

矩阵位移法

【知识点罗列及学习指数】

1. 了解矩阵位移法的两个主要内容；
2. 掌握单元刚度矩阵及其性质；
3. 掌握两种坐标系之间的转换；
4. 掌握结构原始刚度矩阵的形成及组成规律；
5. 掌握支承条件的引入方法；
6. 掌握非结点荷载的处理方法；
7. 掌握矩阵位移法的计算步骤；
8. 了解矩阵位移法的程序编制。

1.1 概述

经典的力法和位移法都是传统的结构力学基本方法,其相应的计算手段是手算。若基本未知量数目较多,需建立和求解多元代数方程组,用手算是非常困难和烦琐的,因而传统方法只适宜解算计算简图较简单、未知量数目不太多的结构分析问题。数学上矩阵的应用和电子计算机的出现及广泛应用,使结构力学发生了巨大的变化,通过矩阵这一工具将传统的分析方法与电子计算机的应用联系起来,形成了矩阵分析方法。这一方法的基本原理与上述传统的分析方法并无实质上的区别,只是在处理手段上采用了矩阵这一数学工具。这是因为矩阵的运算规律最适合电算的特点,便于编制计算机程序。杆件结构的矩阵分析,也称杆件有限元法,它的主要内容包括以下两部分。

1) 单元分析

把结构先分解为有限个较小的单元,即所谓离散化。对于平面杆件结构,一般以一根杆件(或一段杆件)作为一个单元。结构离散化的目的是在较小的范围内分析单元的内力与位移之间的关系,建立单元刚度矩阵(或单元柔度矩阵),这称为单元分析。

2) 整体分析

将各单元集成成原来的结构,这就要求各单元必须满足原结构的支承条件、结构的变形连续条件(几何条件)和平衡条件,从而建立整个结构的刚度方程(或柔度方程),以求解原结构的位移和内力,这称为整体分析。

根据所选基本未知量的不同,矩阵分析方法同样有矩阵位移法(刚度法)和矩阵力法(柔度法)两种。矩阵位移法的程序简单且通用性强,故应用最广。本章只介绍矩阵位移法。

学习本章时,既要看到矩阵位移法与传统位移法在基本原理方面的相同处,又要看到在具体做法和步骤方面的不同之处。有些作法从手算的观点看是“笨”的,难以理解的,而从电算的角度看则是方便的。注意到这些将有助于对本章的理解。

1.2 局部坐标系中的单元刚度矩阵

本节所研究的单元均为等截面直杆,对平面杆件结构杆件单元的分析,在于建立杆端力与杆端位移之间的关系,即转角位移方程,在此用矩阵的形式来表示。为使解答更精确和满足一般化的需要,考虑了轴向变形的影响。

1.2.1 一般单元的单元刚度矩阵

如图 1-1 所示为一等截面直杆,设其在整个结构中的单元编号为 e ,它连接着两个结点 i, j 。现以 i 为坐标原点,以从 i 到 j 的方向为 $\bar{x}$ 轴的正向,并以 $\bar{x}$ 轴的正方向逆时针旋转 90° 为 $\bar{y}$ 轴的正向。以上所述坐标系称为单元的局部坐标系。 i, j 分别称为单元的始端和末端。

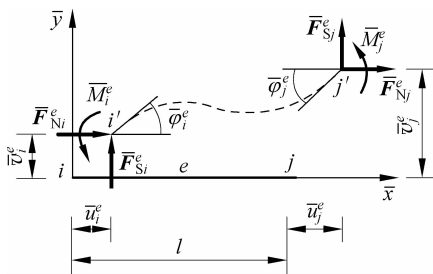


图 1-1 一般单元

一般情况下,平面杆件单元两端各有三个杆端力分量,即 i 端的轴力 $\bar{F}_{Ni}^e$ 、剪力 $\bar{F}_{Si}^e$ 和弯矩 $\bar{M}_i^e$ 及 j 端的 $\bar{F}_{Nj}^e$ 、 $\bar{F}_{Sj}^e$ 和 $\bar{M}_j^e$ (符号上面冠以一横线,用来表示它们是局部坐标系中的量值,上标 e 表示它们是属于单元 e 的,下同);与此相应的有六个杆端位移分量,即 $\bar{u}_i^e$ 、 $\bar{v}_i^e$ 、 $\bar{\phi}_i^e$ 和 $\bar{u}_j^e$ 、 $\bar{v}_j^e$ 、 $\bar{\phi}_j^e$ 。上述单元被称为一般单元(或自由单元)。杆端力和杆端位移的正负号规定:杆端轴力 $\bar{F}_N$ 以增加 $\bar{x}$ 轴正向为正,杆端剪力 $\bar{F}_S$ 以增加 $\bar{y}$ 轴正向为正,杆端弯矩 $\bar{M}$ 以逆时针方向旋转为正;杆端位移的正负号规定与杆端力相同。

现设六个杆端位移分量已给出,同时杆上无荷载作用,要确定相应的六个杆端力分量。根据胡克定律和转角位移方程,不难确定仅当某一杆端产生单位位移分量(其余各杆端位移分量皆等于零)时的各杆端力分量,这就相当于两端固定梁仅发生某一单位支座位移时的情况,如图 1-2 所示。

根据叠加原理可得

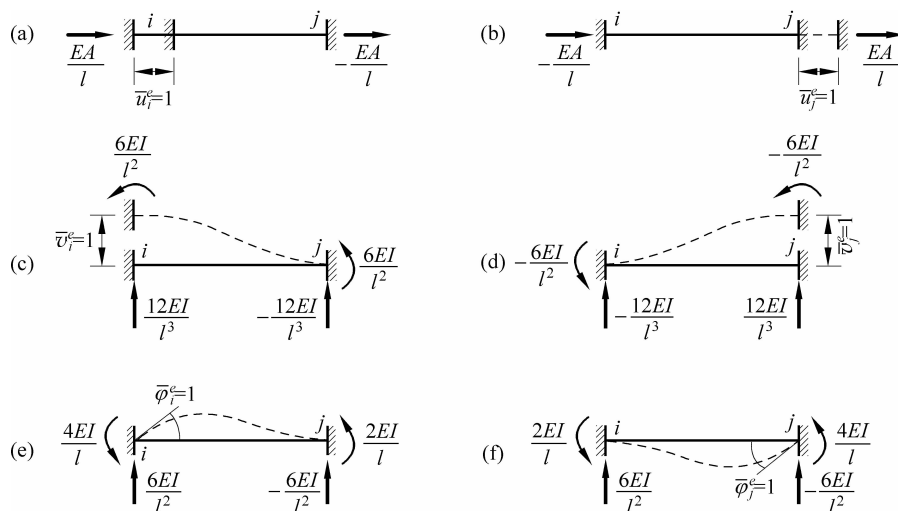


图 1-2 某一杆端位移分量等于 1 时的杆端力分量

(a) $\bar{u}_i^e = 1$ 时引起的杆端力分量；(b) $\bar{u}_j^e = 1$ 时引起的杆端力分量；(c) $\bar{v}_i^e = 1$ 时引起的杆端力分量；
(d) $\bar{v}_j^e = 1$ 时引起的杆端力分量；(e) $\bar{\varphi}_i^e = 1$ 时引起的杆端力分量；(f) $\bar{\varphi}_j^e = 1$ 时引起的杆端力分量

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Ni}^e &= \frac{EA}{l} \bar{u}_i^e - \frac{EA}{l} \bar{u}_j^e \\ \bar{F}_{Si}^e &= \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i^e + \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_i^e - \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j^e + \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_j^e \\ \bar{M}_i^e &= \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i^e + \frac{4EI}{l} \bar{\varphi}_i^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j^e + \frac{2EI}{l} \bar{\varphi}_j^e \\ \bar{F}_{Nj}^e &= -\frac{EA}{l} \bar{u}_i^e + \frac{EA}{l} \bar{u}_j^e \\ \bar{F}_{Sj}^e &= -\frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_i^e + \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_j^e \\ \bar{M}_j^e &= \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i^e + \frac{2EI}{l} \bar{\varphi}_i^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j^e + \frac{4EI}{l} \bar{\varphi}_j^e\end{aligned}$$

写成矩阵形式则有

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Si}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \vdots \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Sj}^e \\ \bar{M}_j^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{v}_i^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \vdots \\ \bar{u}_j^e \\ \bar{v}_j^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

式(1-1)称为单元的刚度方程,可简写为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}^e \quad (1-2)$$

式中

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Si}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \cdots \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Sj}^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix} \quad (1-3) \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{v}_i^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \cdots \\ \bar{u}_j^e \\ \bar{v}_j^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

式(1-3)、式(1-4)中的 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 、 $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$ 分别称为单元的杆端力列向量和杆端位移列向量。

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e & \bar{v}_i^e & \bar{\varphi}_i^e & \bar{u}_j^e & \bar{v}_j^e & \bar{\varphi}_j^e \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{array} \right] & \begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Si}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Sj}^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

式(1-5)称为单元刚度矩阵(简称单刚)。它的行数等于杆端力列向量分量的数目,而列数等于杆端位移列向量分量的数目。由于杆端力和相应的杆端位移的数目总是相等的,所以 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 是方阵。杆端力列向量和杆端位移列向量的各个分量,必须按式(1-3)和式(1-4)从 i 到 j 的顺序一一对应排列。否则,随着排列顺序的改变,刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 中各元素的排列亦将随之改变。为了避免混淆,可在 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 的上方标注杆端位移分量,而在右方标注与之一一对应的杆端力分量。显然,单元刚度矩阵中每一元素的物理意义为:单位杆端位移所引起的与其所在行对应的杆端力分量的数值。

1.2.2 单元刚度矩阵的性质

1) 对称性

单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 是一个对称矩阵,这实际上是根据反力互等定理可得出的结论。

2) 奇异性

一般单元的刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 是奇异矩阵。若将其第1行(或列)元素与第4行(列)元素相加,则所得的一行(列)元素全等于零;或将第2行(列)元素与第5行(列)元素相加也得零。这表明矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 相应的行列式等于零,故 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 是奇异的,其逆阵不存在。因此,若给定杆端位移

$\bar{\delta}^e$, 可以由式(1-2)确定杆端力 $\bar{\mathbf{F}}^e$; 但给定杆端力 $\bar{\mathbf{F}}^e$, 却不能由式(1-2)反求出杆端位移 $\bar{\delta}^e$ 。从物理概念来说, 由于这里所讨论的单元是一个自由单元, 两端没有任何支承约束, 因此杆件除了由杆端力引起的变形外, 还可以有任意的刚体位移, 故由给定的 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 还不能得到 $\bar{\delta}^e$ 的唯一解, 除非增加足够的约束条件。

1.2.3 桁架杆件单元的单元刚度矩阵

对于平面桁架结构中的杆件, 其两端仅有轴力作用(见图 1-3), 剪力和弯矩均为零, 由式(1-1)可知, 其单元刚度方程为

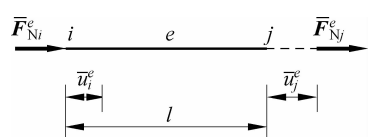
$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{u}_j^e \end{pmatrix} \quad (1-6)$$


图 1-3 桁架杆件单元

相应的单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \begin{pmatrix} \bar{u}_i^e & \bar{u}_j^e \\ \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

上式可以从式(1-5)的刚度矩阵中删去与杆端剪力和杆端弯矩对应的行及与杆端横向位移和转角对应的列而得到。此外, 为了便于进行坐标转换, 可以添上零元素的行和列, 把它写成 4×4 的矩阵:

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \begin{pmatrix} \bar{u}_i^e & \bar{v}_i^e & \bar{u}_j^e & \bar{v}_j^e \\ \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Si}^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Sj}^e \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

对于其他特殊的杆件单元, 同样可由式(1-1)修改得到相应的单元刚度矩阵。

1.3 整体坐标系中的单元刚度矩阵

坐标系仅是一个数学工具, 根据实际需要可灵活选用。上述单元刚度矩阵, 建立在杆件的局部坐标系中。在结构中, 各杆件的杆轴方向不尽相同, 从而造成各自的局部坐标系也不相同。为便于整体分析, 研究结构的几何条件和平衡条件, 就必须选用一个统一的公共坐标

系,该坐标系称为整体坐标系。因此,在进行结构的整体分析之前,应先讨论如何把局部坐标系下建立的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 转换到整体坐标系中来,以建立整体坐标系中的单元刚度矩阵 k^e 。这里可采用坐标变换的方法来建立整体坐标系中的单元刚度矩阵 k^e 。第一步,讨论两种坐标系中单元杆端力的转换式,求出单元坐标转换矩阵;第二步,讨论两种坐标系中单元刚度矩阵的转换式。

1.3.1 坐标转换矩阵

首先分析单元杆端力在不同坐标系中的关系。如图 1-4 所示杆件 ij ,在局部坐标系 $\bar{x}i\bar{y}$ 中,仍按式(1-3)和式(1-4)那样,以 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 、 $\bar{\delta}^e$ 分别表示杆端力列向量和杆端位移列向量。在整体坐标系 xOy 中,则另以 $\mathbf{F}^e$ 和 δ^e 来表示杆端力列向量和杆端位移列向量,即

$$\mathbf{F}^e = \begin{pmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \\ F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{pmatrix} \quad (1-9) \quad \delta^e = \begin{pmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{pmatrix} \quad (1-10)$$

式中力和线位移以与结构坐标系指向一致者为正,力偶和角位移以逆时针方向为正。

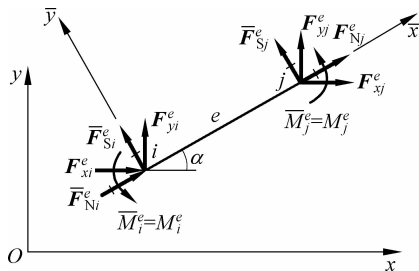


图 1-4 一般单元杆端力的坐标转换

先讨论两种坐标系中杆端力之间的转换关系。

在两种坐标系中,弯矩都作用在同一平面内,是垂直于坐标平面的力偶矢量,故不受平面内坐标变换的影响,即

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_i^e &= M_i^e \\ \bar{M}_j^e &= M_j^e \end{aligned} \right\} \quad (1-11a)$$

轴力 $\bar{F}_N$ 和剪力 $\bar{F}_S$ 则将随坐标转换而重新组合为沿整体坐标系方向(通常是水平和竖直方向)的分力 F_x 和 F_y 。设两种坐标系之间的夹角为 α ,它是从 x 轴沿逆时针方向转至 $\bar{x}$ 轴来度量的,由投影关系可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Ni}^e &= F_{xi}^e \cos \alpha + F_{yi}^e \sin \alpha \\ \bar{F}_{Si}^e &= -F_{xi}^e \sin \alpha + F_{yi}^e \cos \alpha \\ \bar{F}_{Nj}^e &= F_{xj}^e \cos \alpha + F_{yj}^e \sin \alpha \\ \bar{F}_{Sj}^e &= -F_{xj}^e \sin \alpha + F_{yj}^e \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-11b)$$

将式(1-11a)和式(1-11b)两式写成矩阵形式,则有

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Si}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Sj}^e \\ \bar{M}_j^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \\ F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{pmatrix} \quad (1-11c)$$

或简写为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T} \mathbf{F}^e \quad (1-12)$$

式中

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

$\mathbf{T}$ 称为坐标转换矩阵,它是一个正交矩阵,因而有

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (1-14)$$

同样,杆端位移之间的转换为

$$\bar{\delta}^e = \mathbf{T} \delta^e \quad (1-15)$$

1.3.2 整体坐标系中的单元刚度矩阵

局部坐标系中单元杆端力与杆端位移的关系式为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\delta}^e$$

将式(1-12)和式(1-15)代入上式,则有

$$\mathbf{T} \mathbf{F}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \delta^e$$

两边同时左乘 $\mathbf{T}^{-1}$ 得

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \delta^e$$

注意到式(1-14),则有

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \delta^e \quad (1-16)$$

即

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \delta^e \quad (1-17)$$

式中

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \quad (1-18)$$

这里, $\mathbf{k}^e$ 就是整体坐标系中的单元刚度矩阵,式(1-18)即为单元刚度矩阵由局部坐标系向整体坐标系转换的公式。只要求出单元坐标转换矩阵 $\mathbf{T}$, 就可以由 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 计算 $\mathbf{k}^e$ 。

整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\mathbf{k}^e$ 与局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 同阶,所以两者具有类似的性质: $\mathbf{k}^e$ 是对称矩阵,一般单元的 $\mathbf{k}^e$ 是奇异矩阵。

由于以后在整体分析中,将对结构的每个结点分别建立平衡方程,因此,为了讨论方便,可将式(1-17)按单元的始、末端结点 i, j 来进行分块,而写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{F}_j^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ii}^e & \mathbf{k}_{ij}^e \\ \mathbf{k}_{ji}^e & \mathbf{k}_{jj}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i^e \\ \delta_j^e \end{pmatrix} \quad (1-19)$$

式中

$$\mathbf{F}_i^e = \begin{pmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_j^e = \begin{pmatrix} F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{pmatrix}, \quad \delta_i^e = \begin{pmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \end{pmatrix}, \quad \delta_j^e = \begin{pmatrix} u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{pmatrix} \quad (1-20)$$

$\mathbf{F}_i^e, \mathbf{F}_j^e, \delta_i^e, \delta_j^e$ 分别为始端 i 和末端 j 的杆端力和杆端位移列向量。 $\mathbf{k}_{ii}^e, \mathbf{k}_{ij}^e, \mathbf{k}_{ji}^e, \mathbf{k}_{jj}^e$ 为单元刚度矩阵 $\mathbf{k}^e$ 的四个子块,即

$$\mathbf{k}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ii}^e & \mathbf{k}_{ij}^e \\ \mathbf{k}_{ji}^e & \mathbf{k}_{jj}^e \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (1-21)$$

每个子块都是 3×3 方阵。由式(1-19)又可知

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_i^e &= \mathbf{k}_{ii}^e \delta_i^e + \mathbf{k}_{ij}^e \delta_j^e \\ \mathbf{F}_j^e &= \mathbf{k}_{ji}^e \delta_i^e + \mathbf{k}_{jj}^e \delta_j^e \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

将式(1-5)和式(1-13)代入式(1-18),可得整体坐标系中单元刚度矩阵的计算公式如下:

$$\mathbf{k}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ii}^e & \mathbf{k}_{ij}^e \\ \mathbf{k}_{ji}^e & \mathbf{k}_{jj}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & -\frac{6EI}{l^2} s & \left(-\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) cs & -\frac{6EI}{l^2} s \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & \frac{6EI}{l^2} c & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \left(-\frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & \frac{6EI}{l^2} c \\ -\frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} s & -\frac{6EI}{l^2} c & \frac{2EI}{l} \\ \left(-\frac{EA}{l} c^2 - \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \frac{6EI}{l^2} s & \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \frac{6EI}{l^2} s \\ \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \left(-\frac{EA}{l} s^2 - \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & -\frac{6EI}{l^2} c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & -\frac{6EI}{l^2} c \\ -\frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} s & -\frac{6EI}{l^2} c & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (1-23)$$

(其中 $c = \cos \alpha, s = \sin \alpha$)

平面桁架结构的杆件单元,两端只承受轴力(见图 1-5),在整体坐标系中的杆端力和相应的杆端位移列向量分别为

$$\mathbf{F}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i^e \\ \mathbf{F}_j^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ \dots \\ F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \end{pmatrix}, \quad \delta^e = \begin{pmatrix} \delta_i^e \\ \delta_j^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \dots \\ u_j^e \\ v_j^e \end{pmatrix} \quad (1-24)$$

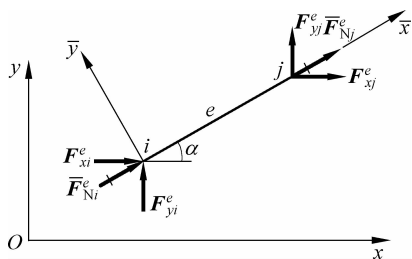


图 1-5 桁架杆件单元杆端力的坐标转换

杆件在局部坐标系中的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 见式(1-8), 而坐标转换矩阵 T 为

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (1-25)$$

将式(1-8)和式(1-25)代入式(1-18), 可得平面桁架结构杆件单元的单元刚度矩阵为

$$k^e = \begin{pmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e \end{pmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \quad (1-26)$$

1.4 结构的原始刚度矩阵

有了单元分析的基础, 可进行结构的整体分析。整体分析的任务是在单元分析的基础上, 考虑各结点的几何条件和平衡条件, 以建立求解基本未知量的位移法典型方程, 即结构的整体刚度方程, 从而导出整体刚度矩阵。下面以图 1-6(a)所示刚架为例进行说明。

1.4.1 结构的原始刚度矩阵

在整体分析中, 将涉及的单元及连接它们的结点进行编号, 现用①, ②, …表示单元号, 用 1, 2, …表示结点号, 这里支座也作为结点。同时, 选取整体坐标系和各单元的局部坐标系如图 1-6(b)所示。各单元的始、末两端 i, j 的结点号码如表 1-1 所示, 各单元刚度矩阵的四个子块应为

$$k^{①} = \begin{pmatrix} k_{11}^{①} & k_{12}^{①} \\ k_{21}^{①} & k_{22}^{①} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}, \quad k^{②} = \begin{pmatrix} k_{22}^{②} & k_{23}^{②} \\ k_{32}^{②} & k_{33}^{②} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}, \quad k^{③} = \begin{pmatrix} k_{33}^{③} & k_{34}^{③} \\ k_{43}^{③} & k_{44}^{③} \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (1-27a)$$

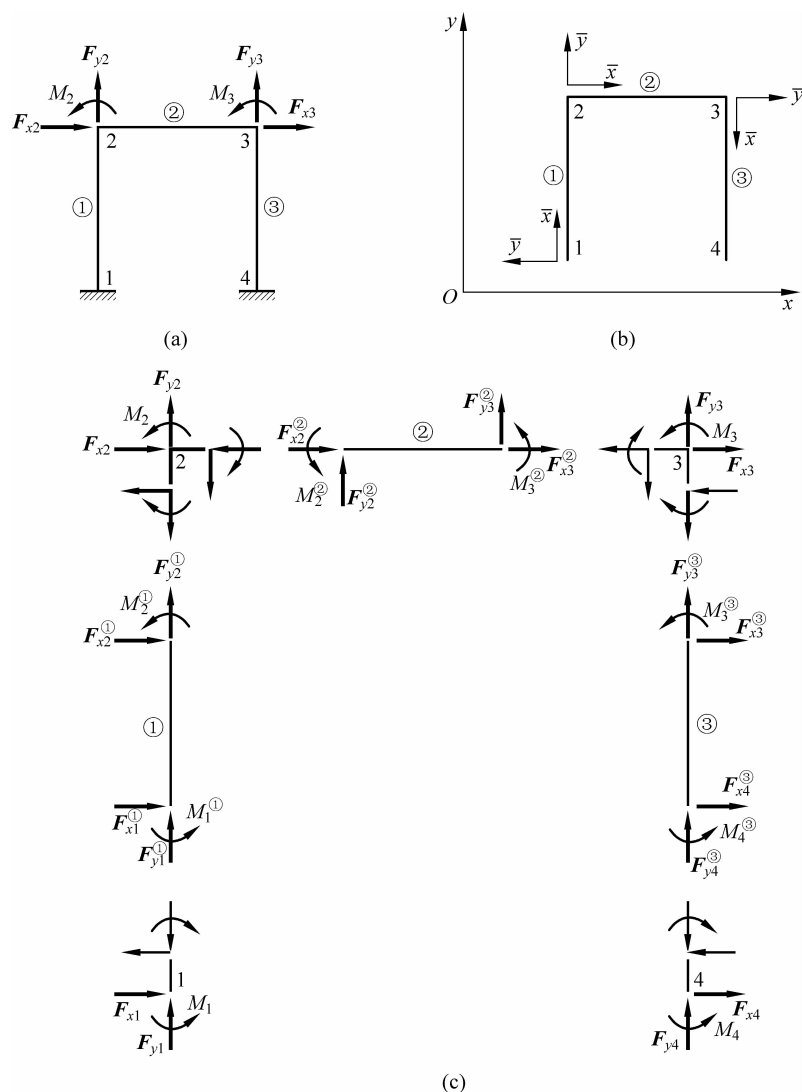


图 1-6 结构整体分析

(a) 单元、结点编号；(b) 整体坐标系与局部坐标系；(c) 各单元、结点的隔离体受力分析

表 1-1 各单元始、末端的结点号码

单元	始、末端结点号	
	i	j
①	1	2
②	2	3
③	3	4

在平面刚架中,每个刚结点有 2 个线位移和 1 个角位移。此刚架有 4 个刚结点,共有 12 个结点位移分量,按一定顺序将它们排列成一系列阵,称为结构的结点位移列向量,即