# 第3章 电阻电路的一般分析

电路分析的任务是在已知电路结构和元件参数的条件下，求解电路各支路(或元件)的电流和电压。电路分析的基本依据是基尔霍夫定律及元件的伏安特性。第1章介绍了电路的观察法，第2章介绍了简单电阻电路分析的等效变换法，但是这些方法都局限于一定结构形式的电路，并且不够规范。本章将介绍分析电路的 $2b$ 法、支路电流法、网孔法、节点法和回路法。

## 3.1 电路方程的独立性

设电路有 $b$ 条支路。以 $b$ 个支路电流和 $b$ 个支路电压为变量列写 $2b$ 个独立电路方程以求得这些变量的方法，称为 $2b$ 法。众所周知，支路的伏安关系仅取决于该支路元件的特性，因此它们彼此独立，这样，$b$ 条支路可以提供 $b$ 个独立的支路伏安方程。剩余的 $b$ 个独立方程显然应由 KCL 和 KVL 提供。那么，独立的 KCL 方程和 KVL 方程各有多少？下面以图 3-1(a)所示电路为例进行分析。

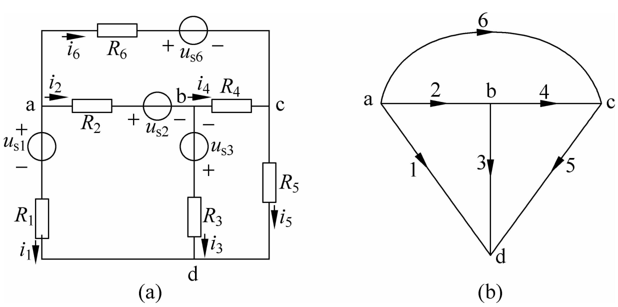
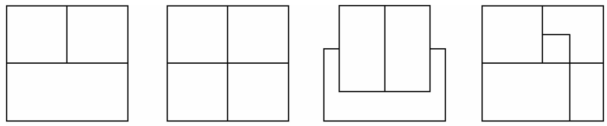



图 3-1 电路及其对应的有向图

在图 3-1(a)所示电路中，设支路电压与支路电流方向关联。第1章已介绍过，电路的 KCL、KVL 仅与电路的结构有关，而与元件的性质无关。因此在分析 KCL、KVL 时，可将图 3-1(a)所示电路中的各条支路用有向线段表示，使线段的方向与支路电流方向一致，这就构成了图论(数学中的一个分支)中的有向图，如图 3-1(b)所示。有向图并不妨碍对 KCL、KVL 的分析，相反，它可使分析更为简便。在图论中，图用 $G$(Graph)表示。图中的线段称为支路(或边)，线段的端点称为节点(或顶点)。图 3-1(b)所示为平面图。平面图是指没有空间交叉支路的图，否则为非平面图。图 3-2(a)、(b)所示为平面图。图 3-2(b)虽然

看起来有交叉电路，但可将它画成图 3-2(c)所示的形式，可见其为平面图。图 3-2(d)所示为非平面图。对图的介绍，还将在 3.5 节进一步说明。



(a) (b) (c) (d)

图 3-2 平面图和非平面图

图 3-1 有 4 个节点，其 KCL 方程分别为

节点 a：$i_1+i_2+i_6=0$

节点 b：$-i_2+i_3+i_4=0$

节点 c：$-i_4+i_5-i_6=0$

节点 d：$-i_1-i_3-i_5=0$

由这组方程可以看出，将任意 3 个方程相加，可得到另一个方程，这表明独立方程数不会大于 3。现任选 3 个方程(如前 3 个方程)进一步分析，可以看出，任意两个方程相加都不能得到另一个，可见这 3 个方程之间没有约束关系，故它们彼此独立。于是独立的 KCL 方程数为 3。可以证明，具有 $n$ 个节点的电路或图，其独立的 KCL 方程有 $n-1$ 个，且为任意的 $n-1$ 个。论证如下：

每一条支路都接于两个节点之间，因此每一条支路电流对一个节点流入，对另一个节点则必为流出。当对所有节点列写 KCL 方程时，在这些方程中，每个电流势必都会出现两次，一次为正，一次为负，故 $n$ 个节点的 KCL 方程之和必为零，因此 $n$ 个 KCL 方程中至少有一个不独立。现在去掉一个方程，分析余下的 $n-1$ 个。显然可见，被去掉的方程中的电流在余下的 $n-1$ 个方程中只可能出现一次，因此这 $n-1$ 个方程相加不可能为零，故此 $n-1$ 个 KCL 方程必定独立。

提供独立 KCL 方程的节点称为独立节点。显然，独立节点数为 $n-1$。

对图 3-1，对 3 个网孔按顺时针方向列 KVL 方程为

$$\left.\begin{aligned}&\text{回路 abda：} && u_2+u_3-u_1=0\\&\text{回路 bcdb：} && -u_3+u_5+u_4=0\\&\text{回路 acba：} && u_6-u_4-u_2=0\end{aligned}\right\}\tag{3-1}$$

可以看出，上组方程独立。图 3-1 还有 4 个回路(acda、abcda、acbda 和 acdba)，但是它们的 KVL 方程不独立，因为它们可由上面 3 个方程的某种组合得到(如回路 acda 的 KVL 方程 $u_6+u_5-u_1=0$ 可由 3 个方程之和得到)。

可以证明，具有 $b$ 条支路和 $n$ 个节点的平面图，其网孔数 $m=b-n+1$，且网孔的 KVL 方程组独立。

论证平面图的网孔数 $m=b-n+1$，先研究一个网孔的情况。图 3-3(a)所示为由 $k$ ($k=2,3,\cdots$)条边构成的一个网孔。由图可见，画第一条边"1"时，同时出现两个点 0 和 1，以后每增加一条边就相应地增加一个点，最后一条边"$k$"对应的点 $k$ 必与"1"边的 0 点重合，由此可见，$k$ 条边构成的网孔，其支路数 $b$ 等于 $k$，节点数 $n$ 也等于 $k$，于是 $b-n+1=1$，网孔数公

式($m=b-n+1$)正确。现在再来分析两个网孔的情况。设第一个网孔已经形成,如图3-3(b)所示,它有$k$条边及$k$个点($k\geqslant 2$),现在来形成第二个网孔。由图可见,每增加一条边,同样相应地增加一个点,而最后的一个边“$j$”所对应的$j$点必与网孔1的某个点重合,可见这两个网孔的支路数$b=k+j(k\geqslant 2,j\geqslant 1)$,而节点数$n=k+(j-1)$,于是$b-n+1=(k+j)-(k+j-1)+1=2$,网孔数公式仍正确。这样的分析方法可用于任意个数网孔的情况。设网孔数为$m$,由分析可知,只有第一个网孔的节点数与支路数相等,以后,每增加一个网孔,对应增加的节点数总比增加的支路数少1。故当增加$m-1$个网孔时,增加的节点数比增加的支路数少$m-1$。设$m$个网孔的边数为$b$,则对应的节点数$n$应为$b-(m-1)$,于是$b-n+1=b-(b-m+1)=m$,这正是网孔数,由此即证明了

$$\text{网孔数} = \text{支路数} - \text{节点数} + 1$$

再来论证$b-n+1$个网孔的KVL方程是独立的。设图3-4(a)所示的平面图$G_1$有$m$个网孔,现将$G_1$画在一个球体上,为图3-4(b)所示的$G_2$,可见,$G_1$边界的各边在$G_2$中也构成两个网孔,这个网孔称为外沿网孔或外沿回路。计及外沿网孔后,$G_1$中的每条边则均为两个网孔所共有,现对每个网孔写KVL方程。设网孔方向均取顺时针方向,如图3-4(a)所示,这样,每个支路电压在一个网孔方程中为正,在另一个方程中必为负,因此,$m+1$个网孔的KVL方程之和必为零。若去掉一个网孔方程(通常是去掉外沿网孔方程),则余下的$m$个网孔方程必定独立,其分析与KCL方程独立性的论证相类似。

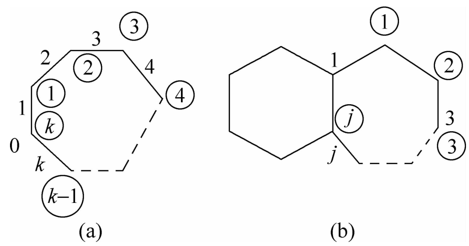



图3-3 网孔数$m=b-n+1$的证明

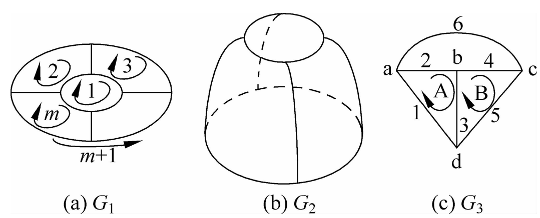



图3-4 网孔KVL方程独立性的证明

提供独立KVL方程的回路称为独立回路。网孔是一组独立回路,但并不是唯一的一组。不论哪一组,其独立回路数总是等于$b-n+1$。

如前所述,若一个电路有$b$条支路和$n$个节点,则有$2b$个待求量($b$个支路电流和$b$个支路电压),根据元件约束关系及电路的KCL和KVL,可分别写出$b$个独立的支路伏安方程、$n-1$个独立的节点电流方程和$b-n+1$个独立的网孔电压方程。它们的总数为$2b$,由这$2b$个方程,即可求出$2b$个待求量,这就是$2b$法。$2b$法适用于任何集中参数电路,不仅适用于线性电路,而且也适用于非线性电路。

## 3.2 支路电流法

$2b$法设置的变量太多,联立方程式多,计算过程冗长,所以一般很少应用。如何在$2b$法的基础上简化电路的分析,这是要讨论的问题。将$2b$法的$\sum u=0$方程中的$b$个支路电压用支路伏安方程代入,于是KVL方程的变量就变成了支路电流。由$b-n+1$个KVL方程

和 $n-1$ 个 KCL 方程即可解出 $b$ 个支路电流。这种以支路电流为变量列方程，求解支路电流的方法称为支路电流法。下面以图 3-1(a)所示电路为例加以说明。

选独立节点 a、b、c，列 KCL 方程为

$$\left.\begin{aligned} i_1+i_2+i_6&=0\\ -i_2+i_3+i_4&=0\\ -i_4+i_5-i_6&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

网孔 KVL 方程为式(3-1)。各支路的伏安方程为

$$\left.\begin{aligned} &u_1=u_{s1}+R_1i_1; && u_2=R_2i_2+u_{s2}\\ &u_3=-u_{s3}+R_3i_3; && u_4=R_4i_4\\ &u_5=R_5i_5; && u_6=R_6i_6+u_{s6} \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

将式(3-3)代入式(3-1)，经整理后得

$$\left.\begin{aligned} -R_1i_1+R_2i_2+R_3i_3&=u_{s1}-u_{s2}+u_{s3}\\ -R_3i_3+R_4i_4+R_5i_5&=-u_{s3}\\ -R_2i_2-R_4i_4+R_6i_6&=u_{s2}-u_{s6} \end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

将式(3-2)和式(3-4)联立，即可求得6个支路电流。式(3-4)是网孔 $\sum u=0$ 方程与支路伏安方程相结合的结果，它是 KVL 方程的另一种形式。式(3-4)的一般形式为

$$\sum Ri=\sum u_s \tag{3-5}$$

虽然它是由网孔写出的，但它对任何回路均成立。式(3-5)中的 $\sum Ri$ 为回路中各电阻压降的代数和，当支路电流 $i$ 的方向与回路方向一致时，取“+”，反之取“−”；$\sum u_s$ 为回路中各压源电压 $u_s$ 的代数和，当压源的电位升方向与回路方向一致时，取“+”，反之取“−”。

支路电流法解题步骤如下：

(1) 设定各支路电流及其方向。

(2) 任选 $n-1$ 个独立节点，按 KCL 列节点的 $\sum i=0$ 方程。

(3) 任选一组独立回路，按 KVL 列回路的 $\sum Ri=\sum u_s$ 方程。

(4) 联立 $\sum i=0$ 和 $\sum Ri=\sum u_s$ 方程，解出各支路电流。

与支路电流法类似，也可用支路电压为变量列写方程求解支路电压，这就是支路电压法。它仍以方程组 $\sum i=0$ 和 $\sum u=0$ 为基础，只不过是将 $\sum i=0$ 中的支路电流按支路伏安关系表示为支路电压的函数(即欧姆定律或压源支路欧姆定律)，这样就得到了 $b$ 个支路电压方程，从而解出 $b$ 个支路电压，一般常用支路电流法而很少用支路电压法。

对于 $2b$ 法支路电流(压)法仅取支路电流(压)为变量，从而减少了一半方程，故使计算得到简化。

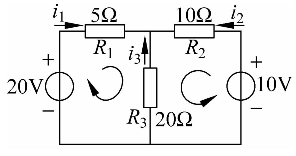



图 3-5 例 3-1 电路

**例 3-1** 试求图 3-5 所示电路各支路电流及各元件电压。

**解：**

(1) 设定各支路电流如图 3-5 所示。

(2) 列独立的 $\sum i=0$ 方程。该电路节点数 $n=2$，独立节点数为 1。任选一点，于是有

$$i_1+i_2+i_3=0 \tag{a}$$

(3) 列独立回路的 $\sum Ri=\sum u$ 方程。独立回路选为网孔，方向如图 3-5 所示，于是有

$$\left.\begin{aligned}5i_1-20i_3&=20\\10i_2-20i_3&=10\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

(4) 联立上两组方程，求解支路电流。

将式(a)代入式(b)，经整理后得

$$-i_2-5i_3=4$$
$$i_2-2i_3=1$$

应用行列式解方程，有

$$i_2=\frac{\begin{vmatrix}4&-5\\1&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&-5\\1&-2\end{vmatrix}}=\frac{-8+5}{2+7}=-\frac{3}{7}=-0.43(\mathrm{A})$$

$$i_3=\frac{\begin{vmatrix}-1&4\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&-5\\1&-2\end{vmatrix}}=\frac{-1-4}{2+5}=-\frac{5}{7}=-0.71(\mathrm{A})$$

$$i_1=-(i_2-i_3)=\frac{8}{7}=1.14(\mathrm{A})$$

(5) 求各元件电压。

设各元件电压与对应电流方向关联，于是

$$u_{R1}=R_1i_1=5\times1.14=5.7(\mathrm{V})$$
$$u_{R2}=R_2i_2=10\times(-0.43)=-4.29(\mathrm{V})$$
$$u_{R3}=R_3i_3=20\times(-0.71)=-14.3(\mathrm{V})$$

(6) 校核。

上述结果可以由其他回路的 $\sum u$ 是否为零来校核，如外沿网孔。外沿网孔的 $\sum u$ 为

$$R_1i_1-R_2i_3+10-20=5\times1.14-10\times(-0.43)+10-20=0$$

可见，以上计算结果正确。

**例 3-2**　试用支路电流法求解图 3-6 所示电路的支路电流和支路电压。

**解：**

(1) 设各支路电流方向如图 3-6 所示。该电路有 6 条支路，但是 ad 支路有一个 3A 电流源，因而 $i_4=3\mathrm{A}$ 为已知，故未知量(支路电流)就有 5 个，只需要列 5 个独立方程。

(2) 对 a、b、c 点列 $\sum i=0$ 方程为

$$\left.\begin{aligned}i_1+i_2-3&=0\\i_2-i_3-i_5&=0\\i_1+i_3+i_6&=0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

（3）只需列两个回路的 $\sum Ri = \sum u_s$ 方程。因为流源电压未知，故在选回路时应避开流源支路。现选回路 acba 和 bcdb，于是有

$$i_1 - 0.5i_3 - 0.1i_2 = -1$$
$$0.5i_3 - i_5 = -2$$

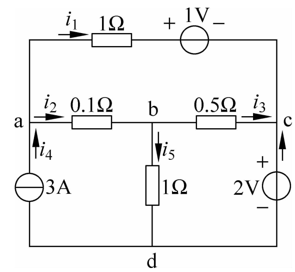


图 3-6　例 3-2 电路

（4）求各支路电流。

$$1.1i_2 + 0.5i_3 = 4$$
$$-i_2 + 1.5i_3 = -2$$

因此

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -0.5 \\ -2 & 1.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.1 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{vmatrix}} = \frac{6+1}{1.65+0.5} \approx 3.26(\mathrm{A})$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1.1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.1 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{vmatrix}} = \frac{-2.2+4}{1.65+0.5} \approx 0.84(\mathrm{A})$$

$i_2$、$i_3$ 的值代入式(a)得

$$i_1 = 3 - 3.26 \approx -0.26(\mathrm{A})$$
$$i_5 = 3.26 - 0.84 \approx 2.42(\mathrm{A})$$
$$i_6 = 0.26 - 0.84 \approx -0.58(\mathrm{A})$$

（5）求解各支路电压。

各支路电压为

$$u_{ab} = 0.1i_2 = 0.326(\mathrm{V})$$
$$u_{bc} = 0.5i_3 \approx 0.42(\mathrm{V})$$
$$u_{bd} = 1i_5 \approx -2.42(\mathrm{V})$$
$$u_{ac} = 1i_1 + 1 \approx -0.74(\mathrm{V})$$
$$u_{ad} = u_{ab} + u_{bd} \approx 2.75(\mathrm{V})$$
$$u_{s2} = 2\mathrm{V}$$

（6）校核。

由外沿网孔 KVL 方程校核，有

$$u_{ac} + u_{cd} + u_{da} = 0.74 + 2 - 2.75 \approx 0$$

因此，上列各计算值正确。

## 练习题

3-1　如图 3-7 所示电路，用支路电流法求各支路电流及 3Ω 电阻上所消耗的功率。

3-2　如图 3-8 所示电路，试列出支路电流法所需的联立方程组。

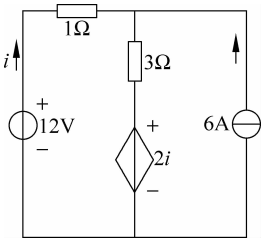



图 3-7 练习题 3-1 电路

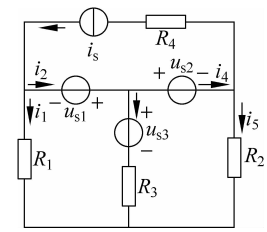



图 3-8 练习题 3-2 电路

## 3.3 网孔分析法

### 3.3.1 电路分析的解变量

支路电流法比 $2b$ 法简单，但当支路较多时，联立方程也随之增多，计算仍然繁杂。为此，希望能进一步减少联立方程，以使电路分析得到进一步简化。此外，还希望分析方法规范，即方程的列写有固定规律可循，便于掌握且不易出错。$2b$ 法的联立方程是由 3 组独立方程，即 $\sum i=0$、$\sum u=0$ 和支路伏安方程组成。支路电流法的联立方程是由两组独立方程，即 $\sum i=0$、$\sum Ri=\sum u_s$ 组成。为了进一步减少联立方程数，可以考虑只选支路电流法中两组独立方程中的一组进行分析。当只用一组方程，如 $\sum Ri=\sum u_s$ 时，显然方程的变量不能用支路电流，否则方程数 $b-n+1$ 少于变量数 $b$，无法解出。为此，需要寻求一组与方程数相等的独立变量，对这组独立变量的要求是，各支路电流能由它们简便地表示。这样一组独立变量称为解变量。一组解变量，应是一组同时具有完备性和独立性的变量。这里，完备性是指它是一组数目最少的能表示其他量（如上述的支路电流）的变量，即它不多也不少，多一个没必要，少一个又不行。独立性是指它们之间没有约束关系，相互独立。本节的分析方法就是通过一组解变量来求得支路电流或支路电压的间接分析法。虽然它是一种间接法，但由于方程数量少、列写规范且解题方法简便，故在电路分析中得到了广泛应用。

### 3.3.2 网孔电流

图 3-9(a)所示为具有两个网孔的电路，其对应的平面图($G$)如图 3-9(b)所示。各支路电流已示于图中。按 KCL 有 $i_3=i_1-i_2$，于是图 3-9(b)可等效为图 3-9(c)。由图 3-9(c)可见，电流 $i_1$、$i_2$ 分别在左、右网孔中流动，它们各自连续。这种在网孔中连续流动的电流称为网孔电流，为清楚起见，将它们画成图 3-9(d)所示的连续形式。为了看清支路电流和网孔电流的关系，图 3-9(d)中也示出了支路电流。由图 3-9 可见，有

支路电流 $i_1$ = 网孔电流 $i_1$

支路电流 $i_2$ = 网孔电流 $i_2$

支路电流 $i_3$ = 网孔电流 $i_1$ − 网孔电流 $i_2$

上述分析虽是对具有两个网孔的电路进行的，但实际上对任何平面电路的任一网孔，均

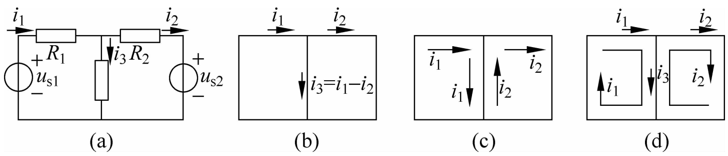



图 3-9 网孔电流

可假设一个网孔电流。这种假设的合理性在于,它对网孔中的任何节点来说,总是流入一次又流出一次,自然的满足 KCL。支路电流和网孔电流的普遍关系可表示为

$$i_b = \sum i_m$$

式中,$i_b$ 为支路$b$ 的电流;$\sum i_m$ 为流过支路$b$ 的网孔电流的代数和,当 $i_m$ 方向与 $i_b$ 方向一致时,取"+",反之取"—"。$\sum i_m$ 中最多为两项,因为任一支路或仅在一个网孔中,或为两网孔所共有。由此可见,任一支路电流可用网孔电流表示出,且网孔电流数不多也不少,故网孔电流具有完备性。网孔电流之间没有如节点电流之间的 KCL 约束关系,因此它们彼此独立。综上所述,可见网孔电流是一组解变量。

## 3.3.3 网孔分析法

支路电流法中,网孔的KVL方程的形式为$\sum Ri_b = \sum u_s$(全部独立),式中 $i_b$ 为支路电流。这一方程组有 $b-n+1$ 个,未知量为 $b$ 个,无法解。但是各支路电流 $i_b$ 若用网孔电流 $i_m$ 表示,则$\sum Ri_b = \sum u_s$ 就可以写成$\sum\left(R\sum i_m\right) = \sum u_s$ 的形式。该式中,网孔电流 $i_m$ 有 $b-m+1$ 个且独立,它和方程数相等,故由这组方程可解出 $b-n+1$ 个网孔电流。这种以网孔电流为变量列网孔 KVL 方程,求解网孔电流的方法,称为网孔分析法。下面分几种情况具体分析。

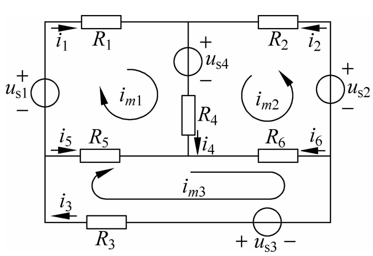



图 3-10 网孔分析法

图 3-10 所示为不含流源及受控源具有 3 个网孔的标准型电路,设网孔电流分别为 $i_{m1}$、$i_{m2}$、$i_{m3}$ 如图 3-10 所示。按网孔电流方向列网孔的 KVL 方程为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{网孔 1} & R_1 i_1 + R_4 i_4 - R_5 i_5 = u_{s1} - u_{s4} \\ \text{网孔 2} & R_2 i_2 + R_4 i_4 - R_6 i_6 = u_{s2} - u_{s4} \\ \text{网孔 3} & R_3 i_3 + R_5 i_5 - R_6 i_6 = u_{s3}\end{array}\right\} \tag{3-6}$$

各支路电流与网孔电流的关系为

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = i_{m1} \\ i_2 = i_{m2} \\ i_3 = i_{m3} \\ i_4 = i_{m1} + i_{m2} \\ i_5 = - i_{m1} + i_{m3} \\ i_6 = - i_{m2} - i_{m3}\end{array}\right\} \tag{3-7}$$

将式(3-7)代入式(3-6),经整理后得

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_4+R_5)i_{m1}+R_4 4i_{m2}-R_5 i_{m3}&=u_{s1}-u_{s4}\\R_4 i_{m1}+(R_2+R_4+R_6)i_{m1}+R_6 i_{m3}&=u_{s2}-u_{s4}\\-R_5 i_{m1}+R_6 i_{m2}+(R_3+R_5+R_6)i_{m3}&=u_{s3}\end{aligned}\right\}\tag{3-8}$$

这就是网孔电流方程。网孔电流方程的普遍形式(仍以3个网孔为例)为

$$\left.\begin{aligned}R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+R_{13}i_{m3}&=u_{s11}\\R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+R_{23}i_{m3}&=u_{s22}\\R_{31}i_{m1}+R_{32}i_{m2}+R_{33}i_{m3}&=u_{s33}\end{aligned}\right\}\tag{3-9}$$

式中 $R_{11}$、$R_{22}$ 和 $R_{33}$ 分别称为网孔1、网孔2和网孔3的自电阻,它们分别是各自网孔内所有电阻之和,即 $R_{kk}$=网孔 $k$ 中各电阻之和。例如,图3-10所示电路中,$R_{11}=R_1+R_4+R_5$,$R_{22}=R_2+R_4+R_6$ 等。$R_{12}$ 称为网孔1与网孔2的互电阻,它是该两网孔共有支路的电阻。其他 $R_{13}$、$R_{21}$…的概念类似。互电阻可能取正,也可能取负,它的普遍表达式为:$R_{jk}=\pm$(网孔 $j$ 与网孔 $k$ 的公共电阻)。式中“+”、“−”号的取法是:当流过公共电阻的两个网孔电流方向一致时,取“+”,反之取“−”。可以看出:$R_{jk}=R_{kj}$。在图3-10所示电路中,$R_{12}=R_{21}=R_4$,$R_{13}=R_{31}=-R_5$ 等。如果所有网孔电流的方向均为顺(逆)时针方向,则全部互电阻都为负。由于 $R_{jk}=R_{kj}$,因此网孔电流方程式的系数行列式对称。在式(3-9)中,$u_{s11}$ 为网孔1中各电压源电压的代数和,$u_{s22}$、$u_{s33}$ 与 $u_{s11}$ 类似。它们的一般表达式为 $u_{skk}=\sum u_s$。式中,当压源电位升方向与网孔方向一致时,取“+”,反之取“−”。

由上分析可见,只需判断各个自电阻、互电阻以及 $u_s$ 的正、负,就可直接而容易地列出全部网孔电流方程式,它是一种规范化的方程组。网孔分析法只适用于平面电路。

**例 3-3**　应用网孔电流法求解图3-11所示电路中的各支路电流。

**解**:(1) 设各支路电流和各网孔电流如图3-11所示。根据支路电流和网孔电流的关系,两网孔电流可表示为 $i_1$ 和 $i_2$(不一定要用 $i_{m1}$ 和 $i_{m2}$ 表示)。

(2) 列网孔电流方程

$$25i_1+20i_2=20$$
$$20i_1+30i_2=10$$

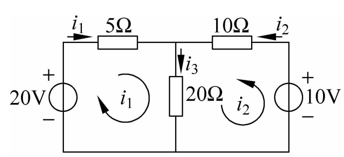



图3-11　例3-3电路

化简上式得

$$5i_1+4i_2=4$$
$$2i_1+3i_2=1$$

因此

$$i_1=\frac{\begin{vmatrix}4&4\\1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&4\\2&3\end{vmatrix}}=\frac{12-4}{15-8}=\frac{8}{7}=1.14(\mathrm{A})$$

$$i_2=\frac{\begin{vmatrix}5&4\\2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&4\\2&3\end{vmatrix}}=\frac{5-8}{15-8}=\frac{-3}{7}=-0.43(\mathrm{A})$$

显然,各支路电流为

$$i_1=1.14\mathrm{A}$$

$$i_2 = -0.43\text{A}$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = 1.14 - 0.43 = 0.71(\text{A})$$

上述结果与用支路法(例 3-1)解得的结果相同。

若电路中含有实际流源,可将它等效为实际压源,然后按上述方法列网孔电流方程。若电路中含有理想流源,则不能将它转换为压源。理想流源的位置有两种情况,或仅在一个网孔中,或为两个网孔所共有,下面分别对这两种情况进行分析。

图 3-12(a)所示电路,理想流源仅在一个网孔中,流过它的网孔电流只有一个 $i_1$,显然 $i_1 = i_s$ 为已知,未知网孔电流只有两个,即 $i_2$ 和 $i_3$。因此,只需列网孔 2、3 的电流方程。

$$-R_2 i_s + (R_2 + R_4) i_2 - R_4 i_3 = u_{s2} - u_{s4}$$

$$-R_1 i_s - R_4 i_2 + (R_1 + R_3 + R_4) i_3 = -u_{s3}$$

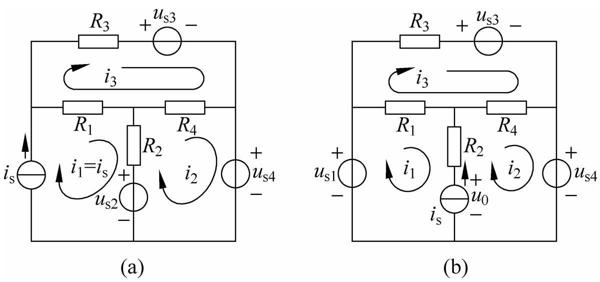



图 3-12 含有理想流源电路的网孔分析法

联立该两方程,即可求得网孔电流 $i_2$ 和 $i_3$。由此可见,当一个流源仅在一个网孔中时,网孔电流方程式可相应地减少一个。若有 $j$ 个类似情况,则方程相应地减少 $j$ 个。可以看出,只有当流源处在外沿回路的支路中时,它才会仅属一个网孔(不包含外沿网孔)所有。若不是这样,则它必为两个网孔所共有。图 3-12(b)即属此情况。对图 3-12(b)列写网孔电流方程时需要注意,流源端压必须考虑。应先设定流源的两端电压,如为 $u_0$,如图 3-12(b)所示。这样 3 个网孔的方程为

$$\begin{aligned}
(R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_2 - R_1 i_3 + u_0 &= u_{s2} \\
-R_2 i_1 + (R_2 + R_4) i_2 - R_4 i_3 - u_0 &= -u_{s4} \\
-R_1 i_1 - R_4 i_2 + (R_1 + R_3 + R_4) i_3 &= -u_{s3}
\end{aligned}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
(R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_2 - R_1 i_3 &= u_{s1} - u_0 \\
-R_2 i_1 + (R_2 + R_4) i_2 - R_4 i_3 &= -u_{s4} + u_0 \\
-R_1 i_1 - R_4 i_2 + (R_1 + R_3 + R_4) i_3 &= -u_{s3}
\end{aligned}\right\} \tag{3-10}$$

由式(3-10)可以看出,流源端电压 $u_0$ 的处理与压源电压 $u_s$ 完全一样。这样处理后,式(3-10)的规律就与式(3-9)一样了。

式(3-10)的 3 个方程中,有 4 个未知量,因此必须补充一个方程。根据已知条件,该补充方程为

$$-i_1 + i_2 = i_s$$

有上列 4 个方程即可求出 $i_1$、$i_2$、$i_3$ 和 $u_0$。

**例 3-4**　试用网孔分析法求图 3-13(a)所示电路中的支路电流 $i$。

**解**：设网孔电流 $i_1$ 和 $i_2$ 如图 3-13(b)所示，由图可见，$i_2=2\mathrm{A}$，故只需列网孔 1 方程。

$$(20+30)i_1+30\times i_2=40$$

即

$$50i_1+60=40$$

故

$$i_1=\frac{40-60}{50}=-0.4(\mathrm{A})$$

$$i=i_1+i_2=-0.4+2=1.6(\mathrm{A})$$

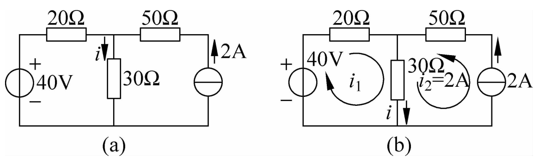



图 3-13　例 3-4 电路

**例 3-5**　试求图 3-14 所示电路的网孔电流。

**解**：设 3A 流源的端电压为 $u_0$，于是有

$$i_2=2\mathrm{A}$$

$$(1+5+4)i_1-4i_3+2\times 5=5-u_0$$

$$-4i_1+(2+3+4)i_3+2\times 2=u_0$$

$$-i_1+i_3=3$$

联立上面后 3 个方程，解得

$$i_1=-\frac{24}{11},\quad i_3=-\frac{9}{11},\quad u_0=\frac{211}{11}$$

当电路含有受控源时，受控压源和受控流源的处理分别与独立压源和独立流源的处理一样，但要注意的是，受控源的控制量必须用网孔电流表示。下面举例说明。

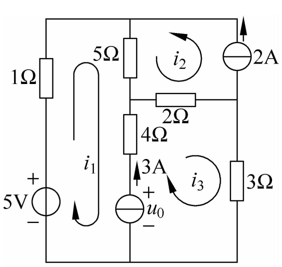



图 3-14　例 3-5 电路

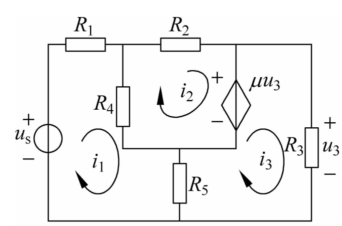



图 3-15　例 3-6 电路

**例 3-6**　试列图 3-15 所示电路的网孔电流方程。

**解**：网孔电流方程为

$$(R_1+R_4+R_5)i_1-R_4i_2-R_5i_3=u_s$$

$$-R_4i_1+(R_2+R_4)i_2=-\mu u_3$$

$$-R_5i_1+(R_3+R_5)i_3=\mu u_3$$

控制量 $u_3$ 必须用网孔电流表示，由图可见

$$u_3 = R_3 i_3$$

将上式代入方程组中，经整理后得

$$(-R_1 + R_4 + R_5)i_1 - R_4 i_2 - R_5 i_3 = u_s$$
$$-R_4 i_3 + (R_2 + R_4)i_2 + \mu R_3 u_3 = 0$$
$$-R_5 i_2 + (R_3 + R_5 - \mu u_3)i_3 = 0$$

上组方程中，互电阻 $R_{23}=\mu R_3$，而 $R_{32}=0$，$R_{23}\neq R_{32}$。由此可以看出，在含受控源的电路中，受控源所在网孔与控制量所在网孔间的互电阻不等。因此，含受控源电路的网孔电流方程中的系数行列式不对称。

### 练习题

3-3　用网孔分析法计算图 3-16 所示电路中各支路的电流。

3-4　用网孔分析法计算图 3-17 的电流 $i$。

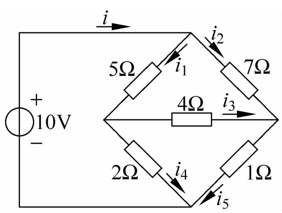



图 3-16　练习题 3-3 电路

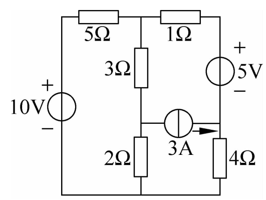



图 3-17　练习题 3-4 电路

3-5　按所给出的网孔电流方向，列出图 3-18 所示各电路的网孔电流方程。

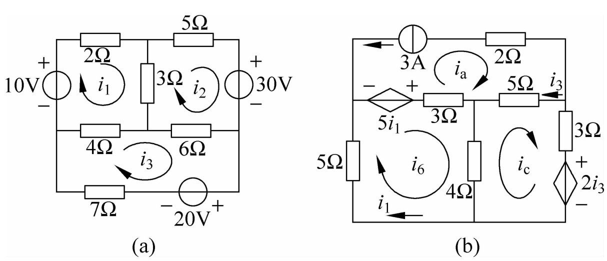



图 3-18　练习题 3-5 电路

## 3.4　节点分析法

设电路有 $n$ 个节点，$b$ 条支路。独立的 $\sum i=0$ 方程有 $n-1$ 个，但未知量有 $b$ 个。由于 $n \leqslant b$，故由 $n-1$ 个方程无法直接解出 $b$ 个未知电流。根据欧姆定律和压源支路欧姆定律，可将各支路电流用支路电压表示。这样，$\sum i=0$ 方程中的变量就转换成了支路电压。支路电压可用节点的电位差表示，于是 $\sum i=0$ 方程中的变量进一步转变成了节点电压。电路中任选一参考点，该点的电位为零，于是未知的节点电压（电位）只有 $n-1$ 个，它与所列的独

立方程数相等。因此，由 $n-1$ 个 KCL 方程（变量为节点电压）可解出 $n-1$ 个未知的节点电压。这就是要介绍的节点分析法。节点分析法就是以节点电压为变量列独立节点 KCL 方程，求解节点电压的方法。

容易证明，节点电压是一组完备、独立的解变量。首先，电路所有的支路电压均可用节点电压表示，因此一旦求得节点电压，所有的支路电压也就相应地解得，这表明节点电压是一组完备的变量。另外，可以看到，各节点电压之间不能用 KVL 相联系，这表明节点电压是一组独立变量。

下面分几种情况讨论节点分析法。

图 3-19(a)所示电路不含理想压源及受控源，具有 4 个节点。

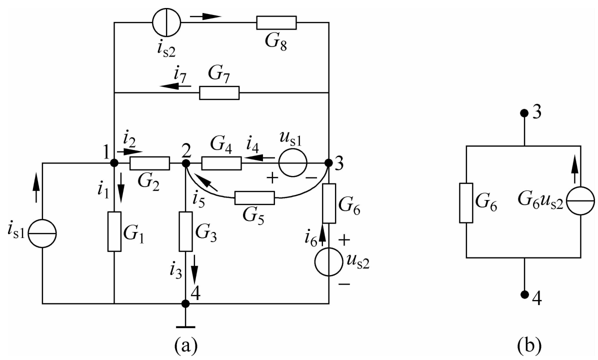



图 3-19　节点分析法

选点 4 为参考节点，列节点 1、2、3 的 KCL 方程为

$$\left.\begin{aligned}
&i_1+i_2-i_7-i_{s1}+i_{s2}=0\\
&-i_2+i_3-i_4-i_5=0\\
&i_4+i_5-i_6+i_7-i_{s2}=0
\end{aligned}\right\}\tag{3-11}$$

根据欧姆定律或压源支路欧姆定律，各支路电流可表示为

$$\left.\begin{aligned}
i_1&=G_1u_{14}=G_1u_1\\
i_2&=G_2u_{12}=G_2(u_1-u_2)\\
i_3&=G_3u_{24}=G_3u_2\\
i_4&=G_4(u_{32}+u_{s1})=G_4(u_3-u_2+u_{s1})\\
i_5&=G_5u_{32}=G_5(u_3-u_2)\\
i_6&=G_6(u_{43}+u_{s2})=G_5(-u_3+u_{s2})\\
i_7&=G_7u_{31}=G_7(u_3-u_1)
\end{aligned}\right\}\tag{3-12}$$

将式(3-12)代入式(3-11)，经整理后得

$$\left.\begin{aligned}
&(G_1+G_2+G_7)u_1-G_2u_2-G_7u_2=i_{s1}-i_{s2}\\
&-G_2u_1+(G_2+G_3+G_4+G_5)u_2-(G_4+G_5)u_3=G_4u_{s1}\\
&-G_2u_1-(G_4+G_5)u_2+(G_4+G_5+G_6+G_7)u_3=i_{s2}-G_2u_{s1}+G_6u_{s2}
\end{aligned}\right\}\tag{3-13}$$

式(3-13)的普通形式为

$$\left.\begin{aligned} G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 &= i_{s11} \\ G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + G_{23}u_3 &= i_{s22} \\ G_{31}u_1 + G_{32}u_2 + G_{33}u_3 &= i_{s33} \end{aligned}\right\} \tag{3-14}$$

式(3-14)就是具有3个独立节点电路的节点电压方程。现对照电路说明式中各量的概念。$G_{11}$称为节点1的自电导，它是连接在节点1上所有非流源支路的电导之和，恒为正。$G_{22}$、$G_{33}$与其类似。这里$G_{11}=G_1+G_2+G_7$、$G_{22}=G_2+G_3+G_4+G_5$。它们的一般表达式为

$$G_{kk} = \sum_{\text{节点}k} G\text{（不包括流源支路电导）}$$

$G_{12}$称为节点1与2的互电导，它是连接在节点1与2之间所有非流源支路的电导之和，为负值。$G_{21}$、$G_{13}$、$G_{23}$…与其类似。这里$G_{12}=G_{21}=-G_2$，$G_{13}=G_{31}=-G_7$，$G_{23}=G_{32}=-(G_4+G_5)$。它们的一般表达式为

$$G_{jk} = G_{kj} = -\sum_{j、k\text{之间}} G\text{（不包括流源支路电导）}$$

由此可见，式(3-14)的系数行列式对称。所有自电导、互电导都不包含流源支路的电导，这是因为流源支路对节点提供的电流与其支路电导无关。由式(3-13)有

$$i_{skk} = \sum i_s + \sum G u_s$$

式中，$\sum i_s$为流入节点$k$各电流源电流的代数和。当$i_s$指向节点$k$时，取"+"，反之取"−"。

$\sum G u_s$为连接在节点$k$上各实际压源支路($u_s$串联$G$)的$Gu_s$的代数和。当压源电位升方向指向节点$k$时，取"+"，反之取"−"。这里，$i_{s11}=i_{s1}-i_{s2}$，$i_{s22}=G_4u_{s1}$，$i_{s33}=i_{s2}-G_4u_{s1}+G_6u_{s2}$。$Gu_s$的物理概念可以从图3-19(b)看出。图3-19(b)是图3-19(a)中实际压源支路$u_{s2}$串联$G_6$等效转换的结果。$G_6u_{s2}$即为转换后的电流源的电流，它指向节点3，故在$i_{s33}$中取"+"。需要指出，节点电压方程的规律与支路电流无关。在列写节点电压方程时，支路电流一概不必考虑。应用节点法时，宜选支路数最多的节点为参考点，这样可使方程简单。节点分析法对平面电路及非平面电路均适用。它的最大优点是独立节点极易判断。

**例3-7** 试对图3-20所示电路用节点法求$i_1$、$i_2$、$i_3$和$u$。

**解**：选节点4为参考点，列节点1、2、3的节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)u_1 - u_2 - \frac{1}{2}u_3 = 3 + \frac{8}{4}$$

$$-u_1 + \left(1+\frac{1}{0.5}+1\right)u_2 - \frac{1}{0.5}u_3 = -2$$

$$-\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{0.5}u_2 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{0.5}+\frac{1}{2}\right)u_3 = -3$$

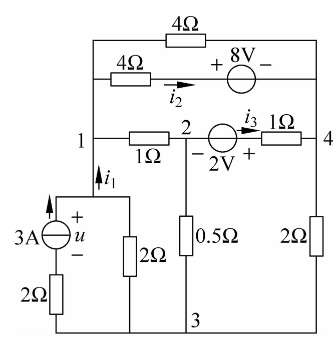



图3-20 例3-7电路

化简后为

$$2u_1 - u_2 - 0.5u_3 = 5$$
$$-u_1 + 4u_2 - 2u_3 = -2$$
$$-0.5u_1 - 2u_2 + 3u_3 = -3$$

用行列式法求解上组方程，有

$$u_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}、u_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}、u_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

式中

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&-0.5\\-1&4&-2\\-0.5&-2&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&-2\\-2&3\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-1&-0.5\\-2&3\end{vmatrix}$$

$$+(-0.5)\begin{vmatrix}-1&-0.5\\4&-2\end{vmatrix}=10$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&-1&-0.5\\-2&4&-2\\-3&-2&3\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}4&-2\\-2&3\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}-1&-0.5\\-2&3\end{vmatrix}$$

$$+(-3)\begin{vmatrix}-1&-0.55\\4&-2\end{vmatrix}=20$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&5&-0.5\\-1&-2&-2\\-0.5&-3&3\end{vmatrix}=-5$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&5\\-1&4&-2\\-0.5&-2&-3\end{vmatrix}=-10$$

最后求得

$$u_1=\Delta_1/\Delta=20/10=2(\mathrm{V})$$
$$u_2=\Delta_2/\Delta=-5/10=-0.5(\mathrm{V})$$
$$u_3=\Delta_3/\Delta=-10/10=-1(\mathrm{V})$$

由此可得支路电流 $i_1$、$i_2$、$i_3$ 及 $u$ 为

$$i_1=3+\frac{u_{31}}{2}=3+\frac{-1-2}{2}=1.5(\mathrm{A})$$

$$i_2=\frac{u_{14}-8}{4}=\frac{u_1-8}{4}=\frac{2-8}{4}=-1.5(\mathrm{A})$$

$$i_3=\frac{u_{24}+2}{1}=\frac{u_1-u_4+2}{1}=1.5(\mathrm{A})$$

$$u=u_{13}+2\times3=u_1-u_3+6=9(\mathrm{V})$$

**例 3-8**　试用节点分析法求图 3-21 所示电路中的 $i$。

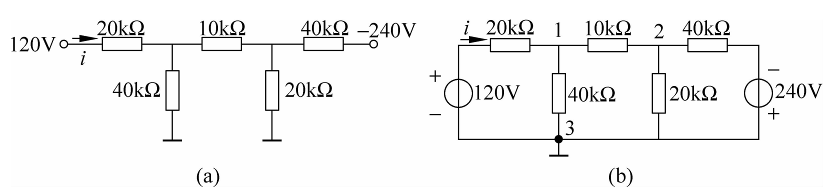



图 3-21　例 3-8 电路

**解**：将图 3-21(a)画成图 3-21(b)所示常规电路形式。以节点 3 为参考点，节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right)u_1-\frac{1}{10}u_2=\frac{120}{20}$$

$$-\frac{1}{10}u_1+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right)u_2=-\frac{240}{40}$$

即

$$0.175u_1-0.1u_2=6$$
$$-0.1u_1+0.175u_2=-6$$

待求量为 $i$，它与 $u_2$ 无关，故只需由上组方程求解 $u_1$。由上组方程消去 $u_2$，求得

$$u_1=21.8\text{V}$$

于是

$$i=\frac{u_{31}+120}{20}=\frac{-u_1+120}{20}=4.91\text{mA}$$

图 3-22 所示电路含有理想压源 $u_s$。当以节点 3 为参考点时，显然节点 1 的电压 $u_1=u_s$ 为已知，因此只需要列节点 2 的方程，该方程为

$$-G_2u_1+(G_2+G_3)u_2=i_s$$

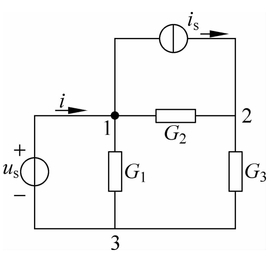



图 3-22　含理想压源电路的节点分析法

将 $u_1=u_s$ 代入上式，即可求得 $u_2$。由上分析可见，这种情况，节点电压方程数减少了，问题得到了简化。该电路亦可选节点 2 为参考点，这时必须列节点 1 和 3 的方程。$u_s$ 支路提供的电流设为 $i$，对它的处理同 $i_s$，于是有

$$(G_1+G_2)u_1-G_1u_3=-i_s+i$$
$$-G_1u_1+(G_1+G_3)u_3=-i$$

该方程组各项概念及规律仍与式(3-14)的一样，只不过 $i_{skk}$ 中包含了理想压源支路电流。这两个方程含有 3 个未知量，因此还需补充一个方程。由已知条件，补充方程为

$$u_1-u_3=u_s$$

联立上面的 3 个方程，即可解得 $u_1$、$u_3$ 和 $i$。

**例 3-9**　用节点分析法求图 3-23 所示电路中各支路电流。

**解 1**：以 b 点为参考点，于是有

$$u_a=3\text{V}$$
$$-5u_a+(5+10)u_c=5-2-5\times3-10\times2$$

上式可写为 $-5u_a+15u_c=-32$

$u_a=3\text{V}$ 代入，解得 $u_c=-\frac{17}{15}\text{V}$

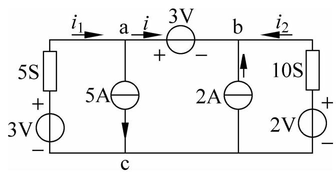



图 3-23　例 3-9 电路

于是

$$i_1=5(u_s-u_a+3)=-\frac{17}{3}\approx-5.7(\text{A})$$

$$i_2=10(u_c-u_b+2)=\frac{130}{15}\approx8.7(\text{A})$$

$$i=i_1-5=-10.7\text{A}$$

**解 2**：以 c 点为参考点列方程

$$5u_a=15-5-i$$
$$10u_b=20+2+i$$

$$u_a - u_b = 3$$

联立上列方程，解得

$$u_a = \frac{62}{15}\text{V}, \quad u_b = \frac{17}{15}\text{V}, \quad i = -\frac{32}{3} \approx -10.7(\text{A})$$

于是

$$i_1 = 5 + i = -5.7\text{A}$$
$$i_2 = -(2 + i) = 8.7\text{A}$$

若电路含有受控源，则在列节点方程时，受控源按独立源一样对待。需要注意的是，受控源的控制量必须用节点电压表示。

图 3-24 所示电路含有受控源，以 c 点为参考点进行分析。节点 a、b 的电压方程为

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)u_a - \frac{1}{R_3}u_b = \frac{u_s}{R_1}$$
$$-\frac{1}{R_3}u_a + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) = -g_m u_3$$

式中 $u_3$ 用节点电压表示为

$$u_3 = u_a - u_b$$

将它代入上组方程，于是有

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)u_a - \frac{1}{R_3}u_b = \frac{u_s}{R_1}$$
$$-\left(\frac{1}{R_3} - g_m\right)u_a + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} - g_m\right)u_b = 0$$

由此即可求得 $u_a$ 和 $u_b$。该方程组中 $G_{12} \neq G_{21}$。这是由于受控源所造成。因此，含受控源电路的节点电压方程的系数行列式一般不对称。

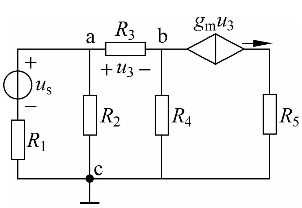



图 3-24 含受控源电路的节点分析法

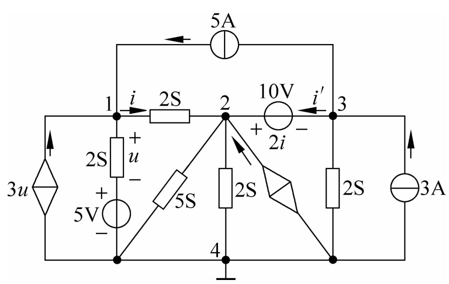



图 3-25 例 3-10 电路

**例 3-10** 试用节点分析法求图 3-25 所示电路的 $i$ 及 $u$。

**解**：以节点 4 为参考点。设 10V 压源支路电流为 $i'$，于是节点电压方程为

$$(2 + 2)u_1 - 2u_2 = 5 \times 2 + 5 + 3u$$
$$-2u_1 + (2 + 5 + 2)u_2 = 2i + i'$$
$$2u_3 = 3 - i' - 5$$

3 个方程有 6 个未知量，故还需补充 3 个方程，它们是

$$\begin{cases} u_2 - u_3 = 10 \\ u = u_1 - 5 \\ i = 2(u_1 - u_2) \end{cases}$$

上两组方程联立，消去 $u_3$、$i$、$i'$，于是有

$$\begin{cases} 4u_1 - 2u_2 = 15 + 3u_1 - 15 \\ -2u_1 + 11u_2 = 18 + 4u_1 - 4u_2 \end{cases}$$

简化为

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 = 0 \\ -6u_1 + 15u_2 = 18 \end{cases}$$

解得 $u_1=12\text{V}$，$u_2=6\text{V}$

因此

$$u = u_1 - 5 = 7\text{V}$$

$$i = 2(u_1 - u_2) = 12\text{A}$$

## 练习题

3-6　列出图 3-26 所示电路中 1、2、3 节点的方程，并解出这 3 个节点电压。

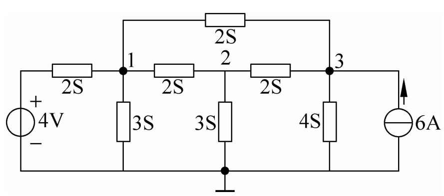



图 3-26　练习题 3-6 电路

3-7　列出图 3-27 所示各电路的节点方程。

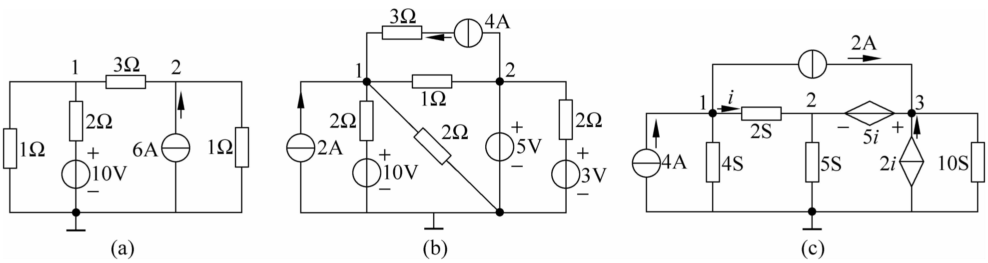



图 3-27　练习题 3-7 电路

3-8　试用节点分析法计算图 3-28 所示电路中的 $u_{ab}$。

3-9　试用节点分析法求图 3-29 所示电路中的 $u$ 和 $i$。

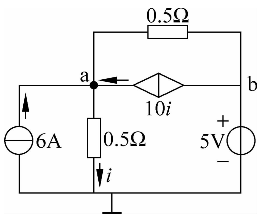



图 3-28　练习题 3-8 电路

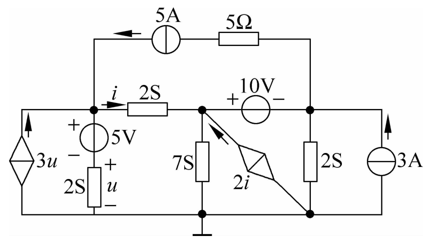



图 3-29　练习题 3-9 电路

## 3.5 回路电流法

### 3.5.1 图论的基本概念

上面介绍了网孔分析法和节点分析法，它们对应的解变量分别是网孔电流和节点电压。这两种方法的方程数量少，而且都有固定规律可循，因此得到了广泛应用。除了这两种方法外，是否还有其他规范方法呢？这就要了解一些有关图论的基本概念。

在 3.1 节中已提出了图的概念。确切地说，图是一组节点与支路的集合，其中每一支路的两端都终止在节点上，这就是图的定义。若图的支路标有方向，则称其为有向图，否则为无向图。如果图的任意两个节点之间至少存在一条支路，则称其为连通图，否则为非连通图。每一个连通图可看成是一个分离部分，非连通图至少有两个分离部分。图 3-30 所示的 $G_1$、$G_2$ 为连通图。$G_1$ 为平面图，$G_2$ 为非平面图。$G_3$、$G_4$ 为非连通图，它们均由两个分离部分组成。$G_4$ 中的一个分离部分仅为一个节点，这种没有支路连接的节点称为孤立节点。

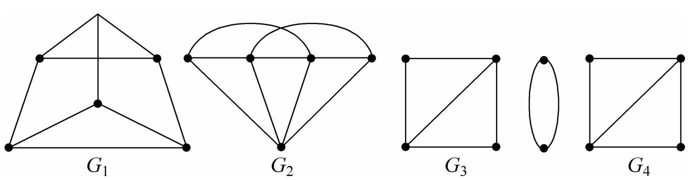



图 3-30　连通图和非连通图

树是图论中一个十分重要的概念。首先定义图 $G$ 的子图。如果图 $G_1$ 的每个节点和支路都是图 $G$ 的节点和支路的一部分(或全部)，则 $G_1$ 称为 $G$ 的子图。连通图 $G$ 的生成树(简称树)$T$ 是 $G$ 的一个连通子图，它包含 $G$ 的全部节点，但不包含任何回路。图 3-31 表明了

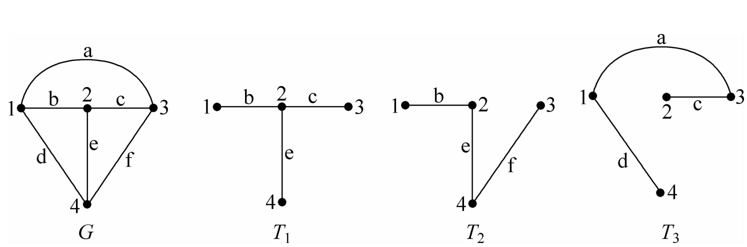



图 3-31　图 $G$ 的生成树

连通图$G$的部分树。该图$G$共有16个树，读者可自行画出其余的13个。连通图$G$，当它的一个树确定后，构成这个树的支路称为树支，$G$中非树支的支路称为连支。可以证明，连通图$G$的任一个树的树支数等于$n-1$，$n$为节点数。可以这样论证：先画一条树支，它对应两个节点，以后每增加一条树支，则相应增加一个节点，于是支路数总比节点数少1。图有$n$个节点，故树支数$=n-1$。若图的支路数为$b$，显然，连支数$=b-(n-1)=b-n+1$。

图3-32(a)所示的图$G$中，粗线为其一个树$T$，图3-32(b)、(c)、(d)给出了各个连支与树$T$结合后的情况。不难看出，每个连支与树$T$结合后，便出现一个回路，这些回路都仅含一条连支，而其余都是树支。这种只含一条连支的回路称为基本回路或单连支回路。在有向图中，基本回路的方向一般选为与对应连支的方向一致。图3-32(e)给出了有向图中的全部基本回路及其方向。由图可见，图$G$的基本回路数等于连支数，即基本回路数$=b-n+1$。任一个基本回路都含有一条其他回路所没有的支路(连支)，因此任一个基本回路的KVL方程不可能由其他基本回路的KVL方程的组合得到，所以基本回路是一组独立回路。

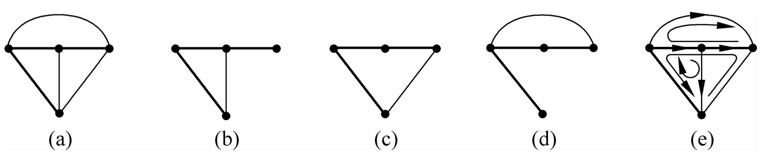



图3-32 基本回路

现在介绍有关割集的概念。连通图$G$的一个割集是图$G$的一部分支路的集合，切割(或移去)它们后，将使图分为且仅分为两个分离部分(可以是孤立节点)，但若少切割(或移去)其中任一支路，图仍连通，具有这种性质的支路集合称为割集。以图3-33(a)为例，支路集Ⅰ$=\{1,3,4\}$和Ⅱ$=\{1,2,4,6\}$是割集，因为分别移去它们后使图分成了两个部分[图3-33(b)、(c)所示]。支路集Ⅲ$=\{1,2,3,4,6\}$不是割集，因为移去它们后，使图分成了3部分[图3-33(d)]。支路集$\{1,2,3,4\}$也不是割集，虽然移去它们后也将图分成了两部分[图3-33(e)]，但若少移去支路2，图仍为两部分。由图3-33(a)可以看出，割集Ⅰ对应一个孤立节点(节点a)，这种对应一个孤立节点的割集称为节点割集。为了便于对割集的观察，在图$G$上作一封闭线，被此面切割的支路集即为割集。封闭面一般只画出切割支路的那一部分[图3-33(a)]。不难看出，割集封闭面所围部分，正是第1章所说的广义节点。有向图的割集具有方向，其方向或由闭合面向外，或由闭合面向内，如图3-33(f)所示。

KCL对广义节点有效，因此它也适用于割集。故对任一割集均存在KCL方程$\sum i=0$。式中，当支路电流方向与割集方向一致时，取"+"，反之取"−"。例如，图3-33(f)所示为某电路的有向图，于是割集Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的KCL方程分别为

$$i_1-i_3-i_5+i_6=0$$
$$i_4+i_5-i_6=0$$
$$i_2-i_3+i_6=0$$

图$G$的任何树所对应的连支集绝不可能构成割集，因为切割它们后，树还完整地存在，图仍连通。因此任何一组连支电流不满足KCL方程时，也即$b-n+1$个连支电流是一组独立变量。

任何连支集不能构成割集，也就是说，任何割集必含有树支。如果割集只含有一个树

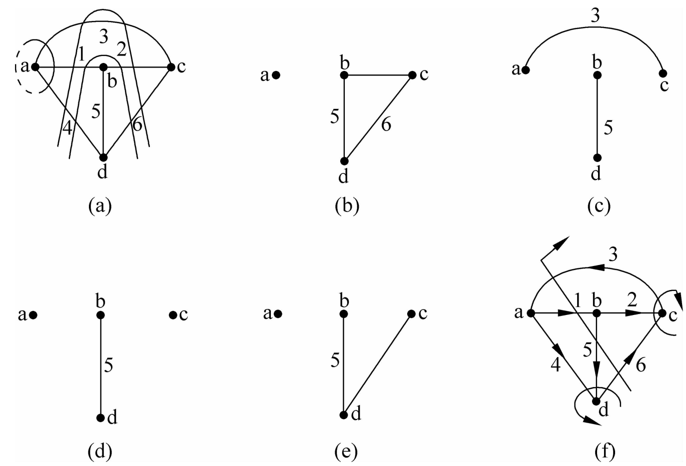



图 3-33　割集

支,而其余的都是连支,这样的割集称为基本割集或单树支割集。在图 3-33(f)中,粗线表示图 $G$ 的一个树,割集Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ是其对应的基本割集。有向图中,基本割集的方向一般选为与对应的树支方向一致。基本割集与所选的树有关。当图 $G$ 的一个树选定后,其基本割集数等于树支数,即等于 $n-1$。每个基本割集都有一个不为其他基本割集所占用的支路(树支),故每个基本割集对应的 KCL 方程组必定独立。

## 3.5.2　回路分析法

与网孔电流相类似,基本回路也可设一个回路电流。当回路方向与连支电流方向一致时[图 3-33(e)],基本回路电流就等于连支电流。连支电流是一组独立变量,故基本回路电流也是一组独立变量,且其数量=连支数=$b-n+1$。基本割集中的树支仅有一条,故其 $\sum i=0$,方程可写成 $i_{\mathrm{T}}+\sum i_{\mathrm{L}}=0$ 形式,即 $i_{\mathrm{T}}=-\sum i_{\mathrm{L}}$。式中 $i_{\mathrm{T}}$ 为树支电流,$i_{\mathrm{L}}$ 为连支电流,因此各支路电流均可由连支电流表示出,也即可由基本回路电流表示出。可见,基本回路电流具有完备性。以上说明基本回路电流是一组解变量。

支路电流法中,KVL 方程的形式为 $\sum Ri_b=\sum u_{\mathrm{s}}$。现将各支路电流 $i_{\mathrm{b}}$ 用基本回路电流(即连支电流)$i_{\mathrm{L}}$ 表示,于是该式可写成 $\sum\left(R\sum i_{\mathrm{L}}\right)=\sum u_{\mathrm{s}}$。它有 $b-1+n$ 个,且均独立,故可由它们解出 $b-1+n$ 独立回路电流 $i_{\mathrm{L}}$。这种以回路电流为变量列方程求解回路电流的方法称为回路分析法。下面以图 3-34(a) 所示电路为例具体分析。

图 3-34(b)所示为图 3-34(a)所示电路的有向图,粗线表示部分为它的一棵树,图中示出了其所对应的 3 个基本回路。为了便于分析,将基本回路标于图 3-34(a)中,用 $i_1$、$i_2$ 和 $i_5$ 表示,于是有

$$R_1i_1+R_4(i_1-i_2)+R_6(i_1-i_2+i_5)+R_3(i_1+i_5)=u_{\mathrm{s1}}+u_{\mathrm{s3}}$$

$$R_2i_2+R_6(i_2-i_1-i_5)+R_4(i_2-i_1)=-u_{\mathrm{s2}}$$

$$R_5i_5+R_6(i_1-i_2+i_5)+R_3(i_1+i_5)=u_{\mathrm{s3}}$$

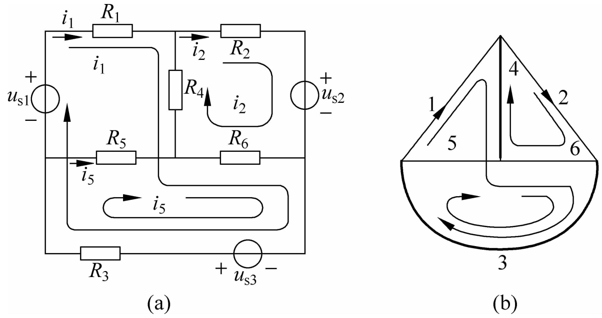



图 3-34 回路分析法

经整理后得

$$\left.\begin{aligned}&(R_1+R_3+R_4+R_6)i_1-(R_4+R_6)i_2+(R_3+R_6)i_5=u_{s1}+u_{s3}\\&-(R_4+R_6)i_1+(R_2+R_4+R_6)i_2-R_6i_5=-u_{s2}\\&(R_3+R_6)i_1-R_6i_2+(R_3+R_5+R_6)i_5=u_{s3}\end{aligned}\right\}\tag{3-15}$$

式(3-15)就是回路电流方程,其规律以及各项系数的概念与网孔电流方程的完全一样,这里不再赘述。有一点需要指出,网孔法中,若网孔电流方向全为顺(或逆)时针方向,则各互电阻全为负,这一结论对回路法不适用。互电阻的正负,仍要由流过互电阻的两个回路电流的方向是相同还是相反而定。

在图 3-34(b)中,若树选为{4,5,6},不难看出,基本回路就是网孔。一般情况下,网孔是一组基本回路(对某些电路,选不出一棵树使其基本回路就是网孔,如图 3-4(a)所示的平面图)。故网孔分析法是回路分析法的特例。由于一个电路有若干个树,因而与网孔分析法相比,回路分析法具有更大的灵活性,回路分析法是以连支电流作为方程式的变量,可以充分利用选树的灵活性,将最感兴趣的支路选为连支,使其电流成为直接求解的变量。另外,应将已知的电流源电路定为连支,这样可以减少未知量及方程式数量,从而使计算得到简化。网孔分析法只适用于平面电路,回路分析法则无此限制,所以说回路法是更加一般性的方法。

应用回路分析法,应首先选树,确定基本回路及回路电流,然后列回路电流方程并联立求解。最后由回路电流求出各支路电流及元件电压。

**例 3-11** 应用回路分析法求图 3-35(a)所示电路中各支路的电流。

**解**:画出图 3-35(a)所对应的图 $G$,如图 3-35(b)所示。为了减少未知回路电流的数目,应选 3A 流源支路为连支,以使所选的树不含支路 4。图 3-35(b)给出了所选的树(粗线所示)及其对应的基本回路。为了便于观察和分析,将回路示于图 3-35(a)中。由于回路电流 $i_4=3\text{A}$ 为已知,因此只需列出 $i_1$ 回路和 $i_3$ 回路的 KVL 方程。它们是

$$(1+1+0.1)i_1+i_3-(0.1+1)3=-1-2$$
$$i_1+(0.5+1)i_3-3=-2$$

经整理后有

$$2.1i_1+i_3=0.3$$
$$i_1+1.5i_3=1$$

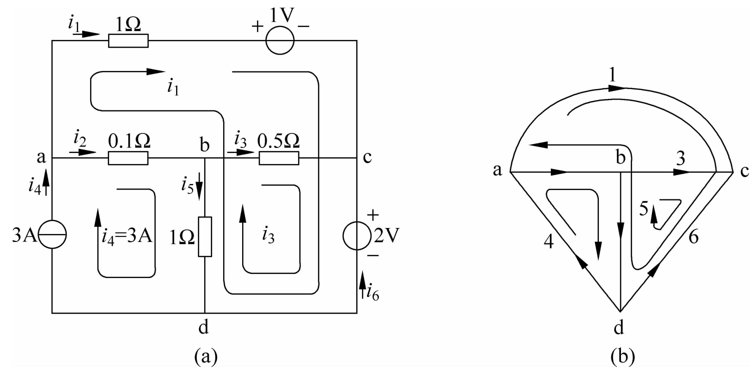



图 3-35　例 3-11 电路

解得

$$i_1 = -0.26\text{A},\quad i_3 = 0.84\text{A}$$

其他各支路电流为

$$i_2 = i_4 - i_1 = 3 + 0.26 = 3.26(\text{A})$$

$$i_5 = -i_1 - i_3 + i_4 = 0.26 - 0.84 + 3 = 2.42(\text{A})$$

$$i_6 = -i_1 - i_3 = +0.26 - 0.84 = -0.58(\text{A})$$

其结果与前面支路法(例 3-2)求得的相同。

由该例的分析可以看出，在列回路电流方程时，互电阻的判断不如网孔法简单，这是回路法不如网孔法的地方。该例宜用网孔分析法，因为这时流源支路也只有一个网孔电流流过。

**例 3-12**　应用回路分析法求图 3-36(a)中的 $i_1$。

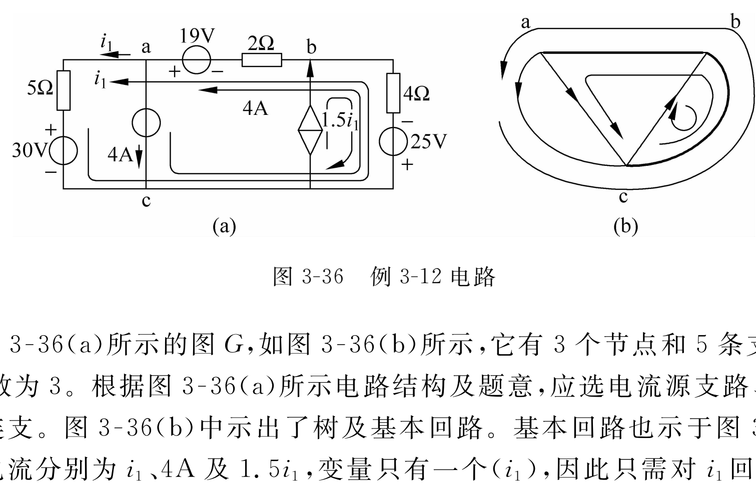



图 3-36　例 3-12 电路

**解**：作图 3-36(a)所示的图 $G$，如图 3-36(b)所示，它有 3 个节点和 5 条支路，因此树支数为 2，连支数为 3。根据图 3-36(a)所示电路结构及题意，应选电流源支路、$i_1$ 支路及受控流源支路为连支。图 3-36(b)中示出了树及基本回路。基本回路也示于图 3-36(a)。3 个回路的回路电流分别为 $i_1$、4A 及 $1.5i_1$，变量只有一个($i_1$)，因此只需对 $i_1$ 回路列回路电流方程，于是有

$$(5+4+2)i_1 + (4+2)\times 4 - 4\times 1.5i_1 = -30 - 25 + 19$$

解得

$$i_1 = -12\text{A}$$

用回路法分析电路时，一般可省去选树这一步，而直接根据电路的结构及条件确定独立

回路，其方法是使每一回路至少有一条不为其他回路所占有的支路。例如，图 3-35(a)所示电路，若要求 $i_5$，则应使支路 4 和支路 5 均只有一个回路电流流过。这时可选回路 abcda、bdcb 及 acba 3 个独立回路，对应的回路电流分别为 3A、$i_5$ 及 $i_1$。读者试再另选一组独立回路。

**例 3-13** 试用回路法求解图 3-37 所示电路中的各支路电流。

**解**：选独立回路如图 3-37 所示，回路电流分别为 $i_m$、$g_m u_4$ 及 $i_4$。受控流源的控制量 $u_4$ 用回路电流表示为 $u_4=-R_4 i_4$，可见，3 个回路电流只有一个变量 $i_4$。对 $i_4$ 的回路方程为

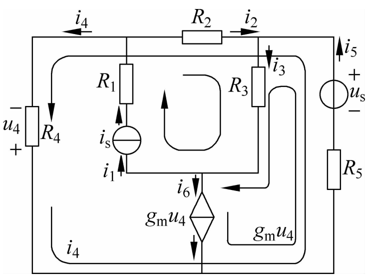



图 3-37 例 3-13 电路

$$(R_2+R_4+R_5)i_4-R_2 i_s+R_5 g_m u_4=u_4$$

将 $u_4=-R_4 i_4$ 代入上式，经整理后得

$$(R_2+R_4+R_5-g_m R_4 R_5)i_4=u_s+R_2 i_s$$

于是

$$i_4=\frac{u_s+R_2 i_s}{R_2+R_4+R_5-g_m R_4 R_5}$$

其他各支路电流为

$$i_1=i_s,\quad i_2=i_1-i_4,\quad i_3=i_s-g_m R_4 i_4$$

$$i_5=i_4-g_m R_4 i_4,\quad i_6=-g_m R_4 i_4$$

将 $i_4$ 代入上列各式，即可求出各支路电流。

### 练习题

3-10 试用回路分析法重解练习题 3-4。

3-11 按给定的回路电流方法，写出图 3-38 所示电路的回路电压方程。

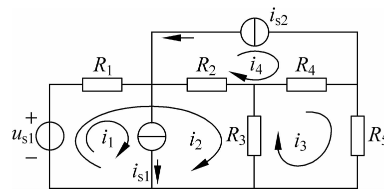



图 3-38 练习题 3-11 电路

## 3.6 小结

### 3.6.1 电路方程的独立性

具有 $n$ 个节点的电路或图，其独立的 KCL 方程有 $n-1$ 个，且为任意的 $n-1$ 个。

具有 $b$ 条支路和 $n$ 个节点的平面图，其网孔数 $m=b-n+1$，且网孔的 KVL 方程组独立。

### 3.6.2 方程法分析

#### 1. 支路电流法

具有 $n$ 个节点、$b$ 条支路的电路，以支路电流(是完备变量，但不是相互独立变量)为未知量，依 KCL、KVL、元件 VAR 建立 $n-1$ 个独立节点 KCL 方程、$b-n+1$ 个独立回路 KVL 方程，联立求解这 $b$ 个方程即得各支路电流，进而可求得电路中的电压、功率，这就是支路电流法。此法优点是直观，解得的电流就是各支路电流，可以用电流表测量，缺点是当

电路较复杂时用手解方程的工作量太大。

### 2. 网孔分析法

以网孔电流(完备、独立变量)做未知量依 KVL 及元件 VAR 建立 $b-n+1$ 个网孔回路 KVL 方程,解方程得网孔电流,进而求得支路电流、电压、功率,这就是网孔分析法。此法优点是所需方程个数较支路电流法少,根据归纳总结出的方程通式观察电路直接列写方程的规律易于掌握。网孔法具有只试用于平面电路的局限性。

### 3. 节点电位法

节点电位法就是择其一节点作参考点,以 $n-1$ 个节点电位(完备、独立变量)作未知量,依 KCL、元件 VAR 建立 $n-1$ 个独立节点的节点电位方程,解方程得节点电位,进而求得支路电流、电压、功率的方法。此法优点是,所需求解的方程个数少于支路电流法,由归纳总结出的方程通式观察电路直接列写方程的规律易于掌握。缺点是对一般给出的电阻参数、电压源形式的电路用节点法分析时整理方程较繁。

网孔分析法、节点电位法解方程的数目明显少于支路电流法,所以今后用手解算电路,如使用方程法,一般选用网孔分析法或节点电位法,很少选用支路电流法。当平面电路的网孔个数不多于独立节点数时,一般选网孔分析法分析较简单;反之,选用节点电位法分析较简单。

### 4. 回路分析法

与网孔电流相类似,基本回路也可设一个回路电流。这种以回路电流为变量列方程求解回路电流的方法称为回路分析法。回路电流方程,其规律以及各项系数的概念与网孔电流方程的完全一样,这里不再赘述。网孔分析法是回路分析法的特例,与网孔分析法相比,回路分析法具有更大的灵活性,回路分析法是以连支电流作为方程式的变量,可以充分利用选树的灵活性,将最感兴趣的支路选为连支,使其电流成为直接求解的变量。另外,应将已知的电流源电路定为连支,这样可以减少未知量及方程式数量,从而使计算得到简化。网孔分析法只适用于平面电路,回路分析法则无此限制。

## 3.6.3 方程通式

### 1. 网孔方程通式

具有 3 个网孔平面电路的网孔方程通式为

$$\begin{cases} R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3 = u_{s11} \\ R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3 = u_{s22} \\ R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3 = u_{s33} \end{cases}$$

式中,自电阻 $R_{jj}(j=1,2,3)$ 等于第 $j$ 网孔的各支路上所有电阻相加;互电阻 $R_{jk}(j,k=1,2,3$,且 $j\neq k)$ 等于 $j$ 网孔与 $k$ 网孔公共支路上电阻相加,当两网孔电流流经公共支路时方向一致取正号,反之取负号;等效电压源 $u_{sjj}(j=1,2,3)$ 等于 $j$ 网孔内各电压源的代数和,当巡行中先遇电压源的正极取负号,反之取正号。

### 2. 节点方程通式

具有 3 个独立节点电路的节点方程通式为

$$\begin{cases} G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 = i_{s11} \\ G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + G_{23}u_3 = i_{s22} \\ G_{31}u_1 + G_{32}u_2 + G_{33}u_3 = i_{s33} \end{cases}$$

式中，自电导 $G_{jj}$ $(j=1,2,3)$ 等于与节点 $j$ 相连各支路电导之和；互电导 $G_{jk}$ $(j,k=1,2,3$，且 $j\neq k)$ 等于节点 $j$ 与节点 $k$ 所有公共支路上电导之和，取负号；等效电流源 $i_{sjj}$ $(j=1,2,3)$ 等于流入节点 $j$ 电流源的代数和，流入节点 $j$ 的电流源取正号，反之取负号。

观察电路，会熟练应用“方程通式”写出电路的网孔方程或节点方程是本章的重点。

## 习题 3

3.1 用支路电流法求解图 3-39 所示电路各支路电流。

3.2 应用支路电流法求图 3-40 中的各支路电流。

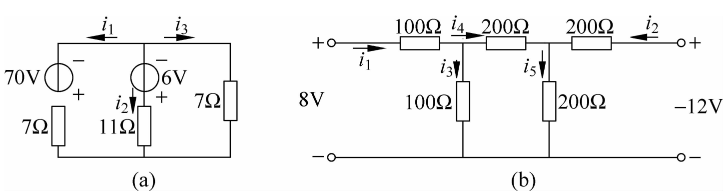



图 3-39 习题 3.1 电路

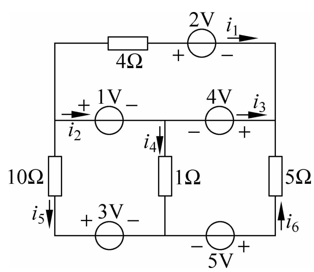



图 3-40 习题 3.2 电路

3.3 用网孔分析法求图 3-41 所示电路中的 $i_1$、$i_2$ 及 $i_3$。

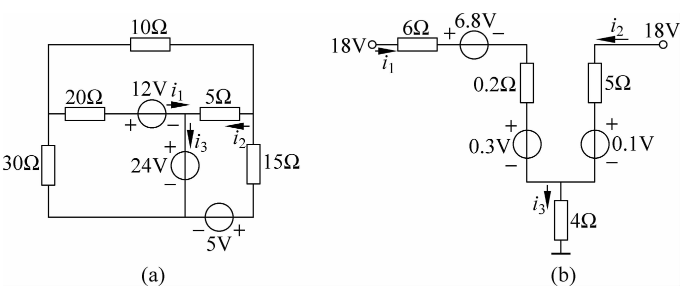



图 3-41 习题 3.3 电路

3.4 图 3-42 所示电路，(1) 求 a 点对地电压；(2) a 点对地短路时，求从 a 入地的电流。

3.5 已知网孔方程式如下，试画一种可能的电路结构。

$$\left.\begin{aligned} 10i_1 - 5i_2 &= 10 \\ -5i_1 + 10i_2 - i_3 &= 10 \\ -i_2 + 10i_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3.6　一个三网孔电路，已知其中网孔电流 $i_1$ 如下式所示。试画出3种不同的电路结构图。

$$i_1=\frac{\begin{vmatrix}-5 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}}$$

3.7　用网孔分析法求图3-43所示电路中的 $u_x$。已知 $u_{ab}=2V$。

3.8　用网孔分析法求图3-44中各支路电流及 $u$。若与流源串联的电阻为零，试分析电路中何处的电流、电压将受影响。

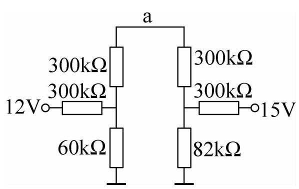



图3-42　习题3.4电路

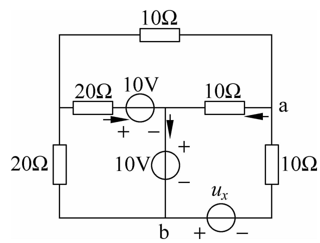



图3-43　习题3.7电路

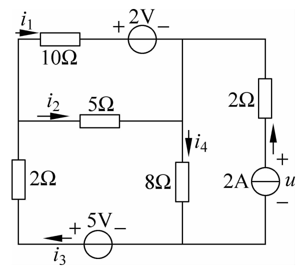



图3-44　习题3.8电路

3.9　用网孔分析法求图3-45所示电路中的 $i_1$、$u_2$。

3.10　用网孔分析法求图3-46所示电路中各电功率。

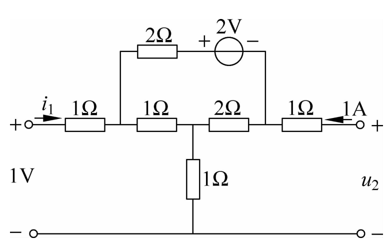



图3-45　习题3.9电路

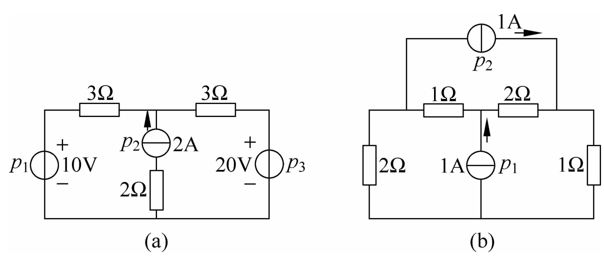



图3-46　习题3.10电路

3.11　用网孔分析法计算图3-47中各电源的功率 $p_1$、$p_2$、$p_3$ 及 $p_4$。

3.12　应用网孔分析法计算图3-48中的 $u_1$ 及 $u_2$。

3.13　应用网孔分析法求图3-49中的 $i_A$ 及受控源的功率。

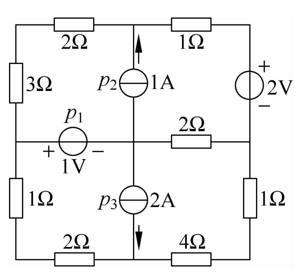



图3-47　习题3.11电路

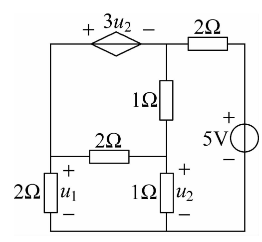



图3-48　习题3.12电路

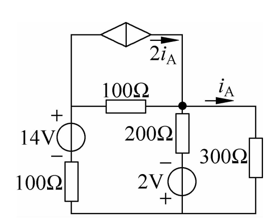



图3-49　习题3.13电路

3.14　用节点分析法重解题1。

3.15　用节点分析法重解题8。

3.16　用节点分析法重解题9。

3.17　(a)用节点分析法求图3-50中的$u_a$；(b)用节点分析法求图3-50中的$i$。

3.18　用节点分析法重解题2。

3.19　用节点分析法重解题3中的(a)图。

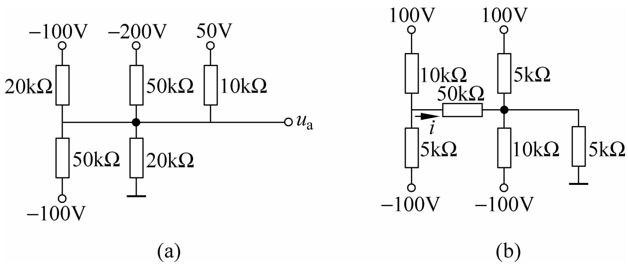



图3-50　习题3.17电路

3.20　图3-51所示电路中，$u_{ab}=5V$，试用节点分析法求$u_x$。

3.21　列写图3-52所示电路的节点电压方程式。

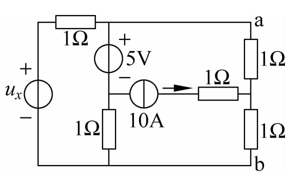



图3-51　习题3.20电路

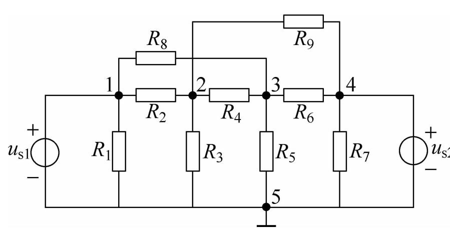



图3-52　习题3.21电路

3.22　列写求解图3-53所示电路的节点电压所必需的方程式。

3.23　应用节点分析法求图3-54所示电路中电压源的输出功率$p_1$和$p_2$。

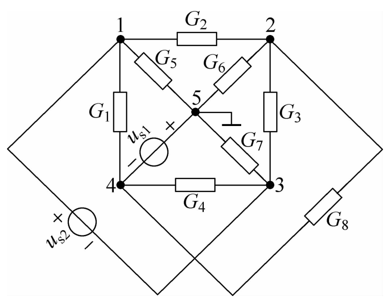



图3-53　习题3.22电路

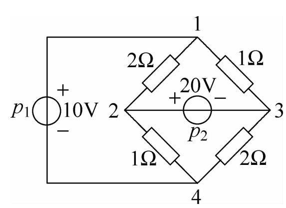



图3-54　习题3.23电路

3.24　应用节点分析法求图3-55中的$u_0$。

3.25　应用节点分析法求图3-56中的$i_1$。

3.26　连通图如图3-57所示，试分别画出它们的全部树。

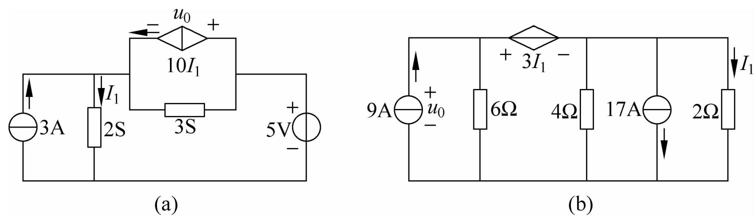



图 3-55 习题 3.24 电路

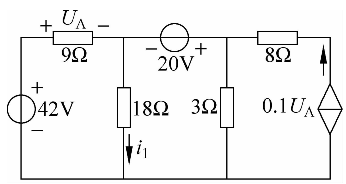



图 3-56 习题 3.25 电路

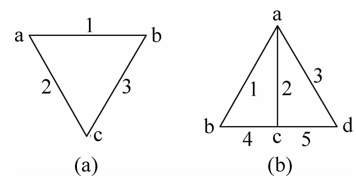



图 3-57 习题 3.26 电路

3.27 有向图如图 3-58 所示，其中粗线表示树支。试分别画出它们的基本回路及方向。

3.28 对上题所示有向图，试分别画出它们的基本割集及方向。

3.29 用回路分析法重解题 10(只列一个方程)。

3.30 用回路分析法重解题 11(列两个方程)。

3.31 用回路分析法重解题 20。

3.32 电路如图 3-59 所示，试用回路分析法列出一个方程，并求解电流 $i$。

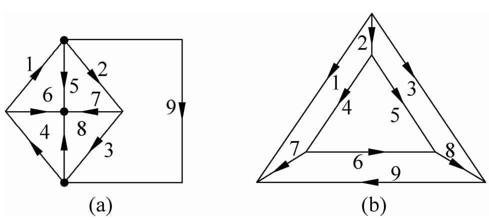



图 3-58 习题 3.27 电路

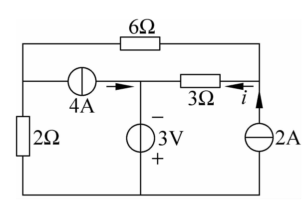



图 3-59 习题 3.32 电路

3.33 图 3-60 所示电路中，所有电阻均为 1Ω。试用回路分析法求 $i_1$。

3.34 应用回路分析法，只列一个方程式求图 3-61 中的 $i_1$。

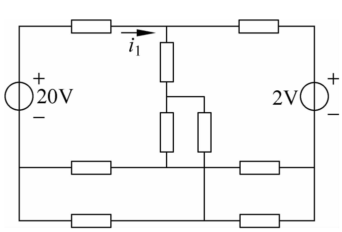



图 3-60 习题 3.33 电路

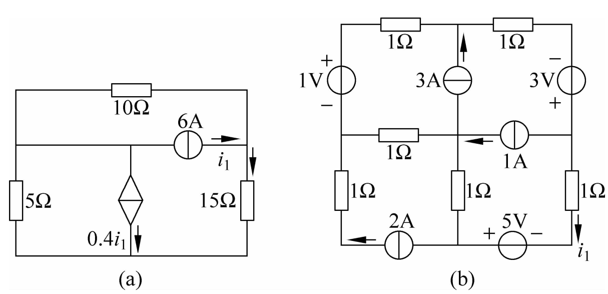



图 3-61 习题 3.34 电路