第一章　极限与连续

【本章导读】

初等数学是用有限的方法研究常量的数学，高等数学是用极限的方法研究函数的数学. 因此，极限是高等数学区别初等数学的一个标志，是初等数学向高等数学飞跃的阶梯. 极限概念以及极限的思想方法将贯穿高等数学的始终. 微积分学中的其他几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限表述的，并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的，所以准确理解极限的概念、熟练掌握极限的计算方法是学好高等数学的基础. 这一章我们在对函数概念进行复习的基础上将介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法及函数的连续性.

【学习目标】

- 了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；左、右极限的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质.
- 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续的概念；初等函数的连续性.
- 掌握复合函数的复合过程；极限四则运算法则.
- 会对无穷小进行比较；用两个重要极限求极限；判断间断点的类型；求连续函数和分段函数的极限；用极限解决经济中的问题.

第一节　初等函数

一、函数的有关概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个数集. 如果对属于 D 的每一个数 x，按照某种对应关系 f，都有确定的数值 y 和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$. x 叫做**自变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**，当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$；当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 $M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 叫做函数值的**值域**.

在函数的定义中，如对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的 y 与它对应，那么这种函数称为单值函数，否则称为多值函数. 如无特别说明，我们以后研究的函数都指单值函数.

2. 函数的定义域

研究函数时，必须注意函数的定义域. 在实际问题中，应根据问题的实际意义来确定定义域. 对于用数学式子表示的函数，它的定义域可由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义，一般应考虑以下几点.

(1)在分式中，分母不能为零；

(2)在根式中，负数不能开偶次方根；

(3)在对数式中，真数不能取零和负数，底数大于零且不等于1；

(4)在三角函数式中，$k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$不能取正切，$k\pi(k\in\mathbf{Z})$不能取余切；

(5)在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域；

(6)如函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

例1 求下列函数的定义域.

(1)$y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；(2)$y=\lg\frac{x}{x-1}$；(3)$y=\arcsin\frac{x+1}{3}$；(4)$y=\ln\cos x$.

解 (1)要使函数有意义，必须满足$\begin{cases}4-x^2\neq0\\x+2\geqslant0\end{cases}$，解得$x>-2$且$x\neq2$，所以函数的定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)要使函数有意义，必须满足$\frac{x}{x-1}>0$，解得$x>1$或$x<0$，所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

(3)要使函数有意义，必须满足$-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant1$，解得$-3\leqslant x+1\leqslant3$，即$-4\leqslant x\leqslant2$，所以函数的定义域为$[-4,2]$.

(4)要使函数有意义，必须满足$\cos x>0$，所以$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故函数的定义域为$(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$.

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才被认为是相同的.

例如，函数$y=\sin^2x+\cos^2x$与$y=1$，是两个相同的函数. 又如，函数$y=\frac{x^2-1}{x-1}$与$y=x+1$，是两个不同的函数.

3.邻域

定义2 设$a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点a的δ**邻域**，记为$U(a,\delta)$，即$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid|x-a|<\delta\}$，称$a$为邻域的中心，$\delta$为邻域的半径；将$a$的$\delta$邻域中心$a$去掉后得$a$的$\delta$**空心邻域**，记为$\overset{o}{U}(a,\delta)$，即$\overset{o}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid0<|x-a|<\delta\}$. 点$a$的$\delta$邻域及点$a$的$\delta$空心邻域有时又分别简记为$U(a)$与$\overset{o}{U}(a)$.

4.函数的表示法

常用的函数表示法有公式法(解析法)、表格法和图像法三种. 有时，会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示. 例如，函数

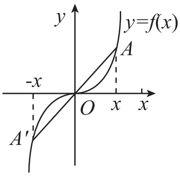
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x\geqslant0\\-x,x<0\end{cases},$$

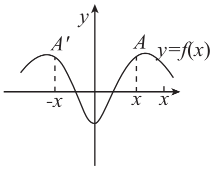
是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数. 在定义域的不同范围内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**.

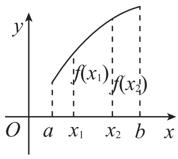
5.函数的几种特性

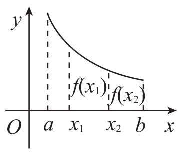
我们已学过函数的四种特性，即奇偶性、单调性、有界性、周期性，将这四个特性做个归纳，如表 1-1 所示.

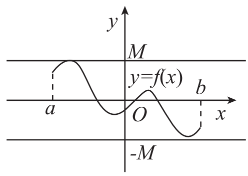
表 1-1

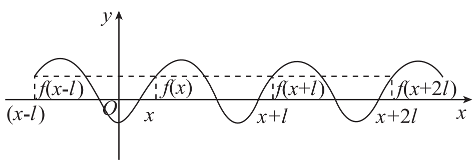
<table>
<tr><th>特　性</th><th>定　义</th><th>几何特性</th></tr>
<tr><td>奇偶性</td><td>如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意的 x，如果 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 为奇函数；如果 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为偶函数</td><td>




奇函数的图像关于原点对称；
偶函数的图像关于 y 轴对称</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，如果 $f(x_1)<f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；如果 $f(x_1)>f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少</td><td>




单调增函数图像沿 x 轴正向上升；
单调减函数图像沿 x 轴正向下降</td></tr>
<tr><td>有界性</td><td>对于任意的 $x\in(a,b)$，存在 $M>0$，有 $|f(x)|\leqslant M$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界；如果这样的数 M 不存在，那么 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界</td><td>


区间 (a,b) 内的有界函数的图像全部
夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间</td></tr>
<tr><td>周期性</td><td>对于任意的 $x\in D$，存在正数 l，使 $f(x+l)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为 D 上的周期函数，l 叫做这个函数的周期</td><td>


一个以 l 为周期的周期函数的图像在定义域内
每隔长度为 l 的区间上有相同的形状</td></tr>
</table>

二、反函数

定义 3　设函数 $y=f(x)$，它的定义域是 D，值域为 M，如果对值域 M 中任意一个值 y，都能由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的 x 值与之对应，由此得到以 y 为自变量的函数叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$.

在习惯上，自变量用 x 表示，函数用 y 表示，所以又将它改写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

由定义可知，函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定

义域. 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

例 2 求函数 $y=3x-2$ 的反函数.

解 由 $y=3x-2$ 解得 $x=\dfrac{y+2}{3}$,将 x 与 y 互换,得 $y=\dfrac{x+2}{3}$,所以 $y=3x-2(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 $y=\dfrac{x+2}{3}(x\in\mathbf{R})$.

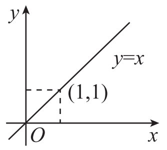
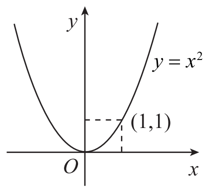
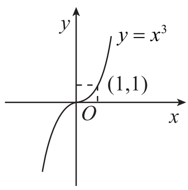
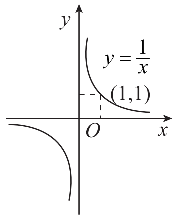
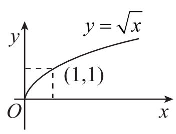
另外,函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

三、基本初等函数

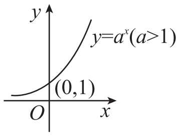
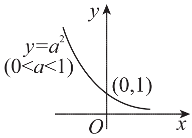
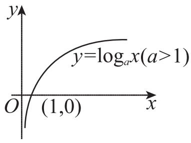
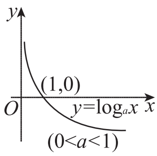
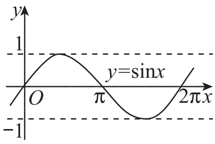
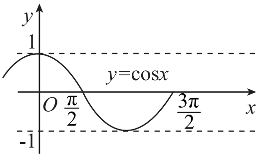
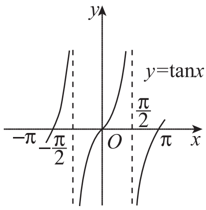
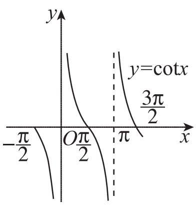
幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$、指数函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

现把一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和特性列表,如表 1-2 所示.

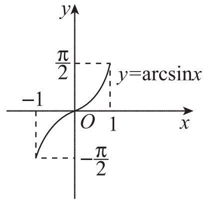
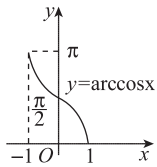
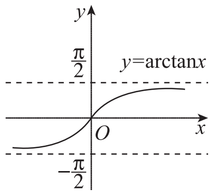
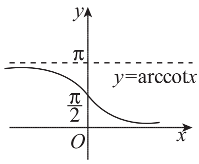
表 1-2

函数		定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数, 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数在 $(-\infty,0)$ 内单调减少;在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数, 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数在 $(-\infty,0)$ 内单调减少;在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表

函　数		定义域与值域	图　像	特　性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in[-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in[-\infty,+\infty]$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$

续表

函数		定义域与值域	图像	特性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少,有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\text{arccot}\,x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

四、复合函数、初等函数

1. 复合函数

定义 4 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$;而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,其定义域为数集 A. 如果在数集 A 或 A 的子集上,对于 x 的每一个值所对应的 u 值,都能使函数 $y=f(u)$有定义,那么 y 就是 x 的函数. 这个函数叫做函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的函数,简称为 x 的**复合函数**,记为 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 叫做中间变量,其定义域为数集 A 或 A 的子集.

例如,$y=\tan^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\tan x$ 复合而成的函数;函数 $y=\ln(x-1)$是由 $y=\ln u$ 与 $u=x-1$ 复合而成的函数,它们都是 x 的复合函数.

注意:(1)不是任何两个函数都可以复合成一个函数的. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数.

(2)复合函数也可以由两个以上的函数复合构成. 例如 $y=2^u$,$u=\sin v$,$v=\dfrac{1}{x}$,由这三个函数可得复合函数 $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$,这里 u 和 v 都是中间变量.

例 3 指出下列各复合函数的复合过程.

(1)$y=\sqrt{1+x^2}$; (2)$y=\arcsin(\ln x)$; (3)$y=e^{\sin x^2}$.

解 (1)$y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成.

(2)$y=\arcsin(\ln x)$是由 $y=\arcsin u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成.

(3)$y=e^{\sin x^2}$ 是由 $y=e^u$,$u=\sin v$,$v=x^2$ 复合而成.

2.初等函数

定义 5　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算以及有限次的复合步骤所构成的,并能用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如,$y=\ln\cos^2 x$,$y=\sqrt[3]{\tan x}$,$y=\dfrac{2x^3-1}{x^2+1}$,$y=e^{2x}\sin(2x+1)$都是初等函数.

在初等函数的定义中,明确指出是用一个式子表示的函数,如果一个函数必须用几个式子表示时,它就不是初等函数.例如,$g(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, x>1\end{cases}$就不是初等函数,而称为非初等函数.

五、建立函数关系举例

在解决实际问题时,通常要先建立问题中的函数关系,然后进行分析和计算.下面举一些简单的实际问题,说明建立函数关系的过程.

例 4　某工厂生产人造钻石,年生产量为 $x$kg,其固定成本为 312 万元,每生产 1kg 人造钻石,可变成本均匀地增加 50 元,试将总成本 $C_{总}$(单位:元)和平均单位 kg 成本 $C_{均}$(单位:元/kg)表示成产量 x(单位:kg)的函数.

解　由于总成本=固定成本+可变成本,平均成本=总成本/产量,所以

$C_{总}=3\ 120\ 000+50x$,$C_{均}=\dfrac{3\ 120\ 000+50x}{x}=\dfrac{3\ 120\ 000}{x}+50$.

例 5　某运输公司规定货物的吨千米运价为:在 a 千米以内,每千米 k 元;超过 a 千米时超过部分每千米$\frac{4}{5}k$ 元.求运价 m 与里程 s 之间的函数关系.

解　根据题意可列出函数关系如下,

$$m=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a\\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & s>a\end{cases}.$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的,定义域为$(0,+\infty)$.

例 6　将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材(见图 1-1),列出矩形截面两条边长之间的函数关系.

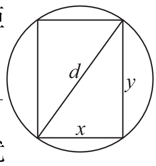


图 1-1

解　设矩形截面的一条边长为 x,另一条边长为 y,由勾股定理得 $x^2+y^2=d^2$.解出 $y=\pm\sqrt{d^2-x^2}$,由于 y 只能取正值,所以 $y=\sqrt{d^2-x^2}$,这就是矩形截面的两条边长之间的函数关系,它的定义域为$(0,d)$.

一般地,建立函数关系式应根据题意,先分析问题中哪些是变量,哪些是常量;在变量中,哪个是自变量,哪个是函数,并用不同的字母表示;再根据问题中给出的条件,运用数学、物理等方面的知识,确定等量关系;必要时,还须根据所给条件,确定关系式中需要确定的常数或消去式中出现的多余变量,从而得出函数关系式,并根据题意写出函数的定义域.如果变量之间的关系式在自变量的各个取值范围内各不相同,则需进行分段考察,并将结果写成分段函数.

思考题

1.分段函数的图像如何作?作出分段函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0\\2^x, x\geqslant 0\end{cases}$ 的图像.

2.几个函数能复合成一个函数的条件是什么? $y=\ln u, u=\cos x, x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 能否复合成一个函数?为什么?

3. 基本初等函数的特点是什么?

习题 1-1

1.下列各题中所给的两个函数是否相同?为什么?

(1) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$;　　(2) $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$;

(3) $y=(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=\sin x$;　　(4) $y=\lg x^3$ 和 $y=3\lg x$.

2.求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+4}$;　　(2) $y=\sqrt{1-|x|}$;　　(3) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$;

(4) $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$;　　(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$;　　(6) $y=\arccos\sqrt{2x}$.

3.设 $f(x)=ax+b, f(0)=-2, f(3)=5$,求 $f(1)$ 和 $f(2)$.

4.已知 $f(x+1)=x^2+3x+5$,求 $f(x)$.

5.判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^4-2x^2+3$;　　(2) $g(x)=x^2\cos x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;　　(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6.证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-1,0)$ 内单调减少.

7.将下列各题中的 y 表示为 x 的函数.

(1) $y=\sqrt{u}, u=x^2-1$;　　(2) $y=\sqrt{u}, u=1+\sin x$.

8.指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos 5x$;　　(2) $y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$;　　(3) $y=\ln(\sin e^{x+1})$;

(4) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$;　　(5) $y=\sin\sqrt[3]{x^2+1}$;　　(6) $y=\lg\arcsin(x+1)$;

(7) $y=\sqrt[3]{\tan^2(x+\dfrac{1}{6})}$.

9.国际航空信件的邮资标准是 10 克以内邮资 4 元,超过 10 克超过的部分每克收取 0.3 元,且信件重量不能超过 200 克,试求邮资 y 与信件重量 x 的函数关系式.

10.用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒,试将它的表面积表示为底半径的函数,并求其定义域.

第二节　数列的极限

一、数列极限的定义

前面已经学过数列的概念，现在进一步考察当自变量 n 无限增大时，数列 $x_n=f(n)$ 的变化趋势，先看下面两个数列：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$；　　(2) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$.

为清楚起见，把这两个数列的前几项在数轴上表示出来，分别如图 1-2 和图 1-3 所示。

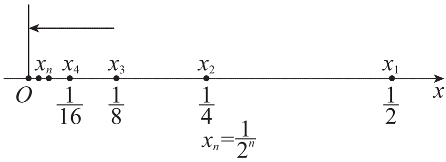


图 1-2

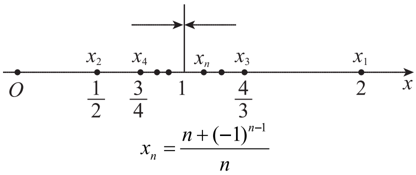


图 1-3

由图 1-2 可以看出，当 n 无限增大时，表示数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧，即数列 x_n 无限接近于 0；由图 1-3 可以看出，当 n 无限增大时，表示数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的附近，即数列 x_n 无限接近于 1.

归纳这两个数列的变化趋势，可知当 n 无限增大时，x_n 都分别无限接近于一个确定的常数. 一般地，有如下定义.

定义 6　如果当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 a，那么 a 就叫做数列 $\{x_n\}$，当 n 趋向无穷大时的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或当 } n\to\infty \text{ 时，} x_n\to a.$$

因此，数列(1)和数列(2)的极限分别记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

例 7　观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{n}$；　(2) $x_n=2-\frac{1}{n^2}$；　(3) $x_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}$；　(4) $x_n=-3$.

解　列表考察这四个数列的前几项，以及当 $n\to\infty$ 时，它们的变化趋势如表 1-3 所示.

表 1-3

n	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
(1) $x_n=\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	…	$\to0$
(2) $x_n=2-\frac{1}{n^2}$	$2-\frac{1}{1}$	$2-\frac{1}{4}$	$2-\frac{1}{9}$	$2-\frac{1}{16}$	$2-\frac{1}{25}$	…	$\to2$
(3) $x_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{243}$	…	$\to0$
(4) $x_n=-3$	-3	-3	-3	-3	-3	…	$\to-3$

由表 1-3 中各数列的变化趋势,根据数列极限的定义可知.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^2})=2$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}=0$;　　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-3)=-3$.

注意:并不是任何数列都有极限. 例如,数列 $x_n=2^n$,当 n 无限增大时,x_n 也无限增大,不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限. 又如,数列 $x_n=(-1)^{n+1}$,当 n 无限增大时,x_n 在 1 与 -1 两个数上来回跳动,不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列也没有极限. 没有极限的数列,也说数列的极限不存在.

二、数列极限的四则运算

设有数列 x_n 和 y_n,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}(b\neq0)$.

这里(1)和(2)可推广到有限个数列的情形.

推论　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,C 为常数,$k\in\mathbf{N}$,则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot x_n)=C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^k=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^k$.

例 8　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=5$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2$,求:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n)$;(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{5}$;(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n-\frac{y_n}{5})$.

解　(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n)=3\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3\times5=15$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{5}=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{2}{5}$.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n-\frac{y_n}{5})=\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n)-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{5}=15-\frac{2}{5}=14\frac{3}{5}$.

例 9　求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})$;(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{1+n^2}$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$;(4)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解　(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=4-0+3\times0=4$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{1+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{3-0+0}{0+1}=3$.

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2^n}\right]=2$.

$$(4)\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

三、无穷递缩等比数列的求和公式

等比数列 $a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-1},\cdots$当$|q|<1$时，称为**无穷递缩等比数列**. 现在来求它的前 n 项的和 s_n 当 $n\to\infty$时的极限.

$\because S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1}{1-q}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^n)=\dfrac{a_1}{1-q}(\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}q^n)$.

$\because$当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}(1-0)=\dfrac{a_1}{1-q}$.

我们把无穷递缩等比数列前 n 项的和当 $n\to\infty$时的极限叫做这个无穷递缩等比数列的和，并用符号 S 表示，从而有公式

$$S=\frac{a_1}{1-q}.$$

这个公式叫做无穷递缩等比数列的**求和公式**.

例 10　求数列$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$各项的和.

解　因为$|q|=\dfrac{1}{2}<1$，所以它是无穷递缩等比数列，因此有 $S=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$.

思考题

1. “对数列$\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 越来越接近于常数 A，则称数列$\{x_n\}$以 A 为极限”，这种说法正确吗？

2. 数列 $1,2,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\dfrac{n+1}{n},\cdots$是否有极限？

习题 1-2

1. 观察下列数列当 $n\to\infty$时的变化趋势，写出极限.

(1)$x_n=\dfrac{1}{2^n}$；　(2)$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；　(3)$x_n=2-\dfrac{1}{n^2}$；

(4)$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；　(5)$x_n=1-\dfrac{1}{5^n}$；　(6)$x_n=-5$；

(7)$x_n=(-1)^n n$；　(8)$x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

2. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\dfrac{1}{2}$，求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+3y_n)$；　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-y_n}{x_n}$.

3.求下列各数列的极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(3-\dfrac{1}{n^2})$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n}$；　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+1}{7n^2-3}$；

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^3+n-5}{3+n^3}$；　(5)$\lim\limits_{n\to\infty}(3-\dfrac{3}{2^n}+\dfrac{1}{n^2})$；　(6)$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{3}{2^n})(6-\dfrac{7}{n})$；

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+5}{3-2n^2}$；　(8)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2-3}{n+1}-n)$；　(9)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{1+2^n}$；

(10)$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2})$.

4.求下列无穷递缩等比数列的和.

(1)$3,1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\cdots$；　(2)$1,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3^2},-\dfrac{1}{3^3},\cdots$；　(3)$1,-x,x^2,-x^3,\cdots(|x|<1)$.

第三节　函数的极限

本节将讨论一般函数 $y=f(x)$ 的极限，主要研究以下两种情形.

(1)当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，即 x 趋向无穷大(记为 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 的极限.

(2)当自变量 x 任意接近于 x_0，即 x 趋向于定值 x_0(记为 $x\to x_0$)时，函数 $f(x)$ 的极限.

一、当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子：

考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.由图 1-4 可以看出，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近于零，即当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

对于这种当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下面的定义.

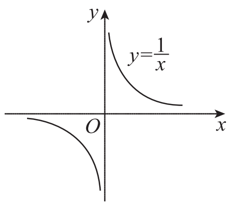


图 1-4

定义 7　如当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad\text{或}\quad\text{当 } x\to\infty \text{ 时}, f(x)\to A.$$

根据上述定义可知，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限是 0，可记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

注意：自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既取正值而无限增大(记为 $x\to+\infty$)，同时也取负值而绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$).但有时 x 的变化趋势只能或只需取这两种变化中的一种情形.下面给出当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数极限的定义.

定义 8　如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的**极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A \quad 或 \quad 当\ x\to+\infty(x\to-\infty)时,f(x)\to A.$$

例如,如图 1-5 所示,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$及$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 不是无限接近于同一个确定的常数,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

一般地,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 11　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}$和 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}$.

解　如图 1-6 所示,可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

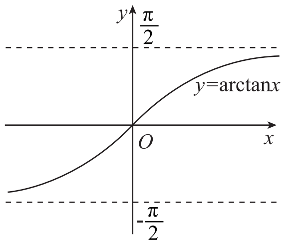


图 1-5

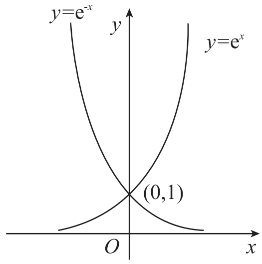


图 1-6

例 12　讨论当 $x\to\infty$时,函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的极限.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$,虽然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x$ 都存在,但不相等,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在.

二、当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 9　如果当 x 无限接近于定值 x_0,即 $x\to x_0$(x 可以不等于 x_0)时,函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \ 或\ 当\ x\to x_0时,f(x)\to A.$$

注意:(1)在上面的定义中,“$x\to x_0$”表示既从 x_0的左侧同时也从 x_0的右侧趋近于 x_0;
(2)定义中考虑的是当 $x\to x_0$时,$f(x)$的变化趋势,并不考虑 $f(x)$在点 x_0是否有定义.

例 13　考察极限$\lim\limits_{x\to x_0}C$(C 为常数)和$\lim\limits_{x\to x_0}x$.

解　设 $f(x)=C,\varphi(x)=x$.

∵当 $x\to x_0$时,$f(x)$的值恒等于 C,∴$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

∵当 $x\to x_0$时,$\varphi(x)$的值无限接近于 x_0,∴$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

三、当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的左极限与右极限

前面讨论的当 $x\to x_0$时函数的极限中,x 既从 x_0的左侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0-0$ 或 x_0^{-}),也从 x_0的右侧无限接近于 x_0(记为 $x\to x_0+0$ 或 x_0^{+}). 下面再给出当 $x\to x_0^{-}$或 $x\to x_0^{+}$时函数极限的定义.

定义 10　如果当 $x\to x_0^{-}$时,函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的**左极限**,记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

如果当 $x \to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**,记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

一般地,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=A$.

例 14 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$,当 $x \to 0$ 时的极限.

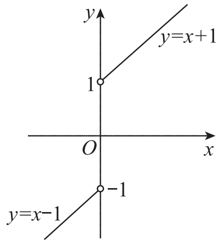


图 1-7

解 作出这个分段函数的图像(见图 1-7),由图可知函数 $f(x)$ 当 $x \to 0$ 时的左极限为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)=\lim_{x \to 0^-}(x-1)=-1,$$

右极限为

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^+}(x+1)=1.$$

因为当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x)$ 的左极限与右极限虽各自存在但不相等,所以极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 15 讨论函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 当 $x \to -1$ 时的极限.

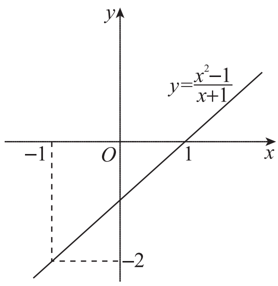


图 1-8

解 函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;因为 $x \neq -1$,所以 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$. 作出这个函数的图像(见图1-8),由图 1-8 可知,

$$\lim_{x \to -1^-}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x \to -1^-}(x-1)=-2;\ \lim_{x \to -1^+}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x \to -1^+}(x-1)=-2;$$

由于 $\lim\limits_{x \to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x \to -1^+}\dfrac{x^2-1}{x+1}$,所以 $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$.

思考题

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则 $f(x_0)$ 必存在,对吗?二者之间是否有关系?

2. 由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=1$,画图说明曲线 $y=f(x)$ 的几何特征.

习题 1-3

1. 观察并写出下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x$; (3) $\lim\limits_{x \to -\infty} 100^x$;

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; (5) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{30}\right)^x$; (6) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. 观察并写出下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cot x$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(2-x)$；　(4) $\lim\limits_{x\to 1}3^{x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-6)$；　(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot x$；　(8) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-6x+8)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$，画出图像，并求当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的左右极限，从而说明当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2^x, & x\geqslant 0\end{cases}$，求当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的左右极限，并指出当 $x\to 0$ 时极限是否存在.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ -x+3, & x\geqslant 1\end{cases}$，当 $x\to 0$ 和 $x\to 1$ 时是否有极限？

6. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1\\ 1, & x=1\\ -1, & x>1\end{cases}$，当 $x\to 1$ 时极限不存在.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ \mathrm{a}x^2, & x<1\end{cases}$，当 $x\to 1$ 时极限存在，求常数 a 的值.

第四节　极限的运算

与数列极限相仿，比较复杂的函数极限也需要用到极限的运算法则来进行计算. 下面给出函数极限的四则运算法则（证明从略）.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$.

特别地，有 $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$（C 为常数）；

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n\ (n \text{ 是正整数}).$$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）.

上述极限运算法则对于 x_0^-，x_0^+，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 的情形也是成立的，而且法则(1)和法则(2)可以推广到有限个具有极限的函数的情形.

例 16　求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+6)$.

解　$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+6)=3[\lim\limits_{x\to 2}x]^2-2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}6=3\times 2^2-2\times 2+6=14$.

例 17　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+7}$.

解　当 $x\to 1$ 时，分母的极限不为 0，因此应用法则(3)，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}5}{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}7}=\frac{1-2+5}{1+7}=\frac{1}{2}.$$

例 18 求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

解 当 $x\to 3$ 时,分母极限为 0,不能应用法则(3),在分式中约去极限为 0 的公因子 $x-3$,所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}3}=\frac{1}{6}.$$

例 19 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})\right]$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})(2-\frac{1}{x^2})\right]=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})\cdot\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x^2})$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)=(1+0)(2-0)=2.$$

例 20 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解 先用 x^3 同除分子及分母,然后取极限,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{3-4\times 0+2\times 0}{7+5\times 0-3\times 0}=\frac{3}{7}.$$

例 21 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解 先用 x^3 同除分子及分母,然后取极限,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

例 22 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$.

解 因为 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n}{2}(n-1)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}(n-1)}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{2}.$$

例 23 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n+1}$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n-1}{2^{2n}}}{\frac{2^{2n}+1}{2^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}-(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n})^2}{1+(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n})^2}=\frac{0}{1}=0.$$

思考题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2-3\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty-\infty=0$,计算是否正确?

2. 为什么说$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2}{2-x}=\frac{\lim\limits_{x\to2}x^2}{\lim\limits_{x\to2}(2-x)}=\frac{4}{0}=\infty$是错误的?

习题 1-4

1. 求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{x\to1}(2x^2+4x-4)$;　(2)$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$;　(3)$\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x-1}$;　(4)$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

(5)$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x-2}{x^2-1}$;　(6)$\lim\limits_{x\to0}(1-\frac{2}{x-3})$;　(7)$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;　(8)$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

2. 求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3}{4x^3+x-1}$;　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x+1}{x^4+2x^2+5}$;

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^5-3x^4+1}$;　(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2-x}{3x^4+2x^2-5}$.

3. 求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$;　(2)$\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}$;　(3)$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(4)$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;　(5)$\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;　(6)$\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

(7)$\lim\limits_{x\to3}(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9})$;　(8)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$

4. 求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+8}{x^3+2x^2-1}$;　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-1}{6x^3-5x+1}$;　(3)$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^{x+1}+2}{5^x+1}$;

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n})$;　(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$;　(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+5}{(x+2)^5}$.

第五节　无穷小与无穷大

研究函数的变化趋势时,经常遇到两种情形:一是函数的绝对值“无限变小”;二是函数的绝对值“无限变大”.下面分别介绍这两种情形.

一、无穷小

1. 无穷小的定义

定义 11　如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,函数$f(x)$的极限为零,那么函数$f(x)$叫做当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的**无穷小量**,简称**无穷小**.

例如,因为$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$,所以函数$x-1$是当$x\to1$时的无穷小.又如,因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,所以函数$\frac{1}{x}$是当$x\to\infty$时的无穷小.

注意:(1)说一个函数$f(x)$是无穷小,必须指明自变量x的变化趋势.例如,函数

$x-1$是当 $x\to 1$ 时的无穷小,而当 x 趋向其他数值时,$x-1$ 就不是无穷小.

(2)不要把一个绝对值很小的常数(如 $0.000\,01^{100\,000}$ 或$-0.000\,01^{100\,000}$)说成是无穷小.

(3)常数中只有"0"可以看成是无穷小,因为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} 0=0$.

2.无穷小的性质

无穷小运算时除了可以应用极限运算法则外,还可以应用以下一些性质进行运算.

性质 1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有限个无穷小的乘积是无穷小.

以上各性质证明从略.

例 24 求$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,所以 x 是当 $x\to 0$ 时的无穷小. 而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,所以 $\sin\dfrac{1}{x}$是有界函数. 由无穷小的性质 2,可知

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

3.函数极限与无穷小的关系

下面的定理将说明函数、函数的极限与无穷小三者之间的重要关系.

定理 1 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是:$f(x)=A+\alpha$,其中 A 为常数,α 为无穷小(证明从略).

这里"lim"符号下面的下标为 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$,表示所述结果对两者都适用,以后不再说明.

二、无穷大

1.无穷大的定义

定义 12 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,那么函数 $f(x)$叫做当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大量**,简称**无穷大**.

如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大,那么它的极限是不存在的. 但为了描述函数的这种变化趋势,也说"函数的极限是无穷大",并记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty.$$

如果在无穷大的定义中,对于 x_0 左右近旁的 x(或对于绝对值相当大的 x),对应的函数值都是正的或都是负的,就分别记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty.$$

例如,$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$.

注意:(1)说一个函数 $f(x)$是无穷大,必须指明自变量的变化趋势. 例如,函数$\dfrac{1}{x}$是当 $x\to 0$ 时的无穷大.

(2)无穷大是变量,不要把绝对值很大的常数(如 $100\,000\,000^{1\,000\,000}$ 或$-100\,000\,000^{1\,000\,000}$)说成是无穷大.

2.无穷大与无穷小的关系

一般地,无穷大与无穷小之间有以下倒数关系.

在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

下面利用无穷大与无穷小的关系来求一些函数的极限.

例 25 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+4}{x-1}$.

解 当 $x\to 1$ 时,分母的极限为零,所以不能应用极限运算法则(3),但因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+4}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+4}{x-1}=\infty$.

例 26 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}3x$ 都不存在,所以不能应用极限的运算法则,但因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)=\infty$.

例 27 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{x^2+7}$.

解 因为分子及分母的极限都不存在,所以不能应用极限运算法则,但因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+7}{x^3}}{\frac{2x^3-x^2+5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{x^2+7}=\infty.$$

归纳上节的例 21、例 22 及本节的例 27,可得出以下的一般结论,即当 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$ 时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0},\text{当 } n=m\\ 0,\text{当 } n>m\\ \infty,\text{当 } n<m\end{cases}.$$

例 28 求 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.

解 因为 $\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}=\frac{(x^2-2x+4)-12}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{x-4}{x^2-2x+4}$.

所以

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=\frac{-6}{4+4+4}=-\frac{1}{2}.$$

例 29 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3-7}\cos(5x^2+1)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3-7}=0$,而 $|\cos(5x^2+1)|\leqslant 1$ 为**有界函数**,故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3-7}\cos(5x^2+1)=0.$$

三、无穷小的比较

已经知道,两个无穷小的代数和及乘积仍然是无穷小. 但是两个无穷小的商却会出现不同的情况. 例如,当 $x\to0$ 时,x、$3x$、x^2 都是无穷小,而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x}=0,\qquad \lim_{x\to0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\qquad \lim_{x\to0}\frac{3x}{x}=3.$$

两个无穷小之比的极限的各种情况,反映了不同的无穷小趋向零的快慢程度. 当 $x\to0$时,x^2 比 $3x$ 更快地趋向零,反过来 $3x$ 比 x^2 较慢地趋向零,而 $3x$ 与 x 趋向零的快慢相仿.

下面就以两个无穷小之商的极限所出现的各种情况来说明两个无穷小之间的比较.

定义 13 设 α 和 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小,又 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

(1)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,就说 β 是比 α 较**高阶的无穷小**.

(2)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,就说 β 是比 α 较**低阶的无穷小**.

(3)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C$($C$ 为不等于零的常数),就说 β 与 α 是**同阶无穷小**.

(4)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,就说 β 与 α 是**等价无穷小**,记为 $\alpha\sim\beta$.

显然,等价无穷小是同阶无穷小的特例,即 $C=1$ 的情形.

以上定义对于数列的极限也同样适用.

根据以上定义,可知当 $x\to0$ 时,x^2 是比 $3x$ 较高阶的无穷小,$3x$ 是比 x^2 较低阶的无穷小,$3x$ 是与 x 同阶无穷小.

例 30 比较当 $x\to0$ 时,无穷小$\dfrac{1}{1-x}-1-x$ 与 x^2 阶数的高低.

解 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1-x}-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(1+x)(1-x)}{x^2(1-x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2(1-x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-x}=1$,所以 $\dfrac{1}{1-x}-1-x\sim x^2$,即$\dfrac{1}{1-x}-1-x$ 与 x^2 是等价无穷小.

思考题

1. 指出函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$是无穷小或无穷大的变化过程.

2. 为什么说$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$是错误的? 请予以验证.

习题 1-5

1. 下列变量在给定的变化过程中,哪些是无穷小? 哪些是无穷大?

(1) $x\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$；　(2) $\ln x(x\to 0^+)$；　(3) $\frac{1}{x+1}(x\to 0)$；　(4) $e^x-1(x\to\infty)$；

(5) $\cot 4x(x\to 0)$；　(6) $\tan x(x\to 0)$；　(7) $2^{-x}(x\to+\infty)$.

2. 下列函数在自变量怎样变化时是无穷小、无穷大？

(1) $y=\frac{1}{x}$；　(2) $y=\frac{1}{x+1}$；　(3) $y=\tan x$；　(4) $y=\ln x$.

3. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-\sin x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-4\sin x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos x$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$.

4. 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$ 相比，哪一个是较高阶的无穷小？

5. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^3-x+1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+8}{3x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{5x^3-x-2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^{30}(x-9)^{20}}{(2x+5)^{50}}$.

6. 当 $x\to 0$ 时，x 与 $\ln(1+x)$ 是否等价？

7. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶？是否等价？

8. 当 $x\to 0$ 时，x 与 $2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$ 是否等价？

第六节　两个重要极限

一、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

我们先列表考察当 $|x|\to 0$ 时，函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的变化趋势，如表 1-4 所示.

表 1-4

x	±0.5	±0.1	±0.01	±0.001	±0.000 1	…	→0
$\frac{\sin x}{x}$	0.958 851	0.998 334	0.999 833	0.999 999	0.999 999	…	→1

由表 1-4 可见，当 $|x|\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to 1$.

可以证明，$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1$；所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

例 31　求 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2)=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

例 32 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}.$

例 33 求 $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\alpha}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$.

解 因为 $\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$,所以 $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\alpha}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=1.$

例 34 求(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{x-2}$;(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\sin(x-2)\frac{\sin(x-2)}{x-2}=0\times 1=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

二、极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

先列表考察当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时,函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的变化趋势,分别如表 1-5 和表 1-6所示.

表 1-5

x	1	2	5	10	100	1 000	10 000	100 000	… $\to+\infty$
$(1+\frac{1}{x})^x$	2	2.25	2.49	2.59	2.705	2.717	2.718	2.718 27	…

表 1-6

x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000	… $\to-\infty$
$(1+\frac{1}{x})^x$	2.88	2.732	2.720	2.718 3	2.718 28	…

从表 1-5 和表 1-6 可以看出,当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时,函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的对应值无限地趋近于一个确定的数 2.718 28….

可以证明,当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时,函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的极限都存在而且相等,我们用 e 表示这个极限值,即

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}. \tag{1.1}$$

其中 e 是个无理数,它的值是:e=2.718 281 828 459 045….

在式(1.1)中,设 $z=\frac{1}{x}$,则当 $x\to\infty$ 时,$z\to 0$,于是式(1.1)又可以写成

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}. \tag{1.2}$$

式(1.1)和式(1.2)可以看成一个重要极限的两种不同形式.

例 35　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$.

解　先将 $1+\frac{2}{x}$ 写成下列形式 $1+\frac{2}{x}=1+\frac{1}{\frac{x}{2}}$,从而

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^x=\left[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}\right]^2=\left[\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

例 36　求极限:(1)$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$;(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$.

解　(1)$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{-x})^{-x}\right]^{-1}$

$$=\lim_{-x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{-x})^{-x}\right]^{-1}=\left[\lim_{-x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim\limits_{\tan x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=\mathrm{e}.$

例 37　求(1)$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$;(2)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　(1)$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}.$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-1}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$

例 38　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{2x+1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x-\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x-\frac{1}{2}}\right)^{-x-\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x-\frac{1}{2}}\right)^{-x-\frac{1}{2}}\right]^{-1}=\left[\lim_{(-x-\frac{1}{2})\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x-\frac{1}{2}}\right)^{-x-\frac{1}{2}}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

一般地,在自变量 x 的某个变化过程中,如有 $\varphi(x)\to\infty$,那么 $\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}$ 的极限便是 e;如果 $\varphi(x)\to 0$,那么 $[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}$ 的极限便是 e.

思考题

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$ 是否正确,为什么?

2. 极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 是否正确,为什么?

习题 1-6

1. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$; (2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$; (7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}$.

2. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{2x})^x$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{-x}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{3}}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$; (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$; (8) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{4}{x})^{x+4}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^n$.

3. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{1-\sqrt{x+1}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$; (5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x$; (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x+1}$.

第七节　函数的连续性

一、函数连续性的概念

1. 函数的增量

设变量 x 从它的一个初值 x_0 变到终值 x_1,则终值与初值的差 x_1-x_0 就称为变量 x 的**增量或改变量**. 记为 Δx,即 $\Delta x=x_1-x_0$.

为了叙述方便,这时也说,自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx. 这里 Δx 可以是正的,也可以是负的. 当 $\Delta x>0$ 时,变量 x 从 x_0 变到 $x_1=x_0+\Delta x$ 时是增大的;当 $\Delta x<0$ 时,变量 x 从 x_0 变到 $x_1=x_0+\Delta x$ 时是减少的.

注意:记号 Δx 并不表示 Δ 与 x 的乘积,而是一个不可分割的整体符号.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及近旁有定义. 当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$,即 x 在 x_0 有

增量 Δx 时，函数 $y=f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，那么将 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**增量**.

例 39　设 $y=f(x)=3x^2-1$，求适合下列条件的自变量的增量 Δx 和函数的增量 Δy：(1)当 x 由 1 变到 1.5 时；(2)当 x 由 1 变到 0.5 时；(3)当 x 由 1 变到 $1+\Delta x$ 时.

解　(1)$\Delta x=1.5-1=0.5$，$\Delta y=f(1.5)-f(1)=5.75-2=3.75$.

(2)$\Delta x=0.5-1=-0.5$，$\Delta y=f(0.5)-f(1)=0.75-1-2=-2.25$.

(3)$\Delta x=(1+\Delta x)-1=\Delta x$，$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=[3(1+\Delta x)^2-1]-2=6\Delta x+3(\Delta x)^2$.

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的连续性

由图 1-9(a)可以看出，如果函数 $y=f(x)$ 的图像在点 x_0 及其近旁没有断开，那么当 x_0 保持不变而让 Δx 趋近于零时，曲线上的点 N 就沿着曲线趋近于点 M，这时 Δy 也趋近于零；而在图 1-9(b)中，如果函数 $y=f(x)$ 的图像在点 x_0 断开了，那么当 x_0 保持不变而让 Δx 趋近于零时，曲线上的点 N 就沿着曲线趋近于点 M_0，并不趋近于点 M，显然，这时 Δy 不能趋近于零. 下面给出函数在点 x_0 处连续的定义.

定义 14　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，如果当自变量 x 在点 x_0 处的增量 Δx 趋近于零时，函数 $y=f(x)$ 相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋近于零，那么就叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**，用极限来表示，就是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\quad 或\quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

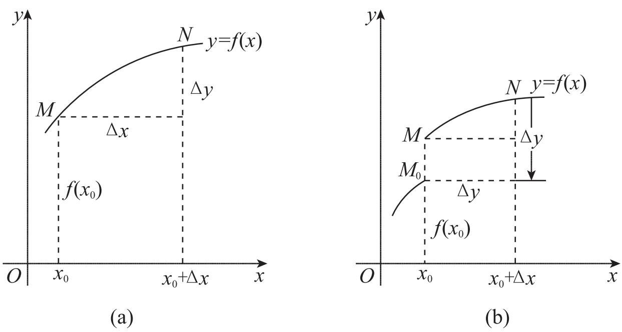


图 1-9

例 40　证明函数 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

证　因为函数 $y=3x^2-1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以函数在 $x=1$ 及其近旁有定义.

设自变量在点 $x=1$ 处有增量 Δx，则函数相应的增量为 $\Delta y=6\Delta x+3(\Delta x)^2$.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[6\Delta x+3(\Delta x)^2]=0$，所以根据定义 14 可知函数 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

在定义 14 中，设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$，$\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 就是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可叙述如下.

定义 15　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，就叫做函数在点 x_0 处**连续**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

这个定义指出了函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续要满足三个条件：

(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义.

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

(3)函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限值等于在点 $x=x_0$ 的函数值,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 41 根据定义 15 证明函数 $f(x)=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

证 (1)函数 $f(x)=3x^2-1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,故函数在点 $x=1$ 及其近旁有定义,且 $f(1)=2$.

(2)$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-1)=2$.

(3)$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2=f(1)$.

根据定义 15 可知函数 $f(x)=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

3. 函数 $y=f(x)$在区间上的连续性

(1)函数的左连续、右连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处及其左(或右)近旁有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$),称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**(或**右连续**).

(2)函数在区间上的连续性

如果函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)内每一点都连续,称函数 $f(x)$ 在**区间(a,b)内连续**,或称函数 $f(x)$ 为区间(a,b)内的**连续函数**,区间(a,b)称为函数 $f(x)$ 的**连续区间**.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有定义,在区间(a,b)内连续,且在右端点 b 处左连续,在左端点 a 处右连续,即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,则称函数 $f(x)$ 在**闭区间$[a,b]$上连续**.

二、函数的间断点

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续,那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是间断的,并将点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**间断点**或**不连续点**.

由函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义 15 可知,当函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

(1)在点 $x=x_0$ 近旁有定义,但在点 x_0 处没有定义;

(2)虽在点 x_0 处有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;

(3)虽在点 x_0 处有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是间断的.

例 42 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,由于在 $x=1$ 处没有定义,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,如图 1-10 所示.

例 43 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x>1\\0, x=1\\x-1, x<1\end{cases}$ 虽在 $x=1$ 处有定义,但由于 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,如图 1-11 所示.

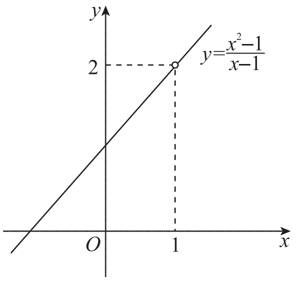


图 1-10

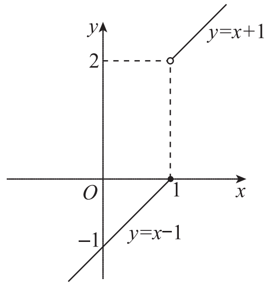


图 1-11

例 44　函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ 虽在 $x=1$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

函数的间断点按其单侧极限是否存在，分为第一类间断点与第二类间断点.

定义 16　若点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

例 45　证明 $x=0$ 为函数 $f(x)=\frac{-x}{|x|}$ 的第一类间断点.

证　$f(x)$ 在 $x=0$ 无定义，又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{-x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1$，所以 $x=0$ 为函数的第一类间断点，在 $x=0$ 处的左、右极限不相等，使函数图形在 $x=0$ 处产生跳跃现象，因而这类间断点又称为**跳跃间断点**.

例 46　证明 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是第一类间断点.

证　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 即函数在 $x=0$ 处的左、右极限存在，但是由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$，所以 $x=0$ 为函数的第一类间断点，这类间断点又称为**可去间断点**.

例 47　$y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，知左、右极限都不存在，所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数的第二类间断点.

三、初等函数的连续性

1. 基本初等函数的连续性

在几何上，连续函数的图像是一条连续不间断的曲线，因为基本初等函数的图像在其定义域内是连续不间断的曲线，所以有如下结论.

定理 2　基本初等函数在其定义域内是连续的.

2. 连续函数的和、差、积、商的连续性

定理 3　如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，那么它们的和、差、积、商（分母不等于零）也都在点 x_0 处连续，即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=f(x_0)\pm g(x_0);$$
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=f(x_0)\cdot g(x_0);$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}(g(x_0)\neq 0).$$

例如,函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处是连续的,显然它们的和、差、积、商 $\sin x\pm\cos x,\sin x\cdot\cos x,\frac{\sin x}{\cos x}$,在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处也是连续的.

3. 复合函数的连续性

如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也是连续的.

例如,函数 $u=2x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处连续,当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,$u=\frac{\pi}{2}$,函数 $y=\sin u$ 在点 $u=\frac{\pi}{2}$ 处连续;显然,复合函数 $y=\sin 2x$ 在点 $\frac{\pi}{4}$ 处也是连续的.

4. 初等函数的连续性

由基本初等函数的连续性,连续函数和、差、积、商的连续性以及复合函数的连续性可知:

定理 4 初等函数在其定义区间内都是连续的.

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义,如果 $f(x)$ 是初等函数,且点 x_0 是 $f(x)$ 定义区间内的点,那么求 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,只要求 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值就可以了,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 48 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}$.

解 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,这是一个初等函数,它的定义域是 $[-1,1]$,而 $x=0$ 在该区间内,所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=f(0)=1.$$

例 49 求 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{\sqrt{4+5}+3}=\frac{1}{6}$.

四、闭区间上连续函数的性质

1. 函数最大值和最小值的概念

定义 17 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果至少存在一点 $x_0\in I$,使得每一个 $x\in I$,都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$(或 $f(x)\geqslant f(x_0)$),则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(或最小值).

例如,函数 $f(x)=\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有最大值 2 及最小值 0.

2. 最大值与最小值定理

定理 5 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大

值与最小值.

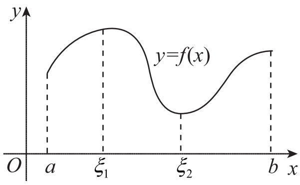


图 1-12

如图 1-12 所示，设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上至少有一点 $\xi_1(a\leqslant\xi_1\leqslant b)$，使得函数值 $f(\xi_1)$ 为最大，即 $f(\xi_1)\geqslant f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$；又至少有一点 $\xi_2(a\leqslant\xi_2\leqslant b)$，使得函数值 $f(\xi_2)$ 为最小，即 $f(\xi_2)\geqslant f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$. 这样的函数值 $f(\xi_1)$ 和 $f(\xi_2)$ 分别叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**最大值**和**最小值**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上是连续的，在 $\xi_1=\dfrac{\pi}{2}$ 处，它的函数值 $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ 为最大值；在 $\xi_2=\dfrac{3\pi}{2}$ 处，它的函数值 $\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$ 为最小值.

注意：如果函数在开区间 (a,b) 内连续，或函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值. 例如，函数 $y=x$ 在开区间 (a,b) 内是连续的，而这个函数在开区间 (a,b) 既无最大值，又无最小值，如图 1-13 所示. 又如，函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, 0\leqslant x<1\\ 1, x=1\\ -x+3, 1<x\leqslant 2\end{cases}$，在闭区间 $[0,2]$ 上有间断点 $x=1$，这时函数在闭区间 $[0,2]$ 上既无最大值又无最小值，如图 1-14 所示.

3. 根的存在性质

定理 6　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0(a<\xi<b)$. 由图 1-15 可以看出，如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么在 $[a,b]$ 上连续的曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点，交点的坐标为 $(\xi,0)$.

由上述定理可知，$x=\xi$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根，且 ξ 位于开区间 (a,b) 内，因而，利用这个定理可判断方程 $f(x)=0$ 在某个开区间内的实根的存在.

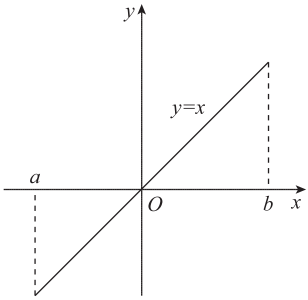


图 1-13

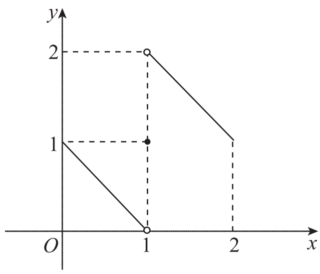


图 1-14

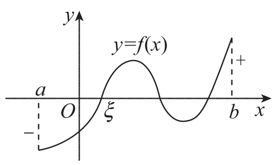


图 1-15

例 50　证明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证　设 $f(x)=x^3+3x^2-1$，它在闭区间 $[0,1]$ 是连续的，并且在区间端点的函数值为 $f(0)=-1<0$ 与 $f(1)=3>0$.

由根的存在性质可知，在 $(0,1)$ 内至少有一点 $\xi(0<\xi<1)$ 使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3+3\xi^2-1=0(0<\xi<1)$.

这个等式说明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根 ξ.

思考题

1. 试说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义、有极限和连续这三个概念间的区别与联系。

2. 若函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，试问当 $x\to a$ 时，函数是否有极限？若有极限，它的值是什么？

习题 1-7

1. 设函数 $y=f(x)=x^2+1$，求适合下列条件的自变量的增量和对应的函数的增量.

(1) x 由 1 变到 2；　(2) x 由 2 变到 1；

(3) x 由 1 变到 $1+\Delta x$；　(4) x 由 x_0 变到 x.

2. 利用定义 14 证明函数 $y=x^2-1$ 在 $x=1$ 处连续.

3. 利用定义 15 证明函数 $y=f(x)=3x-2$ 在 $x=0$ 处的连续性.

4. 利用定义 15 证明 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x+3, & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$，$x=2$ 处的连续性.

6. 求下列函数的间断点.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$；　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(3) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$；　(4) $y=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$.

7. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+3)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+1}{1+\cos x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2}}{1+x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2}\left[x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right]$.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间.

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x, & x<0 \\ k, & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，求 k 的值.

10. 证明方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正实根.

第八节　极限在经济工作中的应用

在日常生活工作中特别是在经济领域，企业或个人在进行经济管理决策或经营决策

时，经常需要对贷款或投资的可行性进行分析.

一、复利问题

复利是计算利息的一种方法.复利是指不仅对本金计算利息，而且要计算利息的利息.也就是说，本期的本金加上利息作为下期计算利息的的基数，俗称“利滚利”.

设 A_0 是本金，r 是计息期的利率，A 是本利和，则

第一个计息期末本利和为 $A=A_0(1+r)$；

第二个计息期末本利和为 $A=A_0(1+r)+[A_0(1+r)]r=A_0(1+r)^2$；

如此下去，

第 t 个计息期末本利和为 $A=A_0(1+r)^t$.

因此，本金为 A_0，计息期利率为 r，计息期数为 t 的本利和为

$$A=A_0(1+r)^t. \tag{1.3}$$

若每期结算 m 次，则此时每期的利率可认为是 $\frac{r}{m}$，容易推得 t 期末本利和为

$$A=A_0(1+\frac{r}{m})^{mt}. \tag{1.4}$$

若每期结算次数 $m\to\infty$（即每时每刻结算），t 期末本利和为

$$A=\lim_{m\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}=A_0\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}\right]=A_0\mathrm{e}^{rt},$$

即

$$A=A_0\mathrm{e}^{rt}. \tag{1.5}$$

式(1.3)和式(1.4)称为离散复利公式，式(1.5)称为连续复利公式，其中 A_0 称为现值（或初值），A 称为终值（或未来值）.显然利用式(1.5)计算的结果比用式(1.3)和式(1.4)计算的结果要大些.

同理，若用 r 表示人口的年平均增长率，A_0 表示原有人口数，则 $A_0\mathrm{e}^{rt}$ 表示 t 年末的人口数.

例 51 现将 100 元现金投入银行，年利率为 1.98%，分别用离散性和连续性的复利公式计算 10 年末的本利和（不扣利息税）.

解 若一年结算一次，10 年末的本利和为

$$A=100(1+0.019\,8)^{10}\approx 121.66(\text{元}).$$

由连续复利公式计算，10 年末的本利和为

$$A=100\mathrm{e}^{0.019\,8\times 10}\approx 121.90(\text{元}).$$

例 52 某厂 1980 年的产值为 1 000 万元，到 2000 年末产值翻两番，利用连续复利公式求出每年的平均增长率.

解 已知 $A=4\,000$ 万元，$A_0=1\,000$ 万元，$t=20$，将它们代入公式 $A=A_0\mathrm{e}^{rt}$，得

$$4\,000=1\,000\mathrm{e}^{20r},\mathrm{e}^{20r}=4,20r=\ln 4=2\ln 2,$$

解得 $r=6.93\%$，即为所求增长率.

若已知未来值 A，求现值 A_0，称为现值问题.由式(1.3)和式(1.4)，得离散现值公式为

$$A_0=A(1+r)^{-t}, \tag{1.6}$$

$$A_0=A(1+\frac{r}{m})^{-mt}. \tag{1.7}$$

连续现值公式为

$$A_0 = Ae^{-rt}. \tag{1.8}$$

例 53 设年投资收益率为 9%,按连续复利计算,现投资多少元,10 年末可达 200 万元?

解 由 $A_0 = Ae^{-rt}$,$A=200$ 万元,$r=0.09$,$t=10$,由此 $A_0=200e^{-0.9}\approx 81.314$(万元).

二、抵押贷款问题

设两室一厅商品房价值 100 000 元,王某自筹了 40 000 元,要购房还需贷款 60 000 元,贷款月利率为 1%,条件是每月还一些,25 年内还清,假如还不起,房子归债权人. 问王某具有什么能力才能贷款购房?

分析 起始贷款 60 000 元,贷款月利率 $r=0.01$,贷款 n(月)$=25$(年)$\times 12$(月/年)$=300$(月),每月还 x 元,y_n 表示第 n 个月仍欠前债主的钱.

建立模型:

$y_0 = 60\ 000$

$y_1 = y_0(1+r)-x$

$y_2 = y_1(1+r)-x = y_0(1+r)^2 - x[(1+r)+1]$

$y_3 = y_2(1+r)-x = y_0(1+r)^3 - x[(1+r)^2+(1+r)+1]$

…

$y_n = y_0(1+r)^n - x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1] = y_0(1+r)^n - \dfrac{x[(1+r)^n-1]}{r}$

当贷款还清时,$y_n=0$,可得 $x=\dfrac{y_0 r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$.

把 $n=300$,$r=0.01$,$y_0=60\ 000$ 代入得 $x\approx 631.93$(元),

即王某如不具备每月还贷 632 元的能力,就不能贷款购房.

三、融资问题

某企业获投资 50 万元,该企业将投资作为抵押品向银行贷款,得到相当于抵押品价值的 0.75 倍的贷款,该企业将此贷款再进行投资,并将再投资作为抵押品又向银行贷款,仍得到相当于抵押品的 0.75 倍的贷款,企业又将此贷款再进行投资,这样贷款—投资—再贷款—再投资,如此反复进行扩大再生产. 问该企业共可获得投资多少万元?

分析 设企业获得投资本金为 A,贷款额占抵押品价值的百分比为 $r(0<r<1)$,第 n 次投资或再投资(贷款)额为 a_n,n 次投资与再投资的资金总和为 S_n,投资与再投资的资金总和为 S. $a_1=A$,$a_2=Ar$,$a_3=Ar^2$,$\cdots$,$a_n=Ar^{n-1}$,则

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = A+Ar+Ar^2+\cdots+Ar^{n-1} = \frac{A(1-r^n)}{1-r},$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{A(1-r^n)}{1-r} = \frac{A}{1-r}\left(\lim_{n\to\infty}r^n=0\right).$$

在本题中,$A=50$ 万元,$r=0.75$,代入上式得 $S=\dfrac{50}{1-0.75}=200$(万元).

思考题

什么叫单利和复利? 如何计算单利和复利?

习题 1-8

1. 试完成表 1-7(按连续复利计算).

表 1-7

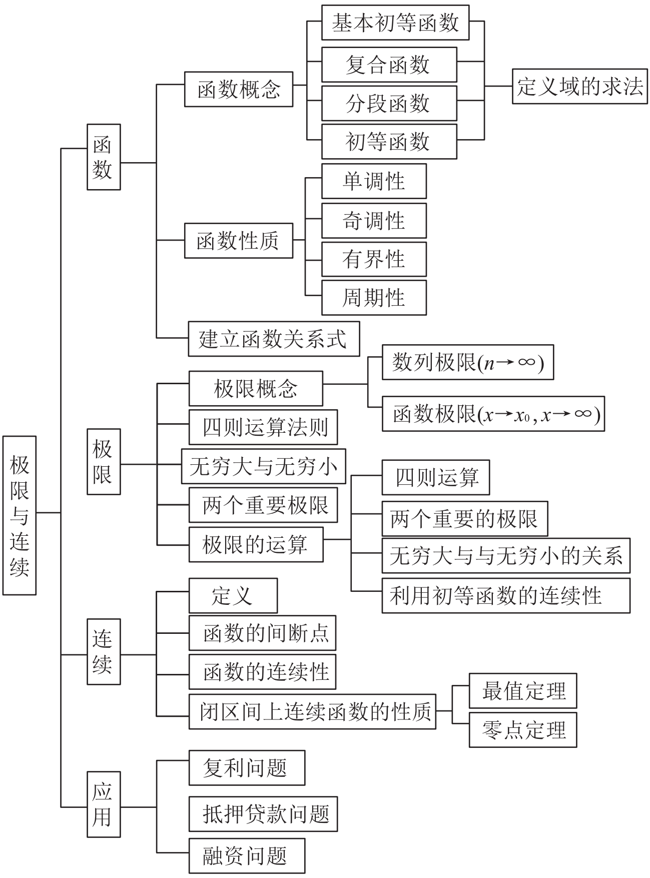
起初账户资金(元)	利息率	翻一番时间(年)	5 年后的总量(元)
35 000	6.2%		
5 000			7 130.90
	8.4%		11 414.71

2. 若按复利计算,200 元钱在 10 年后得到的本利和为 500 元,那么年利率是多少?

3. 某企业计划发行公司债券,若以年利率 8.5% 的连续复利计息,发行时每份债券的面值是 500 元,问 5 年后每份债券一次偿还本息是多少元?

4. 一台机器的原价为 26 000 元,因逐年变旧,每年价值减少 6%,问 5 年后机器的价值是多少元?

本章知识结构



复习题一

1. 判断题.

(1) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 是同一函数. ( )

(2) $f(x)=x^2$ 是单调函数. ( )

(3) 函数 $f(x)=x^3\cos x$ 是奇函数. ( )

(4) $y=\sin^2 x$ 由 $y=\sin u, u=\sin x$ 复合而成. ( )

(5) 零是无穷小量. ( )

(6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $[-1,1]$. ( )

(7) $f(x)$ 在 x_0 处无定义, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. ( )

(8) $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有极限, 则 $f(x)$ 在 x_0 处一定连续. ( )

(9) $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续, 则对区间 (a,b) 内的每一点 x_0, 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 都有极限.
( )

(10) 在 (a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 一定有最大值和最小值. ( )

2. 填空题.

(1) 函数 $f(x)=\ln(4x-3)-\arcsin(2x-1)$ 的定义域是________.

(2) 若 $f(x)=\begin{cases} x+1, x>0 \\ \pi, x=0 \\ 0, x<0 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(-1)]\}=$________.

(3) 函数 $f(x)=x^2+a$, 当 $x\to 2$ 时极限为 1, 则 $a=$________.

(4) $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin[2\varphi(x)]}{\varphi(x)}=$________.

(5) 函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 的间断点有________个.

(6) 函数 $y=(\arcsin\sqrt{x})^2$ 是由________复合而成的复合函数.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x)=$________.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x+1}=$________.

(9) 当 $x\to$________时, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 是无穷大.

(10) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\leqslant 0 \\ \cos x, x>0 \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

3. 选择题.

(1) 下列各对函数中, 为偶函数的是( ).

A. $f(x)=e^x$　　B. $f(x)=x^3\sin x$

C. $f(x)=x^3+1$　　D. $f(x)=x^3\cos x$

(2)下列 y 能成为 x 的复合函数的是(　　).

A. $y=\ln u, u=-x^2$　　B. $y=\frac{1}{\sqrt{u}}, u=2x-x^2-1$

C. $y=\sin u, u=-x^2$　　D. $y=\arccos u, u=3+x^2$

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$,则下列说法正确的是(　　).

A. $f(x_0)=A$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

C. $f(x)$在点 x_0处有定义　　D. $f(x)$在点 x_0处连续

(4)下列极限值等于 1 的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{x}$　　D. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$

(5)设 $f(x)=\frac{|x|}{x}$,则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

(6)函数 $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$在点 $x=2$ 处(　　).

A. 有定义　　B. 有极限

C. 没有极限　　D. 连续

(7)当 $x\to 1$ 时,下列变量中不是无穷小的是(　　).

A. x^2-1　　B. $\sin(x^2-1)$

C. e^{x-1}　　D. $\ln x$

(8)当 $x\to 0$ 时,$\sin\frac{1}{x}$(　　).

A. 极限为零　　B. 极限为无穷大

C. 有界变量　　D. 无界变量

(9)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2x+1}=$(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. 0　　D. ∞

(10)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{2n}=$(　　).

A. e^4　　B. e^{-8}　　C. e^{-4}　　D. e^8

4. 求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-4}{x-1}$；　(2)$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$；　(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$；

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{1-4x^3}$；　(5)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}$；　(6)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$；

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}$；　(8)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；　(9)$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{2(x+1)}$；

(10)$\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\left|\sin\frac{1}{x^2}\right|}$；　(11)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$；　(12)$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{kx}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2-x+1, & x>0\end{cases}$,讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？并写出连续区间.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ a, & x=0\\ \dfrac{\sin kx}{x}, & x<0\end{cases}$,若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,求 a 与 k.

7. 一种商品进价每件 8 元,卖出价每件 10 元时,每天可卖出 120 件,今想提高售价来增加利润,已知价格每件每升高 0.5 元,每天少卖 10 件。

(1)求出这种商品每天的利润 y 与售价 x 之间的函数关系;

(2)当售价为 12 元时,商家每天获利多少元?