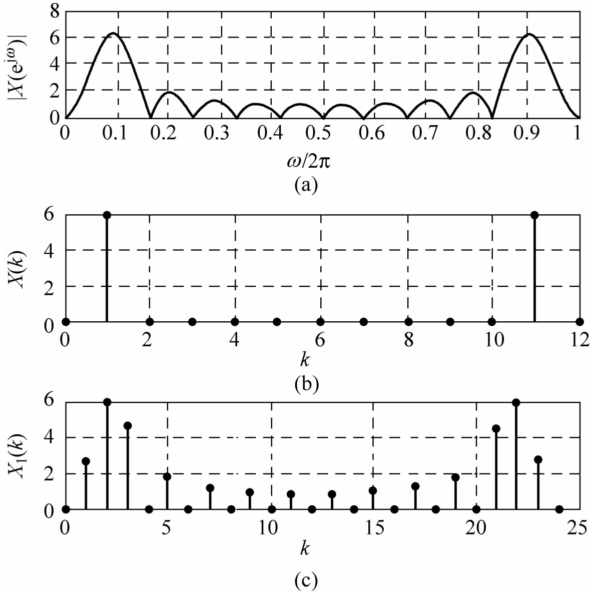

图 3.6.1

(a) $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$；(b) $X(k)$；(c) $X_1(k)$

分析上面三个图可以看出：

(1) DTFT 是频率的连续函数，而 DFT 是离散频率的函数；

(2) 实正弦信号的频谱本来是位于正负频率处的线谱，但由于截短的原因，其 DTFT 不再是线谱，它是矩形窗的频谱和两个线谱卷积的结果，如图 3.6.1 (a)所示；

(3) 对正弦信号做 DFT 时，如果信号的长度包含了整周期，尽管数据也被截短，但其 DFT 仍是线谱，如图 3.6.1(b)所示。这时图 3.6.1(b)是图 3.6.1(a)的抽样，除了 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的两个谱峰位置外，其他都抽到了 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的过零点处；

(4) 在数据 $x(n)$ 后补零，其 DFT 是对 $X(k)$ 进行插值，如图 3.6.1(c)所示。如果被补零的信号是正弦，那么其频谱不再是线谱。

因此，对于正余弦信号，抽样频率应为信号频率的整数倍，且后面一般不应补零。

3.7 (3.15) 已知 $x(n)$ 为 N 点序列，$n=0,1,\cdots,N-1$，其 DTFT 为 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。现对 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 在单位圆上等间隔抽样，得 $Y(k)=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k})$，$k=0,1,\cdots,M-1$，且 $M<N$。设 $Y(k)$ 对应的序列为 $y(n)$，试用 $x(n)$ 表示 $y(n)$。

解：

依题意，有

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n},\quad Y(k)=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k})$$

因此

$$y(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}Y(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}kn}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}kn}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}km}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}kn}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k(n-m)}$$

由于

$$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{M}k(n-m)}=\begin{cases}1 & \langle n-m\rangle_M=r\\0 & \langle n-m\rangle_M\neq r\end{cases}$$

式中$\langle n-m\rangle_M$表示求$n-m$对M的余数，r为整数。所以，

$$y(n)=\sum_{s=0}^{i}x(n+sM),\quad n=0,1,\cdots,M-1$$

式中i是小于或等于$[(N-1)-n]/M$的整数。

例如，假定$N=8$，$M=6$，那么，当$n=0$和$n=1$时，$i=1$，这时

$$y(0)=\sum_{s=0}^{1}x(0+6s)=x(0)+x(6)$$

$$y(1)=\sum_{s=0}^{1}x(1+6s)=x(1)+x(7)$$

而当$n=2\sim5$时，求出$i=0$，所以$s=0$。因此，有

$$y(n)=x(n),\quad n=2,3,4,5$$

该题是教材例3.7.4更一般的形式。

3.8（3.16） 已知$x(n)$为N点序列，$n=0,1,\cdots,N-1$，而N为偶数，其DFT为$X(k)$。

（1）令$y_1(n)=\begin{cases}x\left(\dfrac{n}{2}\right) & n\text{ 为偶数}\\0 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$，所以$y_1(n)$为$2N$点序列。试用$X(k)$表示$Y_1(k)$。

（2）令$y_2(n)=x(N-1-n)$，$y_3=(-1)^n x(n)$，且$y_2(n)$，$y_3(n)$都是N点序列，N为偶数。试用$X(k)$表示$Y_2(k)$，$Y_3(k)$。

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\quad \text{其中 } W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$$

（1）

$$Y_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}y_1(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=\mathrm{even}}^{2N-1}x\left(\frac{n}{2}\right)W_{2N}^{2mk}$$

令$m=n/2$，则

$$Y_1(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mk}=X(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

当$N\leqslant k\leqslant 2N-1$时

$$Y_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}y_1(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=\text{even}}^{2N-1}x\left(\frac{n}{2}\right)W_{2N}^{2mk}$$
$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mk}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{m(k-N)}=X(k-N)$$

即

$$Y_1(k)=\begin{cases}X(k) & k=0,1,\cdots,N-1\\ X(k-N) & k=N,\cdots,2N-1\end{cases}$$

在该题中,$y_1(n)$是由 $x(n)$做 2 倍插值所得到的新序列,其频谱 $Y_1(k)$是原频谱 $X(k)$做周期延拓的结果。

(2) 对 $y_2(n)$,有

$$Y_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}y_2(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)W_N^{nk}$$
$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{(N-1-m)k}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{-(m+1)k}$$
$$=W_N^{-k}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)[W_N^{mk}]^*=W_N^{-k}X^*(k)$$

对 $y_3=(-1)^n x(n)$,有

$$Y_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}y_3(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)[-W_N^k]^n,$$

当 $0\leqslant k\leqslant\frac{N}{2}-1$ 时

$$Y_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\left(k+\frac{N}{2}\right)n}=X\left(k+\frac{N}{2}\right)$$

当$\frac{N}{2}\leqslant k\leqslant N-1$ 时

$$Y_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\left(k-\frac{N}{2}\right)n}=X\left(k-\frac{N}{2}\right)$$

3.9(3.17) 对离散傅里叶变换,试证明 Parseval 定理

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

证明:

由

$$X(k)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} & 0\leqslant k\leqslant N-1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn} & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

可求出

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]^*\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)X(k)\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

3.10（3.18） 设 $x(n)$，$y(n)$的 DTFT 分别是 $X(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$，试证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

证明：

因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega\right]^*\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega\\&=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\right]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y^*(e^{j\omega})d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\right]Y^*(e^{j\omega})d\omega\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

3.11（3.19） 设信号 $x(n)=\{1,2,3,4\}$，通过系统 $h(n)=\{4,3,2,1\}$，$n=0,1,2,3$。

（1）求出系统的输出 $y(n)=x(n)*h(n)$；

（2）试用循环卷积计算 $y(n)$；

（3）简述通过 DFT 来计算 $y(n)$的思路。

解：

（1）LSI 系统的输出是输入 $x(n)$与该系统的单位抽样响应 $h(n)$之间的线性卷积。

因此,用线性卷积计算得

$$y(n)=x(n)*h(n)=\{4,11,20,30,20,11,4\},\quad n=0,1,\cdots,7$$

(2) 若要用循环卷积来计算 $y(n)$,则首先必须将 $x(n)$和 $h(n)$补零,使其长度变为二者长度之和减一,即 $L=N+M-1=4+4-1=7$。这样,补零后得

$$x'(n)=\{1,2,3,4,0,0,0\},\quad h'(n)=\{4,3,2,1,0,0,0\}$$

用循环卷积计算 $x'(n)\circledast h'(n)$是在一个周期内进行的,周期即是 $L=7$。在这一个周期内求出的循环卷积等效于 $x(n)$和 $h(n)$的线性卷积,因此求出的 $y(n)$仍然是$\{4,11,20,30,20,11,4\}$。

(3) 用 DFT 计算 $y(n)$的思路大致如下:

因为 DFT 的"时域卷积,频域相乘"的关系对应的是循环卷积,而不是线性卷积。所以,要想通过 DFT 来计算 $y(n)$,步骤如下:

① 和本题(2)的做法一样,对输入信号和系统的单位抽样响应在后面补零,使其长度都成为 $L=N+M-1$,其中 N 和 M 分别为输入信号与单位抽样响应的长度,这样就可以保证循环卷积的结果与线性卷积的一致;

② 对补零后的两个新的序列分别求 DFT,得到长度都为 L 的两个频域序列;

③ 将这两个频域序列相乘,再将相乘所得的序列作 DFT 逆变换,逆变换所得到的时域序列就是 $y(n)$。

* **3.12 (3.20)** 进一步研究教材中例 3.1.1 中参数 T 和 τ 对傅里叶系数图形的影响。例如,分别令 $\tau=0.2T$, $0.1T$ 及 $0.05T$,试用 MATLAB 求出并画出类似教材中图 3.1.1 的傅里叶系数图,并分析这些参数变化对图形影响的规律。

解:

该问题是研究一个矩形周期信号的傅里叶系数的特点。T 是信号的周期,τ 是矩形窗的宽度。$\tau=0.2T$, $0.1T$ 及 $0.05T$ 时的傅里叶系数分别如图 3.12.1(a),(b)和(c)所示。

由上面的三幅图可以看出,矩形周期信号的傅里叶系数是离散的 sinc 函数。在周期 T 不变的情况下,τ 越小,说明在一个周期内信号的实际宽度越窄,因此其频谱(即傅里叶系数)的主瓣越宽,且频谱变化越来越缓慢,幅度也越来越小。

* **3.13 (3.21)** 设有一长序列

$$x(n)=\begin{cases}n/5 & 0\leqslant n\leqslant 50\\ 20-n/5 & 50<n\leqslant 99\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

令 $x(n)$通过一离散系统,其单位抽样响应

$$h(n)=\begin{cases}1/2^n & 0\leqslant n\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

试编一主程序用叠接相加法实现该系统对 $x(n)$的滤波,并画出输出 $y(n)$的图形。

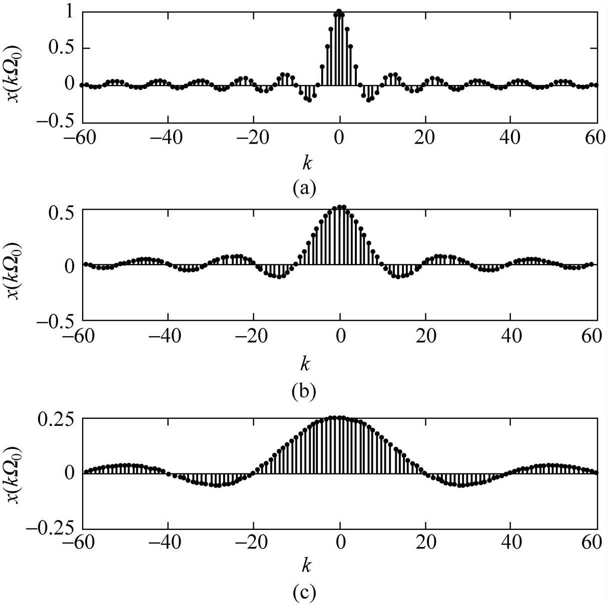

图　3.12.1

(a) $\tau=0.2T$；(b) $\tau=0.1T$；(c) $\tau=0.05T$

解：

实现该题的 MATLAB 程序是 ex_03_13_1.m。$x(n)$和 $y(n)$的图形分别如图 3.13.1(a)和(b)所示。

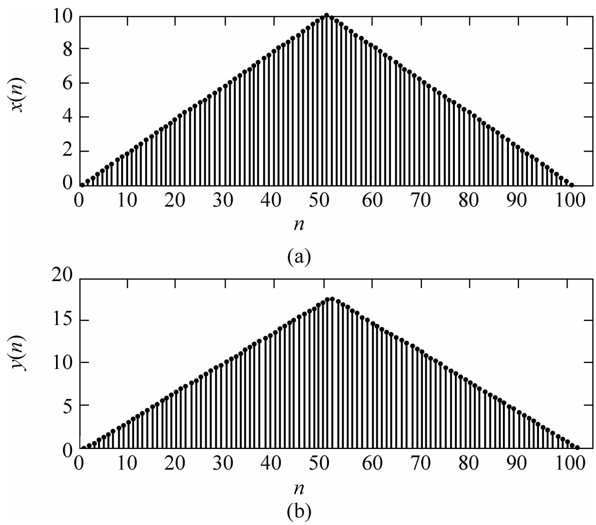

图　3.13.1

(a) $x(n)$；(b) $y(n)$

***3.14 (3.22)** 关于正弦信号抽样的实验研究。给定信号 $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$，$f_0=50\text{Hz}$，现对 $x(t)$ 抽样，设抽样点数 $N=16$。我们知道正弦信号 $x(t)$ 的频谱是在 $\pm f_0$ 处的 δ 函数，将 $x(t)$ 抽样变成 $x(n)$ 后，若抽样率及数据长度 N 取得合适，那么 $x(n)$ 的 DFT 也应是在 $\pm 50\text{Hz}$ 处的 δ 函数。由 Parseval 定理，有

$$E_t=\sum_{n=0}^{N-1}x^2(n)=\frac{2}{N}\mid X_{50}\mid^2=E_f$$

X_{50} 表示 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 在 50Hz 处的谱线。若上式不成立，说明 $X(k)$ 在频域有泄漏。给定下述抽样频率：(1) $f_s=100\text{Hz}$；(2) $f_s=150\text{Hz}$；(3) $f_s=200\text{Hz}$。试分别求出 $x(n)$ 并计算其 $X(k)$，然后用 Parseval 定理研究其泄漏情况，请观察得到的 $x(n)$ 及 $X(k)$，总结对正弦信号抽样应掌握的原则。

解：

(1) 当 $f_s=100\text{Hz}$ 时，由于 $x(n)=\sin(2\pi 50n/100)=\sin(n\pi)\equiv 0$，所以其 $X(k)\equiv 0$，$k=0,\cdots,15$。这样选择抽样频率无意义。

(2) 当 $f_s=150\text{Hz}$ 时，由于 $x(n)=\sin(2\pi n/3)$，一个周期抽得三个点，时域的能量 $E_t=7.5$。该序列的 $|X(k)|(k=0,\cdots,7)$ 是

$$\mid X(k)\mid=\{0.0000, 0.1187, 0.2746, 0.5451, 1.2247, 6.1379, 3.8632, 2.0038\}$$

显然它不是在 $\pm f_0$ 处的 δ 函数。由于 $k=5$ 对应的频率是 46.875Hz，所以可把 $|X(5)|$ 看作 $|X_{50}|$。这时，$\frac{2}{N}|X_{50}|^2=\frac{2}{16}\times 6.1379^2=4.709$，不等于 $E_t=7.5$。显然，频谱产生了明显的泄漏。

(3) 当 $f_s=200\text{Hz}$ 时，由于 $x(n)=\sin(\pi n/2)$，所以一个周期抽得四个点，分别是 0，1，0，−1，时域的能量 $E_t=8$。该序列的 $|X(k)|(k=0,\cdots,7)$ 是

$$\mid X(k)\mid=\{0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 8.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000\}$$

显然，它是在 $\pm f_0$ 处的 δ 函数，f_0 对应 $k=4$。满足 $E_t=E_f=8$ 的关系。

上述结果再一次告诉我们，对正弦信号抽样时，抽样频率应尽量取信号频率的整数倍；抽样点数应该包含整周期，且每个周期最好不少于 4 个点。

***3.15 (3.23)** 对习题 3.14，当取 $f_s=200\text{Hz}$，$N=16$ 时，在抽样点后再补 N 个零得 $x'(n)$，这时 $x'(n)$ 是 32 点序列，求 $x'(n)$ 的 DFT $X'(k)$，分析对正弦信号补零的影响。

解：

补零前后的频谱如图 3.15.1(a)和(b)所示。分析这两个图，可以看出

(1) 对正弦信号，在抽样频率和数据点数合适的情况下，其频谱是一 δ 函数，反映了正弦信号线谱的特点，如图 3.15.1(a)所示；

(2) 在数据后面补零后，将引起频谱的泄漏，使正弦信号的频谱不再是线谱，如图 3.15.1(b)所示。

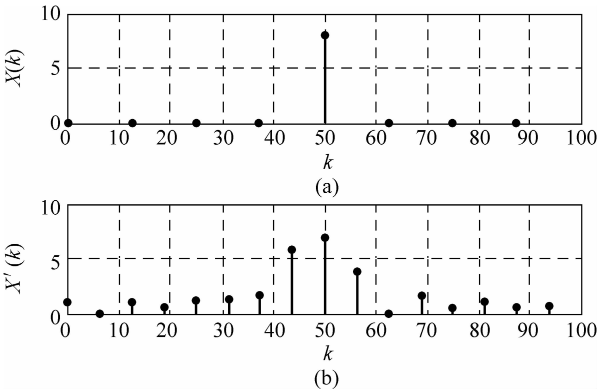

图　3.15.1

(a) $N=16, X(k)$；(b) $N=32, X'(k)$

3.16　一个模拟信号包含的最高频率 $f_{\max}$ 是 10kHz，

(1) 如果要准确重建该信号，允许的抽样频率 f_s 范围是多少；

(2) 假如以抽样频率 $f_s=8\text{kHz}$ 对信号进行抽样，分析该抽样对最高频率为 $f_1=5\text{kHz}$ 的信号的影响；

(3) 如果被抽样信号最高频率 $f_2=9\text{kHz}$，重复(2)的问题。

解：

(1) 因为 $f_{\max}=10\text{kHz}$，所以如果要准确重建该信号，允许的抽样频率范围应满足

$$f_s \geqslant 2f_{\max} = 20\text{kHz}$$

(2) 对于 $f_s=8\text{kHz}$，要准确重建该信号，则被抽样信号的最高频率应小于 $f_s/2=4\text{kHz}$，但现在 $f_1=5\text{kHz}$，所以将产生混叠，即 5kHz 的频率成分将和 3kHz 的频率成分发生交叠。

(3) 根据题意，抽样后的信号必然会产生混叠，具体地说，信号中 9kHz 的成分将和 1kHz 的成分产生交叠。

3.17　对给定的周期性信号 $x(n)=\{\cdots,1,0,1,2,\underset{\uparrow}{3},2,1,0,1,\cdots\}$

(1) 求信号的 DFT；

(2) 使用所得的结果验证 Parseval 定理。

解：

(1) 因为 $x(n)=\{\cdots,1,0,1,2,\underset{\uparrow}{3},2,1,0,1,2,\cdots\}$，$N=6$，所以，$x(n)$ 的离散傅里叶级数

$$c_k = \sum_{n=0}^{5} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/6}$$

$$= 3 + 2e^{\frac{-j2\pi k}{6}} + e^{\frac{-j2\pi k}{3}} + e^{\frac{-j4\pi k}{3}} + 2e^{\frac{-j10\pi k}{6}}$$

$$= \frac{1}{6}\left[3 + 4\cos\frac{\pi k}{3} + 2\cos\frac{2\pi k}{3}\right]$$

该傅里叶级数即是 $x(n)$ 的 DFT，即

$$X(0) = c_0 = 9, \quad X(1) = c_1 = 4, \quad X(2) = c_2 = 0$$

$$X(3) = c_3 = 1, \quad X(4) = c_4 = 0, \quad X(5) = c_5 = 4$$

（2）分别计算 Parseval 定理等式两边的值，

$$P_t = \sum_{n=0}^{5} |x(n)|^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 19$$

$$P_f = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} |c(k)|^2 = 19$$

所以

$$P_t = P_f = 19$$

3.18 对如下的信号：

$$x(n) = 2 + 2\cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi n}{4}$$

（1）令 $N=8$，求该信号的 DFT；

（2）计算信号的功率。

解：

（1）因为

$$x(n) = 2 + 2\cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi n}{4} \quad 及 \quad N = 8$$

所以

$$x(n) = \left\{\frac{11}{2}, 2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}, 1, 2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}, 1, 2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right\}$$

其 DFT 是

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j\pi kn/4}$$

可求出

$$X(0) = 16, \quad X(1) = X(7) = 8, \quad X(2) = X(6) = 4,$$

$$X(3) = X(5) = 2, \quad X(4) = 0$$

（2）由上述结果，很容易得到信号的功率为

$$P = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} |X(k)|^2 = 53$$

3.19 已知下面的傅里叶系数，分别求出其对应的周期信号 $x(n)$，周期 $N=8$。

(1) $c_k=\cos\frac{k\pi}{4}+\sin\frac{3k\pi}{4}$

(2) $c_k=\begin{cases}\sin\frac{k\pi}{3} & 0\leqslant k\leqslant 6\\ 0 & k=7\end{cases}$

解:

(1) 因为 $c_k=\cos\frac{k\pi}{4}+\sin\frac{3k\pi}{4}$,由 DFS(教材 3.4.6 式),得

$$x(n)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}c_k e^{\frac{j2\pi nk}{8}},\quad n=-\infty\sim+\infty$$

注意到 c_k 可由 $e^{\frac{j2\pi pk}{8}}$(p 为任意整数)表示,且

$$\sum_{k=0}^{7}e^{\frac{j2\pi pk}{8}}e^{\frac{j2\pi nk}{8}}=\sum_{k=0}^{7}e^{\frac{j2\pi(p+n)k}{8}}=\begin{cases}8 & n=-p+8l\\ 0 & n\neq -p+8l\end{cases},\quad l\text{ 为整数}$$

又因为

$$c_k=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{j2\pi k}{8}}+e^{\frac{-j2\pi k}{8}}\right]+\frac{1}{2j}\left[e^{\frac{j6\pi k}{8}}-e^{\frac{-j6\pi k}{8}}\right]$$

所以,

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}c_k e^{\frac{j2\pi nk}{8}}\\&=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{7}e^{\frac{j2\pi(n+1)k}{8}}+\sum_{k=0}^{7}e^{\frac{j2\pi(n-1)k}{8}}-j\sum_{k=0}^{7}e^{\frac{j2\pi(n+3)k}{8}}+j\sum_{k=0}^{7}e^{\frac{j2\pi(n-3)k}{8}}\right]\\&=\frac{1}{2}\delta(n+1-8l)+\frac{1}{2}\delta(n-1-8l)-\frac{1}{2}j\delta(n+3-8l)+\frac{1}{2}j\delta(n-3-8l)\end{aligned}$$

式中 l 为整数,且 $n=-\infty\sim+\infty$。

(2) 因为 $c_k=\begin{cases}\sin\frac{k\pi}{3} & 0\leqslant k\leqslant 6\\ 0 & k=7\end{cases}$

所以

$$X(0)=0,\quad X(1)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad X(2)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad X(3)=0$$

$$X(4)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad X(5)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad X(6)=X(7)=0$$

则

$$x(n)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}c_k e^{\frac{j2\pi nk}{8}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[e^{\frac{j\pi n}{8}} + e^{\frac{j2\pi n}{8}} - e^{\frac{j4\pi n}{8}} - e^{\frac{j5\pi n}{8}}\right]$$

$$= \sqrt{3}\left[-\sin\frac{\pi n}{8} - \sin\frac{\pi n}{4}\right]e^{\frac{j3\pi n}{8}}$$

3.20 一个实序列的 8 点 DFT 中的前 5 点是

$$\{0.25, 0.125 - j0.3018, 0, 0.125 - j0.0518, 0\}$$

求该 DFT 的其余的点。

解:

由于 $x(n)$是实序列,因而 DFT 的实部是偶对称的,虚部是奇对称的,所以该 DFT 的其余部分是$\{0.125+j0.0518, 0, 0.125+j0.3018\}$。

3.21 令 $X(k)$是序列 $x(n)$的 N 点 DFT,$0 \leqslant n, k \leqslant N-1$,并且定义如下关系

$$Y(k) = \begin{cases} X(k) & 0 \leqslant k \leqslant k_c, N-k_c \leqslant k \leqslant N-1 \\ 0 & k_c < k < N-k_c \end{cases}$$

设 $Y(k)$的 N 点逆 DFT 为 $y(n)$,请说明 $y(n)$是对原来序列 $x(n)$进行了怎样的操作。

解:

$Y(k)$可以认为是由 $X(k)$通过如下的过程来得到。首先,令

$$H(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant k \leqslant k_c, N-k_c \leqslant k \leqslant N-1 \\ 0 & k_c < k < N-k_c \end{cases}$$

显然,$H(k)$是一个理想的低通滤波器,其通带在 $0 \sim \frac{2\pi}{N}k_c$,阻带是$\frac{2\pi}{N}(k_c+1) \sim \pi$,然后令

$$Y(k) = X(k)H(k)$$

因此,$y(n)$是 $x(n)$经过该理想低通滤波器滤波后的输出。

3.22 对于如下序列:

$$x_1(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n, \quad x_2(n) = \sin\frac{2\pi}{N}n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

求:

(1) N 点循环卷积 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$;

(2) N 点 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的循环相关 $r_{12}(n)$;

(3) N 点 $x_1(n)$的自相关 $r_{11}(n)$;

(4) N 点 $x_2(n)$的自相关 $r_{22}(n)$。

解:

(1) 因为

$$x_1(n) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)$$

所以

$$X_1(k) = \frac{N}{2}[\delta(k-1) + \delta(k+1)]$$

同理

$$X_2(k) = \frac{N}{2\mathrm{j}}[\delta(k-1) - \delta(k+1)]$$

循环相关类似于循环卷积，也是在一个周期内完成。利用卷积和相关的关系（见教材(1.8.14b)式）及循环卷积和 DFT 的关系（见教材(3.5.23)式），可以求出

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k) = \frac{N^2}{4\mathrm{j}}[\delta(k-1) - \delta(k+1)]$$

所以

$$y(n) = \frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$$

（2）由相关和卷积的关系，有

$$R_{12}(k) = X_1(k)X_2^*(k) = \frac{N^2}{4\mathrm{j}}[\delta(k-1) - \delta(k+1)]$$

所以

$$r_{12}(n) = -\frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$$

（3）由于

$$R_{11}(k) = X_1(k)X_1^*(k) = \frac{N^2}{4}[\delta(k-1) + \delta(k+1)]$$

所以

$$r_{11}(n) = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$$

（4）由于

$$R_{22}(k) = X_2(k)X_2^*(k) = \frac{N^2}{4}[\delta(k-1) + \delta(k+1)]$$

所以

$$r_{22}(n) = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$$

3.23 对于如下关系

$$y(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n)$$

分别求下列情况的 $y(n)$：

（1）$x_1(n) = x_2(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$；

(2) $x_1(n)=\cos\frac{2\pi}{N}n$, $x_2(n)=\sin\frac{2\pi}{N}n$, $0\leqslant n\leqslant N-1$;

(3) $x_1(n)=\delta(n)+\delta(n-8)$, $x_2(n)=u(n)-u(n-N)$, 令 $N=8$。

解:

(1) 由题意,

$$y(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}(e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n})(e^{-j\frac{2\pi}{N}n}+e^{j\frac{2\pi}{N}n})$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}(2+e^{j\frac{4\pi}{N}n}+e^{-j\frac{4\pi}{N}n})=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left(2+2\cos\frac{4\pi}{N}n\right)=\frac{1}{4}2N$$

即

$$y(n)=\frac{N}{2}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

(2) 由题意,

$$y(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)x_2^*(n)=-\frac{1}{4j}\sum_{n=0}^{N-1}(e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n})(e^{-j\frac{2\pi}{N}n}-e^{j\frac{2\pi}{N}n})$$
$$=\frac{1}{4j}\sum_{n=0}^{N-1}(e^{j\frac{4\pi}{N}n}-e^{-j\frac{4\pi}{N}n})=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\sin\frac{4\pi}{N}n$$

即

$$y(n)=0\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

(3) 由题意,得

$$y(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)x_2^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(0)x_2^*(0)=1\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

3.24 求下面 Blackman 窗的 N 点 DFT,即 $W(k)$,并画出该窗函数的时域和频域图(取 $N=45$)。

$$w(n)=0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

解:

因为

$$w(n)=0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}$$
$$=0.42-0.25(e^{j\frac{2\pi}{N-1}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n})+0.04(e^{j\frac{4\pi}{N-1}n}+e^{-j\frac{4\pi}{N-1}n})$$

所以

$$W(k)=0.42\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}-0.25\left[\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N-1}n}e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n}e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right]$$

$$+0.04\left[\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{N-1}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{N-1}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}\right]$$

$$=0.42N\delta(k)-0.25\left[\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left[\frac{N}{N-1}-k\right]}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left[\frac{1}{N-1}-\frac{k}{N}\right]}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left[\frac{N}{N-1}+k\right]}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left[\frac{1}{N-1}+\frac{k}{N}\right]}}\right]$$

$$+0.04\left[\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left[\frac{2N}{N-1}-k\right]}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left[\frac{2}{N-1}-\frac{k}{N}\right]}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left[\frac{2N}{N-1}+k\right]}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left[\frac{2}{N-1}+\frac{k}{N}\right]}}\right]$$

$$=0.42N\delta(k)-0.25\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi N}{N-1}\right)-\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{N-1}+\frac{k}{N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)}{1-\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{N-1}+\frac{k}{N}\right)\right)}\right]$$

$$+0.04\left[\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi N}{N-1}\right)-\cos\left(2\pi\left(\frac{2}{N-1}+\frac{k}{N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)}{1-\cos\left(2\pi\left(\frac{2}{N-1}+\frac{k}{N}\right)\right)}\right]$$

Blackman 窗的时域波形和归一化幅频响应见图 3.24.1(a)和(b)。由图(b)可以看出,该窗函数的边瓣小于 60dB,因此是一个较好的窗函数。

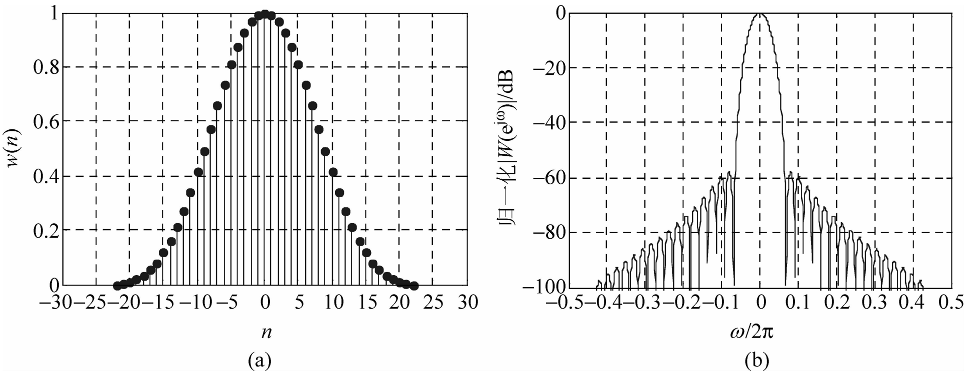

图 3.24.1 Blackman 窗的时域波形和归一化幅频响应

3.25 记序列 $x(n)=u(n)-u(n-7)$($u(n)$为单位阶跃信号)的 Z 变换为 $X(z)$。令

$$X'(k)=X(z)\mid_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/5}}\quad k=0,1,2,3,4$$

(1) 求 $x(n)$的 Z 变换 $X(z)$;

(2) 求 $X'(k)$;

(3) 求 $X'(k)$的逆 DFT,即 $x'(n)$;

(4) 求 $x'(n)$与 $x(n)$之间的关系,比较并解释该结果。

解:

(1) 因为 $x(n)=u(n)-u(n-7)$,所以 $X(z)=1+z^{-1}+\cdots+z^{-6}$。

(2) 由上述 $X(z)$可求出

$$\begin{aligned} X'(k) &= X(z)\,\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{5}}} \\ &= 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{5}k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{5}k}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{12\pi}{5}k} \\ &= 2+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{5}k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{5}k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{6\pi}{5}k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{8\pi}{5}k}, \end{aligned}$$

(3) 由上述 $X'(k)$的表达式,可求出

$$x'(n) = \{2,2,1,1,1\}$$

(4) 由题意,

$$x'(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n+5m) \quad n=0,1,\cdots,4$$

显然,由于 $x(n)$是 7 点序列,而 $x'(n)$是 5 点序列,因此在 $x'(n)$的前两点发生了交叠。这一结果说明,若频率抽样率不够,将在时域产生混叠。

(3.3) 试求序列

$$x(n) = (n+1)a^n u(n) \qquad |\,a\,| < 1$$

的 DTFT,式中 $u(n)$是单位阶跃序列。

解:

$$\begin{aligned} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+1)a^n u(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} na^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\ &= \frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^2}+\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} = \frac{1}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^2} \end{aligned}$$

(3.5) 已知离散序列

$$x(n) = \frac{\sin\omega_{\mathrm{c}} n}{\pi n} \quad n=-\infty \sim +\infty$$

求该序列的能量。

解:

直接计算本题 $x(n)$的能量有困难。但是,$x(n)$的频谱有如下非常简单的形式,即 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=1$,$|\omega|<\omega_{\mathrm{c}}$,所以

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\,x(n)\,|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\,X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\,|^2\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{\mathrm{c}}}^{\omega_{\mathrm{c}}}\mathrm{d}\omega = \frac{\omega_{\mathrm{c}}}{\pi}$$

(3.6) 令 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是 $x(n)$的 DTFT,已知 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\cos^2\omega$,求 $x(n)$。

解:

本题可有两种解法:

（1）因为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \cos^2\omega = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

所以
$$x(n)=\frac{1}{2}\delta(n)+\frac{1}{4}\delta(n+2)+\frac{1}{4}\delta(n-2)$$

（2）直接通过反变换的定义求解

$$\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos2\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathrm{j}2\sin\pi n}{\mathrm{j}n}\right]+\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathrm{j}\sin\pi(n+2)}{\mathrm{j}(n+2)}\right]+\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathrm{j}\sin\pi(n-2)}{\mathrm{j}(n-2)}\right] \\
&= \frac{\sin\pi n}{2\pi n}+\frac{\sin\pi(n+2)}{4\pi(n+2)}+\frac{\sin\pi(n-2)}{4\pi(n-2)}
\end{aligned}$$

注意到上式中的每一项都是 sinc 函数，因此

$$x(n) = \frac{1}{2}\delta(n)+\frac{1}{4}\delta(n+2)+\frac{1}{4}\delta(n-2)$$

（3.7） 已知 $x(n)$的 DTFT 是 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，令 $y(n)=x(2n+1)$，求 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。

解：

$$\begin{aligned}
Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(2n+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=\mathrm{odd}}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1-(-1)^n]x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\omega n} \\
&= \frac{1}{2}\left[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}})-X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega-2\pi}{2}})\right]
\end{aligned}$$

上述结果体现了信号做 2 倍抽取前后其 DTFT 的关系，见教材 9.1.1 节。

（3.8） $x(n)$是一实的有限长序列，$n=0,1,\cdots,N-1$，其傅里叶变换是 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，自相关函数是 $r_x(m)$。令

$$P_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{M=-(N-1)}^{N-1}r_x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m}$$

是其自相关函数的傅里叶变换，试证明

$$P_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{N}\mid X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mid^2$$

证明:

$$
\begin{aligned}
P_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m} \\
&= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} x(n+m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n+m)} \\
&= \frac{1}{N}X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{N}\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2
\end{aligned}
$$

(3.12) 信号 $x(n)$的长度为 $N=1000$,抽样频率 $f_s=20\text{kHz}$,其 DFT 是 $X(k)$,$k=0,\cdots,999$。

(1) 求 $k=150$ 和 $k=700$ 时分别对应的实际频率是多少?

(2) 求圆周频率 ω 是多少?

解:

(1) $k=150$ 时

$$f = \frac{k}{N}f_s = \frac{150}{1000} \times 20 \times 10^3 = 3000\text{Hz}$$

$k=700$ 时

$$f = \frac{k}{N}f_s = \frac{700}{1000} \times 20 \times 10^3 = 14\,000\text{Hz}$$

(2) $k=150$ 时对应的圆周频率

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f \frac{1}{f_s} = 2\pi \frac{3000}{20\,000} = 0.3\pi$$

$k=700$ 时对应的圆周频率

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f \frac{1}{f_s} = 2\pi \frac{14\,000}{20\,000} = 1.4\pi$$

(3.13) 已知 $x(n)$的 DTFT 为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

求 $x(n)$。

解:

因为 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是周期的,周期为 2π,所以

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

(3.14)　令 $x(n)$是一纯正弦信号，幅度等于 A，频率等于 ω_0。将 $x(n)$截短，长度为 N，其中包含了若干个整周期。对 $x(n)$做 DFT，得 $X(k)$。试由 $X(k)$求 $x(n)$的幅度 A。

解：

由 Paserval 定理，有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

由于该信号是纯正弦信号，且信号的长度 N 包含了整个周期，所以 $X(k)$是位于$\pm\omega_0$ 处的线谱，将该谱线记为 $X(k_{\omega_0})$。于是

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2 = \frac{2}{N} |X(k_{\omega_0})|^2$$

注意到幅度为 A 的正弦信号的功率

$$P = \frac{A^2}{2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

所以

$$\frac{A^2}{2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{2}{N^2} |X(k_{\omega_0})|^2$$

即

$$A^2 = \frac{4}{N^2} |X(k_{\omega_0})|^2 \quad A = \frac{2}{N} |X(k_{\omega_0})|$$