

第3章 信号检测

通过观测数据判断信号是否存在，这一问题称为信号检测，它本质上是一种统计假设检验。所谓统计假设，就是关于我们感兴趣的一个总体的某个未知特征的主张。检验一个统计假设的根本任务即是：决定关于某个未知特征的主张是否为随机试验的观测样本所支持。通常，这一主张涉及的是采样的随机分布的某个未知参数或者某个未知函数。样本数据是否在统计意义上支持该主张的决定是根据概率作出的。简而言之，如果面对观测数据提供的证据，某个主张正确的机会大，就接受它；否则，便拒绝它。

通过将信号检测视为统计假设检验问题，就可以采用一种通用的数学框架讨论和分析不同情况下的信号检测。本章正是从这一视角出发，对信号检测的有关理论、方法与应用展开讨论。

3.1 统计假设检验

从理论层面讲，信号检测理论 (signal detection theory, SDT) 是一种统计假设检验理论：通过分析来自实验的数据，对模棱两可的刺激源 (或称响应) 作出判决：它究竟是由某个已知过程产生的信号，抑或仅仅是噪声而已。信号检测理论广泛应用于差异悬殊的众多邻域：从心理学 (心理物理学、感知、记忆)、医疗诊断 (症状是否与作出的诊断匹配，还是不相关) 到无线通信 (发射的二进制码是 0，还是 1)、雷达 (显示屏上的亮点是飞机、导弹目标，还是杂波干扰)。

心理学家最早将信号检测理论应用于感知的研究，其目的是识别信号 (刺激) 与噪声 (无刺激)，例如：记忆识别 (旧的和新的物品)、测谎 (谎言与真实) 等。

3.1.1 信号检测的基本概念

图 3.1.1 画出了信号检测的基本过程。

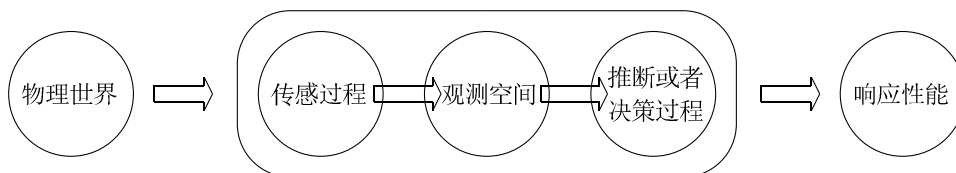


图 3.1.1 信号检测过程

传感过程由传输和感知两个过程组成：物理世界的信 (号) 源经过传输和转换，变成可

以观测的数据；然后通过传感单元感知或观测。

被感知的物理过程或现象称为刺激源，感知或传感结果称为观测数据。由于单个数据难以做出正确的统计决策，所以有必要使用一组观测数据 y_1, y_2, \dots, y_N ，经由检测单元对该组观测数据做出统计推断或者决策。得到的推断或决策结果称为响应。这一响应通过显示单元输出。

从计算角度看，信号检测理论是一种计算框架 (computational framework)，它描述如何从噪声中抽取信号，同时对可能影响抽取过程的偏差和其他因素作出解释。最近，信号检测理论已经成功地用于描述人脑是如何利用环境和感知，通过感觉信号的人脑自身的内部过程来克服噪声的^[120]。

需要注意的是，信号和噪声的概念并非一定是实际的信号和噪声，有时它们只是某些隐喻。一般说来，将通常发生的事物约定为信号，而偶然发生的事物则隐喻为噪声。例如，在记忆识别的实验中，参与者需要判断当前看到的刺激源是否是以前业已存在的^[2]：这里，信号对应为被记忆的刺激源产生的熟悉感觉，而噪声则代表一个新刺激源产生的感觉。又如，在肿瘤检测中，回声清晰的信号通常表示良性肿瘤，而回声模糊或者混浊的响应则隐喻恶性肿瘤 (癌)。为了叙述的方便，下面将以信号和噪声区分检测对象。

在信号检测中，现实情况分为信号存在和不存在两种情况，其中信号不存在对应为噪声存在。决策或判决结果要么“是”(肯定)，要么“否”(否定)，为择一判决。因此，会出现以下四种判决结果：

- (1) 现实是信号存在，判决为“是”。这一正确判决称为“命中”或者“猜中”(hit)。
- (2) 现实是信号存在，但判决为“否”，即否认信号存在。这一错误判决称为“错失、漏检或漏判”(miss)。漏检在雷达等军事应用中，常称为“漏警”。
- (3) 现实是信号不存在，但判决为“是”(肯定信号存在)。这一错误判决称为虚报或者虚警 (false alarm, FA)。
- (4) 现实是信号不存在，判决为“否”(否认信号存在)。这一正确判决称为正确否定或者正确拒绝 (correct rejection, CR)。

表 3.1.1 列出了信号检测理论的上述四种可能结果。

表 3.1.1 信号检测理论的四种可能结果^[2]

| 现实 (reality) | 决策 (decision) | |
|-----------------|----------------------|--------------------------------|
| | 是 (肯定) | 否 (否定) |
| 信号存在 | 命中, 猜中 (hit) | 错失, 漏检 (miss) |
| 信号不存在 | 虚惊, 虚警 (false alarm) | 正确否定, 正确拒绝 (correct rejection) |

注意，在不同的应用中，错误判决带来的后果可能是大相径庭的：在无线通信中，将发射的二进制码 1 判决为 0，或者 0 判决为 1，都属于误码，误判后果无轻重之分。然而，在雷达、声纳等军事应用中，信号 (敌方飞机或导弹等) 存在时的错误判决 (漏警) 比信号不存在

时的错误判决 (虚警) 的后果要严重得多。类似地, 在肿瘤检测中, 良性判决为恶性, 给病人将带来严重的思想负担; 而恶性肿瘤判决为良性, 则往往会延误病人的医治, 后果可能是致命的。

某个刺激源或响应在实验总次数所占的比例 (proportion) 又称频次 (frequency) 或者概率 (probability)。

信号检测理论中的四种响应发生的相对频次不是彼此无关的。例如, 当信号存在时, 命中的比例与漏检的比例之和等于 1 (表 3.1.1 的第 3 行)。反之, 若信号不存在, 则虚警的比例与正确否定的比例之和等于 1 (表 3.1.1 的第 4 行)。

一个总是说“否”的参与者能够百分之百正确否定, 但却永远不可能命中, 即总是漏警 (表 3.1.1 的第 3 列)。相反, 一个总是说“是”的参与者总是能够猜中信号的存在, 但却永远不可能正确否定, 即总是虚警 (表 3.1.1 的第 2 列)。

信号与噪声识别的主要错误来源有以下三种:

(1) 刺激源可能超出了标准的可视窗口 (信号 \leq 噪声): 例如紫外线, 可视窗口减小 (实验或者生理上的), 又如色盲等。

(2) 刺激源可能被外部噪声所“掩蔽”, 造成信噪比减小。此时, 又分为以下两种情况。

① 噪声增大 (外部噪声严重影响检测机制) 或者空间/时间模糊性增加 (例如泥浆溅射效应)。

② 信号减小 (外部噪声激活了抑制机制, 导致信号的边缘掩蔽)。

(3) 换能器或传感器的变化 (实验或神经诱导的增益控制效果、规范化失败)。

所谓“统计推断”, 系指对随机变量的统计特性 (如概率分布等) 的有关假设作出推断。这些假设可能产生于对随机现象的实际观察或者理论分析。本质上, 假设是关于感兴趣的一个主体的某个未知特征的主张, 常用拉丁字母 H 表示统计假设。下面是几个简单的例子。

例 3.1.1 关于目标信号的存在, 可以提出下列的假设:

$$\begin{cases} H_0: \text{目标信号不存在} \\ H_1: \text{目标信号存在} \end{cases}$$

例 3.1.2 关于运动员兴奋剂的检查, 一般会有以下两种主张:

$$\begin{cases} H_0: \text{结果为阴性} \\ H_1: \text{结果为阳性} \end{cases}$$

例 3.1.3 关于某随机变量 ξ 的概率分布, 可能有以下主张或者假设:

$$\begin{cases} H_0: \xi \text{ 服从正态分布} \\ H_1: \xi \text{ 服从指数分布} \\ H_2: \xi \text{ 服从 } \chi^2 \text{ 分布} \end{cases}$$

在上面的例子中, 目标信号、兴奋剂和概率分布就是我们感兴趣的总体, 而存在、阴性和正态分布分别是这些总体的未知特征。

只有两个统计假设 H_0 和 H_1 的问题称为二元统计假设检验问题, 如例 3.1.1 和例 3.1.2。通常, 这两个统计假设不可能同时为真: 要么 H_0 真实而 H_1 不真实; 要么 H_1 真实而 H_0 不真实。这样两个非此即彼的假设称为二者必居其一假设或互斥假设。一般说来, 我们感兴趣的随机事件是偶发的, 因此关于随机事件不发生的假设为基本假设。例如, 在雷达预警中, 目标飞机的出现是偶发事件; 在兴奋剂检查中, 阳性只是极少数的; 在概率分布中, 高斯(或正态) 分布为常见的分布等。习惯使用 H_0 表示随机事件不发生的基本假设, H_1 表示随机事件偶然发生的假设。基本假设 H_0 称为零假设 (null hypothesis) 或原(始) 假设 (original hypothesis), 与之对立的假设 H_1 称为备择假设 (alternative hypothesis) 或对立假设。

具有两个以上统计假设的问题称为多元统计假设检验问题, 如例 3.1.3。本章主要讨论二元统计假设检验问题, 最后两节分别介绍多元假设检验和多重假设检验。

3.1.2 信号检测理论测度

信号检测理论测度 (SDT measure) 可以用比率或者概率表示。

1. 比率测度

使用比率表示的测度有命中率和虚警率。

(1) 命中率 (hit rate)

$$R_H = \frac{\text{命中次数}}{\text{信号出现的总次数}} \quad (3.1.1)$$

(2) 虚警率 (false-alarm rate)

$$R_F = \frac{\text{虚警次数}}{\text{噪声出现的总次数}} \quad (3.1.2)$$

2. 概率测度

使用概率表示的测度通常用函数形式表示, 称为测度函数。测度函数有两种: ϕ 函数和逆 ϕ 函数 (inverse phi function)。

(1) ϕ 函数: 将 z 评分转变为概率的函数。 ϕ 函数决定位于 z 评分左侧的正态分布部分。 z 越大, 则概率越高。例如, $\phi(-1.64) = 0.05$ 意味着与 z 评分 -1.64 对应的概率为 0.05。

将 z 评分转变为概率的另一函数决定位于 z 评分右侧的正态分布部分, 称为 z 检验。 z 评分越大, z 检验表示的概率越小。

(2) 逆 ϕ 函数: ϕ 函数的逆函数简称逆 ϕ 函数, 用符号 ϕ^{-1} 记之。逆 ϕ 函数将概率转变为 z 评分。例如, $\phi^{-1}(0.05) = -1.64$ 意味着 0.05 的单侧概率对应的 z 评分为 -1.64 。

在二元假设检验中, 通常先由 N 个观测数据 y_1, \dots, y_N 得到某次试验的证据量 Y ; 然后将此证据量与某个阈值 λ 比较, 作出检验决策。阈值 λ 也称判据参数。由于证据量 Y 不是一个固定值, 而是随机变量, 所以很自然应该用几率或概率作为衡量根据某个证据量做出的判决结果的测度。

H_j 假设条件下 H_i 假设成立的判决记作 $(H_i|H_j)$, 相对应的概率测度常用条件概率 $P(H_i|H_j)$ 表示, 读作“实际情况为 H_j 假设, 判决结果为 H_i 假设成立的概率”。在二元假设检验中, 有以下四种检测概率:

(1) 虚警概率 $P(H_1|H_0) = P_F$: 实际为 H_0 假设, 判决结果却为 H_1 假设的概率, 定义为

$$P(H_1|H_0) = P_F = P(Y > \lambda|H_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(y|H_0)dy \quad (3.1.3)$$

式中 $p(y|H_0)$ 和 $p(y|H_1)$ 分别是在 H_0 和 H_1 假设下观测数据 y 的条件分布密度函数。

(2) 拒绝概率 $P(H_0|H_0)$: 实际为 H_0 假设, 判决结果亦为 H_0 假设的概率, 定义为

$$P(H_0|H_0) = P(Y < \lambda|H_0) = \int_{-\infty}^{\lambda} p(y|H_0)dy \quad (3.1.4)$$

(3) 命中概率 $P(H_1|H_1)$: 实际为 H_1 假设, 判决结果亦为 H_1 假设的概率, 定义为

$$P(H_1|H_1) = P_H = P(Y > \lambda|H_1) = \int_{\lambda}^{\infty} p(y|H_1)dy \quad (3.1.5)$$

(4) 漏检或漏警概率 $P(H_0|H_1)$: 实际为 H_1 假设, 判决结果为 H_0 假设的概率, 定义为

$$P(H_0|H_1) = P(Y < \lambda|H_1) = \int_{-\infty}^{\lambda} p(y|H_1)dy \quad (3.1.6)$$

虚警概率与拒绝概率之和等于 1, 命中概率与漏警概率之和也为 1, 即有

$$P(H_1|H_0) + P(H_0|H_0) = 1 \quad \text{和} \quad P(H_1|H_1) + P(H_0|H_1) = 1 \quad (3.1.7)$$

以上定义表明, 四种概率测度都受信号检测模型的判据参数 λ 的控制 (参见图 3.1.2)。

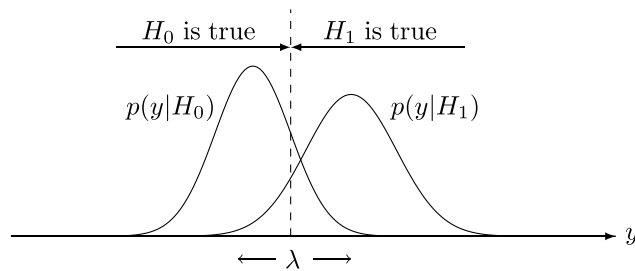


图 3.1.2 λ 参数的影响

(1) 分布密度重叠的影响 若条件分布密度函数 $p(y|H_0)$ 和 $p(y|H_1)$ 重叠部分越少, 则命中概率 P_H 越高, 并且虚警概率 P_F 越低。反之, 若两种分布重叠部分越多, 则命中概率越低, 而虚警概率越高。

(2) 判据 λ 的影响 若 λ 向条件分布密度的左侧移动即 λ 增大, 则 P_H 和 P_F 同时变大; 反之, 若 λ 向条件分布密度的右侧移动即 λ 减小, 则 P_H 和 P_F 同时变小。

由于零假设 H_0 为基本假设, 所以拒绝 H_0 假设的问题便成为信号检测的重点。关于零假设 H_0 的拒绝, 存在两种可能的决策: 拒绝 H_0 或未能拒绝 H_0 。根据实际状况, 每一种决策又有两种可能的结果:

$$\text{拒绝 } H_0 \begin{cases} \text{当 } H_0 \text{ 真实时,} \\ \text{当 } H_0 \text{ 不真实时;} \end{cases} \quad \text{未能拒绝 } H_0 \begin{cases} \text{当 } H_0 \text{ 真实时,} \\ \text{当 } H_0 \text{ 不真实时。} \end{cases}$$

需要注意的是, 未能拒绝 H_0 假设并不等同于接受 H_0 假设。例如, 在雷达组网预警中, 最简单的数据融合方法是: 根据多部雷达决策的投票结果, 才能最终决定是否拒绝 H_0 假设。少数雷达未能拒绝 H_0 假设, 并不代表雷达组网就应该接受无目标飞机存在的判断。又如, 在例 3.1.2 中, 未能拒绝关于某个运动员的兴奋剂检测的 H_0 假设只代表“疑似阴性”的判断, 应该建议再作进一步检查, 以确认是否可以完全排除兴奋剂检测阳性的可能。

必须强调的是, 关于一个统计假设的决策本质上是基于观测数据的统计量的一个推断过程。然而, 由于观测噪声或误差的存在以及观测数据长度的限制, 所以不可避免地会存在统计量的估计误差, 这就导致我们难免会出现统计推断上的错误。也就是说, 拒绝 H_0 假设的决策并不意味着 H_0 假设就一定不真实, 有时它实际上是真实的, 只是我们的推断偶尔犯了错误。类似地, 未能拒绝 H_0 的决策也不意味着 H_0 就一定是真实的, 因为有可能也是我们的推断偶然出错。

如果决策的结果为拒绝 H_0 假设, 则我们要么拒绝了本来真实的情况 (错误决策), 要么拒绝了原本虚假的情况 (正确决策)。类似地, 如果我们未能拒绝 H_0 假设, 则决策的结果要么未能拒绝原本真实的情况 (正确决策), 要么未能拒绝原来虚假的情况 (错误决策)。因此, 无论决策是拒绝还是未能拒绝 H_0 假设, 都有可能做出违背真实的推断。这样的错误统称推断错误。

拒绝实际为真的 H_0 假设所犯的推断错误称为第一类错误 (type I error 或 error of first kind), 而未能拒绝实际不真实的 H_0 假设所犯的推断错误称作第二类错误 (type II error 或 error of second kind)。需要注意的是, 只有当假设 H_0 实际真实时, 才可能犯第一类错误; 也只有在假设 H_0 不真实的情况下才会出现第二类错误。由于 H_0 假设不可能同时既是真实的, 又是虚假的, 所以任何一个错误的决策都不可能同时犯两类错误, 只能是其中之一。

为了定量刻画推断错误, 需要使用某个量化参数来度量两类推断错误的几率。统计概率就是这样一种合适的测度。

定义 3.1.1 在假设 H_0 为真的情况下拒绝 H_0 的概率称为第一类错误概率, 常用符号 α 表示。

定义 3.1.2 在假设 H_0 不真实的情况下未能拒绝 H_0 的概率称为第二类错误概率, 常记作 β 。

显然, 两类错误概率都界于 0 和 1 之间, 即有 $0 \leq \alpha \leq 1$ 和 $0 \leq \beta \leq 1$ 。

根据上述定义, 第一类和第二类错误概率又可以分别表述为

$$P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 真实时}) = \alpha \quad (3.1.8)$$

$$P(\text{未能拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 不真实时}) = \beta \quad (3.1.9)$$

由上述表示式可以看出, 两类错误概率都是条件概率。由于真实的状况是未知的, 所以我们不可能确切已知或者求得第一类和第二类错误的真实概率, 而只能分别得到第一类错误概率 α 和第二类错误概率 β 的估计值。

第一类错误概率 α 也称作统计显著性水平 (level of statistical significance)。对这一术语

的含义进行解读,“统计显著性水平”只是表明样本证据充足,使得有足够(即显著)的理由拒绝 H_0 假设,而其错误概率最大不会超过 α 水平。

统计假设检验的基本问题是:对假设 H_0 是否为真作出具体判断。为此,需要设计一种规则,它能够根据实验数据对是否拒绝 H_0 假设作出判断。这种规则称为统计假设检验。

定义 3.1.3 涉及一个总体的某个统计特征的统计假设检验是一种决策规则。一旦获得一组随机实验的样本,即可根据这一规则决定是否拒绝 H_0 假设。

决策规则只是统计假设检验的一种目标函数。最终的决策需要落实到观测数据的某个统计量与其阈值之间的比较。换言之,决策是根据某个合适的统计量作出的。这一统计量称为检验统计量 (test statistic)。

采用什么样的统计量做检验统计量,完全取决于假设检验问题的模型和所采用的决策规则。最简单和最常用的检验统计量为 N 个观测数据 y_1, \dots, y_N 的样本均值 $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n$ 。

考虑一种关于某个参数 θ 的简单零假设

$$H_0: \theta = \theta_0$$

其中 θ_0 是某个强调的参数值。

如果备择假设取形式

$$H_1: \theta > \theta_0 \quad \text{或者} \quad H_1: \theta < \theta_0$$

则称 H_1 为单边备择假设 (one-sided alternative hypothesis), 因为在 H_1 假设下的 θ 值只是位于所强调的参数值 θ_0 的某一侧。

与单边备择假设不同,如果备择假设取作

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

则称 H_1 为双边备择假设 (two-sided alternative hypothesis), 因为 H_1 假设下 θ 可能在 θ_0 两侧取值。

当 H_1 是更加复杂的复合备择假设时,拒绝 H_0 假设的 θ 通常在一个区域内取值。由于 H_0 为基本假设,所以拒绝 H_0 是统计假设检验的根本任务。

定义 3.1.4 若拒绝 H_0 假设是根据某个检验统计量 $g > \text{Th}$ 作出的 (其中 Th 是某个阈值), 则数值区域 (Th, ∞) 称为该检验统计量的临界区。

临界区常用符号 $R_c = (\text{Th}, \infty)$ 表示。显然,当参数 θ 在临界区 R_c 内取不同值时,第二类错误概率 β 的大小也将不同,从而构成函数 $\beta(\theta)$ 。函数 $\beta(\theta)$ 称为抽检特性函数 (operating characteristic function), 而 $\beta(\theta)$ 随 θ 变化的曲线称为抽检特性曲线 (operating characteristic curve)。

由于 $\beta(\theta)$ 是在 H_0 假设真实的情况下作出拒绝 H_0 假设 (即错误决策) 时检验统计量不落在临界区的概率,因此 $1 - \beta(\theta)$ 表示 H_0 不真实情况下拒绝 H_0 假设 (即正确决策) 时检验统计量将位于临界区的概率。

定义 3.1.5 函数 $P(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ 称为统计假设检验的功效函数 (power function), 它表示当 H_0 不真实时拒绝 H_0 假设 (即正确决策) 的概率。

注意, 在二元假设检验问题中, H_0 假设不真实意味着 H_1 假设必然真实, 并且拒绝 H_0 假设或者接受 H_1 假设是二元假设检验的主要任务。因此, $1 - \beta(\theta)$ 代表正确拒绝 H_0 假设或者正确接受 H_1 假设这一基本功能的效果 (功效), 故称之为假设检验的功效函数。

在二者之和等于 1 的意义上讲, 功效函数 $1 - \beta(\theta)$ 和抽检特性函数 $\beta(\theta)$ 是一对互补函数。

3.1.3 决策理论空间

考虑两个信号 S_1 和 S_0 的检测问题。这类检测问题属于二元假设检验。在不同的应用场合, 两个信号具有的含义可能迥异。例如, 在雷达和声纳目标检测等应用中, S_1 和 S_0 分别代表目标信号存在和不存在。然而, 在数字无线通信信号的检测等问题中, $S_1 = g(t)$ 和 $S_0 = -g(t)$ 往往表示两个不同极性的发射信号。

所有信号组成的集合称为信号或参数空间 (signal or parameter space), 用符号 \mathcal{S} 表示。在二元假设检验中, 信号空间由两个参数 S_0 和 S_1 组成:

$$\mathcal{S} = (S_0, S_1)$$

信号经过信道传输, 与加性观测噪声 w_n 混合, 变成观测数据

$$\begin{cases} H_0: y_n = S_0 + w_n \\ H_1: y_n = S_1 + w_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1.10)$$

其中 H_0 为零假设, H_1 为备择假设。

通常假定加性观测噪声是独立的和平稳的。在一般的应用中, 常假定加性噪声 $\{w_n\}$ 为高斯白噪声, 其均值 $E\{w_n\} = \mu_0$ 、方差为 σ^2 。

由于加性随机噪声 w_n 的存在, 观测数据 y_n 也为随机变量, 所以使用单个随机变化的观测数据 y_n , 将不可能对信号检测作出正确判断。因此, 在信号检测问题中, 应该根据 N 个观测数据 y_1, \dots, y_N , 对不同信号是否存在作出判断。这一判断称为检测问题的决策。

为方便计, 这里采用

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \quad (3.1.11)$$

作为观测数 (据) 组 y_1, \dots, y_N 的符号。注意, \mathbf{y} 并不是向量的表示形式。

所有可能的观测值组成一个集合, 称为观测样本空间 (space of observed samples), 用集合符号 Ω 表示。由于观测数组是在观测样本空间 Ω 内取值的, 因此称观测数组 \mathbf{y} 隶属于观测样本空间, 记作 $\mathbf{y} \in \Omega$ 。

观测数组 \mathbf{y} 仍然是一组随机变量。随机变量不适合直接用作检测问题的决策量。为此, 需要把观测数组变成某个确定的统计量。用作检测问题决策的统计量称为决策统计量, 这里用符号

$$t = g(\mathbf{y}) = g(y_1, \dots, y_N) \quad (3.1.12)$$

表示之。最简单的决策统计量为 N 个观测数据的平均值

$$t = g(\mathbf{y}) = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (3.1.13)$$

给定一个未知参数 θ , 为了估计 θ , 抽取 N 个观测样本 y_1, \dots, y_N 。令 $t = g(y_1, \dots, y_N)$ 是由观测数据 y_1, \dots, y_N 得到的某个统计量 (某个随机变量), P_θ 是估计参数 θ 所规定的测度族。

定义 3.1.5^[341] 统计量 $t = g(y_1, \dots, y_N)$ 称为关于测度族 P_θ 的充分统计量, 当且仅当下列等价条件的任何一个成立:

- (1) 对于每一个事件 A , 条件概率 $P(A|t)$ 都与 θ 无关;
- (2) 对于数学期望 $E\{\alpha\}$ 存在的每一个随机变量 α , 条件期望 $E\{\alpha|t\}$ 都与 θ 无关;
- (3) 固定 $T = t$ 时, 每一个随机变量 α 的条件分布 $p(\alpha|t)$ (它总是存在) 都与 θ 无关。

条件概率 $P(A|t)$ 、条件期望 $E\{\alpha|t\}$ 和条件分布 $p(\alpha|t)$ 本来均与 θ 有关, 但在统计量 t 固定为 T 后, 这些分布及均值 (期望) 均与 θ 无关。这表明, 固定 $T = t$ 相当于固定 θ , 即统计量 t 完全起到了未知参数 θ 的作用, 这就是“充分统计量”的含义所在。自然地, 希望决策统计量 t 是假设检验的一个充分统计量。

一般的教科书中, 也将决策统计量称为决策函数。本书中, 将决策规则中使用的目标函数称为决策函数, 使用符号 $L(\mathbf{y}) = L(y_1, \dots, y_N)$ 表示, 它通常不能根据观测数据直接估计。常用的决策函数有条件分布密度函数之比 $p(\mathbf{y}|H_1)/p(\mathbf{y}|H_0)$, 习惯称为似然比函数。与决策函数不同, 决策统计量是可以根据观测数据直接估计的统计量。

令 Th 代表做出决策时所使用的某个阈值, 当决策统计量大于此阈值时, 就拒绝 H_0 假设即接受 H_1 假设检验为真, 从而判断信号 S_1 存在; 否则, 就认为 H_0 假设检验为真, 判断信号 S_0 存在。这一决策规则可以书写为

$$\begin{cases} H_0: & \text{若 } g(\mathbf{y}) \leq \text{Th}, \text{ 则判断信号 } S_0 \text{ 存在} \\ H_1: & \text{若 } g(\mathbf{y}) > \text{Th}, \text{ 则判断信号 } S_1 \text{ 存在} \end{cases} \quad (3.1.14)$$

或者合并写作

$$g(\mathbf{y}) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \text{Th} \quad (3.1.15)$$

决策统计量所有可能取值的集合称为决策空间 (decision space), 用符号 D 表示。以阈值 Th 为界, 决策空间 $D = (-\infty, \infty)$ 分为两个子空间: $D = D_0 + D_1$, 其中

$$D_0 = (-\infty, \text{Th}] \quad \text{和} \quad D_1 = (\text{Th}, \infty)$$

最后, 决策的结果组成结果空间或行为空间 (action space)。二元假设检验的结果空间由两个元素 A_0 和 A_1 组成:

$$\mathcal{A} = (A_0, A_1)$$

分布密度函数具有以下性质:

$$p(x) \geq 0 \quad (\text{非负性}) \quad (3.2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{归一性}) \quad (3.2.3)$$

在本章中,总是令 H_0, H_1 代表离散的随机事件,它们相互独立;而观测数据 y_1, \dots, y_N 为连续的随机变量。

在信号有无这一类检测问题

$$\begin{cases} H_0: y_n = w_n \\ H_1: y_n = s + w_n \end{cases} \quad n = 1, \dots, N \quad (3.2.4)$$

中,加性噪声 w_n 通常假定为一零均值、方差为 σ^2 的高斯白噪声。因此,观测数据 y_n 在 H_0 假设和 H_1 假设下都服从高斯分布,它们的均值分别为 0 和 s 、而方差相同,均为 σ^2 ,即它们的条件分布密度函数分别为

$$p(y_n|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y_n^2/2\sigma^2} \quad (3.2.5)$$

$$p(y_n|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y_n-s)^2/2\sigma^2} \quad (3.2.6)$$

或简记为

$$p(y_n|H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y_n-\mu_i)^2/2\sigma^2}, \quad i = 0, 1 \quad (3.2.7)$$

其中 $\mu_0 = 0$ 和 $\mu_1 = s$ 。

对于一个观测数组 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 而言,各个观测数据的分布密度函数 $p(y_n|H_i)$ 常称为边缘条件分布密度函数。

在二元假设检验中,通常利用 N 个观测数据而非单个数据进行决策。由于这些数据是独立观测的,所以观测数组 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 的联合条件分布密度函数 $p(\mathbf{y}|H_i)$ 等于各个观测数据的边缘条件分布密度函数 $p(y_n|H_i)$ 的乘积

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|H_i) &= p(y_1, \dots, y_N|H_i) = \prod_{n=1}^N p(y_n|H_i) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y_n-\mu_i)^2/2\sigma^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(\sum_{n=1}^N \frac{(y_n-\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right), \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

在离散随机事件 H 发生情况下,连续随机观测数组 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 的条件分布密度函数 $p(y_1, \dots, y_N|H_i)$ 和条件概率 $P(H_i|y_1, \dots, y_N)$ 有着不同的含义。

条件分布密度函数 随机事件 H_i 发生条件下观测数组 y_1, \dots, y_N 的条件分布密度函数 $p(y_1, \dots, y_N|H_i)$ 称为观测数组 \mathbf{y} 的似然函数,因为它表示随机事件 H_i 发生后所观测到的随机样本组 \mathbf{y} 属于随机事件 H_i 的样本数据的似真度(概率论术语称为似然)。正因为这一缘由,所以两个似然函数之比 $p(y_1, \dots, y_N|H_1)/p(y_1, \dots, y_N|H_0)$ 习惯称为似然比函数。

条件概率 条件概率 $P(H_i|y_1, \dots, Y_N)$ 表示所观测到的随机样本组 \mathbf{y} 属于随机事件 H_i 的样本数据的概率即似真度, 反映决策者在获得样本信息 y_1, \dots, y_N 后对随机事件 H_i 是否发生的自信程度。

观测数组与随机事件 H 之间的联合分布密度函数 $p(y_1, \dots, y_N; H)$ 定义为

$$p(y_1, \dots, y_N; H) = p(y_1, \dots, y_N|H)P(H) = P(H|y_1, \dots, y_N)p(y_1, \dots, y_N) \quad (3.2.9)$$

由此有

$$P(H|y_1, \dots, y_N) = \frac{p(y_1, \dots, y_N|H)P(H)}{p(y_1, \dots, y_N)} \quad (3.2.10)$$

分布密度函数在积分区间 $(-\infty, \infty)$ 的积分恒等于 1, 即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1, \dots, y_N) dy_1 \cdots dy_N = 1 \quad (\text{联合分布密度函数}) \quad (3.2.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1, \dots, y_N|H) dy_1 \cdots dy_N = 1 \quad (\text{似然函数}) \quad (3.2.12)$$

函数 $g(y_1, \dots, y_N)$ 的均值或期望值定义为该函数与联合分布密度函数 $p(y_1, \dots, y_N)$ 乘积的 N 重积分, 即有

$$E\{g(y_1, \dots, y_N)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, \dots, y_N) p(y_1, \dots, y_N) dy_1 \cdots dy_N \quad (3.2.13)$$

特别地, 当 $H = \theta$ 为某个随机参数时, 后验分布密度函数的积分

$$E\{\theta|y_1, \dots, y_N\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|y_1, \dots, y_N) d\theta \quad (3.2.14)$$

称为给定 N 个观测值 y_1, \dots, y_N 时随机参数 θ 的条件期望 (conditional expectation) 或条件均值。显然, 条件期望 $E\{\theta|y_1, \dots, y_N\}$ 是观测数组 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 的函数。

下面分析数学期望 $E\{\theta\}$ 与条件数学期望 $E\{\theta|y_1, \dots, y_N\}$ 之间的关系。

如果使用符号 E_{y_1, \dots, y_N} 和 E_θ 分别表示相对于随机数组 (y_1, \dots, y_N) 和随机参数 θ 的数学期望, 则有

$$E\{\theta\} = E_{y_1, \dots, y_N} \{E_\theta(\theta|y_1, \dots, y_N)\} \quad (3.2.15)$$

这一结果称为条件期望定理。由于

$$E_{y_1, \dots, y_N} \{g(y_1, \dots, y_N)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, \dots, y_N) p(y_1, \dots, y_N) dy_1 \cdots dy_N \quad (3.2.16)$$

将式 (3.2.14) 和式 (3.2.16) 代入式 (3.2.15), 得随机参数 θ 的数学期望

$$\begin{aligned} E\{\theta\} &= E_{y_1, \dots, y_N} \{E_\theta(\theta|y_1, \dots, y_N)\} = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|y_1, \dots, y_N) d\theta \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|y_1, \dots, y_N) d\theta \right] p(y_1, \dots, y_N) dy_1 \cdots dy_N \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|y_1, \dots, y_N) p(y_1, \dots, y_N) d\theta dy_1 \cdots dy_N \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

它是一个 $N+1$ 重积分。

3.2.2 误差函数和补余误差函数

在信号检测中,常常需要计算检测概率和错误概率,而这些概率的计算又与高斯随机变量的误差函数和补余误差函数密切相关。

令 x 是一个高斯随机变量,其分布密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2} \quad (3.2.18)$$

式中 m_x 和 σ_x^2 分别是高斯随机变量 x 的均值和方差。高斯随机变量 x 的累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF) 定义为

$$F(x) = \int_x^\infty p(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-(u-m_x)^2/2\sigma_x^2} du = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-m_x)/\sqrt{2}\sigma_x}^\infty e^{-t^2} dt \quad (3.2.19)$$

定义误差函数 (error function)

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (3.2.20)$$

和补余误差函数 (complementary error function)

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (3.2.21)$$

则式 (3.2.19) 所示高斯随机变量 x 的累积分布函数便可以使用补余误差函数和误差函数改写作

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \right] \quad (3.2.22)$$

误差函数也叫概率积分。

误差函数具有对称性

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z) \quad \text{和} \quad \operatorname{erf}(z^*) = [\operatorname{erf}(z)]^* \quad (3.2.23)$$

特别地,当 $z \rightarrow \infty$ 时,有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(z) = 1 \quad \text{和} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \operatorname{erf}(z) = -1, \quad |\arg(z)| < \frac{\pi}{4} \quad (3.2.24)$$

因此,有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(z) = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \operatorname{erfc}(z) = 2, \quad |\arg(z)| < \frac{\pi}{4} \quad (3.2.25)$$

这个重要结果后面将用到。

高斯分布密度函数尾部下方的面积常用符号 $Q(x)$ 表示,定义为

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad x \geq 0 \quad (3.2.26)$$

并称为 Q 函数。

比较式 (3.2.20) 和式 (3.2.26), 立即得到 Q 函数和补余误差函数之间的关系式

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.2.27)$$

附录 3A 给出了误差函数表 [1, pp.310-311]。利用该表, 不仅可以查出误差函数值和反查出与给定误差函数值 $\operatorname{erf}(x)$ 对应的变元 x , 而且还可以查找补余误差函数的反函数和 Q 函数等。

例 3.2.1 求补余误差函数的反函数 $\operatorname{erfc}^{-1}(0.02)$ 。

解 令 $x = \operatorname{erfc}^{-1}(0.02)$, 则补余误差函数 $\operatorname{erfc}(x) = 0.02$ 。于是, 误差函数

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x) = 1 - 0.02 = 0.98$$

查表得 $x = 1.64$ 。因此, 补余误差函数的反函数 $\operatorname{erfc}^{-1}(0.02) = 1.64$ 。

例 3.2.2 求补余误差函数的反函数 $\operatorname{erfc}^{-1}(1.8)$ 。

解 令 $x = \operatorname{erfc}^{-1}(1.8)$, 则补余误差函数 $\operatorname{erfc}(x) = 1.8$, 由此得误差函数

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x) = 1 - 1.8 = -0.8$$

查表得 $\operatorname{erf}(0.91) = 0.8$ 。利用误差函数的对称性 $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ 立即知与 $\operatorname{erf}(x) = -0.8$ 对应的 $x = -0.91$ 。因此, 补余误差函数的反函数 $\operatorname{erfc}^{-1}(1.8) = -0.91$ 。

例 3.2.3 求 Q 函数 $Q(0.1)$ 和 $Q(0.3)$ 。

解 令 $x = 0.1$, 则 $x/\sqrt{2} = 0.0707$ 。查表知

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= \operatorname{erf} \left(\frac{0.1}{\sqrt{2}} \right) = \operatorname{erf}(0.0707) \approx 0.07885 \\ \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) &= \operatorname{erf} \left(\frac{0.3}{\sqrt{2}} \right) = \operatorname{erf}(0.2121) \approx 0.2336 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} Q(0.1) &= Q(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{2} \times 0.07885 = 0.9606 \\ Q(0.3) &= Q(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{2} \times 0.2336 = 0.8832 \end{aligned}$$

在检测概率与虚警概率的表示中, 误差函数和补余误差函数将起到重要的作用。

3.3 检测概率与错误概率

3.1 节讨论了决策理论空间的组成, 3.2 节又介绍了与信号检测有关的概率论知识。本节对结果空间和信号空间之间的关系作进一步讨论。

在二元假设检验中, 如果判决结果 $A_1 = S_1$ 或者 $A_0 = S_0$, 即结果空间 $\mathcal{A} = (A_0, A_1)$ 与信号空间 $\mathcal{S} = (S_0, S_1)$ 一致, 则称信号被正确检测。然而, 由于观测噪声 (或误差) 和数据的

有限长等因素的影响, 决策统计量的估计难免存在误差, 这会使结果空间与信号空间有时不一致, 而出现 $A_1 = S_0$ 或者 $A_0 = S_1$ 的情况, 造成错误的检测。下面对正确检测和错误检测的有关理论展开定量分析。

3.3.1 检测概率与错误概率的定义

S_1 或者 S_0 信号被正确判断, 都属于二元假设检验的正确决策。正确决策发生的概率称为 (信号的) 检测概率 (probability of detection), 分为以下两种类型。

1. S_1 信号检测概率

S_1 信号被正确判断其存在的概率称为 S_1 信号的检测概率, 定义为 H_1 假设下决策统计量 $g = g(\mathbf{y})$ 大于阈值 Th 的条件概率 $P(g > \text{Th}|H_1)$, 或等价于 H_1 假设下决策统计量 g 位于决策子空间 $D_1 = (\text{Th}, \infty)$ 的条件概率 $P(g \in D_1|H_1)$, 即

$$P_{D_1} = P(g > \text{Th}|H_1) = P(g \in D_1|H_1) = \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_1)dg \quad (3.3.1)$$

2. S_0 信号检测概率

S_0 信号被正确判断存在的概率称为 S_0 信号的检测概率, 定义为 H_0 假设下决策统计量 $g = g(\mathbf{y})$ 小于阈值 Th 的条件概率 $P(g < \text{Th}|H_0)$, 或等价于 H_0 假设下决策统计量 g 位于决策子空间 $D_0 = (-\infty, \text{Th})$ 的条件概率 $P(g \in D_0|H_0)$, 即

$$P_{D_0} = P(g < \text{Th}|H_0) = P(g \in D_0|H_0) = \int_{-\infty}^{\text{Th}} p(g|H_0)dg \quad (3.3.2)$$

与上述两种正确决策相反, S_1 信号被判断为 S_0 信号, 或者 S_0 信号被判断为 S_1 信号, 都属于二元假设检验的错误决策。错误决策发生的概率被称为 (信号检测的) 错误概率, 分为第一类错误概率和第二类错误概率。

3. 第一类错误概率

真实的 H_0 假设 (即 S_0 信号存在) 却被拒绝, 被判断为 S_1 信号存在的错误称为第一类错误。第一类错误概率常用符号 α 表示。在雷达预警的术语中, 第一类错误称为虚警概率 (false probability), 因为无目标信号被判断为目标信号存在, 属于虚假报警。虚警概率常用符号 P_F 表示。然而, 在二进制脉冲幅度调制的无线通信信号的检测中, $S_1 = p(t)$ 和 $S_0 = -p(t)$ 代表的却是两个反极性的发射信号, 其中 $p(t)$ 为一正幅度的脉冲信号。因此, 第一类错误仅代表将负极性信号 $S_0 = -p(t)$ 错误判断为正极性信号 $S_1 = p(t)$ 。

既然是拒绝 H_0 假设的错误概率, 所以第一类错误概率定义为 H_0 假设下决策统计量 $g = g(\mathbf{y})$ 大于阈值 Th 的条件概率 $P(g > \text{Th}|H_0)$, 或等价于 H_0 假设下决策统计量 g 位于检测子空间 $D_1 = (\text{Th}, \infty)$ 的条件概率 $P(g \in D_1|H_0)$, 即

$$P_F = \alpha = P(g > \text{Th}|H_0) = P(g \in D_1|H_0) = \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_0)dg \quad (3.3.3)$$

4. 第二类错误概率

H_0 假设本来不真实 (即 S_0 信号不存在), 却被判断为 S_0 信号存在的错误属于未拒绝不真实的 H_0 假设的检测错误, 称为第二类错误。在不同的应用中, 第二类错误有着大不相同的含义。

在雷达信号检测中, S_1 通常代表目标信号, 而 S_0 表示无目标信号。因此, 在雷达预警的术语中, 有目标被当作无目标的错误称为漏警; 漏警发生的概率被称为漏警概率 (miss probability), 常用符号 P_M 或 β 表示。与雷达预警不同, 在二进制脉冲幅度调制的无线通信信号的检测中, 第二类错误指的是将正极性信号 $S_1 = p(t)$ 错误判断为负极性信号 $S_0 = -p(t)$ 。

由于第二类错误是未能够拒绝不真实的 H_0 假设, 所以漏警概率定义为 H_1 假设真实的情况下决策统计量 $g = g(\mathbf{y})$ 小于阈值 Th 的条件概率 $P(g < \text{Th}|H_1)$, 或等价于 H_1 假设下决策统计量 g 位于决策子空间 $D_0 = (-\infty, \text{Th})$ 的条件概率 $P(g \in D_0|H_1)$, 即

$$P_M = \beta = P(g < \text{Th}|H_1) = P(g \in D_0|H_1) = \int_{-\infty}^{\text{Th}} p(g|H_1)dg \quad (3.3.4)$$

下面分析 (正确) 检测概率与错误概率之间的关系。注意到

$$\int_{g \in D} p(g|H_i)dg = \int_{-\infty}^{\infty} p(g|H_i)dg = 1, \quad i = 1, 0$$

因此, 检测概率与错误概率之间存在重要关系

$$P_{D_0} = \int_{-\infty}^{\text{Th}} p(g|H_0)dg = \int_{-\infty}^{\infty} p(g|H_0)dg - \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_0)dg = 1 - \alpha \quad (3.3.5)$$

$$P_{D_1} = \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_1)dg = \int_{-\infty}^{\infty} p(g|H_1)dg - \int_{-\infty}^{\text{Th}} p(g|H_1)dg = 1 - \beta \quad (3.3.6)$$

以上两个关系式的物理意义分别如下: 由于任何一个信号被正确和错误检测的总概率等于 1, 所以 S_0 信号的正确检测概率 P_{D_0} 很自然地应该是总检测概率 1 减去其错误检测概率 α 的结果, 而 S_1 信号的正确检测概率 P_{D_1} 也很自然地等于总检测概率 1 减去其错误检测概率 β 。

二元假设检验的检测概率 P_D 既包括 H_0 假设的检测概率 P_{D_0} , 也包括 H_1 假设的检测概率 P_{D_1} 。令 p_i ($i = 0, 1$) 是 S_i 信号存在的先验概率, 其中 $p_0 + p_1 = 1$, 则二元假设检验的检测概率为

$$P_D = p_0 P_{D_0} + p_1 P_{D_1} = p_0 \int_{-\infty}^{\text{Th}} p(g|H_0)dg + p_1 \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_1)dg \quad (3.3.7)$$

类似地, 二元假设检验的错误概率既包括漏警概率 β , 也包含虚警概率 α 在内:

$$\begin{aligned} P_E &= p_0 P_F + p_1 P_M = p_0 \alpha + p_1 \beta \\ &= p_0 \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_0)dg + p_1 \int_{-\infty}^{\text{Th}} p(g|H_1)dg \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

检测概率 P_D 与错误概率 P_E 之间存在关系式

$$P_D = 1 - P_E \quad (3.3.9)$$

有必要强调指出, 在雷达信号检测中, 由于 S_0 表示无信号, 所以信号的检测概率只指 S_1 的检测概率, 而完全不关心 S_0 的检测概率。但在讨论错误概率时, 却必须同时关心 S_0

的错误概率 (虚警概率 α) 和 S_1 的错误概率 (漏警概率 β)。此时, 检测概率直接定义为 S_1 信号检测概率

$$P_D = \int_{Th}^{\infty} p(g|H_1)dg = 1 - \beta = \gamma \tag{3.3.10}$$

并称 γ 为检验功效 (power of test), 它是备择假设 H_1 的函数。

式 (3.3.10) 的物理含义是: 当 H_0 和 H_1 分别代表无目标信号和有目标信号的检验假设时, $\gamma = 1 - \beta$ 表示目标信号的实际检测概率, 因而代表了二元假设检验的实际功效。

图 3.3.1 以雷达信号检测一类问题为例, 画出了使用条件分布密度函数 $p(g|H_1)$ 和 $p(g|H_0)$ 作为决策统计量 g 时, 检测概率 $P_{r_mD} = \gamma$ 、漏警概率 α 、虚警概率 β 与决策空间 $D = D_0 + D_1$ 之间的关系。

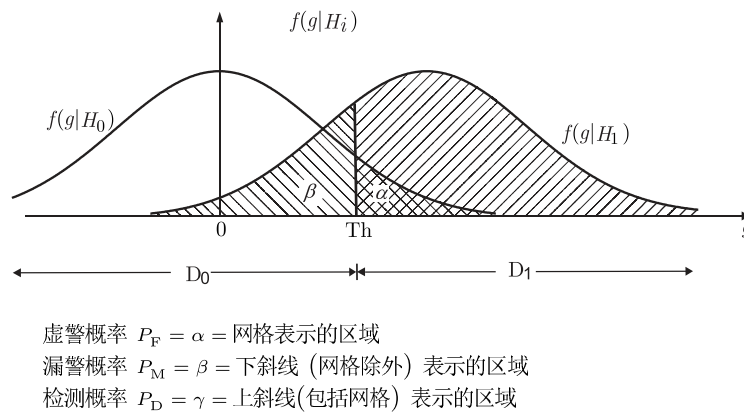


图 3.3.1 检测概率、错误概率与决策空间的关系

3.3.2 功效函数

式 (3.3.10) 定义了信号有无的二元假设检验问题

$$\begin{cases} H_0 : y_n = w_n \\ H_1 : y_n = S_1 + w_n \end{cases}$$

的检验功效。现在考查更一般的二元假设检验问题

$$\begin{cases} H_0 : y_n = S_0 + w_n \\ H_1 : y_n = S_1 + w_n \end{cases} \tag{3.3.11}$$

其中 w_n 是一个均值为 μ 、方差为 σ^2 的高斯随机变量。

由定义公式 (3.3.4) 知, 第二类错误概率 β 是阈值 Th 的函数, 而 Th 又与 H_1 假设的参数 S_1 密切相关, 因此 β 实质是 H_1 假设的参数 S_1 的函数, 记作 $\beta(S_1)$ 。

定义 3.3.1 对于一个使用决策函数 $L(\mathbf{y})$ 或决策统计量 $g(\mathbf{y})$ 进行统计推断的二元假设检验问题, 函数 $P(\mathbf{y}) = 1 - \beta(S_1)$ 称作该假设检验的功效函数, 它表示当 H_0 假设不真实时该决策函数或检验统计量拒绝 H_0 假设的概率。

由于 $\beta(S_1)$ 代表的是 S_1 被漏检的概率, 所以上述定义表明, 功效函数实际上就是信号 S_1 的检测概率。因此, 原则上希望功效函数 $P(\mathbf{y}) = 1 - \beta(S_1)$ 尽可能大。当功效函数达到最大时, 称所采用的统计量 $g(\mathbf{y})$ 是最大功效的。如果一个决策统计量是最大功效的, 则称其为最优决策统计量。然而, 在不同的应用场合, 最大功效的含义是有区别的。这意味着, 针对不同的信号检测对象, 应该采用不同的决策准则。

信号检测的对象可以分为三种类型, 它们分别采用不同的决策准则。

1. Neyman-Pearson 准则

在雷达预警一类应用中, H_0 假设代表无目标信号存在, 即 $S_0 = 0$; 而 H_1 假设为有目标信号的假设。由于第二类错误 (目标的漏检) 往往比第一类错误 (目标的虚检) 造成的后果严重得多, 因此应该在允许一定的虚警 (第一类错误) 概率的情况下, 使漏检概率最小, 或者等价使功效函数 (即目标信号 S_1 的检测概率) 最大。这样一种决策准则就是著名的 Neyman-Pearson 准则。

2. 一致最大功效准则

在无线通信中, 发射信号为反极性信号 $S_1 = s(t)$ 和 $S_0 = -s(t)$, 或者发射字符为二进制字符 1 和 -1 时, 第一类错误和第二类错误都是误码错误, 造成的后果基本相同, 并没有轻重之分。由于功效函数代表的是 S_1 信号的检测概率, 它是 H_1 假设的参数 S_1 的函数, 所以在这类应用问题中, 若能够使功效函数与 S_1 参数无关, 就可以实现最大功效函数对 S_1 参数的所有可能取值都相同。这样的最大功效函数称为均匀 (或一致) 最大功效函数, 相应的决策准则称为一致最大功效准则。

3. Bayes 准则

任何一种决策方案总是伴随有一定的风险, 最佳决策有时会带来较大的风险。在有些应用中, 我们有时并不过分强调最佳决策, 而更加重视风险最小即最保险的决策结果。这样一种风险最小的决策准则称为 Bayes 准则。

本章后面各节将主要围绕上述三种信号检验问题及其决策准则, 依次进行决策准则的介绍以及对应的性能分析。

3.4 Neyman-Pearson 准则

在实际的信号检测中, 有许多应用问题可以归类为这样一种二元假设检验: 零假设检验 H_0 代表仅有噪声的假设, 而备择假设检验 H_1 则代表观测数据中信号存在的假设。例如, 雷达和声纳等信号检测就是这类典型的例子。

3.4.1 雷达信号检测的虚警概率与漏警概率

特别地, 在雷达信号检测中, 雷达回波脉冲的观测数据可以用下列二元假设检验模型来

描述:

$$\begin{cases} H_0: y_n = w_n, & \text{目标不存在时} \\ H_1: y_n = S + w_n, & \text{目标存在时} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

其中 S 表示雷达回波脉冲的幅值, 它是一确定性信号; 而加性噪声 w_n 一般为零均值和方差为 σ^2 的高斯白噪声, 即

$$E\{w_n\} = 0, \quad \sigma^2 = \text{var}(w_n), \quad E\{w_n w_k\} = 0 \quad (\text{若 } n \neq k)$$

在这类应用中, 常直接使用 N 个观测数据 y_1, \dots, y_N 的样本均值

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n \quad (3.4.2)$$

作决策函数。此时, 决策规则是

$$\begin{cases} H_0: \text{判决信号不存在, 若 } \bar{y} \leq \text{Th} \\ H_1: \text{判决为信号存在, 若 } \bar{y} > \text{Th} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

因此, 关键是如何确定合适的阈值 Th 。

注意到 S 为确定性信号, w_n 是零均值、方差为 σ^2 的高斯白噪声, 所以样本均值 \bar{y} 和 w_n 一样, 也服从高斯分布。

样本均值的数学期望为

$$E\{\bar{y}|H_0\} = \mu_w = 0, \quad E\{\bar{y}|H_1\} = \mu_S = S$$

方差为

$$\text{var}(\bar{y}|H_0) = \text{var}\{\bar{y}|H_1\} = \frac{\sigma^2}{N}$$

换言之, 样本均值 \bar{y} 在 H_0 假设下是一个均值为 0、方差为 σ^2/N 的高斯分布, 而在 H_1 假设下则是一个均值为 S 、方差也为 σ^2/N 的高斯分布。就是说, 高斯随机过程 \bar{y} 的条件分布密度函数分别为

$$\begin{aligned} p(\bar{y}|H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\text{var}(\bar{y}|H_0)}} \exp\left[-\frac{(\bar{y} - E\{\bar{y}|H_0\})^2}{2\text{var}(\bar{y}|H_0)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi/N}\sigma} \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2\sigma^2/N}\right) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned} p(\bar{y}|H_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\text{var}(\bar{y}|H_1)}} \exp\left[-\frac{(\bar{y} - E\{\bar{y}|H_1\})^2}{2\text{var}(\bar{y}|H_1)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi/N}\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{y} - S)^2}{2\sigma^2/N}\right) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

于是, 虚警概率

$$\alpha = \int_{\text{Th}}^{\infty} p(\bar{y}|H_0) d\bar{y} = \int_{\text{Th}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi/N}\sigma} \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2\sigma^2/N}\right) d\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\text{Th}}{\sqrt{2/N}\sigma}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

利用补余误差函数的定义公式 (3.2.21), 可以将虚警概率表示为

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\operatorname{Th}}{\sqrt{2/N}\sigma} \right) \quad (3.4.6)$$

由此知, 阈值由虚警概率

$$\operatorname{Th} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) \quad (3.4.7)$$

决定。

类似地, 注意到 $\int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{y}|H_1)d\bar{y} = 1$, 可得漏警概率

$$\begin{aligned} \beta &= \int_{-\infty}^{\operatorname{Th}} p(\bar{y}|H_1)d\bar{y} = 1 - \int_{\operatorname{Th}}^{\infty} p(\bar{y}|H_1)d\bar{y} \\ &= 1 - \int_{\operatorname{Th}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi/N}\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{y}-S)^2}{2\sigma^2/N}\right) d\bar{y} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\operatorname{Th}-S}{\sqrt{2/N}\sigma}}^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

利用补余误差函数, 漏警概率可以表示为

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\operatorname{Th} - S}{\sqrt{2/N}\sigma} \right) \quad (3.4.8)$$

最后, 检测概率

$$P_D = \int_{\operatorname{Th}}^{\infty} p(\bar{y}|H_1)d\bar{y} = \int_{\operatorname{Th}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi/N}\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{y}-S)^2}{2\sigma^2/N}\right) d\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\operatorname{Th}-S}{\sqrt{2/N}\sigma}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

即有

$$P_D = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\operatorname{Th} - S}{\sqrt{2/N}\sigma} \right) = 1 - \beta \quad (3.4.9)$$

这与上一节得到的式 (3.3.10) 一致。

在雷达、声纳等信号检测中, 通常会根据不同的应用, 提出对虚警概率 α 与/或漏警概率 β 的要求。为了满足这些要求, 需要确定阈值 Th 与/或样本长度 N 。

例 3.4.1 雷达的观测数据为

$$y_n = \begin{cases} H_0: w_n, & \text{目标不存在时} \\ H_1: 1 + w_n, & \text{目标存在时} \end{cases}$$

其中, 加性噪声 w_n 为零均值、单位方差的高斯白噪声。若令虚警概率 $\alpha = 0.01$, 试求当 $N = 20$ 和 $N = 25$ 时的阈值 Th 和雷达的漏警概率 β 和检测概率 P_D 。

解 由式 (3.4.7) 及 $\sigma = 1$ 知

$$\operatorname{Th} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) = \sqrt{2/N} \operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha)$$

令 $\operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) = x$, 则

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x) = 1 - 2\alpha = 1 - 2 \times 0.01 = 0.98$$

查误差函数表 (附录 3A) 得 $x = 1.64$ 。因此, 阈值

$$\operatorname{Th} = \sqrt{2/N} \operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) = \sqrt{2/N} \times 1.64 = \begin{cases} 0.5186, & N = 20 \\ 0.4639, & N = 25 \end{cases}$$

将 $S = 1$ 和上述阈值代入式 (3.4.9) 得检测概率

$$\begin{aligned} P_D &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\operatorname{Th} - S}{\sqrt{2/N}} \right) \\ &= \begin{cases} 0.5 \operatorname{erfc}(-1.5223) = 0.5[1 + \operatorname{erf}(1.5223)] \approx 0.984, & N = 20 \\ 0.5 \operatorname{erfc}(-1.8954) = 0.5[1 + \operatorname{erf}(1.8954)] \approx 0.996, & N = 25 \end{cases} \end{aligned}$$

其中查误差函数表有 $\operatorname{erf}(1.5223) \approx 0.9684$ 和 $\operatorname{erf}(1.8954) \approx 0.9926$ 。

漏警概率

$$\beta = 1 - P_D = \begin{cases} 0.016, & N = 20 \\ 0.004, & N = 25 \end{cases}$$

因此, 当样本个数 $N = 20$ 时, 阈值 $\operatorname{Th} = 0.5186$ 、漏警概率为 $\beta = 0.016$ 、检测概率为 0.984; 而当 $N = 25$ 时, 则阈值 $\operatorname{Th} = 0.4639$ 、漏警概率 $\beta = 0.004$ 、检测概率为 0.996。

例 3.4.2 雷达观测数据模型与例 3.4.1 相同。现在希望使虚警概率 $\alpha = P_F = 0.01$, 漏警概率 $\beta = P_M = 0.05$, 求为了满足这些错误概率所需设置的阈值 Th 和样本数目 N 。

解 由例 3.4.1 知, 虚警概率

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\operatorname{Th}}{\sqrt{2/N}} \right)$$

和漏警概率

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\operatorname{Th} - 1}{\sqrt{2/N}} \right)$$

由以上两式以及题给条件 $\alpha = 0.01$ 和 $\beta = 0.05$, 分别得

$$\operatorname{Th} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(0.02)$$

$$\operatorname{Th} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}[2(1 - \beta)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(1.9)$$

两式相除, 结果为

$$\frac{\operatorname{Th}}{\operatorname{Th} - 1} = \frac{\operatorname{erfc}^{-1}(0.02)}{\operatorname{erfc}^{-1}(1.9)} \approx \frac{1.64}{-1.16} = -1.4138$$

解之, 得 $\operatorname{Th} = 0.5857$ 。将此阈值代入

$$\operatorname{Th} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(0.02) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \times 1.64 = 0.5857$$

可求出 $N = 15.6808$, 取 $N = 16$ 。因此, 在雷达信号检测中, 只要令阈值 $\text{Th} = 0.5857$, 以 $N = 16$ 个观测数据为观测数组, 并且用其样本平均 \bar{y} 进行决策:

$$\begin{cases} H_1: \text{判决为目标存在, 若 } \bar{y} > 0.5857 \\ H_0: \text{判决目标不存在, 若 } \bar{y} < 0.5857 \end{cases}$$

即可满足虚警概率 $\alpha = 0.01$ 和漏警概率 $\beta = 0.05$ 的要求。

鉴于检测概率 P_D 是虚警概率 P_F 的单调函数, 所以 $P_D \sim P_F$ 的关系曲线称为接收机工作特性 (receiver operating characteristics, ROC)。

3.4.2 Neyman-Pearson 引理与 Neyman-Pearson 准则

由于在军事上漏警造成的损失往往比虚警的后果严重得多, 因此在雷达、声纳等信号检测应用中, 选择决策函数或决策统计量的准则应该是: 在允许虚警概率不超过某个水平 α_0 的情况下, 使漏警概率 β 最低, 或等价使信号检测概率最大化, 以实现功效函数 $\gamma = 1 - \beta$ 的最大化。换言之, 如果我们选择条件分布密度函数 $p(\mathbf{y}|H_1)$ 作决策函数, 则最大功效准则实质上就是约束优化问题

$$\gamma = \max \int_{\text{Th}}^{\infty} p(\mathbf{y}|H_1) d\mathbf{y} = \max \int_{\mathbf{y} \in R_c} p(\mathbf{y}|H_1) d\mathbf{y} \quad (3.4.10)$$

约束条件为

$$\int_{\mathbf{y} \in R_c} p(\mathbf{y}|H_0) d\mathbf{y} = \alpha_0 \quad (3.4.11)$$

需要注意, 严格的约束条件应该是不等式约束 $\int_{\mathbf{y} \in R_c} p(\mathbf{y}|H_0) d\mathbf{y} \leq \alpha_0$, 但是不等式约束优化问题的求解比等式约束优化问题的求解难得多。因此, 上述约束优化问题将给出最大虚警概率 α_0 情况下的解。

最大功效准则的关键问题是: 确定如图 3.4.1 所示的临界区 R_c 。

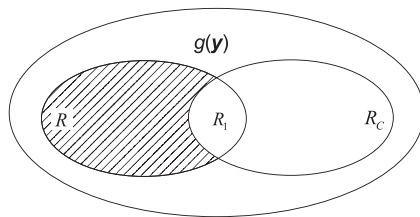


图 3.4.1 临界区

临界区问题的求解需要应用到 Neyman-Pearson 引理。

Neyman-Pearson 引理 令

$$R_c = \{\mathbf{y} : p(\mathbf{y}|H_1) > \eta p(\mathbf{y}|H_0)\} \quad (3.4.12)$$

式中 η 是使得式 (3.4.11) 得以满足的常数。若 R 是在观测样本空间 Ω 内的任意一个区域, 并且

$$\int_{\mathbf{y} \in R} p(\mathbf{y}|H_0) d\mathbf{y} = \alpha_0 \quad (3.4.13)$$

则

$$\int_{\mathbf{y} \in R_c} p(\mathbf{y}|H_1) d\mathbf{y} \geq \int_{\mathbf{y} \in R} p(\mathbf{y}|H_1) d\mathbf{y} \quad (3.4.14)$$

Neyman-Pearson 引理表明, 位于观测样本空间 Ω 的任何区域 R 内的功效函数都不可能高于位于临界区 R_c 内的功效函数。换言之, 从功效函数最大的意义上讲, R_c 是最优临界区。这表明, 式 (3.4.12) 就是约束优化问题 (3.4.10) 的解。

基于 Neyman-Pearson 引理的决策准则称为 Neyman-Pearson 准则。

利用观测数组 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 的似然比函数

$$L(\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} \quad (3.4.15)$$

作决策函数, 则 Neyman-Pearson 准则又可写作

$$L(\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \eta \quad (3.4.16)$$

其中 η 为阈值。此时, 临界区的解表达式 (3.4.12) 可以等价写作

$$R_c = \{\mathbf{y} : L(\mathbf{y}) > \eta\} \quad (3.4.17)$$

似然比函数经常采用对数形式

$$L_1(\mathbf{y}) = \ln[L(\mathbf{y})] = \ln \left[\frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} \right] = \ln[p(\mathbf{y}|H_1)] - \ln[p(\mathbf{y}|H_0)] \quad (3.4.18)$$

此时, Neyman-Pearson 准则等价于: 决策规则是

$$L_1(\mathbf{y}) = \ln \left[\frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} \right] \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \ln \eta \quad (3.4.19)$$

即是说, 决策函数大于阈值 $\ln \eta$ 时, 判决 H_1 假设检验为真; 否则接受 H_0 假设检验成立。

注意, 阈值 η 或 $\ln \eta$ 由预先设定的允许虚警概率 α_0 决定。预先规定的虚警概率 α_0 也称作检验水平, 它决定雷达、声纳等信号检测的质量。

下面举例说明如何应用 Neyman-Pearson 准则。

例 3.4.3 令 y_1, \dots, y_N 是具有未知均值 μ 和已知方差 σ^2 的正态分布随机变量的 N 个观测样本。试确定检验假设

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

在检验水平 α_0 下的最优临界区, 其中 $\mu_1 > \mu_0$ 。

解 由题意知, 观测数据 y_n 服从均值为 μ 、方差为 σ^2 的正态分布。就是说, 随机变量 y_n 的条件分布密度函数为

$$p(y_n|H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_n - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right), \quad i = 0, 1$$

由于随机变量 y_n 是独立被观测的, 所以 N 个观测数据 y_1, \dots, y_N 的联合条件分布密度函数是各个边缘条件分布密度函数的乘积

$$p(y_1, \dots, y_N|H_i) = \prod_{n=1}^N p(y_n|H_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N} \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right)$$

于是, 由 Newman-Pearson 准则知, 决策函数

$$L(y_1, \dots, y_N) = \frac{p(y_1, \dots, y_N|H_1)}{p(y_1, \dots, y_N|H_0)} = \frac{\exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \mu_1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)} > k$$

取对数后, 上式化简为

$$-\sum_{n=1}^N (y_n - \mu_1)^2 + \sum_{n=1}^N (y_n - \mu_0)^2 > 2\sigma^2 \ln(k) \quad (3.4.20)$$

计算上式左边的求和项之差, 得

$$-\sum_{n=1}^N (y_n - \mu_1)^2 + \sum_{n=1}^N (y_n - \mu_0)^2 = -N(\mu_1^2 - \mu_0^2) + 2(\mu_1 - \mu_0) \sum_{n=1}^N y_n$$

将这一结果代入式 (3.4.20), 有

$$-N(\mu_1^2 - \mu_0^2) + 2(\mu_1 - \mu_0) \sum_{n=1}^N y_n > 2\sigma^2 \ln(k)$$

或

$$2(\mu_1 - \mu_0)\bar{y} > 2\sigma^2 \ln(k) + N(\mu_1^2 - \mu_0^2)$$

其中

$$\bar{y} = \sum_{n=1}^N y_n$$

表示 N 个随机样本的均值。注意到由于 $\mu_1 > \mu_0$, 所以 $2(\mu_1 - \mu_0)$ 为正。于是有

$$\bar{y} > \frac{N(\mu_1^2 - \mu_0^2) + 2\sigma^2 \ln(k)}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

这表明, 检验统计量应该取观测样本的均值, 即 $g(y_1, \dots, y_N) = \bar{y}$, 其阈值

$$\text{Th} = \frac{N(\mu_1^2 - \mu_0^2) + 2\sigma^2 \ln(k)}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

就是说, 检验统计量 $g(y_1, \dots, y_N) = \bar{y}$ 的最优临界区为

$$R_c = \left(\frac{N(\mu_1^2 - \mu_0^2) + 2\sigma^2 \ln(k)}{2(\mu_1 - \mu_0)}, \infty \right)$$

其中 $\mu_1 > \mu_0$ 。

本例中, 决策函数为似然比函数 $L(y_1, \dots, y_N) = p(y_1, \dots, y_N | H_1) / p(y_1, \dots, y_N | H_0)$, 而检验统计量 $g(y_1, \dots, y_N)$ 则是观测数据 y_1, \dots, y_N 的样本均值 \bar{y} 。

3.5 一致最大功效准则

3.4 节以雷达信号检测为例, 讨论了漏警与虚警有着不同后果的二元假设检验问题。本节以二进制脉冲幅度调制的通信系统为例, 研究两种错误判决造成的后果几近或者完全相同时另一类型的二元假设检验问题。

3.5.1 通信信号检测问题

考虑二进制脉冲幅度调制 (pulse amplitude modulation, PAM) 通信系统, 其发射信号波形为 $S_1(t) = p(t)$ 和 $S_0(t) = -p(t)$, 其中 $p(t)$ 是一任意脉冲, 它在码元间隔 $0 \leq t \leq T$ 内不等于零, 而在其他时间均为零。由于 $S_1(t) = -S_0(t)$, 所以这两个信号称为反极性信号 (antipodal signal)。

二进制脉冲幅度调制通信的二元假设检验问题可以描述为

$$\begin{cases} H_0 : r_0(t) = S_0(t) + w(t) \\ H_1 : r_1(t) = S_1(t) + w(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.5.1)$$

与雷达信号检测不同, 通信发射信号 $S_1(t) = p(t)$ 被决策准则错误判断为 $S_0(t) = -p(t)$, 或者 $S_0(t) = -p(t)$ 被错误判断为 $S_1(t) = p(t)$, 这两种错误决策带来的影响是相同的, 并无虚警和漏警那样的严重后果之分。在通信信号检测问题中, 所有的检测错误都统称为误码, 无漏码和虚码之分。因此, 在无线通信系统中, 只有检测概率 P_D 和误码概率 P_E 两种指标。误码概率简称误码率。由于 $P_D + P_E = 1$, 所以只需要分析误码率。在实际应用中, 误码率常采用比特错误率 (bit error rate, BER)

$$\text{BER} = \frac{\text{误码的个数}}{\text{发射的数码总数}} \times 100\% \quad (3.5.2)$$

式 (3.5.1) 所示检测问题不容易求解。为此, 我们来考虑使用已知脉冲信号 $p(t)$ 对观测信号作相关解调运算的结果

$$r_i = \int_0^T r_i(t)p(t)dt = \int_0^T S_i(t)p(t)dt, \quad i = 0, 1 \quad (3.5.3)$$

这样一来, 二进制脉冲幅度调制通信信号的检测问题式 (3.5.1) 便变为

$$\begin{cases} H_0 : r_0 = S_0 + n = -E_p + n \\ H_1 : r_1 = S_1 + n = E_p + n \end{cases} \quad (3.5.4)$$

式中

$$S_0 = \int_0^T S_0(t)p(t)dt = -\int_0^T p^2(t)dt = -E_p \quad (3.5.5)$$

$$S_1 = \int_0^T S_1(t)p(t)dt = \int_0^T p^2(t)dt = E_p \quad (3.5.6)$$

$$n = \int_0^T w(t)p(t)dt \quad (3.5.7)$$

而 E_p 代表脉冲信号 $p(t)$ 的能量

$$E_p = \int_0^\infty p^2(t)dt = \int_0^T p^2(t)dt \quad (3.5.8)$$

由于脉冲信号 $p(t)$ 是确定性信号, 它与包括高斯白噪声在内的任何随机信号都是统计不相关的, 即 $E\{w(t)p(t)\} = 0$, 故有

$$E\{n\} = \int_0^T E\{w(t)p(t)\}dt = 0 \quad (3.5.9)$$

注意, n 是一个高斯随机变量, 其均值为零。

综合以上讨论, 可以得出二进制脉冲幅度调制通信信号检测的决策规则: 令阈值为零, 若相关解调器的输出信号 r 大于零, 则判断发射信号为 $S_1(t) = p(t)$; 否则, 判断发射信号为 $S_0(t) = -p(t)$ 。

需要注意的是, 虽然高斯随机变量 n 的均值等于零, 但是由于它的随机变化, 用零作为阈值, 仍然会造成错误的决策判断。

3.5.2 一致最大功效检验

将式 (3.5.4) 推广为更一般的二元假设检验模型

$$\begin{cases} H_0 : y_n = s_0 + w_n = -\sqrt{E_p} + w_n \\ H_1 : y_n = s_1 + w_n = \sqrt{E_p} + w_n \end{cases} \quad (3.5.10)$$

其中 w_n 是一个零均值、方差为 σ^2 的高斯白噪声。

假定信号 $s_1 = \sqrt{E_p}$ 被发射, 由于决策的阈值为零, 所以 H_1 假设检验下的错误概率 $P(e|H_1)$ 直接是输出 $y < 0$ 的概率, 即

$$\begin{aligned} P(e|H_1) &= \int_{-\infty}^0 p(y|H_1)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(y - \sqrt{E_p})^2}{N_0}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2E_p/N_0}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_p/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

式中 $N_0 = \frac{1}{2}\sigma^2$ 代表加性高斯白噪声 $w(n)$ 的能量, 而 $Q(x)$ 为 Q 函数。

类似地, 当信号 $s_0 = -\sqrt{E_p}$ 发射时, H_0 假设检验下的错误概率是 $r > 0$ 的概率, 也有 $P(e|H_0) = Q(\sqrt{2E_p/N_0})$ 。由于二进制信号 $s_1 = \sqrt{E_p}$ 和 $s_0 = -\sqrt{E_p}$ 通常为等概率发射, 即 $p_1 = p_0 = \frac{1}{2}$, 故平均错误概率 (误码率)

$$P_E = p_1 P(e|H_1) + p_0 P(e|H_0) = \frac{1}{2} P(e|H_1) + \frac{1}{2} P(e|H_0) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) \quad (3.5.12)$$

从上式可以观察到两个重要的事实:

(1) 误码率只与比例 $2E_p/N_0$ 有关, 而与信号和噪声的其他特性无关。

(2) 比例 $2E_p/E_0$ 代表接收机的输出信噪比。由于输出包括两个比特符号, 所以 E_p/N_0 称为每个比特的信噪比。

临界区 R_c 或者阈值 Th 一般与备择假设 H_1 的参数有关。

定义 3.5.1 对于式 (3.5.10) 描述的二元假设检验问题, 若临界区 R_c 或者阈值 Th 与备择假设 H_1 的参数 s_1 无关, 则称该假设检验为一致最大功效 (uniformly most power, UMP) 检验。

对上述定义进行解读, “临界区 R_c 或者阈值 Th 与备择假设 H_1 的参数 s_1 无关” 意味着: 该假设检验的功效函数对于所有不同的 s_1 参数都是相同的或一致的。又因为总是寻求假设检验的最大功效, 所以称之为一致最大功效检验。

如果二元假设检验为一致最大功效检验, 则所采用的检验统计量 $g(y_1, \dots, y_N)$ 称为一致最大功效检验统计量。

问题是, 如何针对一个二元假设检验问题, 构造一致最大功效检验统计量? 这里仍然考虑加性高斯白噪声情况下的假设检验问题 (3.5.10), 但 w_n 不再是零均值, 而是均值为 m , 方差仍然为 σ^2 。

由于 w_n 为白噪声, 且 s_1 和 s_0 为确定量, 故 y_1, \dots, y_N 在 H_0 和 H_1 两种假设下是独立的, 并且 $\{y_n\}$ 在 H_i 假设下是一个均值为 \bar{s}_i 、方差为 σ^2 的高斯随机过程, 即有

$$p(y_n|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_n - \bar{s}_1)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.5.13)$$

$$p(y_n|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_n - \bar{s}_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.5.14)$$

式中, $\bar{s}_1 = s_1 + m$ 和 $\bar{s}_0 = s_0 + m$ 。

利用 $\{y_i\}$ 在 H_1 和 H_0 假设下的独立性知, 观测数组 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 在 H_1 假设和 H_0 假设下的条件分布密度函数分别为

$$p(\mathbf{y}|H_1) = \prod_{n=1}^N p(y_n|H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_1)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.5.15)$$

$$p(\mathbf{y}|H_0) = \prod_{n=1}^N p(y_n|H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.5.16)$$

由此得到似然比函数

$$\frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} = \frac{\exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_0)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (3.5.17)$$

考虑使用对数似然比函数作决策函数

$$L_1(\mathbf{y}) = \ln \left[\frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} \right] = -\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_1)^2}{2\sigma^2} + \sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_0)^2}{2\sigma^2} \quad (3.5.18)$$

于是, 与 Neyman-Pearson 准则类似, 若决策函数 $L_1(\mathbf{y}) > k_1$, 即

$$-\sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_1)^2}{2\sigma^2} + \sum_{n=1}^N \frac{(y_n - \bar{s}_0)^2}{2\sigma^2} > k_1$$

则判断发射的是 s_1 信号。否则, 判断 s_0 信号发射。简化上式的表示, 可得以下决策准则: 若

$$(\bar{s}_1 - \bar{s}_0) \sum_{n=1}^N y_n - \frac{N}{2}(\bar{s}_1^2 - \bar{s}_0^2) > \sigma^2 k_1$$

则判断发射的是 s_1 信号; 否则判断 s_0 信号发射。这一决策准则又可等价叙述为: 判断 s_1 信号发射, 若

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n > \frac{1}{N} \left[\sigma^2 k_1 + \frac{N}{2}(\bar{s}_1^2 - \bar{s}_0^2) \right] \frac{1}{\bar{s}_1 - \bar{s}_0} \quad (3.5.19)$$

令检验统计量为

$$g(\mathbf{y}) = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n \quad (3.5.20)$$

阈值为

$$\text{Th} = \frac{1}{N} \left[\sigma^2 k_1 + \frac{N}{2}(\bar{s}_1^2 - \bar{s}_0^2) \right] \frac{1}{\bar{s}_1 - \bar{s}_0} \quad (3.5.21)$$

于是, 决策准则公式 (3.5.19) 可以叙述为: 若决策统计量

$$g(\mathbf{y}) = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n > \text{Th (阈值)} \quad (3.5.22)$$

则判断 s_1 信号发射; 否则判断 s_0 信号发射。

下面分析决策统计量 $g(\mathbf{y}) = \bar{y}$ 的性质。首先, 由于决策统计量为观测数据的样本均值, 而样本均值服从和观测数据一样的正态分布, 所以当决策统计量取一随机数值 g 时, $g(\mathbf{y})$ 在 H_1 和 H_0 假设下的条件分布密度函数分别为正态分布

$$p(g|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}} \exp\left(-\frac{(g - \bar{s}_1)^2}{2\sigma^2/N}\right) \quad (3.5.23)$$

$$p(g|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}} \exp\left(-\frac{(g - \bar{s}_0)^2}{2\sigma^2/N}\right) \quad (3.5.24)$$

仿照 3.4 节的虚警概率, 定义

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_0)dg = \int_{\text{Th}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}} \exp\left[-\frac{(g - \bar{s}_0)^2}{2\sigma^2/N}\right] dg \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\text{Th} - \bar{s}_0}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\text{Th} - \bar{s}_0}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}}\right)\end{aligned}\quad (3.5.25)$$

就是说, 虚警概率 α 是条件分布密度函数 $p(g|H_0)$ 在 $\frac{\text{Th} - \bar{s}_0}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}}$ 的补余误差函数值的一半, 它与备择假设 H_1 的参数 s_1 无关。

由虚警概率的表达式 (3.5.25), 可求出阈值为

$$\text{Th} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{N}} \text{erfc}^{-1}(2\alpha) + \bar{s}_0 \quad (3.5.26)$$

式中 $\text{erfc}^{-1}(z)$ 是补余误差函数 $\text{erfc}(z)$ 的反函数。由于虚警概率 α 与 s_1 参数无关, 所以阈值 Th 的选择与备择假设 H_1 的参数 s_1 无关。因此, 式 (3.5.22) 给出的最优决策统计量 $g(\mathbf{y}) = \bar{y}$ 是一致最大功效的。相应的决策准则也与备择假设 H_1 的参数 s_1 无关, 为一一致最大功效准则。

结论: 如果二元假设检验模型 (3.5.10) 中的噪声 w_n 是均值为 m 、方差为 σ^2 的高斯白噪声, 并且使用似然比函数或者对数似然比函数作决策函数, 则 N 个观测数据 y_1, \dots, y_N 的样本均值就是一致最大功效的检验统计量。

3.5.3 一致最大功效准则的物理意义

与虚警概率公式 (3.5.25) 的推导相类似, 检测概率为

$$P_D = \int_{\text{Th}}^{\infty} p(g|H_1)dg = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\text{Th} - \bar{s}_1}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\text{Th} - \bar{s}_1}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}}\right) \quad (3.5.27)$$

由此知漏警概率

$$P_M = 1 - P_D = 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\text{Th} - \bar{s}_1}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}}\right) \quad (3.5.28)$$

考虑 $s_0 = 0$ 一类信号有无检测的特殊情况。我们来分析一致最大功效准则在这类问题中的物理含义。不失一般性, 假定加性高斯白噪声均值为零 ($m = 0$)。此时, 阈值公式 (3.5.26) 中 $\bar{s}_0 = 0$, 故阈值为

$$\text{Th} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{N}} \text{erfc}^{-1}(2\alpha) \quad (3.5.29)$$

将上式和 $\bar{s}_1 = s_1 + m = s_1$ 代入式 (3.5.27), 则有

$$P_D = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\text{erfc}^{-1}(2\alpha) - \frac{s_1}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{N}}\right) \quad (3.5.30)$$

令

$$B = \frac{s_1}{\sigma/\sqrt{N}} \quad (3.5.31)$$

则 B^2 可视为信噪比。于是, 式 (3.5.30) 可简写为

$$P_D = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}[\operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) - B] \quad (3.5.32)$$

这表明, 检测概率 P_D 是虚警概率 α 和信噪比 B^2 的函数。当信噪比 $B^2 \rightarrow 0$ 或等价 $B \rightarrow 0$ 时, 检测概率

$$P_D = \frac{1}{2}(2\alpha) = \alpha \quad (\text{若信噪比为零}) \quad (3.5.33)$$

而当信噪比 $B^2 \rightarrow \infty$ 或等价 $B \rightarrow \infty$, 并使用式 (3.2.25) 时, 则检测概率

$$P_D = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-B) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{erfc}(x) = 1 \quad (\text{若信噪比为无穷大}) \quad (3.5.34)$$

从以上分析可以得出一致最大功效准则在信号有无的一类检测问题中的物理含义如下:

- (1) 信噪比为零时, 信号 s_1 的检测概率等于虚警概率。
- (2) 信噪比无穷大时, 信号 s_1 的检测概率为 1, 信号 s_1 可百分之百被正确检测。
- (3) 信噪比越大, 信号 s_1 的检测概率越大。因此, 在信号有无一类检测问题中, 一致最大功效准则相当于在虚警概率 α 限定在一定水平的情况下, 使信噪比最大化, 或者等价于使检测概率最大化。

在信号有无一类检测问题中, 一致最大功效准则与 Neyman-Pearson 准则等价。

3.6 Bayes 准则

如果把检验统计量看作一种参数, 那么决策过程本质上也是参数估计过程。因此, 也可以从参数估计的视角出发, 讨论二元假设检验问题的决策准则。这样的准则叫做 Bayes 准则。与在虚警概率限定在一定水平而使检测概率最大的 Neyman-Pearson 准则, 以及追求阈值与备择假设的参数无关的一致最大功效准则不同, Bayes 准则旨在使决策的风险最小。

3.6.1 Bayes 判决准则

将 H_j 假设判决为 H_i 假设需要付出成本或者代价。这一代价用代价因子 C_{ij} 表示。

代价因子 C_{ij} 具有以下基本性质:

- (1) 代价因子总是非负的, 即 $C_{ij} \geq 0, \forall i, j$ 。
- (2) 对于同一个检验假设 H_j , 错误决策的代价总是大于正确决策的代价, 即有

$$C_{ij} > C_{jj}, \quad j \neq i \quad (3.6.1)$$

例如 $C_{10} > C_{00}$ 和 $C_{01} > C_{11}$ 。

条件概率 $P(H_i|H_j)$ 表示在 H_j 假设为真的条件下判决结果为 H_i 假设的发生概率。与之对应的代价由 $C_{ij}P(H_i|H_j)$ 表示。若 H_j 假设发生的先验概率 $P(H_j)$ 为已知, 则 H_j 假设

条件下判决 H_i 假设成立的代价为 $C_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j)$ 。因此, 在二元假设检验中, H_j 假设下正确判决的代价为 $C_{jj}P(H_j)P(H_j|H_j)$, 错误判决的代价为 $C_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j), i \neq j$ 。正确判决的代价与错误判决的代价之和称为 H_j 假设下的总代价, 即有

$$C(H_j) = C_{0j}P(H_j)P(H_0|H_1) + C_{1j}P(H_j)P(H_1|H_j), \quad j = 0, 1 \quad (3.6.2)$$

式右第一项表示 H_j 假设下错误判决的代价, 第二项为 H_j 假设下正确判决的成本。

二元假设检验问题的统计判决的总平均代价由 H_0 假设的总代价与 H_1 假设的总代价之和组成:

$$C = C(H_0) + C(H_1) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 C_{ij}P(H_j)P(H_i|H_j) \quad (3.6.3)$$

总平均代价简称平均代价, 也称平均风险。

若 N 个观测数据 y_1, \dots, y_N 构成假设检验的证据量 $Y = g(y_1, \dots, y_N)$ 。例如, 取样本均值 $Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ 作为证据量。若令 λ 是利用证据量进行统计判决时的门限值或阈值, 则将条件概率 $P(H_i|H_j)$ 的定义式 (3.1.3)~式 (3.1.6) 代入式 (3.6.3), 可得

$$C = C_{10}p_0 + C_{11}p_1 + \int_{-\infty}^{\lambda} [(C_{01} - C_{11})p_1p(Y|H_1) - (C_{10} - C_{00})p_0p(Y|H_0)]dY \quad (3.6.4)$$

式中 $R_0 = (-\infty, \lambda)$ 代表与 $Y < \lambda$ 对应的 H_0 假设的判决区域。

Bayes 准则: 在先验概率 $p_j = P(H_j)$ 已知, 且代价因子 C_{ij} 给定的情况下, 使平均代价 C 最小。

由于先验概率和代价因子的非负性, 为使平均代价最小, 式 (3.6.4) 中的积分函数应该为负, 即有

$$R_0: \quad (C_{01} - C_{11})p_1p(Y|H_1) < (C_{10} - C_{00})p_0p(Y|H_0) \quad (3.6.5)$$

此时, 证据量 Y 将位于判决区域 $R_0 = (-\infty, \lambda)$, 即应该做出 H_0 假设成立的判决。其中, 证据量 $Y = p(y_1, \dots, y_N)$ 是由 N 个观测值求出的某个统计量。

相反, 若

$$R_1: \quad (C_{01} - C_{11})p_1p(Y|H_1) > (C_{10} - C_{00})p_0p(Y|H_0) \quad (3.6.6)$$

则证据量 Y 位于判决区域 $R_1 = (\lambda, \infty)$, 从而判决 H_1 假设成立。

于是, 二元假设检验问题的 Bayes 准则可以写作

$$\begin{aligned} \frac{p(Y|H_1)}{p(Y|H_0)} > \eta & \quad \text{判决 } H_1 \text{ 成立} \\ \frac{p(Y|H_1)}{p(Y|H_0)} \leq \eta & \quad \text{判决 } H_0 \text{ 成立} \end{aligned}$$

或者综合为一个判决表达式

$$\frac{p(Y|H_1)}{p(Y|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \eta \quad (3.6.7)$$

式中

$$\eta = \frac{(C_{10} - C_{00})p_0}{(C_{01} - C_{11})p_1} \quad (3.6.8)$$

为 Bayes 决策准则的阈值。

式 (3.6.7) 两边取对数后, 即得 Bayes 准则的常用形式

$$L(Y) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \ln \eta \quad (3.6.9)$$

式 (3.6.9) 的 Bayes 准则也称似然比准则。其中, 条件分布密度之比的对数

$$L(Y) = \ln \frac{p(Y|H_1)}{p(Y|H_0)} \quad (3.6.10)$$

称为观测数据 y 的似然函数。

在先验概率 $p_j = P(H_j), j = 0, 1$ 已知, 并且代价因子 $C_{ij}, i = 0, 1$ 给定的情况下, 即可针对某个二元假设检验问题, 确定 Bayes 准则的阈值 η 。

3.6.2 二元信号波形的检测

作为 Bayes 准则的应用例子, 考虑二元通信信号

$$\begin{cases} H_0: & y(t) = S_0(t) + n(t), & 0 \leq t \leq T \\ H_1: & y(t) = S_1(t) + n(t), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.6.11)$$

式中, $n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ 为高斯白噪声, 其均值为零, 方差为 σ_n^2 ; T 为比特间隔 (码元间隔); 而 $S_0(t)$ 和 $S_1(t)$ 为调制波形, 分别具有能量

$$\begin{cases} E_0 = \int_0^T |S_0(t)|^2 dt \\ E_1 = \int_0^T |S_1(t)|^2 dt \end{cases} \quad (3.6.12)$$

调制信号 $S_0(t)$ 和 $S_1(t)$ 之间的波形相关系数

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_0 E_1}} \int_0^T S_0(t) S_1(t) dt \quad (3.6.13)$$

为了得到离散信号, 对模拟的二元通信信号作 Karhunen-Loeve (K-L) 变换

$$y(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N y_k f_k(t) \quad (3.6.14)$$

取前 N 项之和作为逼近, 可得

$$y_N(t) = \sum_{k=1}^N y_k f_k(t) \quad (3.6.15)$$

其中, y_k 为 K-L 展开系数

$$y_k = \int_0^T y(t) f_k(t) dt \quad (3.6.16)$$

$f_k(t)$ 为正交基函数, 可由 Gram-Schmidt 标准正交化构造

$$\begin{cases} f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} S_1(t), & 0 \leq t \leq T \\ f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)E_0}} \left[S_0(t) - \rho \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} S_1(t) \right], & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.6.17)$$

而其他正交基函数 $f_k(t), k=3, 4, \dots$ 均与 $f_1(t), f_2(t)$ 正交。

利用 K-L 展开系数 r_k , 可以将原二元假设检验问题的模拟表达式 (3.6.11) 等价写作

$$\begin{cases} H_0: & y_k = S_0 + n_k, \quad k = 1, 2, \dots \\ H_1: & y_k = S_1 + n_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.6.18)$$

由式 (3.6.18) 得

$$E\{y_k|H_0\} = E\{S_{0k} + n_k\} = S_{0k} \quad (3.6.19)$$

$$\text{var}(y_k|H_0) = E\{(y_k - s_0)^2\} = E\{n_k^2\} = \sigma_n^2 \quad (3.6.20)$$

$$E\{y_k|H_1\} = E\{S_{1k} + n_k\} = S_{1k} \quad (3.6.21)$$

$$\text{var}(y_k|H_1) = E\{(y_k - S_1)^2\} = E\{n_k^2\} = \sigma_n^2 \quad (3.6.22)$$

由于 y_k 和高斯白噪声 n_k 一样服从正态分布, 故观测数据 y_k 的条件分布密度函数

$$p(y_k|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y_k - S_{0k})^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (3.6.23)$$

$$p(y_k|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y_k - S_{1k})^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (3.6.24)$$

取观测数据 y_1, \dots, y_N 的某个函数作为证据量 $Y = g(y_1, \dots, y_N)$, 则证据量 Y 的联合条件分布密度函数分别为

$$\begin{aligned} p(Y|H_0) &= \prod_{k=1}^N p(y_k|H_0) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^N y_k^2 - 2\sum_{k=1}^N y_k S_{0k} + \sum_{k=1}^N S_{0k}^2\right)\right] \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

$$\begin{aligned} p(Y|H_1) &= \prod_{k=1}^N p(y_k|H_1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^N y_k^2 - 2\sum_{k=1}^N y_k S_{1k} + \sum_{k=1}^N S_{1k}^2\right)\right] \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

注意到 $\sum_{k=1}^N S_{0k}^2 = E_0$ 与 $\sum_{k=1}^N S_{1k}^2 = E_1$, 并且

$$R_{yS_0} = \sum_{k=1}^N y_k S_{0k} \Leftrightarrow R_{yS_0} = \int_0^T y(t) S_0(t) dt \quad (3.6.27)$$

$$R_{yS_1} = \sum_{k=1}^N y_k S_{1k} \Leftrightarrow R_{yS_1} = \int_0^T y(t) S_1(t) dt \quad (3.6.28)$$

分别表示观测信号与调制信号的互相关函数, 故 Bayes 判决准则的原始形式为

$$\frac{p(Y|H_1)}{p(Y|H_0)} = \exp \left[\frac{1}{\sigma_n^2} \left(\int_0^T y(t)S_1(t)dt - \int_0^T y(t)S_0(t)dt \right) - \frac{1}{2\sigma_n^2}(E_1 - E_0) \right] \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \eta \quad (3.6.29)$$

两边取对数后, 则可以将 Bayes 判决准则写作

$$\int_0^T y(t)S_1(t)dt - \int_0^T y(t)S_0(t)dt \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{1}{2}(E_1 - E_0) \quad (3.6.30)$$

或者简记为

$$Y \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \lambda \quad (3.6.31)$$

式中

$$Y = \sum_{k=1}^N y_k S_{1k} - \sum_{k=1}^N y_k S_{0k} = \int_0^T y(t)S_1(t)dt - \int_0^T y(t)S_0(t)dt \quad (3.6.32)$$

$$\lambda = \sigma_n^2 \ln \eta + \frac{1}{2}(E_1 - E_0) \quad (3.6.33)$$

分别是二元假设检验问题的证据量和阈值。

图 3.6.1 画出了二元通信信号的检测系统。

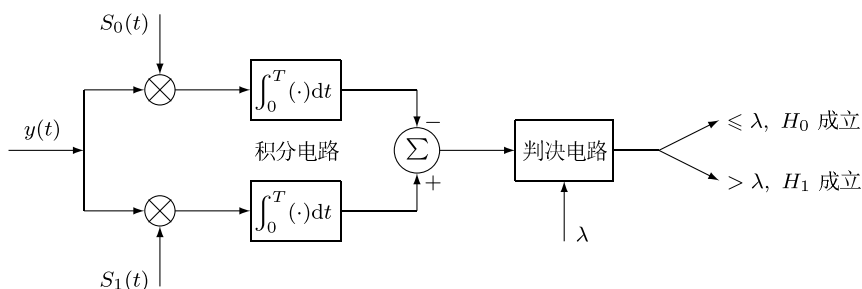


图 3.6.1 二元通信信号的检测系统

由式 (3.6.32) 及式 (3.6.13) 可求得证据量 Y 的期望均值

$$E\{Y|H_0\} = E \left\{ \sum_{k=1}^N (S_{0k} + n_k)S_{1k} - \sum_{k=1}^N (S_{0k} + n_k)S_{0k} \right\} = \rho\sqrt{E_0E_1} - E_0 \quad (3.6.34)$$

$$E\{Y|H_1\} = E \left\{ \sum_{k=1}^N (S_{1k} + n_k)S_{1k} - \sum_{k=1}^N (S_{1k} + n_k)S_{0k} \right\} = E_1 - \rho\sqrt{E_0E_1} \quad (3.6.35)$$

和条件方差

$$\text{var}(Y|H_0) = \text{var} \left(\sum_{k=1}^N (S_{0k} + n_k)S_{1k} - \sum_{k=1}^N (S_{0k} + n_k)S_{0k} \right) = \rho\sqrt{E_0E_1} - E_0 \quad (3.6.36)$$

$$\text{var}\{Y|H_1\} = \text{var} \left(\sum_{k=1}^N (S_{1k} + n_k)S_{1k} - \sum_{k=1}^N (S_{1k} + n_k)S_{0k} \right) = E_1 - \rho\sqrt{E_0E_1} \quad (3.6.37)$$

3.6.3 检测概率分析

1. 样本统计量分析

计算样本均值证据量 Y 的条件均值与条件方差。

(1) 条件均值: H_1 假设情况下证据量 Y 的条件期望值即条件均值

$$E\{Y|H_1\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N y_k|H_1\right\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N (S_1 + n_k)\right\} = S_1 \quad (3.6.38)$$

而 H_0 假设情况下证据量 Y 的条件均值

$$E\{Y|H_0\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N y_k|H_0\right\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N (S_0 + n_k)\right\} = S_0 \quad (3.6.39)$$

(2) 条件方差: H_1 假设情况下证据量 Y 的条件方差

$$\text{var}(Y|H_1) = \text{var}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N y_k|H_1\right) = \text{var}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N (S_1 + n_k)\right) = \frac{1}{N}\sigma_n^2 \quad (3.6.40)$$

而 H_0 假设情况下证据量 Y 的条件方差

$$\text{var}(Y|H_0) = \text{var}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N y_k|H_0\right) = \text{var}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N (S_0 + n_k)\right) = \frac{1}{N}\sigma_n^2 \quad (3.6.41)$$

2. 检测概率分析

由以上条件均值和条件方差, 易知样本均值证据量的条件分布密度分别为

$$p(Y|H_1) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{N(Y - S_1)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (3.6.42)$$

$$p(Y|H_0) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{N(Y - S_0)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (3.6.43)$$

一旦得到样本均值证据量的条件分布密度后, 即可计算在样本均值 Bayes 准则中的检测概率。

(1) 虚警概率

$$P(H_1|H_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(Y|H_0)dY = \int_{\frac{\sigma_n^2}{N(S_1 - S_0)} \ln \eta + \frac{S_1 + S_0}{2}}^{\infty} \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{N(Y - S_0)^2}{2\sigma_n^2}\right) dY$$

作变量代换 $u = \frac{\sqrt{N}(Y - S_0)}{\sqrt{2}\sigma_n}$, 上式即可表示为

$$\begin{aligned} P(H_1|H_0) &= \int_{\frac{\sigma_n}{\sqrt{2N}(S_1 - S_0)} \ln \eta + \frac{\sqrt{N}(S_1 - S_0)}{2\sqrt{2}\sigma_n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) du \\ &= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{2N}(S_1 - S_0)} \ln \eta + \frac{\sqrt{N}(S_1 - S_0)}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) \end{aligned} \quad (3.6.44)$$

式中 $\operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) du$ 为 x 的补余误差函数。

(2) 命中概率

$$P(H_1|H_1) = \int_\lambda^\infty p(Y|H_1) dY = \int_{\frac{\sigma_n^2}{N(S_1-S_0)} \ln \eta + \frac{S_1+S_0}{2}}^\infty \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{N(Y-S_1)^2}{2\sigma_n^2}\right) dY$$

作变量代换 $u = \frac{\sqrt{N}(Y-S_1)}{\sqrt{2}\sigma_n}$, 即有

$$\begin{aligned} P(H_1|H_1) &= \int_{\frac{\sigma_n}{\sqrt{2N}(S_1-S_0)} \ln \eta + \frac{\sqrt{N}(S_1-S_0)}{2\sqrt{2}\sigma_n}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) du \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{2N}(S_1-S_0)} \ln \eta - \frac{\sqrt{N}(S_1-S_0)}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) \end{aligned} \quad (3.6.45)$$

(3) 拒绝概率 $P(H_0|H_0) = 1 - P(H_1|H_0)$ 和漏警概率 $P(H_0|H_1) = 1 - P(H_1|H_1)$ 分别为

$$P(H_0|H_0) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{2N}(S_1-S_0)} \ln \eta + \frac{\sqrt{N}(S_1-S_0)}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) \quad (3.6.46)$$

$$P(H_0|H_1) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{2N}(S_1-S_0)} \ln \eta - \frac{\sqrt{N}(S_1-S_0)}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) \quad (3.6.47)$$

表 3.6.1 比较了 Neyman-Pearson 准则、一致最大功效准则和 Bayes 准则的信号模型、决策准则、判决函数和阈值等。表中, α_0 为预先设定的虚警概率。

表 3.6.1 三种决策准则的比较

| 准则 | Neyman-Pearson 准则 | 一致最大功效准则 | Bayes 准则 |
|------|--|--|---|
| 信号模型 | $\begin{cases} H_1: y_n = S + w_n \\ H_0: y_n = w_n \end{cases}$ | $\begin{cases} H_1: y_n = S_1 + w_n \\ H_0: y_n = S_0 + w_n \end{cases}$ | $\begin{cases} H_1: y_n = S_1 + w_n \\ H_0: y_n = S_0 + w_n \end{cases}$ |
| 决策准则 | $\begin{cases} \alpha \leq \alpha_0 \\ \max \gamma = 1 - \beta(S) \end{cases}$ | 检验统计量的阈值与 H_1 假设的参数 S_1 无关 | 风险最小 |
| 决策函数 | $L(\mathbf{y}) = \ln \frac{p(\mathbf{y} H_1)}{p(\mathbf{y} H_0)} > \ln \eta$ | $L(\mathbf{y}) = \ln \frac{p(\mathbf{y} H_1)}{p(\mathbf{y} H_0)} > \ln \eta$ | $L(\mathbf{y}) = \ln \frac{p(\mathbf{y} H_1)}{p(\mathbf{y} H_0)} > \ln \eta$ |
| 阈值 | η 与 α_0 有关 | η 与 α_0 有关 | $\eta = \frac{(C_{10} - C_{00})p_0}{(C_{11} - C_{01})p_1}$ |
| 证据量 | $g(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n > \text{Th}$ | $g(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n > \text{Th}$ | $g(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n > \lambda$ |
| 阈值 | $\text{Th} = \frac{\sqrt{2}\sigma_n}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha_0)$ | $\text{Th} = \frac{\sqrt{2}\sigma_n}{\sqrt{N}} \operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha_0) + \bar{S}_0$ | $\lambda = \frac{\sigma_n^2}{N(S_1 - S_0)} \ln \eta + \frac{S_1 + S_0}{2}$ |
| 漏警概率 | $\beta = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\text{Th} - S}{\sqrt{2/N}\sigma_n}\right)$ | $\beta = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\text{Th} - S_1}{\sqrt{2/N}\sigma_n}\right)$ | $\beta = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{2N}(S_1 - S_0)} \times \ln \eta - \frac{\sqrt{N}(S_1 - S_0)}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$ |

从该表中可以得出以下结论:

(1) 三种决策准则都采用似然比函数作决策函数, 但决策函数的阈值的选择有所不同: 在 Neyman-Pearson 准则和一致最大功效准则中, 决策函数的阈值取决于所允许的虚警概率 α_0 , 而 Bayes 准则的决策函数的阈值则直接由 H_0 和 H_1 假设发生的先验概率的比率 p_0/p_1 决定。

(2) 三种决策准则都采用观测样本的均值作检测统计量, 它们的阈值各不相同。

在二元数字通信信号的检测中, 通常假定代价因子 $C_{10} = C_{01}$ 和 $C_{11} = C_{00}$, 故由式 (3.6.8) 知, Bayes 判决准则的原始阈值

$$\eta = \frac{(C_{10} - C_{00})p_0}{(C_{01} - C_{11})p_1} = \frac{p_0}{p_1} \quad (3.6.48)$$

此时, 使用 N 个观测数据的样本均值 Y 作证据量时, Bayes 判决准则的实际阈值

$$\lambda = \frac{\sigma_n^2}{N(S_1 - S_0)} [\ln p_0 - \ln p_1] + \frac{S_1 + S_0}{2} \quad (3.6.49)$$

3.7 Bayes 派生准则

取决于代价因子的选择不同, Bayes 准则可以派生出几种其他判决准则。

3.7.1 最小错误概率准则

在有些应用 (例如二元数字通信) 中, 正确拒绝和命中都是正确的检测, 可认为无代价付出, 即认为代价因子 $C_{00} = C_{11} = 0$ 。另一方面, 错误的决策虽然需要付出代价, 但虚警和漏警的代价相同, 即代价因子 $C_{10} = C_{01}$ 。在代价因子的这些假设下, 平均代价 C 简化为错误概率 P_E , 即有

$$C = p_0 P(H_1|H_0) + p_1 P(H_0|H_1) = p_0 \alpha + p_1 \beta = P_E \quad (3.7.1)$$

于是, 平均代价最小化的 Bayes 准则变成最小错误概率准则 (minimum error probability criterion)

$$\frac{p(Y|H_1)}{p(Y|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \eta = \frac{p_0}{p_1} \quad (3.7.2)$$

换言之, 最小错误概率准则与 Bayes 准则的计算方法和步骤完全相同, 只是两者的阈值 η 不同。

此外, 有时将代价因子归一化, 故上述代价因子的假设又经常表述为 $C_{00} = C_{11} = 0$ 和 $C_{01} = C_{10} = 1$ 。

3.7.2 最大后验概率准则

在某些应用中,不同检验假设 H_j 下的错误决策与正确决策的代价之差相同,即认为 $C_{01} - C_{11} = C_{10} - C_{00}$ 。在这一假设条件下, Bayes 准则退化为

$$\frac{p(Y|H_1)}{p(Y|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \frac{p_0}{p_1} (= \eta) \quad (3.7.3)$$

与最小总错误概率准则相同。注意到上述准则可以等价写作

$$p_1 \cdot p(Y|H_1) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} p_0 \cdot p(Y|H_0) \quad (3.7.4)$$

利用 $p(H_i|Y) = P(H_i)p(Y|H_i) = p_i \cdot p(Y|H_i)$, 上式即可用后验概率 $p(H_i|y)$ 表示为

$$p(H_1|Y) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} p(H_0|Y) \quad (3.7.5)$$

式 (3.7.5) 表明,二元假设检验的决策准则直接是:后验概率最大的那个假设判决为成立。具体说,若 $P(H_1|Y) > P(H_0|Y)$,则判决 H_1 假设成立;反之,则判决 H_0 假设成立。因此,式 (3.7.5) 所示准则习惯称为最大后验概率准则 (maximum a posteriori probability criterion)。

例 3.7.1 观测数据模型为

$$y_n = 1 + w_n \quad (H_1: \text{信号存在})$$

$$y_n = w_n \quad (H_0: \text{信号不存在})$$

式中 $n = 1, \dots, 24$, 且 w_n 为高斯随机过程,其均值为 0, 方差为 1。若先验概率 $p_0 = 1/5, p_1 = 4/5$, 试求错误概率 P_E 和检测概率 P_D 。

解 首先, 阈值

$$\eta = \ln \frac{p_0}{p_1} = \ln(0.25) = -1.3863$$

由于 y_n 在 H_0 假设检验下的概率分布与加性高斯白噪声 w_n 相同, 而 y_n 在 H_1 假设检验下是一个均值为 1、方差为 1 的高斯白噪声, 所以观测数组 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 的条件概率密度函数分别为

$$p(\mathbf{y}|H_0) = \prod_{n=1}^{24} p(y_n|H_0) = \frac{1}{(2\pi)^{24/2}} \exp\left(-\sum_{n=1}^{24} \frac{y_n^2}{2}\right)$$

和

$$p(\mathbf{y}|H_1) = \prod_{n=1}^{24} p(y_n|H_1) = \frac{1}{(2\pi)^{24/2}} \exp\left(-\sum_{n=1}^{24} \frac{(y_n - 1)^2}{2}\right)$$

计算对数似然比函数, 可得

$$L(\mathbf{y}) = \ln \left(\frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} \right) = -\sum_{n=1}^{24} \frac{(y_n - 1)^2}{2} + \sum_{n=1}^{24} \frac{y_n^2}{2} = \sum_{n=1}^{24} y_n - \frac{24}{2} = 24\bar{y} - 12$$

将这一结果直接代入 Bayes 准则

$$L(\mathbf{y}) = \ln \left(\frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} \right) > \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) = -1.3863$$

从而有 $24\bar{y} - 12 > -1.3863$, 由此得

$$\bar{y} > 0.4422$$

换言之, 使用观测数据均值作为决策统计量时, 阈值 $\lambda = 0.4422$ 。因此, 若观测数据的样本均值大于 0.4422, 则判断信号存在, 否则判决信号不存在。

另一方面, 样本平均

$$\bar{y} = \frac{1}{24} \sum_{n=1}^{24} y_n$$

也是一个高斯分布的随机变量, 其条件均值

$$E\{\bar{y}|H_0\} = 0, \quad E\{\bar{y}|H_1\} = 1$$

方差

$$\text{var}(\bar{y}|H_0) = \text{var}(\bar{y}|H_1) = \frac{1}{\sigma_w^2} = \frac{1}{25}$$

因此, 样本平均 \bar{y} 的条件分布密度函数

$$p(\bar{y}|H_0) = \frac{1}{(2\pi/24)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2/24}\right)$$

$$p(\bar{y}|H_1) = \frac{1}{(2\pi/24)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\bar{y}-1)^2}{2/24}\right)$$

于是, H_0 和 H_1 假设检验下的检测概率分别为

$$P_{D_0} = \int_{-\infty}^{\eta} p(\bar{y}|H_0) d\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{y}|H_0) d\bar{y} - \int_{\eta}^{\infty} p(\bar{y}|H_0) d\bar{y}$$

$$= 1 - \int_{\eta}^{\infty} p(\bar{y}|H_0) d\bar{y} = 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{0.4422}{\sqrt{2/24}}\right) = 1 - 0.5 \text{erfc}(1.53)$$

$$= 0.9847$$

$$P_{D_1} = \int_{\eta}^{\infty} p(\bar{y}|H_1) d\bar{y} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{0.4422-1}{\sqrt{2/24}}\right) = 0.5 \text{erfc}(-1.93)$$

$$= 0.9968$$

故虚警概率和漏警概率分别为

$$\alpha = 1 - P_{D_0} = 1 - 0.9847 = 0.0153$$

$$\beta = 1 - P_{D_1} = 1 - 0.9968 = 0.0032$$

错误概率

$$P_E = p_0\alpha + p_1\beta = \frac{1}{5} \times 0.0153 + \frac{4}{5} \times 0.0032 = 0.0056$$

检测概率

$$P_D = p_0 P_{D_0} + p_1 P_{D_1} = \frac{1}{5} \times 0.9847 + \frac{4}{5} \times 0.9968 = 0.9944$$

3.7.3 极小极大准则

Bayes 准则以及其派生的最小总错误概率准则和最大后验概率准则均假定：先验概率 p_1 或者 p_0 为已知，并且固定。由于 $p_1 = 1 - p_0$ ，并且 H_1 才是我们感兴趣的备择假设，所以必须将未知的先验概率 p_1 视为一个变量，而非一个固定值。问题是：当先验概率 p_1 未知或者波动很大时，如何选择它的猜测值，以便将 Bayes 准则的误差控制在一定范围，不至于大幅度的误差波动。

为了解决这一问题，不妨记 $\alpha = P_F = P(H_1|H_0)$ 和 $\beta = P_M = P(H_0|H_1)$ 。于是，有 $P(H_0|H_0) = 1 - \alpha$ 和 $P(H_1|H_1) = 1 - \beta$ 。若令 $\alpha(p_1)$ 和 $\beta(p_1)$ 分别表示与未知的 p_1 对应的虚警概率和漏警概率，则可将平均代价或平均风险改写为

$$C(p_1) = C_{00} + (C_{10} - C_{00})\alpha(p_1) + p_1[C_{11} - C_{00} + (C_{01} - C_{11})\beta(p_1) - (C_{10} - C_{00})\alpha(p_1)] \quad (3.7.6)$$

可以证明，当似然比 $p(Y|H_1)/p(Y|H_0)$ 服从严格单调的概率分布时，平均代价 $C(p_1)$ 是变量 p_1 的严格凸函数，如图 3.7.1 所示。

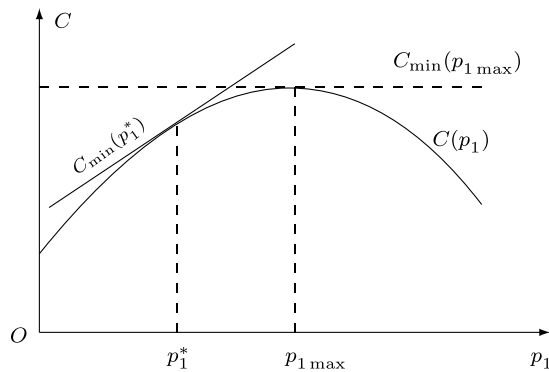


图 3.7.1 平均代价函数

令 $C_{\min}(p_1)$ 代表 Bayes 准则所要求的最小平均代价函数，即

$$C_{\min}(p_1) = \min C(p_1) \Leftrightarrow \frac{\partial C(p_1)}{\partial p_1} = 0 \quad (3.7.7)$$

式中

$$\frac{\partial C(p_1)}{\partial p_1} = C_{11} - C_{00} + (C_{01} - C_{11})\beta(p_1) - (C_{10} - C_{00})\alpha(p_1) = 0$$

整理后, 得

$$C_{10}\alpha(p_1) + C_{00}[1 - \alpha(p_1)] = C_{01}\beta(p_1) + C_{11}[1 - \beta(p_1)] \quad (3.7.8)$$

称为未知先验概率 p_1 的极小极大化方程。

注意, 对于未知先验概率 $p_0 = P(H_0)$, 只需要在式 (3.7.8) 中使用 p_0 代替 p_1 。就是说, 未知先验概率 p_0 的极小极大化方程为

$$C_{10}\alpha(p_0) + C_{00}[1 - \alpha(p_0)] = C_{01}\beta(p_0) + C_{11}[1 - \beta(p_0)] \quad (3.7.9)$$

由 $\alpha = P(H_1|H_0)$ 和 $\beta = P(H_0|H_1)$ 知, 极小极大化方程式 (3.7.8) 的左侧代表 H_0 假设时的代价, 右侧表示 H_1 假设时的代价。极小极大化方程式 (3.7.8) 的解就是使这两个代价平衡。特别地, 若代价函数满足最小错误概率准则时, 由于 $C_{11} = C_{00} = 0$ 以及 $C_{10} = C_{01} = 1$, 故极小极大化方程退化为 $\alpha(p_1) = \beta(p_1)$, 即虚警和漏警概率相同。这一情况的典型例子是数字通信中的二进制 0 判决为 1 和 1 判决为 0 的两种误码率相同。

式 (3.7.7) 表明, 最小平均代价函数 $C_{\min}(p_1)$ 实际上是平均代价函数 $C(p_1)$ 在先验概率 p_1 点的切线方程, 为一条直线。

由于 $C(p_1)$ 是严格凸的, 故 $C_{\min}(p_1)$ 有一个且只有一个最大值 $C_{\max\min} = \max C_{\min}(p_1)$ 。这个最大值实际上便是 Bayes 准则中最不利的平均代价, 相对应的先验概率 p_1 记作 $p_{1\max}$, 称为最不利先验概率。于是, $C_{\min}(p_{1\max})$ 是平均代价函数 $C(p_1)$ 在最不利先验概率 $p_{1\max}$ 一点的切线。这是一条与横轴平行的水平线, 如图 3.7.1 中的虚直线所示。

最不利先验频率 $p_{1\max}$ 实际上是极小化平均代价函数的最大值, 即有

$$p_{1\max} = \arg \max \min C(p_1) = \arg \max C_{\min}(p_1) \quad (3.7.10)$$

按照优化的进行顺序, 优化过程 $\max \min$ 习惯称为极小极大化。需要注意的是, 也有参考文献按照符号出现的次序称 $\max \min$ 为极大极小化。

极小极大方法采用的优化准则是, 用最不利先验概率 $p_{1\max}$ 作为未知先验概率 p_1 的猜测值。这一准则称为极小极大准则 (minimax criterion)。

与最不利先验概率相反, 令 $C_{\min}(p_1^*)$ 是与未知的真实先验概率 p_1^* 对应的最小平均代价函数, 它是平均代价函数 $C(p_1)$ 在真实先验概率 p_1^* 点的切线, 是一条斜直线, 参见图 3.7.1 所示。

比较水平切线 $C_{\min}(p_{1\max})$ 和斜直线 $C_{\min}(p_1^*)$ 易知:

(1) 相对于最不利先验概率 $p_{1\max}$, 未知先验概率 p_1 的任何其他猜测值 p_{1g} 的结果 $C_{\min}(p_{1g})$ 都与 $C_{\min}(p_{1\max})$ 相同, 既不可能更优, 也不可能更差。因此, “用最不利先验概率作为猜测” 虽然不够优, 但却不失为一种保险的选择。

(2) 由于先验概率 p_1 未知, 所以其真实值 p_1^* 可遇不可求。若猜测的先验概率 p_{1g} 与真实先验概率 p_1^* 相差比较小, 则猜测的平均代价 $C_{\min}(p_{1g})$ 与理想的平均代价 $C_{\min}(p_1^*)$ 相差

不大,自然是很好的选择。然而,如果猜测值 p_{1g} 一旦偏离真实先验概率 p_1^* 比较大,那么相应的平均代价 $C_{\min}(p_{1g})$ 就有可能与理想的平均代价 $C_{\min}(p_1^*)$ 相差非常大。因此,企图追求比最不利先验概率更好的猜测很有可能弄巧成拙,引起 Bayes 准则的大幅度的误差波动,从而带来巨大的风险。

一句话小结:极小极大准则就是根据最不利的先验概率确定阈值的一种 Bayes 判决方法。

极小极大准则的特点或优点是:平均代价是一个恒定值,不随先验概率的波动发生任何变化。

表 3.7.1 比较了 Bayes 准则及其派生准则之间的异同点。

表 3.7.1 Bayes 准则及其派生准则的比较

| 方法 | 先验概率 p_1 或 p_0 | 已知条件 | 判决准则 |
|----------|--------------------|--|---|
| Bayes 准则 | 已知,固定 | $C_{01}, C_{11}, C_{10}, C_{00}$ | $\frac{p(\mathbf{y} H_1)}{p(\mathbf{y} H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \frac{p_0(C_{10} - C_{00})}{p_1(C_{01} - C_{11})}$ |
| 最小错误概率准则 | 已知,固定 | $C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01}$ | $\frac{p(\mathbf{y} H_1)}{p(\mathbf{y} H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \frac{p_0}{p_1}$ |
| 最大后验概率准则 | 已知,固定 | $C_{01} - C_{11} = C_{10} - C_{00}$ | $\frac{p(\mathbf{y} H_1)}{p(\mathbf{y} H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \frac{p_0}{p_1}$ |
| 极小极大准则 | 未知或波动大 | $\alpha(p_1), \beta(p_1)$ | $C_{10}\alpha(p_1) + C_{00}[1 - \alpha(p_1)] \\ = C_{01}\beta(p_1) + C_{01}[1 - \beta(p_1)]$ |

3.8 多元假设检验

在一些复杂的假设检验问题中,往往存在多个假设。例如,在盲信号分离中,需要判断信号是高斯分布、亚高斯分布还是超高斯分布:

$$\begin{cases} H_0: & \text{高斯分布} \\ H_1: & \text{亚高斯分布} \\ H_2: & \text{超高斯分布} \end{cases} \quad (3.8.1)$$

又如,肿瘤诊断的多元假设模型为

$$\begin{cases} H_0: & \text{良性} \\ H_1: & \text{恶性: 早期} \\ H_2: & \text{恶性: 中期} \\ H_3: & \text{恶性: 中晚期} \\ H_4: & \text{恶性: 晚期} \end{cases} \quad (3.8.2)$$

3.8.1 多元假设检验问题

多个假设的检验问题称为多元假设检验。

考虑 M 元假设检验问题

$$\begin{cases} H_0: & y_k = S_0 + n_k, & k = 1, \dots, N \\ H_1: & y_k = S_1 + n_k, & k = 1, \dots, N \\ & \vdots \\ H_{M-1}: & y_k = S_{M-1} + n_k, & k = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.8.3)$$

令 $Y = g(y_1, \dots, y_N)$ 是在 H_j 假设为真时, 由 N 个观测值得到的证据量。若 H_j 假设为真时, 由证据量 Y 判决 H_i 假设成立, 则这一判决结果用符号记作 $(H_i|H_j)$ 。于是, M 元假设检验中, H_j 假设下共有 M 种可能的判决结果 $(H_0|H_j), (H_1|H_j), \dots, (H_{M-1}|H_j)$ 。 M 元假设下则共有 $M \times M = M^2$ 种可能的判决结果

$$(H_0|H_j), (H_1|H_j), \dots, (H_{M-1}|H_j), \quad j = 0, 1, \dots, M-1$$

相应的判决概率为

$$P(H_0|H_j), P(H_1|H_j), \dots, P(H_{M-1}|H_j), \quad j = 0, 1, \dots, M-1$$

其中, 只有 M 种正确判决, 其判决概率为 $P(H_j|H_j), j = 0, 1, \dots, M-1$; 其他 $M(M-1)$ 种为错误判决, 错误判决概率为 $P(H_i|H_j), i \neq j (i, j = 0, 1, \dots, M-1)$ 。

令 R_i 表示判决结果为 H_i 假设成立时证据量所位于的区域。通常假定这些区域是非空、无交联的:

$$R_i \neq \emptyset, \quad R_i \cap R_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad (3.8.4)$$

若证据量 Y 落在判决域 $R_i, i = 0, 1, \dots, M-1$, 则判决 H_i 假设成立。

M 个判决域 R_0, R_1, \dots, R_{M-1} 的并集组成 M 元假设检验的判决域

$$R = \bigcup_{i=0}^{M-1} R_i \quad (3.8.5)$$

3.8.2 多元假设检验的 Bayes 准则

假定先验概率 $p_i = P(H_i), i = 0, 1, \dots, M-1$ 为已知, 各种判决的代价因子 $C_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, M-1$ 也已经确定。

Bayes 平均代价

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} C_{ij} p_j P(H_i | H_j) \\
 &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} C_{ij} p_j \int_{R_i} p(Y | H_j) dY \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} \left[C_{ii} p_i \int_{R_i} p(Y | H_i) dY + \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} C_{ij} p_j \int_{R_i} p(Y | H_j) dY \right] \quad (3.8.6)
 \end{aligned}$$

由 $\int_R p(Y | H_i) dY = 1$ 知

$$\int_{R_i} p(Y | H_i) dY + \int_{\bigcup_{j=0, j \neq i}^{M-1} R_j} p(Y | H_i) dY = 1 \quad (3.8.7)$$

将式 (3.8.7) 代入式 (3.8.6), 易得

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} p_i \left[1 - \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} \int_{R_i} p(Y | H_j) dY \right] + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} C_{ij} p_j \int_{R_i} p(Y | H_j) dY \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} p_i - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} C_{ii} p_i \int_{R_i} p(Y | H_i) dY + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} C_{ij} p_j \int_{R_i} p(Y | H_j) dY \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} p_i + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{R_i} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} p_j (C_{ij} - C_{jj}) p(Y | H_j) dY \quad (3.8.8)
 \end{aligned}$$

式中右侧的第 1 项为固定代价, 与判决区域 R_i 无关; 而第 2 项为代价函数, 与判决域 R_i 有关。

Bayes 准则使平均代价 C 最小化。为此, 不妨令

$$I_i(Y) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} p_j (C_{ij} - C_{jj}) p(Y | H_j) \quad (3.8.9)$$

则式 (3.8.8) 可以简写为

$$C = \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} p_i + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{R_i} I_i(Y) dY \quad (3.8.10)$$

由于第 1 项为常数, 故有

$$\min C \iff \min \{I_0(Y), I_1(Y), \dots, I_{M-1}(Y)\} \quad (3.8.11)$$

M 元假设检验的 Bayes 准则: 若

$$I_i(Y) = \min \{I_0(Y), I_1(Y), \dots, I_{M-1}(Y)\} \quad (3.8.12)$$

则判决 $Y \in R_i$, 即 H_i 假设成立。

特别地, 若 $C_{ii} = 0$ 和 $C_{ij} = 1, j \neq i$, 则 M 元假设检验的 Bayes 准则的平均代价变为错误概率, 即

$$C = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} p_j P(H_i | H_j) = P_E \quad (3.8.13)$$

于是, 有

$$\min C \iff \min P_E \quad (3.8.14)$$

换言之, 若 $C_{ii} = 0$ 和 $C_{ij} = 1, j \neq i$, 则 M 元假设检验的 Bayes 准则简化为最小错误概率准则。

另一方面, 当 $C_{ii} = 0$ 和 $C_{ij} = 1, j \neq i$ 时, 式 (3.8.9) 定义的 $I_i(Y)$ 变为

$$I_i(Y) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} p_j p(Y | H_j) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} p(Y) p(H_j | Y) = [1 - p(H_i | Y)] p(Y) \quad (3.8.15)$$

式中利用了 $\sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} p(H_j | Y) = \sum_{j=0}^{M-1} p(H_j | Y) - P(H_i | Y) = 1 - p(H_i | Y)$ 。

于是, 又有

$$\min I_i(Y) \iff \max p(H_i | Y) \quad (3.8.16)$$

就是说, 若 $C_{ii} = 0$ 和 $C_{ij} = 1, j \neq i$, 则 M 元假设检验的 Bayes 准则简化为最大后验概率准则。

3.9 多重假设检验

在多元假设检验问题中, 原始假设 H_0 虽然只有一个, 但备择假设却有 H_1, \dots, H_{M-1} 共 $M-1$ 个。换言之, 多元假设中所有 M 个假设都是独立的, 互不重复。然而, 在有些重要应用中, 虽然存在 $m > 2$ 个假设, 但它们却不是独立的, 而是存在大量重复, 只剩下两类不同的假设。

例如, 在生物统计中, 共有 $m = S + V$ 个差异表达的基因, 其中 S 个是真正有差异表达的基因, 另外 V 个其实是没有差异表达的基因, 为假阳性。此时, m 个基因只服从两类假设

$$\begin{cases} H_0: & \text{无差异表达的基因} \\ H_1: & \text{有差异表达的基因} \end{cases} \quad (3.9.1)$$

生物统计的基本任务就是: 通过判决, 挑选出有差异表达的基因个数, 并且希望错误比例 (简称错误率) $Q = V/m$ 的平均值不超过某个预先设定的值 (例如 0.05 或 0.01)。

广而言之, 由于存在重复的假设, 只有二类假设 H_0 和 H_1 的多个假设检验问题称为多重假设检验 (multiple hypothesis testing) 问题。在生物统计中, 基因表达谱、全基因组关联分析等需要上万次、甚至上百万次的多重检验。因此, M 重假设检验可看作是存在雷同假设, 只有原假设 H_0 和择一假设 H_1 情况下 M 元假设检验的一个特例。

多重假设检验是数据分析中经常遇见的问题,广泛存在于互联网通信、社会经济学、医学和卫生统计学等领域。

3.9.1 多重假设检验的错误率

表 3.9.1 汇总了 m 重假设检验的可能结果。

表 3.9.1 m 重假设检验的正确与错误判决的个数^[30]

| 原始假设 | 不拒绝 H_0 假设 (非显著检验) | 拒绝 H_0 假设 (显著检验) | 个数 |
|----------|-------------------------|--------------------|-------------------------|
| H_0 为真 | U (命中) | V (第 I 类错误) | H_0 假设为真的个数 m_0 |
| H_0 为假 | T (第 II 类错误) | S (正确拒绝) | H_0 假设为假的个数 $m - m_0$ |
| 检验结果个数 | 不拒绝 H_0 假设的个数 $m - R$ | 拒绝 H_0 假设的个数 R | 假设总个数 m |

表中, m 个假设中有 m_0 个 H_0 假设为真,其他 $m - m_0$ 个 H_0 假设为伪,即对应于 $m - m_0$ 个 H_1 假设为真。在 m 重假设检验中,被命中的原始假设为 U 个,被第 I 类错误判决的原始假设为 V 个,其中 $U + V = m_0$ 。另一方面,被第 II 类错误判决的原始假设个数为 T ,被正确拒绝的原始假设为 S 个。若令 $R = V + S$ 代表被拒绝的原始假设的总个数,则未被拒绝的原始假设个数为 $m - R$ 。

若每一个原始假设都以 α 作为检验显著性水平,则证据量小于或者等于 α (即非显著检验) 时,判决结果为不拒绝 H_0 假设;反之,证据量大于检验水平 α (即显著检验) 时,则拒绝 H_0 假设。显然,拒绝 H_0 假设的个数 R 是一个与检验显著性水平 α 相关的可观测随机变量 $R(\alpha)$,而 U, V, S, T 则均为不可观测的随机变量。

对 m 个假设进行多重检验时,需要判决有多少个为 H_1 假设成立。此时,一个重要的问题是:如何将最终检验的错误控制到最小?

在一般的二元假设检验中,只有一个原始假设。此时, Neyman-Pearson 准则是在允许第 I 类错误 (虚警) 概率限制在 α 水平的范围内,使第 II 类错误 (漏警) 概率 β 最小,或等价使功效函数最大。

然而,如果将 Neyman-Pearson 准则直接搬到多重假设检验中,仍然采用犯第 I 类错误的概率 α 作为对多重假设检验的总体错误进行度量,就会导致无效的情况。换言之,在多重假设检验问题中,必须使用新的测度作为检验显著性水平 α 。

在多重假设检验中,需要将 m 次检验当作一个总体看待,将第 I 类错误或第 II 类错误在所有错误中所占的比例作为错误度量的标准。下面是五种常用的错误度量标准^[333]。

1. 平均族错误率 (PFER: Per-family Error Rate)

$$\text{PFER} = E\{V\} \quad (3.9.2)$$

由于犯第 I 类错误的原始假设个数 V 是不可预测的随机变量,故使用其期望值 (平均值) $E\{V\}$ 作为错误测度。

这一错误测度的一个明显缺点是没有考虑原来假设的总个数 m ，而原来假设的总个数与最后的错误控制密切相关。

2. 平均比较错误率 (PCER: Per-comparison Error Rate)

$$\text{PCER} = E\{V\}/m \quad (3.9.3)$$

这一测度考虑平均族错误在假设总个数 m 中的比率，是对平均族错误率的一种改进。

平均比较错误率 PCER 的不足是，将 m 重假设检验中的每一个假设检验都在 α 下进行，而没有考虑多重假设检验问题的“总体性”，使得检验标准过于“宽松”。

3. 族错误率 (FWER: Family-wise Error Rate)

$$\text{FWER} = P(V \geq 1) \quad (3.9.4)$$

与平均比较错误率 PCER 不同，族错误率 FWER 是一个概率值，表示 m 重检验中至少犯一次第 I 类错误的概率。

4. 错误发现率 (FDR: False Discovery Rate)

$$\text{FDR} = \begin{cases} E\left\{\frac{V}{V+S}\right\} = E\left\{\frac{V}{R}\right\}, & R \neq 0 \\ 0, & R = 0 \end{cases} \quad (3.9.5)$$

由 Benjamini 和 Hochberg 于 1995 年提出^[30]。

令 $Q = \frac{V}{V+S}$ 表示犯第 I 类错误的原始假设个数在被拒绝的原始假设的总个数中所占的比率，则自然规定 $Q = 0$ 若 $V + S = 0$ 。比率 Q 的期望值

$$Q_E = E\{Q\} = E\{V/(V+S)\} = E\{V/R\} \quad (3.9.6)$$

错误发现率有以下重要性质^[30]：

(1) 若所有原假设都为真，即 $m_0 = m$ ，则 $\text{FDR} = \text{FWER}$ 。此时， $S = 0$ 和 $V = R$ 。于是，若 $V = 0$ ，则 $Q = 0$ ；并且若 $V > 0$ ，则 $Q = 1$ 。这意味着 $P(V \geq 1) = E\{Q\} = Q_E$ 。因此，控制错误发现率 FDR 意味着在弱控制条件下可以控制族错误率 FWER。

(2) 当 $m_0 < m$ 时，错误发现率 FDR 小于或者等于族错误率 FWER。此时，若 $V > 0$ ，则 $\frac{V}{R} \leq 1$ ，从而导致概率分布 $\chi_{(V \geq 1)} \geq Q$ 。两边取数学期望，得 $P(V \geq 1) \geq Q_E$ ，两种错误率相差很大。结果是，控制 FWER 的任何过程也控制 FDR。然而，如果一个过程只能控制 FDR，这或许“有些严厉 (less stringent)”，但对于实际检验中经常遇到的绝大部分原假设不真的情况，这种只控制 FDR 的过程的功效 (power) 会有所提高。

5. 正错误发现率 (PFDR: positive False Discovery Rate)^[265]

$$\text{PFDR} = E\left\{\frac{V}{R} \mid R > 0\right\} \quad (3.9.7)$$

显然, PFDR 是 $R \neq 0$ 时 FDR 的一个特例。需要指出的是^[30], 当所有 m 个原假设均为真时, 由于 $V = R$, 故 $\text{PFDR} = 1$ 。在这种情形下, 无法选择显著性水平 α , 使得 $\text{PFDR} < \alpha$ 。换言之, 对于所有 m 个原假设均为真的情况, PFDR 失效。然而, 在实际问题中, m 个原假设均为真的情形非常少, PFDR 在原假设有不真情况的假设检验问题中具有广泛的应用。

3.9.2 多重假设检验的错误控制方法

下面介绍 m 重假设检验的四种错误控制方法^[333]。

1. 经典 Bonferroni 多重检验法^[39]

考虑 m 重假设检验 $\{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ 。若令 P_i 表示每个原假设 H_i 对应的先验概率值 (简称 p 值), 则有先验概率集合 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ 。给定一显著性水平 α , 将每个原假设平等对待, 即将显著性水平 α 除以 m , 以 α/m 为基准。对于 p 值集合 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$, 经典 Bonferroni 多重检验法如下:

$$\text{若 } P_i \leq \alpha/m, \text{ 则拒绝 } H_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.9.8)$$

被拒绝的所有假设属于多重假设检验中两类假设的择一假设 H_1 , 而未被拒绝的其他所有假设则属于多重假设检验的原始假设 H_0 。

由 Bonferroni 不等式 $P_i \leq \alpha/m$ 可得概率

$$P \left\{ \bigcup_{i=1}^m (P_i \leq \alpha/m) < \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \right\} \quad (3.9.9)$$

经典 Bonferroni 多重检验法是 Bonferroni 于 1930 年提出的, 其优点是简单和直观。由于不涉及随机变量的密度分布的假设, 所以便于应用。

然而, 在多重假设检验的维数 m 很大时, 或部分检验具有强相关性时, 检验显著性水平 α/m 将很小, 检验基准就会过于严格, 检验过程就会显得过于保守, 使得检验功效比较低。

2. 改进的 Bonferroni 多重检验法

对经典 Bonferroni 多重检验法的改进有以下三种:

(1) Holm 逐步向下 (step-down) 控制法^[133]: 进行假设检验之前, 先将 p 值 P_1, P_2, \dots, P_m 按照从小到大的次序重排为 $P_{(1)}, P_{(2)}, \dots, P_{(m)}$ 。然后, 对所有的 $j = 1, \dots, m$, 判断不等式 $P_{(j)} \leq \alpha/(m - j + 1)$ 是否成立? 若此不等式成立, 则拒绝假设 $H_{(j)}$ 。

(2) Simes 控制法^[253]: 在 Holm 检验法的基础上, 对控制过程进行改进: 对所有 $j = 1, \dots, m$, 判断不等式 $P_{(j)} \leq j\alpha/m$ 是否成立。若对某个 j , 不等式成立, 则拒绝所有重排序的原始假设 $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(j)}$ 。

(3) Hochberg 逐步向上 (step-up) 控制法^[132]: 若

$$k = \max_i \left\{ P_{(i)} \leq \frac{1}{m - i + 1} \alpha \right\} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (3.9.10)$$

则拒绝重排序的原始假设 $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(k)}$ 。

3. FDR 多重检验法^[30]

FDR 多重检验法也称 FDR 错误控制法, 是 Benjamini 与 Hochberg 于1995年提出一种方法。这种方法通过控制错误发现率 FDR, 以决定 P 值的域值。例如, 选择 $R = V + S$ 个差异表达的基因, 其中 S 个是真正有差异表达的, 另外 V 个其实并没有差异表达, 为假阳性的基因。生物统计中希望将错误率 $Q = V/R$ 的期望或平均值不能超过某个预先设定的阈值(例如 0.05 或者 0.01)。在统计学上, 这就等价于控制 FDR 不能超过 5% 或者 1%。

FDR 多重检验法是一种逐步向下控制法。

算法 3.9.1 FDR 多重检验算法

步骤1 排序: 将 p 值 P_1, P_2, \dots, P_m 按照从小到大的顺序排列成 $P_{(1)} < P_{(2)} < \dots < P_{(m)}$, 并将对应的原始假设记作 $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(m)}$ 。

步骤2 令 $i = m, m-1, \dots, 1$, 检验不等式 $P_{(i)} < \frac{i}{m}\alpha$ 。若 k 是满足此不等式的最大的 i 值, 则拒绝所有原始假设 $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(k)}$ 。

步骤3 若无 i 值满足不等式 $P_{(i)} < \frac{i}{m}\alpha$, 则不拒绝原始假设 $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(m)}$ 。

例如, 在生物统计中, 若令 H_0 原假设为无差异表达的基因, 则 FDR 错误控制法的选择结果是 k 个差异表达的基因 $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(k)}$ 。

近十几年, 在世界顶级的两大学术刊物《Science》和《Nature》上, 分别报道了 FDR 多重检验法的应用研究成果^[333]: 2001 年, 天体物理学家与统计学家合作在《Science》上发表了利用 FDR 方法证实宇宙起源大爆炸理论的论文^[197]; 2005 年, 在《Nature》上, 遗传学家与统计学家合作, 将 FDR 方法应用于遗传多态现象间交互作用对基因表达的影响研究^[41]。

4. Storey 多重检验法^{[264],[265]}

以上三种错误控制法遵循一个共同的模式: 在先给定错误控制水平(即固定第 I 类错误水平)的前提下, 基于单个假设检验, 通过错误控制法构造出检验的拒绝域, 从而得出检验结果。

Storey 于 2002 年和 2003 年提出了一种与之不同的假设检验新思路: 凭经验先给出一个拒绝域, 然后估计错误率。如果这个错误率能够被接受, 则认为该检验有效; 如果错误率较大, 则需要重新调整拒绝域, 直至错误率控制在一个满意的水平为止。

多重假设检验理论与方法特别适用于基因芯片等复杂数据的统计分析研究。在互联网、社会经济学、医学和卫生统计学等领域中, 同样也大量存在类似的复杂数据。因此, 多重假设检验也广泛应用于互联网通信、经济计量和诸如流行病学与卫生统计学等医学、卫生数据的统计分析中。

下面介绍多重假设检验的两个重要应用: 多元线性回归与多总体均值相等的检验。

3.9.3 多元线性回归

考虑多元线性回归 (multiple linear regression) 模型

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_m x_{mi}, \quad i = 1, \cdots, N \quad (3.9.11)$$

式中, y_i 和 $x_{1i}, \cdots, x_{mi}, i = 1, \cdots, N$ 分别称为被解释变量和解释变量, 而 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_m$ 称为线性回归参数, m 称为线性回归阶次。

多元线性回归也称多元线性拟合 (multiple linear fitting), 其主要目的有两个:

- (1) 判决多元回归模型是线性还是非线性?
- (2) 若多元线性回归模型成立, 则需要判决多元线性回归模型的阶次 (亦即解释变量的个数) m 。

上述目标本质上等价于检验多元回归模型中的回归参数 $\beta_j, j = 1, \cdots, m$ 是否显著不为零? 因此, m 元线性回归实质上是一个 m 重假设检验

$$\begin{cases} H_0: & \beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0 & (\text{线性回归不成立}) \\ H_1: & \beta_j \text{ 不全为 } 0 & (\text{线性回归成立}) \end{cases} \quad (3.9.12)$$

设被解释变量的真值为 Y_i , 线性回归值或观测值为

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_m x_{mi}, \quad i = 1, \cdots, N \quad (3.9.13)$$

且线性回归的算术平均值

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i \quad (3.9.14)$$

则有以下三种回归或拟合质量的测度。

- (1) 总平方和 (total sum of squares, TSS) 测度: 回归离差 $v_i = \hat{y}_i - \bar{y}$ 的平方和

$$\text{TSS} = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N v_i^2 \quad (3.9.15)$$

- (2) 回归平方和 (regression sum of squares, RSS) 测度: 最终近似值与真值的误差 $\delta_i = \bar{y} - y_i$ 的平方和

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^N (\bar{y} - y_i)^2 \quad (3.9.16)$$

- (3) 误差平方和 (error sum of squares, ESS) 测度: 观测误差 (简称误差) $e_i = y_i - \hat{y}_i$ 的平方和

$$\text{ESS} = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (3.9.17)$$

其中, 误差 $e_i = y_i - \hat{y}_i$ 的平均值为零, 即 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i = 0$, 并且最优回归误差 e_i 与已知变量 $x_{ki}, k = 1, \cdots, m$ 正交即 $e_i \perp x_{ki}, k = 1, \cdots, m$ 。

考虑总平方和

$$\begin{aligned} \text{TSS} &= \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N [(\hat{y}_i - y_i) + (y_i - \bar{y})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

根据回归误差的性质, 上式第 2 个求和项等于零, 故有

$$\text{TSS} = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \text{ESS} + \text{RSS} \quad (3.9.18)$$

就是说, 总平方和 TSS 等于回归平方和 ESS 与误差平方和 RSS 之和。

考虑解释变量 (自变量) x_1, \dots, x_m 与被解释变量 (因变量) y 之间的关系。令 N 次实验得到的观测值为 $(x_{1i}, \dots, x_{mi}; y_i)$, $i = 1, \dots, N$ 。设

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9.19)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \quad (3.9.20)$$

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^N (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j), \quad i, j = 1, \dots, m \quad (3.9.21)$$

$$r_i = \sum_{k=1}^N (x_{ik} - \bar{x}_i)(y_k - \bar{y}), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9.22)$$

则有协方差矩阵

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.9.23)$$

及其逆矩阵

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.9.24)$$

式 (3.9.11) 两边对所有 $i = 1, \dots, N$ 求和, 然后分别除以 N , 得平均值

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \cdots + \beta_m \bar{x}_m \quad (3.9.25)$$

式 (3.9.11) 减式 (3.9.25), 又有

$$y_k - \bar{y} = \beta_1 (x_{1k} - \bar{x}_1) + \cdots + \beta_m (x_{mk} - \bar{x}_m), \quad k = 1, \dots, N \quad (3.9.26)$$

式 (3.9.26) 两边同乘 $(x_{jk} - \bar{x}_j)$, 并对 $k = 1, \dots, N$ 求和, 则得

$$r_j = \beta_1 l_{j1} + \cdots + \beta_m l_{jm}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.9.27)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \quad (3.9.28)$$

由此得回归参数的解

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \quad (3.9.29)$$

将这些回归参数代入式 (3.9.25), 可得 β_0 的解

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \cdots - \hat{\beta}_m \bar{x}_m \quad (3.9.30)$$

“多元线性回归的总体线性关系显著”并不意味着: 每一个解释变量 x_{1i}, \dots, x_{mi} , $i = 1, \dots, m$ 对被解释变量 y_i 的影响都是显著的。因此, 必须对每一个解释变量进行显著性检验, 以确定每个解释变量是否应该保留在多元线性回归模型中。这一检验是由解释变量的 t 检验实现的。

定义 3.9.1 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 与 $Y \sim \chi_n$ 独立, 则称

$$T = \frac{\sqrt{n}X}{Y} \quad (3.9.31)$$

服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $T \sim t_n$ 。

定义解释变量 x_i 的 t 统计量

$$t_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{c_{ii} \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{N-m-1}}} \quad (3.9.32)$$

则 t 统计量服从自由度为 $N - m - 1$ 的 t 分布, 即

$$t_i = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{c_{ii} \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{N-m-1}}} \sim t(N - m - 1) \quad (3.9.33)$$

式中 $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_m]^T$ 为误差向量。

于是, 多元线性回归的多重假设检验式 (3.9.12) 变成了 t 检验: 给定显著性水平 α , 可通过 t 分布表^[334] 查出临界值 $t_{\alpha/2}(N - m - 1)$ 。然后, 由样本求统计量 $t_i, i = 0, 1, \dots, m$ 的数值, 最后通过检验

$$\begin{matrix} H_0 \\ |t_i| \leq t_{\alpha/2}(N - m - 1), \\ H_1 \end{matrix} \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (3.9.34)$$

判断对应的解释变量是否应该包括在多元线性回归模型中。

下面是多元线性回归的多重假设检验的 t 检验算法^[334]。

算法 3.9.2 多元线性回归的 t 检验算法

已知 实验观测值 $(x_{1i}, \dots, x_{mi}; y_i), i = 1, \dots, N$, 给定显著性水平 α 。

步骤1 由式 (3.9.29) 或 $\hat{\beta} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{r}$ 计算回归参数向量 $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m]^T$, 再由式 (3.9.30) 计算常数项 $\hat{\beta}_0$ 。

步骤2 计算

$$S_{\text{re}} = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 \quad (3.9.35)$$

步骤3 计算剩余标准差

$$s = \sqrt{\frac{S_{\text{re}}}{N - m - 1}} \quad (3.9.36)$$

和偏回归平方和

$$p_i = \frac{\hat{\beta}_i^2}{c_{ii}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9.37)$$

其中 c_{ii} 是逆矩阵 \mathbf{L}^{-1} 的对角线元素。

步骤4 计算 t 统计量

$$t_i = \frac{\sqrt{p_i}}{s}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9.38)$$

步骤5 根据给定的显著性水平 α 查 t 分布表得临界值 $t_{\alpha/2}(N - m - 1)$, 然后利用式 (3.9.34) 的 t 检验判断每一个解释变量是否应该包括在多元线性回归模型中。

例如, 在三元线性回归中, 给定显著性水平 $\alpha = 0.05$ 和 $N = 23$, 则 t 分布的自由度为 $N - m - 1 = 23 - 3 - 1 = 19$, 通过 t 分布表可查出相应的临界值 $t_{0.025}(19) = 2.093$ 。如果计算的所有 t 值的绝对值 $|t_0|, |t_1|, |t_2|$ 和 $|t_3|$ 都大于临界值 $t_{0.025}(19)$, 则包括常数项在内的 4 个解释变量 β_0, x_1, x_2, x_3 都在 95% 的水平下显著, 即 4 个解释变量都通过了显著性检验。这表明, 解释变量对被解释变量 y 都具有明显的解释力度, 即三元线性回归模型成立。

3.9.4 多元统计分析

在经济和医学等多元统计分析中, 常常需要评价有关结果是否存在差异? 例如, 多家评估机构的不同人员对我国的投资环境作出评价, 令第 i 家机构的第 j 个评估人员的政治环境评分为 $x_{j1}^{(i)}$ 、法律环境评分为 $x_{j2}^{(i)}$ 、经济环境评分为 $x_{j3}^{(i)}$ 和文化环境评分为 $x_{j4}^{(i)}$ 。根据这些评分, 需要分析这些评估机构对我国投资环境的评价是否存在差异? 又如, 为了研究某种疾病, 分别对几组不同年龄、不同性别的人群进行生化检查, 其中第 i 组的第 j 个人的总胆固醇 (CHO) 为 $x_{j1}^{(i)}$ 、甘油三酯 (TG) 为 $x_{j2}^{(i)}$ 、低密度脂蛋白胆固醇 (LDL) 为 $x_{j3}^{(i)}$ 、高密度脂蛋白胆固醇 (HDL) 为 $x_{j4}^{(i)}$ 。此时, 需要分析这几组人群的生化指标是否存在明显差异?

m 元统计分析的本质就是对 m 个相关变元同时进行分析: 比较这些相关变元的平均值或者协方差矩阵是否相等。注意, 多元统计分析不是多元假设检验, 而是多重假设检验, 因为多元统计分析只有两个假设 H_0 和 H_1 。

正如一元正态分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 是二元假设检验和统计分析的基本假设, 多元正态分布则是多元和多重假设检验及多元统计分析的基本假设。

定义 3.9.2 设 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_q]^T$, 其中 x_1, \dots, x_q 独立的一元正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 。若 $\boldsymbol{\mu}$ 为 p 维常数向量, \mathbf{A} 为 $q \times p$ 常数矩阵, 则称

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (3.9.39)$$

服从 p 元正态分布, 并记作 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 其中 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 分别称为 p 元正态分布的均值向量和方差矩阵。

事实上, 许多实际问题的分布经常是多元正态分布或者近似多元正态分布; 或者即使本身不是多元正态分布, 但其样本均值却近似于多元正态分布。

下面分三种情况介绍多元统计分析的检验方法。

(1) 多元正态均值向量相等的检验

多元正态均值向量相等的检验问题的数学描述为

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \dots = \mu_m \\ H_1: \mu_1, \dots, \mu_m \text{ 不全相等} \end{cases} \quad (3.9.40)$$

考虑 m 个变元 X_1, \dots, X_m 。设 $x_{kj}^{(i)}$ 代表变元 X_k 的第 i 组 (其中 $i = 1, \dots, p$) 观测数据组中的第 j 个观测数据, 并令第 i 组第 k 个变元 X_k 共有 N_i ($i = 1, \dots, p$) 个观测数据。

第 k 个变元 X_k 的第 i 组样本均值为

$$\bar{X}_k^{(i)} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_{kj}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, p; k = 1, \dots, m \quad (3.9.41)$$

m 个变元的第 i 组样本均值组成第 i 组多元样本均值向量

$$\bar{\mathbf{x}}^{(i)} = [\bar{X}_1^{(i)}, \dots, \bar{X}_m^{(i)}]^T, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.9.42)$$

令 $N = N_1 + \dots + N_m$, 则第 k 个变元 X_k 的总体样本均值

$$\bar{X}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{N_i} x_{kj}^{(i)}, \quad k = 1, \dots, m \quad (3.9.43)$$

它们组成总均值向量

$$\bar{\mathbf{x}} = [\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m]^T \quad (3.9.44)$$

定义第 i 组的数据矩阵

$$\mathbf{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(i)} & \dots & x_{1N_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}^{(i)} & \dots & x_{mN_i}^{(i)} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_{N_i}^{(i)}] \quad (3.9.45)$$

其中

$$\mathbf{x}_j^{(i)} = [x_{1j}^{(i)}, \dots, x_{mj}^{(i)}]^T, \quad j = 1, \dots, N_i \quad (3.9.46)$$

利用以上定义知, 第 i 组组内样本协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= [\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_{N_i} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}] [\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_{N_i} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}]^T \\ &= \sum_{j=1}^{N_i} (\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}) (\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)})^T, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.9.47)$$

组内总样本协方差矩阵为

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^p \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{N_i} (\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}) (\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)})^T \quad (3.9.48)$$

而组间总样本协方差矩阵为

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^p N_i (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)}) (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)})^T \quad (3.9.49)$$

组内总样本协方差矩阵与组间总样本协方差矩阵之和

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{B} \quad (3.9.50)$$

称为总样本协方差矩阵。

上述矩阵的行列式的统计意义如下^[341]。

$|\mathbf{B}|$: m 个变元的总体样本分成 m 组样本点的组间方差;

$|\mathbf{E}|$: m 组样本各个组的组间方差之和;

$|\mathbf{A}|$: m 组样本点的总方差。

若 m 个变元的总体均值相等, 则 m 组样本点应该很接近, 组内方差大, 组间方差反而小, 即组内方差几乎就是总方差。此时, $\lambda^{2/n} = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B} + \mathbf{E}|}$ 应该接近于 1。

定义 3.9.3^[341] 设数据矩阵 $\mathbf{X}_{n \times p} \sim \mathcal{N}_{n \times p}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma})$, 则称协方差矩阵 \mathbf{W} 服从 Wishart 分布, 并记作 $\mathbf{W} \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$ 。

定义 3.9.4^[341] 设 $\mathbf{E} \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{B} \sim W_p(m, \boldsymbol{\Sigma})$ 相互独立, 并且 $m > p, n > p$, 矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 正定, 则称

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{B}|} \quad \text{或者} \quad \lambda_1 = \frac{|\mathbf{E}|^{N/2}}{|\mathbf{E} + \mathbf{B}|^{N/2}} \quad (3.9.51)$$

服从 Wilks 分布, 并记作 $\lambda_1 \sim A_{p,n,m}$ 。Wilks 分布 $A_{p,n,m}$ 的临界点或分位点 α 可在文献 [336] 中查表得到。

定理 3.9.1^[341] 当多元正态变量的均值 $\mu_1 = \dots = \mu_m$ 时, 有

$$\mathbf{A} \sim W_p(N-1, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{E} \sim W_p(N-m, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \mathbf{B} \sim W_p(m-1, \boldsymbol{\Sigma})$$

且 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 相互独立, 从而式 (3.9.51) 定义的 λ_1 服从 Wilks 分布即 $\lambda_1 \sim \Lambda_{p, N-m, m-1}$ 。

上述分析及定理 3.9.1 可以总结为多元正态总体均值检验的下述算法。

算法 3.9.3 多元正态均值向量相等的检验^[341]

给定: 显著性水平 α 。

步骤1 利用式 (3.9.41) ~ 式 (3.9.4) 计算第 i 组多元样本均值向量 $\bar{\mathbf{x}}^{(i)}$ 及总样本均值向量 $\bar{\mathbf{x}}$ 。

步骤2 利用式 (3.9.48) 和式 (3.9.49) 分别计算组内总样本协方差矩阵 \mathbf{E} 和组间总样本协方差矩阵 \mathbf{B} 。

步骤3 由式 (3.9.51) 计算参数 λ_1 , 然后进行下列检验决策

$$\lambda \begin{cases} \leq & H_0 \\ > & H_1 \end{cases} \Lambda_{p, N-m, m-1}(\alpha) \quad (3.9.52)$$

(2) 多元正态协方差矩阵相等的检验

多元正态协方差矩阵相等的检验的问题提法是

$$\begin{cases} H_0: \boldsymbol{\Sigma}_1 = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}_m \\ H_1: \boldsymbol{\Sigma}_1, \cdots, \boldsymbol{\Sigma}_m \text{ 不全相等} \end{cases} \quad (3.9.53)$$

令 $x_{ij}^{(k)}$ 表示第 k 个变元第 i 个数据组的第 j 个观测数据, 其中 $i = 1, \cdots, p; j_k = 1, \cdots, N_k; k = 1, \cdots, m$ 。设第 k 个变元的样本向量服从多元正态分布

$$\mathbf{x}_j^{(k)} = [x_{1j}^{(k)}, \cdots, x_{pj}^{(k)}]^T \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k), \quad j = 1, \cdots, N_k \quad (3.9.54)$$

即有

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1^{(1)}, \cdots, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)} & \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1) \\ & \vdots \\ \mathbf{x}_1^{(m)}, \cdots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)} & \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_m, \boldsymbol{\Sigma}_m) \end{cases} \quad (3.9.55)$$

令 $N = N_1 + \cdots + N_m$, 可以证明^[341, pp.247-248], H_0 与 H_1 的似然比统计量为

$$\lambda_2 = \frac{\prod_{k=1}^m |\mathbf{A}_k / N_k|^{N_k/2}}{|\mathbf{A} / N|^{N/2}} \quad (3.9.56)$$

式中

$$\mathbf{A}_k = \sum_{j=1}^{N_k} (\mathbf{x}_j^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)}) (\mathbf{x}_j^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)})^T, \quad k = 1, \cdots, m \quad (3.9.57)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \mathbf{x}_j^{(k)}, \quad k = 1, \cdots, m \quad (3.9.58)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_m \quad (3.9.59)$$

算法 3.9.4 多元正态协方差矩阵相等的检验算法^[341]

给定: 显著性水平 α 。

步骤1 利用式 (3.9.57)~式 (3.9.59) 计算矩阵 $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ 和 \mathbf{A} 。

步骤2 利用式 (3.9.56) 计算 H_0 与 H_1 的似然比统计量 λ_2 。

步骤3 若 $\lambda_2 > A_{p, N-m, m-1}(\alpha)$, 则拒绝 H_0 假设; 否则, 判断 H_0 假设成立。

(3) 多元正态均值向量和协方差矩阵相等的检验

考虑多元正态均值向量和协方差矩阵相等的检验问题

$$\begin{cases} H_0: & \boldsymbol{\mu}_1 = \dots = \boldsymbol{\mu}_m; \boldsymbol{\Sigma}_1 = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_m \\ H_1: & \boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_m \text{ 不全相等以及 } \boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_m \text{ 不全相等} \end{cases} \quad (3.9.60)$$

可以证明^[341, pp.250-251], H_0 与 H_1 的似然比统计量是

$$\lambda_3 = \frac{N^{pN/2} \prod_{k=1}^m |\mathbf{A}_k|^{N_k/2}}{|\mathbf{T}|^{N/2} \prod_{k=1}^m N_k^{pN_k/2}} \quad (3.9.61)$$

式中

$$\mathbf{A}_k = \sum_{j=1}^{N_k} \left(\mathbf{x}_j^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)} \right) \left(\mathbf{x}_j^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)} \right)^T, \quad k = 1, \dots, m \quad (3.9.62)$$

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N_k} \left(\mathbf{x}_j^{(k)} - \bar{\mathbf{x}} \right) \left(\mathbf{x}_j^{(k)} - \bar{\mathbf{x}} \right)^T \quad (3.9.63)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N_k} \mathbf{x}_j^{(k)} \quad (3.9.64)$$

算法 3.9.5 多元正态矩阵向量和协方差矩阵相等的检验^[341]

给定: 显著性水平 α 。

步骤1 利用式 (3.9.62)~式 (3.9.64) 计算矩阵 $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ 和 \mathbf{T} 。

步骤2 利用式 (3.9.61) 计算 H_0 与 H_1 的似然比统计量 λ_3 。

步骤3 若 $\lambda_3 > A_{p, N-m, m-1}(\alpha)$, 则拒绝 H_0 假设; 否则, 判断 H_0 假设成立。

本章小结

本章围绕二元假设检验的基本理论和方法, 首先将信号检测问题划分为三种不同的类型, 如雷达目标检测、通信信号检测和强调风险最小的信号检测问题; 然后针对这三类信号检测问题, 分别重点介绍了相应的决策准则: Neyman-Pearson 准则、一致最大功效准则和

Bayes 准则。虽然三种决策准则的出发点和核心思想有所不同,但它们最终都采用似然比函数作为决策函数,只是阈值的选择各不相同而已。最后三节分别介绍了 Bayes 派生准则、多元假设检验和多重假设检验的理论、方法与应用。

习 题

3.1 观测数据模型为

$$\begin{cases} H_1: y_n = 4 + w_n & \text{信号存在时} \\ H_0: y_n = w_n & \text{信号不存在时} \end{cases}$$

其中, $n = 1, \dots, 16$, 且 w_n 是一个均值为 1、方差为 4 的高斯白噪声。若要求虚警概率 $\alpha = 0.05$, 试利用 Neyman-Pearson 准则求检测概率。

3.2 二进制相移键控信号在加性高斯白噪声 $w(t)$ 中被观测:

$$\begin{cases} H_1: y(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + w(t) \\ H_0: y(t) = -A \cos(\omega_c t + \theta) + w(t) \end{cases}$$

其中 $0 \leq t \leq 2 \mu\text{s}$, 高斯白噪声 $w(t)$ 的均值为 0、功率谱密度为 10^{-12} W/Hz。若二进制 BPSK 信号为等概率发射, 且载波的幅值 $A = 10$ mV, 求误码率。

3.3 令 y_1, \dots, y_N 是来自 Poisson 分布

$$p(y; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}, & y = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的随机观测样本, 其中 λ 未知。试确定二元假设检验

$$\begin{cases} H_0: \lambda = \lambda_0 \\ H_1: \lambda = \lambda_1 \end{cases}$$

在 α 检验水平的最优临界区, 其中 $\lambda_1 > \lambda_0$ 。

3.4 观测数据由模型

$$\begin{cases} H_1: y_n = 1 + w_n & \text{信号 +1 发射时} \\ H_0: y_n = -1 + w_n & \text{信号 -1 发射时} \end{cases}$$

其中, $n = 1, \dots, 16$, 且高斯白噪声 w_n 的均值为 1、方差为 9。若 +1 信号的发射概率 $p(1) = 0.75$, -1 信号的发射概率 $p(-1) = 0.25$, 试利用 Bayes 准则确定检测概率和虚警概率。

3.5 BPSK 信号在零均值、功率谱密度为 $\sigma_0/2$ 的高斯白噪声 $w(t)$ 中被观测:

$$\begin{cases} H_1: y(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + w(t) \\ H_0: y(t) = -A \cos(\omega_c t + \theta) + w(t) \end{cases}$$

式中 θ 是一未知的不变参数。若 $p_0 = 0.25, p_1 = 0.75$, 试求错误概率 P_E 。

3.6 连续时间的观测数据为

$$\begin{cases} H_1: y(t) = s(t) + w(t) & (\text{信号存在时}) \\ H_0: y(t) = w(t) & (\text{信号不存在时}) \end{cases} \quad t = 1, \dots, T$$

其中 $w(t)$ 是一均值为 0、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。令 $E = \int_0^T s^2(t)dt$ 代表信号 $s(t)$ 在观测时间 $[0, T]$ 内的能量。

(1) 如果希望虚警概率不超过 α , 证明: 当

$$\int_0^T y(t)s(t)dt \geq \text{Th}$$

时, 由 Neyman-Pearson 准则设计的检测器将判决信号 $s(t)$ 存在。上式中, Th 是一个由补余误差函数 $\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{N_0 E}}\text{Th}\right) = \alpha$ 决定的阈值。

(2) 证明: 检测概率

$$P_D = \text{erfc}\left(\text{erfc}^{-1}(\alpha) - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

3.7 设 y_1, \dots, y_N 为取自分布 $p(y)$ 的样本。考虑对分布 $p(y)$ 的假设检验

$$\begin{cases} H_0: p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ H_1: p(y) = \frac{1}{2} \exp(-|y|) \end{cases}$$

试用 Neyman-Pearson 准则确定检验的显著性水平为 α_0 时的检测统计量及其判决区域。

3.8 设 $T = T(y_1, y_2, \dots, y_N)$ 为一个统计量, 若当给定 T 时, 样本 y_1, y_2, \dots, y_N 的条件分布与假设 H 无关, 则称 T 为关于假设 H 的充分统计量。设样本 y_1, y_2, \dots, y_N 独立同分布, 并且服从指数分布。考虑关于分布的假设检验

$$\begin{cases} H_0: p(y) = \frac{1}{\lambda_0} \exp(-y/\lambda_0) \\ H_1: p(y) = \frac{1}{\lambda_1} \exp(-y/\lambda_1) \end{cases}$$

试证明样本均值 $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ 是充分统计量。

3.9 设 y_1, \dots, y_N 为取自零均值高斯分布的样本。考虑对高斯分布的方差的检验

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2 \end{cases}$$

其中 σ_0 和 σ_1 为已知常数, 且满足 $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$ 。

(1) 计算对数似然比;

(2) 假定门限 Th 满足

$$\text{LLR}(y_1, \dots, y_N) < \text{Th} \Rightarrow H_0$$

$$\text{LLR}(y_1, \dots, y_N) \geq \text{Th} \Rightarrow H_1$$

式中, LLR 为对数似然函数的缩写。证明 $T(y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N y_i^2$ 是充分统计量; 并将检验统计量

$$\begin{aligned} T(y_1, \dots, y_N) < \eta &\Rightarrow H_0 \\ T(y_1, \dots, y_N) \geq \eta &\Rightarrow H_1 \end{aligned}$$

的阈值 η 表示成阈值 Th 和常数 σ_0, σ_1 的函数:

(3) 试求 α_0 和 β 的表达式;

(4) 画出 $N = 1, \sigma_1^2 = 1.5$ 和 $\sigma_0^2 = 1$ 时的接收机工作特性曲线。

3.10 试证明 Bayes 检验的判决函数可以写成

$$\frac{p(y_1, \dots, y_N | H_1)}{p(y_1, \dots, y_N | H_0)} \geq \text{Th}$$

的形式, 即 Bayes 检验等价于似然比检验。

3.11 令 $y = \sum_{i=1}^n x_i$, 其中 $x_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 是独立同分布的高斯变量, 而 n 是泊松分布的随机变量

$$P(n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k = 0, 1, \dots$$

现在需要在两种假设

$$\begin{cases} H_0 : n > 1 \\ H_1 : n \leq 1 \end{cases}$$

之间作出判决。试写出虚警概率为 α_0 的 Neyman-Pearson 检验的表达式。

3.12 若上一题中的假设改为

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 \end{cases}$$

试写出虚警概率为 α_0 的 Neyman-Pearson 检验的表达式。

3.13 以某种概率方式将两种检验融合在一起的方法称为随机化判决规则。以似然比检验为例, 两个检验的阈值分别为 Th_1 和 Th_2 , 则随机化判决是指以概率 η 采用以 Th_1 做阈值的检验结果, 以概率 $1 - \eta$ 采用以 Th_2 做阈值的检验结果。

(1) 用两个似然比检验的检测概率表示随机化判决的检测概率;

(2) 证明连续似然比检验的接收机工作特性曲线都是凹的。

3.14 证明接收机工作特性曲线在某一特定点处的斜率等于似然比检验的门限值。

3.15 观测数据 y_1, \dots, y_N 由下面的模型生成

$$y_i = \theta + n_i$$

其中 θ 服从高斯分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, n_i 是独立同分布的高斯变量 $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ 。试求 θ 的最小均方估计和最大后验估计。

3.16 独立同分布的变量 y_1, \dots, y_N 的取值集合为 $\{0, 1\}$, 其中

$$P(y_i = 0) = p, P(y_i = 1) = (1 - p), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

关于参数 p 的假设检验

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = p_1 \end{cases}$$

- (1) 试确定该假设检验的充分统计量;
- (2) 给出虚警概率为 α_0 时的 Neyman-Pearson 检验的表达式。

3.17 随机变量 y_1, \dots, y_N 的联合分布密度为

$$p(y_1, \dots, y_N | H_1) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{(y_i - m)^2}{2\sigma^2}\right) \prod_{k \neq i} \exp\left(-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(y_1, \dots, y_N | H_0) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中 $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ 。

- (1) 试求似然比检验;
- (2) 画出 $N = 2$ 和 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ 条件下, 在 y_1, y_2 平面上对应各个检测阈值的判决区域;
- (3) 写出虚警概率和功效函数的表达式。通过改变表达式积分域求出两者的上下界。

3.18 设 y_1, \dots, y_N 为取自高斯分布的样本。考虑对高斯分布的假设检验问题

$$\begin{cases} H_0 : p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(y - m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ H_1 : p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(y - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \end{cases}$$

- (1) 试求似然比检验;
- (2) 记 $l_\alpha = \sum_{i=1}^N y_i$ 和 $l_\beta = \sum_{i=1}^N y_i^2$ 。试画出 $2m_0 = m_1 > 0, 2\sigma_1 = \sigma_0$ 情况下, l_α, l_β 平面中的判决区域。

3.19 设 y_1, \dots, y_N 是取自高斯分布的样本。考虑对高斯分布检验

$$\begin{cases} H_0 : p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \\ H_1 : p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y - m)^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$$

其中 $m > 0$ 是一个未知的非随机参数。试确定该检验是否存在一致最大功效检验? 若存在, 试构造之, 若不存在, 试说明理由。

3.20 针对上一题改变条件:

- (1) 将条件改为 $m < 0$, 重复上一题;
- (2) 将条件改为 $m \neq 0$, 重复上一题。

3.21 假设有 N 个统计独立的随机变量 y_1, \dots, y_N , 在两种假设下它们的分布密度为

$$\begin{cases} H_0 : p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(y-m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ H_1 : p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \end{cases}$$

其中 σ_0 是已知的, $\sigma_1 > \sigma_0$ 是未知非随机参数。

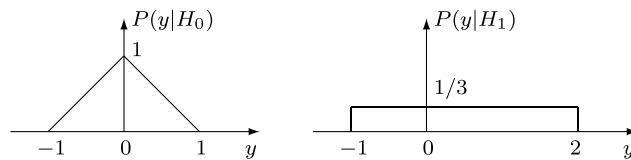
- (1) 假定我们要求虚警概率为 α_0 , 构造功效函数的上界;
- (2) 一致最大功效检验存在吗? 若存在, 试构造之, 若不存在, 试说明理由。

3.22 随机变量 m 的分布密度为

$$p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right)$$

试确定虚警概率为 α_0 时的 Neyman-Pearson 检验的表达式。

3.23 在二元假设检验问题中, 设观测信号在两种假设下的分布分别如下图所示, 试求 Bayes 判决表示式。



3.24 考虑三元信号的假设检验问题。各假设为

$$\begin{cases} H_0 : y = n \\ H_1 : y = 1 + n \\ H_2 : y = 2 + n \end{cases}$$

其中, 噪声 n 服从分布 $p(n) = 1 - |n|$, $-1 \leq n \leq 1$ 。在先验概率 $P(H_0) = P(H_1)$ 的情况下, 求最小总错误概率 P_E 。

3.25 连续时间的观测数据为

$$\begin{cases} H_1 : y(t) = 1 + w(t) \\ H_0 : y(t) = w(t) \end{cases}$$

其中 $w(t)$ 表示均值为零的高斯白噪声。

- (1) 对于给定的阈值 T_h , 计算相应的检测概率 P_D 和虚警概率 P_F ;
- (2) 绘制当 $w(t)$ 的方差分别为 0.5, 1, 2, 4 时的接收机工作特性曲线 (ROC)。

附录 3A 误差函数表

| x | $\operatorname{erf}(x)$ | x | $\operatorname{erf}(x)$ | x | $\operatorname{erf}(x)$ | x | $\operatorname{erf}(x)$ |
|------|-------------------------|------|-------------------------|------|-------------------------|------|-------------------------|
| 0.00 | 0.00000 | 0.35 | 0.37938 | 0.70 | 0.67780 | 1.05 | 0.86243 |
| 0.01 | 0.01128 | 0.36 | 0.38932 | 0.71 | 0.68466 | 1.06 | 0.86614 |
| 0.02 | 0.02256 | 0.37 | 0.39920 | 0.72 | 0.69143 | 1.07 | 0.86977 |
| 0.03 | 0.03384 | 0.38 | 0.40900 | 0.73 | 0.69810 | 1.08 | 0.87332 |
| 0.04 | 0.04511 | 0.39 | 0.41873 | 0.74 | 0.70467 | 1.09 | 0.87680 |
| 0.05 | 0.05637 | 0.40 | 0.42839 | 0.75 | 0.71115 | 1.10 | 0.88020 |
| 0.06 | 0.06762 | 0.41 | 0.43796 | 0.76 | 0.71753 | 1.11 | 0.88353 |
| 0.07 | 0.07885 | 0.42 | 0.44746 | 0.77 | 0.72382 | 1.12 | 0.88678 |
| 0.08 | 0.09007 | 0.43 | 0.45688 | 0.78 | 0.73001 | 1.13 | 0.88997 |
| 0.09 | 0.10128 | 0.44 | 0.46622 | 0.79 | 0.73610 | 1.14 | 0.89308 |
| 0.10 | 0.11246 | 0.45 | 0.47548 | 0.80 | 0.74210 | 1.15 | 0.89612 |
| 0.11 | 0.12362 | 0.46 | 0.48465 | 0.81 | 0.74800 | 1.16 | 0.89909 |
| 0.12 | 0.13475 | 0.47 | 0.49374 | 0.82 | 0.75381 | 1.17 | 0.90200 |
| 0.13 | 0.14586 | 0.48 | 0.50274 | 0.83 | 0.75952 | 1.18 | 0.90483 |
| 0.14 | 0.15694 | 0.49 | 0.51166 | 0.84 | 0.76514 | 1.19 | 0.90760 |
| 0.15 | 0.16799 | 0.50 | 0.52049 | 0.85 | 0.77066 | 1.20 | 0.91031 |
| 0.16 | 0.17901 | 0.51 | 0.52924 | 0.86 | 0.77610 | 1.21 | 0.91295 |
| 0.17 | 0.18999 | 0.52 | 0.53789 | 0.87 | 0.78143 | 1.22 | 0.91553 |
| 0.18 | 0.20093 | 0.53 | 0.54646 | 0.88 | 0.78668 | 1.23 | 0.91805 |
| 0.19 | 0.21183 | 0.54 | 0.55493 | 0.89 | 0.79184 | 1.24 | 0.92050 |
| 0.20 | 0.22270 | 0.55 | 0.56322 | 0.90 | 0.79690 | 1.25 | 0.92290 |
| 0.21 | 0.23352 | 0.56 | 0.57161 | 0.91 | 0.80188 | 1.26 | 0.92523 |
| 0.22 | 0.24429 | 0.57 | 0.57981 | 0.92 | 0.80676 | 1.27 | 0.92751 |
| 0.23 | 0.25502 | 0.58 | 0.58792 | 0.93 | 0.81156 | 1.28 | 0.92973 |
| 0.24 | 0.28570 | 0.59 | 0.59593 | 0.94 | 0.81627 | 1.29 | 0.93189 |
| 0.25 | 0.27632 | 0.60 | 0.60385 | 0.95 | 0.82089 | 1.30 | 0.93400 |
| 0.26 | 0.28689 | 0.61 | 0.61168 | 0.96 | 0.82542 | 1.31 | 0.93606 |
| 0.27 | 0.29741 | 0.62 | 0.61941 | 0.97 | 0.82987 | 1.32 | 0.93806 |
| 0.28 | 0.30788 | 0.63 | 0.62704 | 0.98 | 0.83423 | 1.33 | 0.94001 |
| 0.29 | 0.31828 | 0.64 | 0.63458 | 0.99 | 0.83850 | 1.34 | 0.94191 |
| 0.30 | 0.32862 | 0.65 | 0.64202 | 1.00 | 0.84270 | 1.35 | 0.94376 |
| 0.31 | 0.33890 | 0.66 | 0.64937 | 1.01 | 0.84681 | 1.36 | 0.94556 |
| 0.32 | 0.34912 | 0.67 | 0.65662 | 1.02 | 0.85083 | 1.37 | 0.94731 |
| 0.33 | 0.35927 | 0.68 | 0.66378 | 1.03 | 0.85478 | 1.38 | 0.94901 |
| 0.34 | 0.36936 | 0.69 | 0.67084 | 1.04 | 0.85864 | 1.39 | 0.95067 |

续表

| x | $\text{erf}(x)$ | x | $\text{erf}(x)$ | x | $\text{erf}(x)$ | x | $\text{erf}(x)$ |
|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|
| 1.40 | 0.95228 | 1.55 | 0.97162 | 1.70 | 0.98379 | 1.85 | 0.99111 |
| 1.41 | 0.95385 | 1.56 | 0.97262 | 1.71 | 0.98440 | 1.86 | 0.99147 |
| 1.42 | 0.95537 | 1.57 | 0.97360 | 1.72 | 0.98500 | 1.87 | 0.99182 |
| 1.43 | 0.95685 | 1.58 | 0.97454 | 1.73 | 0.98557 | 1.88 | 0.99215 |
| 1.44 | 0.95829 | 1.59 | 0.97546 | 1.74 | 0.98613 | 1.89 | 0.99247 |
| 1.45 | 0.95969 | 1.60 | 0.97634 | 1.75 | 0.98667 | 1.90 | 0.99279 |
| 1.46 | 0.96105 | 1.61 | 0.97720 | 1.76 | 0.98719 | 1.91 | 0.99308 |
| 1.47 | 0.96237 | 1.62 | 0.97803 | 1.77 | 0.98769 | 1.92 | 0.99337 |
| 1.48 | 0.96365 | 1.63 | 0.97884 | 1.78 | 0.98817 | 1.93 | 0.99365 |
| 1.49 | 0.96486 | 1.64 | 0.97962 | 1.79 | 0.98864 | 1.94 | 0.99392 |
| 1.50 | 0.96610 | 1.65 | 0.98037 | 1.80 | 0.98909 | 1.95 | 0.99417 |
| 1.51 | 0.96727 | 1.66 | 0.98110 | 1.81 | 0.98952 | 1.96 | 0.99442 |
| 1.52 | 0.96841 | 1.67 | 0.98181 | 1.82 | 0.98994 | 1.97 | 0.99466 |
| 1.53 | 0.96951 | 1.68 | 0.98249 | 1.83 | 0.99034 | 1.98 | 0.99489 |
| 1.54 | 0.97058 | 1.69 | 0.98315 | 1.84 | 0.99073 | 1.99 | 0.99511 |
| 0.50 | 0.52049 | 1.00 | 0.84270 | 1.50 | 0.96610 | 2.00 | 0.99532 |