

3.1 自动控制系统的类型和组成

本节讨论的是线性自动控制系统,即以线性常微分方程加以描述或近似描述的系统。按其功能可分为三类:恒值自动调节系统、程序自动控制系统和随动系统。

3.1.1 恒值自动调节系统

瓦特发明离心式调速器用以保持蒸汽机转速的恒定,而蒸汽机和调速器就组成一个具有负反馈的转速恒值自动调节系统(图 1-1 和图 1-2)。作为另一例,图 3-1 所示为一物料加热用电炉炉温自动控制系统。加热用电炉是被控对象,而其炉温是被调节量。由电位器组成的给定环节给出的电压 u_r 代表所要求保持的炉温,它与表示实际炉温的、测温热电偶的电压 u_f 相比较,形成误差电压 $\Delta u = u_r - u_f$ 。 Δu 经过放大器放大后驱动电动机 M 向一定方向转动,并使调压器提高或降低加热电压 u_h ,以使 u_f 达到 u_r 并使 $\Delta u = 0$ 。这时,电动机不再转动,自动调节系统达到平衡点。由此可知,系统的作用是闭合的,即被控对象有信号 u_f 反馈至给定环节,形成闭环系统,也即说明有反馈环路。而反馈的作用使炉温回复到给定的恒值,系统

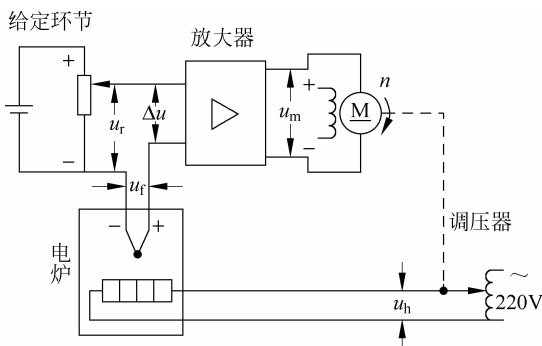


图 3-1 炉温自动控制系统原理图

不再动作,即达到平衡点。同时可知,从出现误差控制系统克服误差,炉温回复到给定的恒值的动作(运动)经历一个时间过程,称为调节过程。

这里,电动机有一个正确的旋转方向问题。当 $u_r > u_f$, 即 $\Delta u > 0$, 此时表示炉温低于所要求保持的恒值,则电动机的旋转方向应该使调压器的滑动触点向上以提高加热电压 u_h 。反之, $\Delta u < 0$, 则应该使滑动触点向下移动以降低加热电压 u_h 。

如果当炉温 $u_f > u_r$ 时,反馈使得炉温更高,或者 $u_f < u_r$ 时反馈使炉温更低,则所述系统不能正常地保持被调量为恒值,即不能达到平衡点。这说明自动调节(控制)系统,一定要有“负反馈”。图 1-3 中,在左端有符号“ $\otimes$ ”表示进行比较,且两个输入量有不同的符号。在恒值自动调节系统中,由给定环节给出的给定作用为恒值,它应赋予“+”号,反馈量应赋予“-”号,这样才能保证实现“负反馈”,即误差电压 Δu 的形成是: $\Delta u = u_r - u_f$ 。同时在系统中要正确设置执行用电机的旋转方向。

恒值自动调节系统(automatic regulating system)的功能就是,要克服各种对被调节量的扰动而保持被调节量为恒值,即达到平衡点。化工、热工等生产过程中自动保持容器的温度、压力等恒值不变的过程控制系统都是这类恒值自动调节系统(见 3.5.4 小节)。

在人口控制系统、生物控制系统和在社会经济系统都应用或存在恒值自动调节系统。

3.1.2 程序自动控制系统

当自动控制系统的给定信号(相当于 3.1.1 小节中的 u_r)是已知的时间函数时,称这类系统为程序控制系统(programmed control system)。图 3-2 表示一个仿模铣床的原理示意图。差动轮作为成品模型(给定信号)和被加工工件(被控对象)之间误差量测之用。这是一个闭环控制系统。但是制作精确的立体木模是一个精细、费工的工作。所以后来又将木模以纸带(或磁带)上的脉冲系列来代替,这时的闭环控制系统如图 3-3 所示。加工时,由光电阅读机把记录在穿孔纸带(或磁带)上的程序指令,变成电脉冲(即指令脉冲,给定信号),送入运算控制器。运算控制器完成对指令脉冲的寄存、交换和计算、处理,并输出控制脉冲给执行机构(电动机)。执行机构根据运算控制器送来的电脉冲信号,操作机床的运动,完成切削成型的要求。

原则上程序控制可以开环进行。但具有反馈的闭环控制能克服多种扰动,例如,一个给定的指令脉冲在运算、变换等信息处理过程中会丢失,此时,反馈的功能就是帮助发现切削刀具位移和给定的指令脉冲数的不符,并及时消除加工的误差,提高被加工工件的精度。

程序自动控制系统的功能,就是要按照预定的程序来控制被控制量,即自动控制系统给定环节给出的给定作用是一个预定的程序。图 3-2 和图 3-3 都是闭环的程序自动控制系统。

植入式人体血糖闭环控制系统,根据健康人的血糖每日变动图(输入程序信号),经实际测量糖尿病人的血糖后自动适量注入所缺的胰岛素。药和注射泵置于

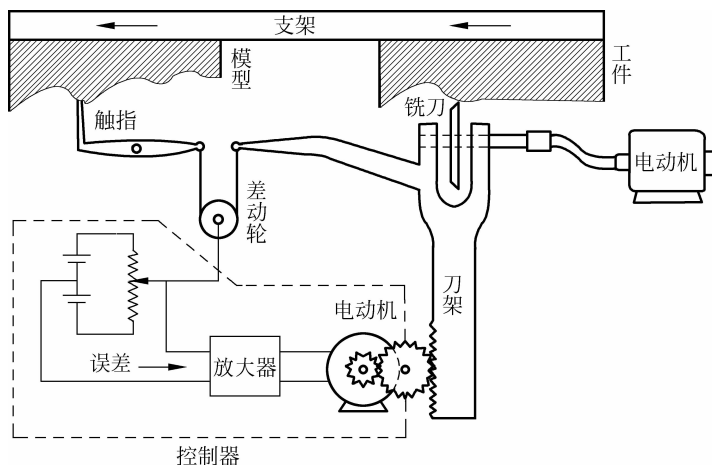


图 3-2 仿模铣床原理示意图

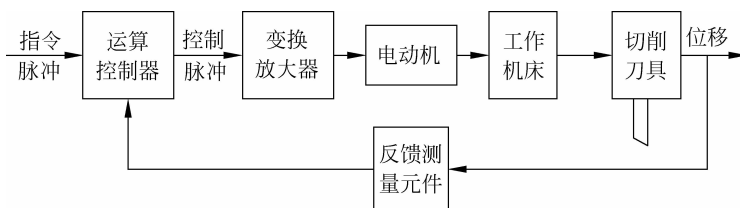


图 3-3 程序控制铣床闭环系统构成框图

病人所背的背袋中。

3.1.3 随动系统(伺服系统)

在自动控制系统中,若给定环节给出的输入信号是预先未知的随时间变化的函数,这种自动控制系统称为随动系统,也即伺服机构,或称伺服系统(servo system)。它是以电信号作为输入,被控对象为电动机,其轴的位置作输出的自动控制系统。国防上的防空导弹制导的目标跟踪系统(图 1-7)和天文望远镜的跟踪系统等都属于随动系统。它在机器人各个部分(如手指、臂、大小腿)的运动中也得到广泛的应用。

图 3-4 所示的随动系统用于船舵的自动控制。给定信号通过与驾驶轮连轴的可旋转的电位器(A)给出船舵偏角的给定值。电位器(A)和与船舵相连的电位器 B 组成电桥。由两个电位器的滑动触点处 oo' 引出由于电桥不对称出现的误差电信号。它表示驾驶轮位置和船舵偏角的不一致。误差信号通过电压放大器放大,并作为励磁电压来激励发电机 G,而后者向他励直流电动机 M 供电和进行电枢控制。电动机 M 通过齿轮系转动船舵并带动电位器 B 的滑动触点,使电桥恢复平衡,同时误差回

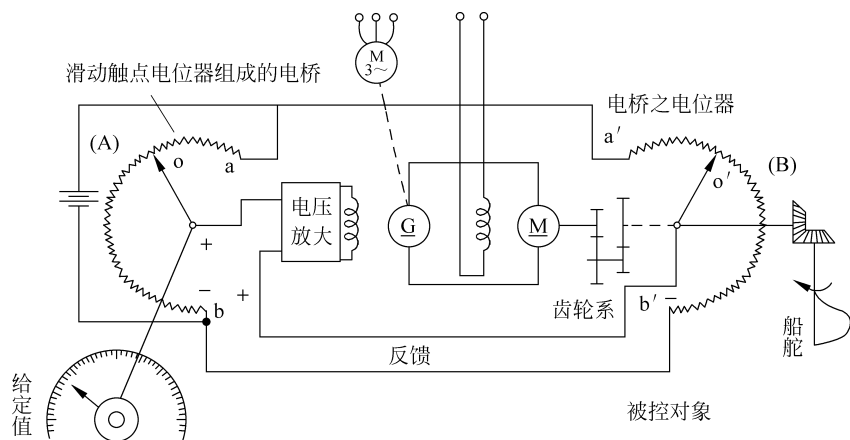


图 3-4 船舵角控制用随动系统原理图

归零。随动系统达到平衡点。

随动系统的功能就是,按照预先未知的规律来控制被控制量,即自动控制系统给定环节给出的给定作用是一个预先未知的、随时间变化的函数。

随着 H. 黑曾提出“伺服机构”的理论,伺服系统的应用也流行起来。约在 20 世纪 50 年代开始,学者们开始把它和恒值自动调节系统及程序自动控制系统三者统一称为自动控制系统。

自动控制系统还有其他的分类法,例如按被控制量的物理性质来分类,则有温度自动控制系统、蒸汽机转速自动控制系统、船舵角自动控制系统等。

自动控制系统另一重要的分类是线性和非线性控制系统:线性自动控制系统是指系统的元(部)件都是以线性微分方程(个别元件是线性代数方程)描述,而整个系统也是以线性微分方程来描述的系统。而非线性控制系统则是以非线性微分方程来描述的系统(参阅第 4 章)。

像图 3-1 的炉温自动控制系统和图 3-2 的程序自动控制系统都具有这样的特性:在调节过程中系统所有的结构始终没有变化,因此系统中各元件(环节)输出端的信号是其输入作用和时间的连续函数。这类系统称为连续控制系统(continuous-time control system),系统中的信号称为连续信号,或模拟信号(analogue signal)。本章研究的是系统参数不随时间变动的系统,称为线性时不变控制系统(linear time-invariant control system)。

3.1.4 自动控制系统的组成

3.1.1~3.1.3 小节介绍了三种类型的自动控制系统,它们是按照功能或给定环节给出的输入信号的性质进行分类。根据上述各类系统的示意图,并参照图 1-3,则自动控制系统由正向通道(从“误差”到“输出”)和反馈通道(从“输出”到“反馈信

号”)以及下列几部分组成,如图 3-5 所示。

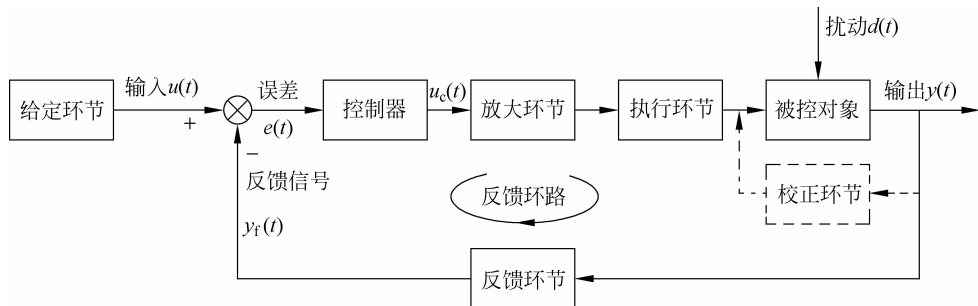


图 3-5 自动控制系统的构成框图

(1) 给定环节。产生给定的输入信号 $u(t)$ 。

(2) 反馈环节。对系统输出 $y(t)$ (被控制量) 进行测量, 将它转换成反馈信号 $y_f(t)$, 并输送至比较环节, 形成反馈环路(feedback loop)。

(3) 比较环节。以 $\otimes$ 表示, 将给定的输入信号和反馈信号加以比较, 产生误差(error)信号 $e(t)$ 。 $e(t) = u(t) - y_f(t)$, 或在无反馈环节时 $e(t) = u(t) - y(t)$ 。

(4) 控制器(调节器)。根据误差信号, 按一定规律, 产生相应的控制信号。控制器是自动控制系统实现控制的核心部分, 输入为 $e(t)$, 输出为 $u_c(t)$ 。这个规律称为控制规律(control law)。

(5) 执行机构(执行器)。将控制信号进行功率放大, 并促使被控对象的被控制量发生变化。

(6) 被控对象(controlled object 或 plant)。控制系统所要控制的设备或生产过程, 它的输出就是被控(制)量, 以 $y(t)$ 表示。

(7) 扰动(disturbance)。除输入信号外能使被控量偏离输入信号所要求的值或规律的控制系统内、外的物理量, 以 $d(t)$ 表示。

(8) 校正环节(装置)(correcting device)。误差信号的处理、变换必要时由校正环节来完成。它代替控制器的作用和处在图 3-5 中的位置。像图 3-5 中如应用串联校正, 即校正装置置于放大器的前面; 还有一种并联校正, 则校正装置与正向通道的某一或几个部件(通常至少包括被控对象)相跨接, 并形成局部反馈(图 3-5 中虚线部分)。

对于图 3-1 所示炉温自动调节系统, 电位器和电池组成给定环节, 电动机和调压器组成执行机构, 加热电炉是被控对象, 而炉温是被控量。打开炉门加入冷工件就是扰动, 热电偶是被控量炉温的反馈(测量)环节, 而比较电路就是比较环节, 串联校正环节和放大器组成控制器以改善控制系统在调节过程中(动态)和平衡点(稳态)的品质。

3.1.5 模拟控制(调节)器控制和计算机控制

图 3-5 中的各个信号: 输入信号、误差、控制器输出和输出量等都是随时间连续

变动,幅值也是连续变动的模拟信号。所采用的是制成箱式的控制(调节)器,参见图 1-5,称为模拟控制器。这样的系统称为连续控制系统,是从信号(信息)特征的观点来命名或分类的。

如果图 3-1 工件加热用电炉是一个特大型被控对象(如大型钢锭加热炉),则炉温控制系统在受到扰动后,它的调节过程很不容易控制。其主要原因是特大型加热炉对象具有针对温度变化的大滞后和大惯性特性(见 3.3 节),使调压器不能及时和适量地对加热炉增加或削减供应能量,以致炉温会缓慢地高低波动难以控制。如果在图 3-1 系统的误差信号后连接一个采样开关(图 3-6),对误差信号进行采样,则在两个采样信号之间炉温控制系统如同处于开断状态。这将显著有助于改善这类系统的控制品质。这是采样控制系统(sampled-data control system)的主要优点。工业上“采样开关”的工作是由专门的检测仪表结合对误差的测量来进行的。将连续误差信号(又称模拟信号)通过采样开关而形成如图 3-7 上的采样信号,这相当于误差信号的传输结构有了周期性的接通和中断。这类系统是离散控制系统(discrete-time control system)的一种。这也是从系统信号(信息)特征的观点来命名或分类自动控制系统。

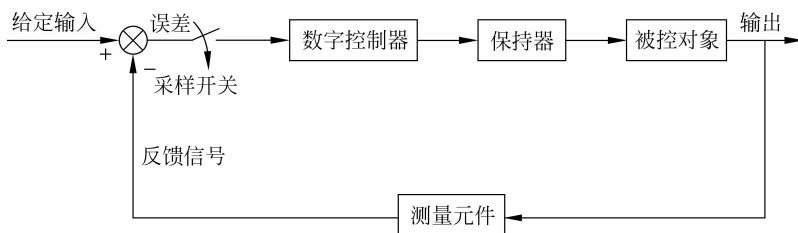


图 3-6 采样控制系统构成框图

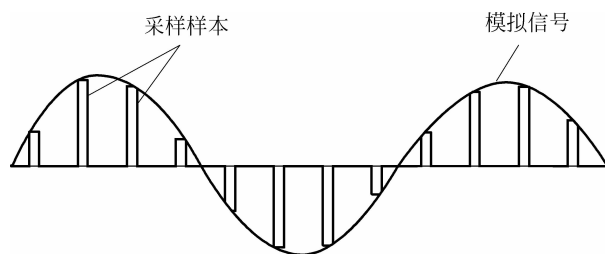


图 3-7 模拟信号采样示意图

在一些现代的控制系统中,常用微型计算机或数字控制器来代替模拟信号的控制,这对于实现复杂的控制规律和性能很有必要,如最优控制、自适应控制等。这时,形成计算机控制系统(computer control system),其框图如图 3-8 所示。它的特点是系统中一处或几处的信号以数字代码形式呈现,此外还有离散信号(采样信号)的出现。图中的数字信号就是经过整量化后的数码。整量化就是将这些可具有无穷多个值的模拟信号,取作由有限个数组成的二进制数。如果系统中信号幅值是经

过整量化后的数码,则这种系统又称为数字控制系统(digital control system),也是离散控制系统的一种。这类系统的另一个特点是以计算机程序来实现PID控制规律或更复杂的控制规律。

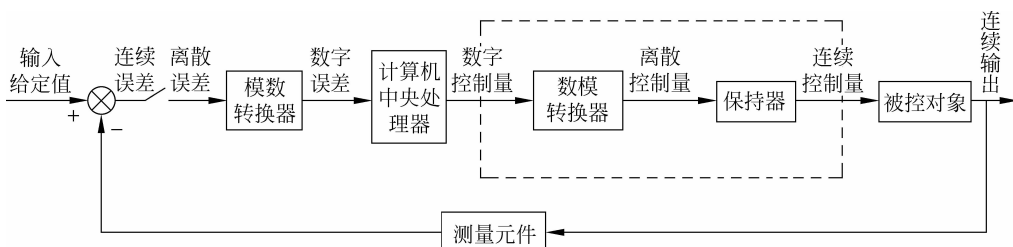


图 3-8 计算机控制系统构成框图

图 3-8 中系统具有模数转换器(A/D),它是计算机的接口或称输入设备,将模拟误差信号转换成数字误差信号,即数字代码。图上还有数模转换器(D/A)和保持器(holder),D/A也是计算机的接口或称输出设备,保持器的功能是将离散控制量保持住,进而形成连续控制量,加到被控对象。微型计算机和数字控制器能以一定的速度,完成复杂的控制规律和控制算法等计算任务。图 3-3 所示的程序控制铣床闭环系统也是数字控制系统的一例,其中运算控制器包含上述的一些功能。

3.2 反馈控制方法与扰动补偿方法

由反馈控制的基本结构(图 3-1 和图 3-4)可以看出,由输入或扰动变化产生误差,控制器由误差引起了动作,因此在反馈控制系统的调节过程中误差的发生不可避免。误差用来产生控制作用,后者又力图消灭误差。有时这会导致在控制过程中出现较大的误差,甚至引起系统中各变量发生振荡(oscillation)(参见 3.3.1 小节)。因此,对基于反馈机制的自动控制系统要进行很好的设计才能达到控制要求(3.1.4 小节所说的“品质”)。

另一种消除被控制对象由于外界扰动引起误差的方法,称为扰动补偿(disturbance compensation)。扰动补偿的原理在于,扰动进入被控对象(这是一个通道)的同时也通过另一通道进入对象前部的控制器(图 3-9),两个通道的作用是相反的(相互抵消的),结果使得对象的输出(被控量)维持或近似维持不变。

扰动补偿形成了另一个环路(图 3-9)称为前馈环路(feed-forward loop)或前馈通道。显然,要形成前馈通道,扰动作用必须是可测量的,同时还要设计扰动的补偿环节。后者的设计要求是使补偿环节的输出信号正好与由扰动引起的误差相互抵消。但人们往往只能近似做到这一点。

补偿原理只能补偿已设计有前馈通道的扰动。但是在自动控制系统中存在着多种扰动,例如在 3.1 节电炉温度自动控制系统中主要扰动为:开启炉门移入冷工件、调压器的工频电源的波动、昼夜温差引起的炉温散热情况的变动等。所以对于

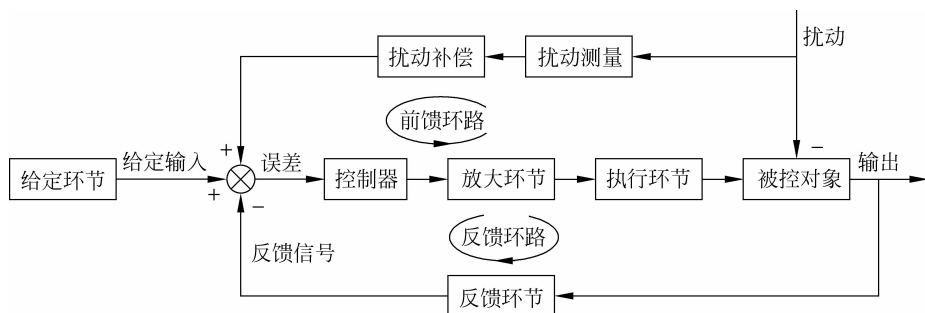


图 3-9 复合控制系统构成框图

一个完善的自动控制系统,除了对主扰动的补偿外,用来克服其他扰动的反馈回路仍是必不可少的,这就形成了复合控制系统(combined control system),即反馈控制加上前馈控制的自动控制系统(图 3-9)。

3.3 系统模型与时域分析法

3.3.1 控制系统的稳定性、稳态误差和动态品质

3.2 节中曾阐述,自动控制系统不断地进行着检测被控量,并反馈、比较,不断地得到误差信号的过程;而且借助于此误差信号,不断地进行着将它变换、放大使执行机构动作,力图使被控量回复到给定值从而消除误差的动态调节过程。这使得自动控制系统由原先的平衡点运动到新的平衡点。相对于动态调节过程而言,系统的平衡点称为稳态。

然而,被控对象,例如图 3-1 中的电炉和执行机构电动机及附属的降速齿轮系,都具有惯性(或转动惯量),甚至较大的惯性。例如电炉的供电电压 u_b 突然降为零,电炉炉膛和物料的温度 u_t 不是突然降为室温,而是慢慢下降;电动机供电电压 u_m 突然降为零,电动机也要从原来的转速,逐步降为零。只不过后者的降速过程较电炉的降温过程要快得多,即电炉的惯性较电动机的惯性大得多。

当系统中各元件(环节)的参数(惯性也反映在有的参数里)配合欠妥,使得调压器的活动触点不是“一蹴而就”达到它的新位置,而是要“冲过头”,使炉温 $u_t > u_r$ 。这样,误差 Δu 为负值,使电动机反向转动,然后滑动触点又退回来。有时要经过几次“冲过头”和“倒过头”系统才能达到稳态,这种情况可以用图 3-10(a)来表示。

图中描述在 $t=0$ 时打开炉门加入冷工件或环境温度突然下降后,控制系统中被控炉膛温度 $u_t(t)$ 的动态调节过程,呈现类似衰减正弦曲线的振荡状态。最后,经过几个反复系统还是达到新的平衡点 $u_r = u_t$ 。

在 $t=0$ 及稍后的很小一段时间内温度 $u_t(t)$ 几乎没有变化。这是因为电炉惯性

很大,而这一小段时间称为炉温响应的“滞后”(pure delay)。

当系统中各元件(环节)的参数配合不当,例如电炉的惯性太大、放大器的放大倍数太大或者电动机齿轮系的降速比不够大,又或者电炉的滞后较大,控制系统的各变量振荡严重时炉膛温度围绕 u_r 水平线持续上下波动,呈现等幅或发散的正弦振荡,或指数上升曲线的势态,这时称自动控制系统处于“不稳定”(unstable)或失稳又称“摆振”(hunting)状态,即系统在调节过程中似乎总是在寻找但又找不到新的平衡点(图 3-10(b))。这种现象在其他类型的闭环控制系统如生物、经济系统中也都存在。

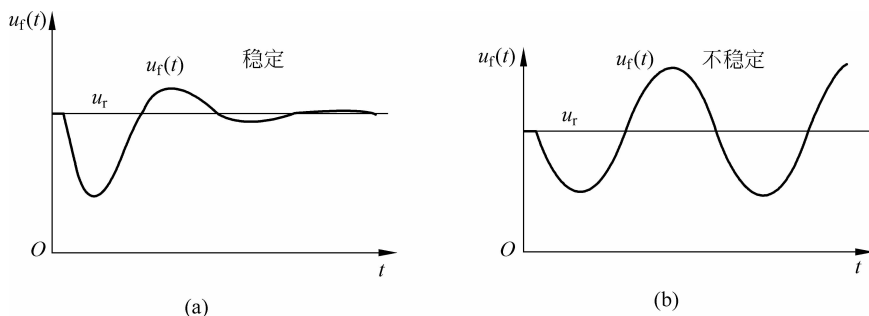


图 3-10 加入冷工件后炉温的变化过程

显然,不稳定的自动控制系统不能正常工作,而且系统和被控量处在振荡过程中,环节(部件)或元件很容易损坏。为了正确阐明自动控制系统内在的规律,彻底解决不稳定问题和研制高质量的控制系统,需要对系统进行深入的理论分析。这就是本章以下各小节的任务。

自动控制系统要能正常工作,除了系统必须稳定以外,还要根据生产工艺要求对调节过程定出一定的品质(质量)指标:例如,炉膛温度的自动调节过程中环境温度突然下降时,炉膛温度下降有不应越出的范围(图 3-10);又如炉温整个动态调节过程也应该在要求的时间期间内结束(达到新的平衡点,即新的稳态);再如在图 3-10(a)中自动调节过程结束后炉膛温度 u_f 与给定值(期望值) u_r 应相等或有规定的容许误差。相等时(误差为零)称该炉温调节系统为无差系统(system without steady-state error),否则称该系统为有差系统(system with steady-state error)。这也是自动控制系统按稳态误差有或无的一种重要的分类法。炉温自动控制系统稳态时是无差的,因为只要有误差,经放大后,电动机就会转动直到误差消失。

1.1.2 小节所叙述的离心式调速器对蒸汽机转速实行自动控制(图 1-1)中,在达到稳态后蒸汽机转速随负荷的增加必略有下降。这表明,它是一个有差系统。

自动控制系统不论属于何类(3.1 节)都有两种工作状态:“调节”和“跟随”,但其中有一种是基本的。图 3-1 中炉温恒值自动控制系统其克服扰动的调节工作状态是基本的。然而,它还有跟随工作状态:通过提高(降低)输入 u_r 将需要的工作炉温由一值调高(低)到另一值,这个调整过程就属于跟随状态。随动系统的情况也一

样,也有两种工作状态,它主要动作于跟随状态,但也受到扰动的影响,例如图 3-4 随动系统中海浪对船体的碰击。

所以,对自动控制系统的动态品质通常都统一规定为:在跟随工作状态下,由单位阶跃输入(unit step input) $u_r(t)=1(t)$ 所激发引起的输出 $y(t)$ 调节过程的品质指标。所谓“单位阶跃”信号是指在原点处幅值为 1 的突跳式信号,以符号 $1(t)$ 表示(图 3-11)。上述情况相当于在图 3-1 上对炉温恒值自动调节系统,瞬间突然加上幅值为 $u_r=1(t)$ 给定电压所引起的调节过程。其他如系统中供电电压的突然波动、图 3-2 加工机床的突然切削等,都可以用阶跃函数的形状加以描述。此外,输出稳态值 $y(\infty)=1$ 表示是无差控制系统,否则就是有差系统。而对自动控制系统的品质要求归结为:稳定(并有一定裕度)、稳态精度(无差或小的稳态误差)和动态品质三个方面。而动态品质则体现为超调量(overshooting)、调节时间(settling time,即调节过程的时间)、振荡次数等品质指标,可分别定义为(见图 3-11):

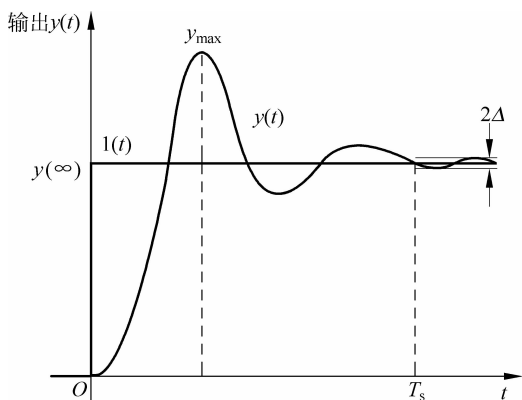


图 3-11 单位阶跃输入下控制系统的输出响应 $y(t)$

(1) 超调量 $\sigma\%$ 。表示调节过程平稳程度, $\sigma\% = [(y_{\max} - y(\infty))/y(\infty)] \times 100\%$,其中 $y_{\max}$ 是输出 $y(t)$ 在调节过程中的最大值; $y(\infty)$ 是输出的稳态值。超调量 $\sigma\%$ 通常要求小于 30% 。

(2) 调节时间 T_s 。系统受到阶跃输入激励后,调节过程响应曲线进入稳态值允许的精度带 2Δ 内并不再越出该带的时间,即 $|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta, t \geq T_s$ 。通常 Δ 定为输出稳态值 $y(\infty)$ 的 5% 。

(3) 振荡次数 μ 。在调节时间 T_s 内输出 $y(t)$ 沿 $y(\infty)$ 上下振荡的周期数。像图 3-11 中约为 2 次。通常 μ 要求为 $2 \sim 3$ 次。

上述对自动控制系统的要求和动态品质指标的制定,应根据被控对象的实际工艺需要,不同对象的系统对三项品质指标往往有所侧重。它们也正是设计、评价和比较系统的依据。但这三项指标通常是相互矛盾、相互制约的,研究和解决这些矛盾正是本章后续各节的任务。

3.3.2 自动控制系统的控制规律

自动控制系统在克服误差的调节过程中可能会出现被调量的振荡甚至失稳,其原因是由于被控对象和各元件惯性的存在和参数间的不配合,使力图克服误差的控制作用,其变化总是落后于误差的变化。这自然令人想到:解决的办法是使克服误差的控制作用的变化要有些“超前”,即在误差接近零时,克服误差的控制作用就应该是零。这就是说,控制器或校正环节(图 3-5)的输入(误差)与其输出(控制信号)间的函数关系——控制(调节)规律中仅仅引入“比例”项(比例关系)往往是不够的。比例项的作用仅仅是使控制信号正比于误差的幅值,而需要在控制规律中增加“微分”项以预测误差变化的趋势。

在图 3-10(a)中被控量 $u_i(t)$ 曲线误差已经是较小正值的点,而误差的导数是负的。这是由于具有“比例微分”控制规律的控制器,能够提前使克服误差的控制器或校正环节输出等于零,甚至为负值,从而避免了被控量严重地“冲过头”(“冲过”图 3-10 中误差等于零的水平线)。这就改善了自动控制系统的稳定性。所以对有较大惯性和(或)滞后的被控对象,控制规律是比例微分的控制器或校正环节,能够抑制振荡,从而改善控制系统在调节过程中的动态品质。而控制器或校正装置,其作用就是引入适当的控制规律。

为了消除稳态误差(图 3-11),在控制器或校正装置的控制规律中必须引入“积分”项。积分项对误差取关于时间的积分,随着时间的增加,积分项输出会增大。这样,即使误差很小,也会随着时间的增加而积分项输出加大,它推动控制器的输出增大,使稳态误差进一步减小,直到等于零。因此,有“比例积分”控制规律的控制器或相应的校正装置,可以使系统在稳态时无稳态误差。图 3-1 中执行电动机 M 有积分作用,所以它能起到“无差”的作用。

上文叙述将误差信号在控制器或校正装置中按一定规律进行处理,形成“比例(P)”、“比例微分(PD)”、“比例积分(PI)”、“比例积分微分(PID)”等控制规律,它能够帮助控制系统实现高质量,即无稳态误差并具有良好的动态品质。“比例积分微分”控制规律数学上表示为

$$u_c(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3.3.1)$$

式中 $e(t)$ 是误差信号,是给定信号 $u(t)$ 和反馈信号 $y_f(t)$ (或输出信号 $y(t)$) 相减之差; $u_c(t)$ 是控制器的输出; k_p 是比例增益; T_I 是积分时间常数; T_D 是微分时间常数。一种控制规律就要以一定的控制器来实现。式(3.3.1)的规律就以比例积分微分控制器来实现(参见 3.5.4 小节 2. 控制器参数整定)。

对自动控制系统进行深入的理论分析,包含两个方面的内容:分析和校正(综合)。对自动控制系统的研究常常是针对已存在的手动控制设备(或手控系统),这时系统的主要生产设备(被控对象)和手动控制的操作器(执行环节)都已存在,或者

是在设计图上已确定的品种和规格;然后再根据功率匹配和物理常识从相关手册选定其他元(部)件,如配置放大器以及给定环节、比较环节等。人们要解决的问题是,在这个框架的基础上建立各个元(部)件的数学模型(例如微分方程)和整个系统的数学模型,再通过求解闭环系统的微分方程或者其他间接研究方法,来研究它在给定作用阶跃变化的情况下输出的时间响应和它的稳定性、稳态精度、动态品质。这样的研究称为对该对象的自动控制系统的“分析”。

自动控制系统的“校正”,也称“综合”,是根据生产实际对自动控制系统提出的稳态精度和动态品质指标,在已知被控对象和执行环节的基础上设计一个合适的控制系统,主要包括设计校正装置或控制规律,以使系统能满足预先提出的稳态和动态要求。本章在 3.3.4 小节和 3.3.5 小节以及 3.4 节讨论控制系统的分析,而 3.5 节讨论控制系统的校正。

3.3.3 建立控制元件和系统的数学模型

为了设计和研制出高质量的自动控制系统,不能仅仅停留在实验研究上,而是有必要进行深入的理论分析。这种理论分析要从建立每一个环节或元件的时间特性或导出其数学描述入手,这称为建模(modelling)。

例如放大器,输入电压经放大器放大后得出输出电压。放大特性(输出对输入的关系)的数学描述就是一个比例(放大倍数)的代数关系,与时间无关。

电动机和电炉的时间特性比较复杂。电动机的特点是电压加上后,它不停地转动,即它输出轴的角位移不断增加和调压器的滑动触点不断移动,如图 3-12 所示。图中电动机输出轴的角位移在零点附近有很小一段的曲线。而电炉则在原点处($t=0$)突然加上电压时其温度-时间特性近似地(忽略滞后)呈指数曲线形状上升(图 3-13)。

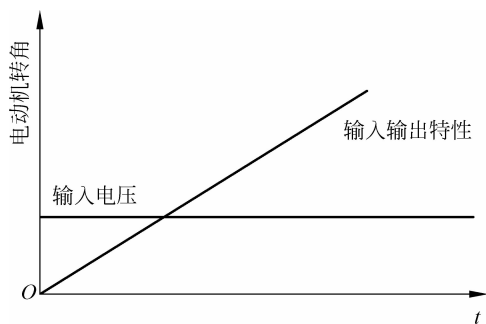


图 3-12 电动机的输入输出时间特性

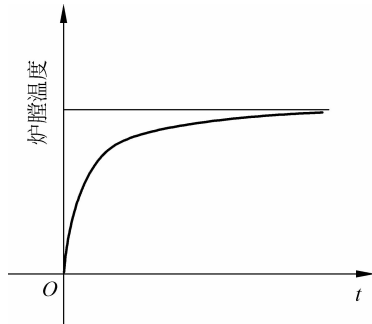


图 3-13 电炉的输入输出时间特性

除了放大器的输入输出特性用代数方程来描述外,电动机和电炉元件的输入输出特性一般要用微分方程(即其解)来描述。微分方程及其求解是高等数学的一个重要内容。要精确地研究自动控制系统的稳定性和控制的动态品质等重要问题,必

须用微分方程、拉普拉斯变换(参见 3.4 节)等高等数学的工具。这些描述特性用的微分方程(或拉普拉斯变换后组成的传递函数)称为相应环节(元件)和系统的数学模型。图 3-12、图 3-13 中电动机和电炉元件在输入激励下输出变量的建立过程,相应地就是描述电动机和电炉的微分方程(数学模型)解的时间曲线。

系统或元件的数学模型,只是在系统中人们感兴趣的几个主要变量间,在一些物理定律统辖下简化的、以数学描述的规律关系,而忽略了次要因素的影响。常用的这些物理定律是:牛顿运动定律、能量(或物质)守恒定律、基尔霍夫定律等。这是对系统或元件基于机理来建模。对于难以以定律描述的复杂关系,可以采用记录仪器在突跳式(阶跃)输入信号下记录输出量随时间 t 的响应曲线,然后再用曲线拟合的方法列出其以数学描述的规律关系。这是对系统或元件基于实验来建模。

3.3.4 炉温自动控制系统的数学模型

自动控制系统各环节(元件)和系统的数学模型,是对自动控制系统进行理论研究的基础和出发点。然而,即便是看来并不复杂的电炉,其数学模型也不简单。图 3-13 仅是它在定量加热电压输入时电炉数学模型(微分方程)的输出温度的解(升温曲线)。如果在它保持恒温时,打开炉门加入冷工件或环境温度突然下降或电网电压变动,它们的数学模型又与上述情况有所差别,需要另外设法求取。

1. 元件的数学模型

本节对图 3-1 所示的炉温自动控制系统各元件建立数学模型。对加热电炉在寻求数学描述时选择加热电压 $u_h(t)$ 为元件输入,炉内温度 $u_w(t)$ 为元件输出,实际上由热电偶读出为 $u_f(t)$ 。同时假定加热电炉炉体不大,环境温度(散热)变化的影响可以忽略。加热电炉由电能加热、烧红电炉丝,通过烧红电炉丝的辐射、对流等途径在电炉内形成热场,再由这个热场向工件加热。这样的过程机理相当复杂,数学描述也很困难。故采用实验方法建立数学模型:对加热电炉加上阶跃输入(电压)信号,测量和记录它的输出(炉内工件点的温度)的响应曲线。可以发现,记录下来的响应曲线,适当简化后可以用一阶微分方程的解来描述。再由曲线拟合的方法,即以一阶指数曲线的响应来逼近,便得出加热电炉一阶微分方程的数学描述。

例 3.3.1 加热电炉的数学模型

加热炉是常用的工业对象(图 3-1), $u_h(t)$ 为加热电压, $u_w(t)$ 为炉内温度。从热力学定律可以建立其基于机理的数学模型。其结果和上述求取响应曲线的实验方法是很接近的。设滞后时间 τ 很小, $\tau \approx 0$, 可以略去不计。在常值 u_h 激励下 $u_w(t)$ 曲线由一个时间常数为 T_f 的指数曲线来逼近。此时加热炉的数学模型可以表示为

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t) \quad (3.3.2)$$

式中 $k_f u_h$ 为炉内温度 $u_w(t)$ 的稳态值; T_f 称为加热炉的时间常数, 它与加热丝的质量、比热、传热系数和传热面积有关; 系数 k_f 与单位时间内加热丝产生的热量和加热的电压有关。

如果加热炉有滞后 τ , 从 $t \geq \tau$ 以后的曲线才可以由一个时间常数为 T_f 的指数曲线来逼近。 $u_h(t-\tau)$ 是指 $u_h(t)$ 向右移动 τ 时间, 也即 $t < \tau$ 时 $u_h(t-\tau) = 0$, 无响应, 则式(3.3.2)成为

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t-\tau) \quad (3.3.2a)$$

加热炉对扰动的数学模型 以上加热炉以炉温为输出的微分方程, 是针对加热电压的变动而导出的。然而, 加热炉对外界扰动的微分方程是更重要的, 因为它处于恒值自动调节系统中(图 3-1)。通过理论分析或曲线拟合, 此动态过程可以用下面的微分方程来描述

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = -k_1 d_1(t-\tau) + k_2 d_2(t-\tau) \quad (3.3.3)$$

式中 $d_1(t)$, $d_2(t)$ 分别表示加入冷工件(或环境温差的变动)和调压器工频电源的波动引起的相应扰动。 $u_w(t)$ 为扰动所引起的炉膛温度的变动。 k_1, k_2 前端的正负符号表示扰动的加入, 会引起炉温的升高(相当于正号)或降低(相当于负号)。一个完整的电加热炉的微分方程, 在 $\tau \neq 0$ 时应该是式(3.3.2a)和式(3.3.3)的合并

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t-\tau) - k_1 d_1(t-\tau) + k_2 d_2(t-\tau) \quad (3.3.3a)$$

在 $\tau \approx 0$ 时

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t) - k_1 d_1(t) + k_2 d_2(t) \quad (3.3.3b)$$

例 3.3.2 由于加热电炉的温度是借助于热电偶测量的, 所以加热电炉温度响应的记录曲线其中包括热电偶的响应在内。但热电偶的响应很快, 由实验方法测得它的数学模型为

$$T_c \frac{du_f(t)}{dt} + u_f(t) = k_c u_w(t) \quad (3.3.4)$$

式中 $u_w(t)$ 是真正的加热电炉的炉内温度, 而 $u_f(t)$ 是热电偶所产生的电动势(代表所测的温度), 热电偶的时间常数 T_c 显著小于加热炉的时间常数 T_f , 即 $T_c \ll T_f$, 因此在这个控制系统中可以略去, 成为

$$u_f(t) = k_c u_w(t) \quad (3.3.4a)$$

例 3.3.3 放大器的数学模型

放大器是一个瞬时反应的无惯性部件, 因此其模型为

$$u_m(t) = k_a \Delta u(t) \quad (3.3.5)$$

式中 $\Delta u(t)$ 为放大器输入的误差电压, $u_m(t)$ 为放大器输出电压。实际上, 因为在放

大器前接有改善闭环系统动态特性用的 RC (电阻-电容)微分装置,故放大器模型为

$$u_m(t) = k_a u_d(t) \quad (3.3.5a)$$

式中 $u_d(t)$ 为 RC 微分装置的输出电压,即进入放大器的输入电压。 ■

例 3.3.4 电枢控制直流电动机的数学模型

图 3-1 炉温自动控制系统应用的电枢控制下直流电动机 M , 是转速自动调节系统和随动系统中经常使用的被控对象或执行器(图 3-14)。

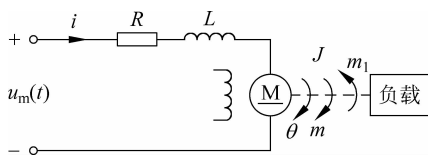


图 3-14 恒定磁场电枢控制直流电动机示意图

设电机轴上总转动惯量(包括负荷) J 是常数,各种机械转矩全部归并到负载转矩 m_1 ,电枢反应忽略不计。电动机电枢回路的电阻、电感相应地全部归并到电枢总电阻 R 和总电感 L 。

根据基尔霍夫定律、牛顿定律以及直流电动机特性,有

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u_m \quad (3.3.6)$$

$$e = C_e \frac{d\theta}{dt} \quad (3.3.7)$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = m - m_1 \quad (3.3.8)$$

$$m = C_m i \quad (3.3.9)$$

式中 i 为电枢电流; m 为电磁转矩; e 为电动机反电势; u_m 为电枢电压; C_e 为电势系数; C_m 为转矩系数; θ 为电动机的转角。

消去中间变量 i, e, m , 经整理得到以转角 θ 为输出量时电枢控制下直流电动机的数学模型

$$T_m T_1 \frac{d^3\theta}{dt^3} + T_m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_e u_m - k_m \left(T_1 \frac{dm_1}{dt} + m_1 \right) \quad (3.3.10)$$

式中 $T_m = \frac{RJ}{C_e C_m}$ 称为电动机的机电时间常数; $T_1 = \frac{L}{R}$ 称为电动机的电磁时间常数;

$k_e = 1/C_e$ 为电枢电压作用系数; $k_m = \frac{R}{C_e C_m}$ 为负载转矩作用系数。

式(3.3.10)表示电动机的转角 θ 受到电枢电压 u_m 和负载转矩 m_1 两方面的(输入)作用。

若直流电动机的输出量为转速 n , 如在电动机转速自动调节系统中, 则电枢控制下直流电动机的数学模型为

$$T_m T_1 \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = k_e u_m - k_m \left(T_1 \frac{dm_1}{dt} + m_1 \right) \quad (3.3.11)$$

式中 $n=d\theta/dt$, 单位为 r/min。虽然是同一直流电动机, 式(3.3.11)与式(3.3.10)不同。

在图 3-1 的炉温自动控制系统中电枢控制下直流电动机用来转动调压器, 这是转角 θ 为输出量的情况, 应采用式(3.3.10)的模型。其系数 J 必须计入电动机轴经由减速齿轮系连上调压器转动部分所引起的总转动惯量。同时负载转矩 m_1 可认为是常数, 可以略去, 因为数学模型研究的是电枢电压变动对电动机转角变动 θ 的作用, 称为增量形式。故在炉温自动控制系统中直流电动机连同调压器的动态数学模型最后为

$$T_m T_l \frac{d^3 \theta}{dt^3} + T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_e u_m \quad (3.3.12)$$

此外, 在系统中可以认为加热电压正比于电动机的转角, $u_h = k_h \theta$, 则

$$T_m T_l \frac{d^3 u_h}{dt^3} + T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{du_h}{dt} = k_h k_e u_m \quad (3.3.13)$$

电动机的电磁时间常数 T_l 与机电时间常数 T_m 相比, 常常可以忽略。故

$$T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{du_h}{dt} = k_h k_e u_m \quad (3.3.13a)$$

2. 描述控制系统动态响应的线性常系数微分方程

由于连续控制系统的元件或部件都是以微分方程描述的, 个别是以代数方程描述的, 所以对整个系统的数学模型而言, 得到的是一个微分方程组。为了得到整个系统输入输出的数学描述, 需要消去中间变量, 最后得到一个以给定量(或者扰动量)为输入和被控量为输出的线性常系数微分方程。对于一个通常有 5 个以上元(部)件构成的系统, 就有 5 个微分方程式还要加上比较环节含 3 个变量, 这样消去中间变量的工作也是较复杂的。

在炉温自动控制系统中共有以下 4 个元(部)件的微分方程: 式(3.3.2)、式(3.3.4a)、式(3.3.5)、式(3.3.13a)和比较环节方程 $\Delta u(t) = u_r(t) - u_f(t)$, 这里滞后 $\tau \approx 0$ 。在这 5 个方程中要消去中间变量 $\Delta u(t)$, $u_m(t)$, $u_h(t)$, $u_f(t)$, 最后得到一个以给定 $u_r(t)$ 为输入、以炉温 $u_w(t)$ 为输出的 3 阶微分方程(负载转矩 m_1 认为不变)如下

$$T_m T_f \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + (T_m + T_f) \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + \frac{du_w(t)}{dt} + k_a k_i k_h k_e k_c u_w(t) = k_a k_i k_h k_e u_r(t) \quad (3.3.14)$$

式(3.3.14)是描述当给定电压 $u_r(t)$ 突然加上炉温自动控制系统时, 炉温 $u_w(t)$ 响应的微分方程式。上述微分方程可以用经典的方法求解, 但还是相当烦琐。

3. 引入微分装置后描述控制系统动态响应的线性常系数微分方程

如上文分析, 对自动控制系统必要时要在控制规律中引入微分作用以抑制振荡。这称为镇定(stabilization)。校正装置就起这样的作用。

例 3.3.5 RC 微分装置的数学模型

由电阻器 R 、电容器 C 组成 RC 微分装置(图 3-15),是在直流随动系统中常用和在图 3-1 炉温自动控制系统中应用的校正装置(图上未画出)。它接在放大器的前端成串级状,其输入是误差 $\Delta u(t)$,输出是 $u_d(t)$ 。现推导其数学模型如下。

根据电路理论中的基尔霍夫(Kirchhoff, G.)定律,可将 RC 微分装置方程写出如下。设电阻器 R_1 流经电流为 i_1 ,电容器 C 流经电流为 i_2 ,则

$$\Delta u(t) = i_1 R_1 + (i_1 + i_2) R_2 = i_1 R_1 + u_d(t)$$

$$i_1 R_1 = \frac{1}{C} \int i_2 dt$$

在上式中消去电流 i_1 和 i_2 ,可得下列描述其动态行为的微分方程

$$\alpha T_d \frac{d}{dt} u_d(t) + u_d(t) = \alpha \left(T_d \frac{d}{dt} \Delta u(t) + \Delta u(t) \right), \quad (0 < \alpha < 1) \quad (3.3.15)$$

式中 $T_d = R_1 C$ 为微分装置的时间常数, $\alpha = R_2 / (R_1 + R_2)$ 。如果选电阻 R_2 相比 R_1 很小,则

$$u_d(t) \approx \alpha \left(T_d \frac{d}{dt} \Delta u(t) + \Delta u(t) \right) \quad (3.3.15a)$$

输出 $u_d(t)$ 近似比例于输入 $\Delta u(t)$ 和它的微分。而微分量所占的比例由时间常数 T_d 决定。 α 值越小,式(3.3.15a)越逼近等式。但给出的 $u_d(t)$ 信号越小,后接放大器需要越大的放大倍数。

将微分装置接入原炉温控制系统,这时,有 5 个元(部)件的微分方程: 式(3.3.2)、式(3.3.4a)、式(3.3.5a)、式(3.3.13a)、式(3.3.15)和比较环节方程 $\Delta u(t) = u_r(t) - u_f(t)$ 。在这 5 个方程中要消去中间变量 $\Delta u(t)$, $u_m(t)$, $u_h(t)$, $u_d(t)$, $u_f(t)$, 最后得到一个以给定 $u_r(t)$ 为输入、以炉温 $u_w(t)$ 为输出、接入微分装置后的微分方程(假定负载转矩 m_1 不变,即不计入负载扰动),则得炉温控制系统的 4 阶微分方程如下

$$\begin{aligned} & \alpha T_d T_m T_f \frac{d^4 u_w(t)}{dt^4} + (\alpha T_d T_m + \alpha T_d T_f + T_m T_f) \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} \\ & + (\alpha T_d + T_m + T_f) \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + (1 + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c T_d) \frac{du_w(t)}{dt} \\ & + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c u_w(t) \\ & = \alpha k_a k_f k_h k_e T_d \frac{du_r(t)}{dt} + \alpha k_a k_f k_h k_e u_r(t) \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

至于求解线性常系数微分方程的经典方法已在“高等数学”课中加以阐明,以下在 3.3.5 小节有简略回顾。解微分方程式(3.3.16)可得出在 $u_r(t)$ 输入炉温 $u_w(t)$ 的变化规律。

为了描述加热电炉在扰动 $d_1(t)$ (或 $d_2(t)$) 作用下,炉温 $u_w(t)$ 的变化规律,还需要联立扰动下的加热电炉的数学模型式(3.3.3a)、式(3.3.4a)、式(3.3.5a)、式(3.3.13a)、

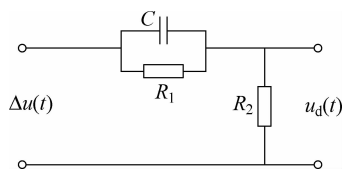


图 3-15 由 RC 组成微分装置

式(3.3.15)以及比较环节方程 $\Delta u(t) = -u_f(t)$ (由于 $u_r(t) = 0$)。在这 5 个方程中要消去中间变量 $\Delta u(t)$, $u_d(t)$, $u_m(t)$, $u_h(t)$, $u_f(t)$, 最后得到一个以给定 $d_1(t)$ (或 $d_2(t)$) 为输入、以炉温 $u_w(t)$ 为输出的 4 阶微分方程, 其等号右侧也有 4 阶。而且在 $\tau \neq 0$ 时其等号左端还包含未知函数 $u_w(t)$ 的滞后项及其导数, 右侧有外加扰动作用 $d_1(t)$ (或 $d_2(t)$) 的滞后项及其导数项。因此, 这个微分方程较式(3.3.16)更为复杂。本节不准备在此列写该微分方程的全式, 因为它们的求解复杂和烦琐。3.4 节将用另一种研究方法——拉普拉斯变换和传递函数研究法, 来阐明控制系统的传递函数数学模型的推导方法及其如何较方便地应用于求解控制系统的动态过程。

3.3.5 自动控制系统的时域研究法

在 3.3.1 小节所阐明的对自动控制系统的稳定性、稳态精度、动态品质要求, 都可以通过求解描述系统的微分方程而获得结果。这时系统输入 $u_r(t)$ 或扰动 $d(t)$ 常规定取为几种典型的函数形式。然后在给定的初始条件下求解这个微分方程。这时, 系统微分方程的解则由控制系统本身的结构、参数、初始条件和输入作用的函数形式所决定。

典型的输入函数常规定取为单位阶跃 $1(t)$ 的形式, 以表示系统输入的突然加上或负荷的突然变动, 如加热炉的突加冷工件(图 3-11); 或者取为冲激函数 $\delta(t)$ 的形式, 以表示生产机械负载的瞬间冲击性突变, 如飞剪的极短时剪切加工; 或者表示生

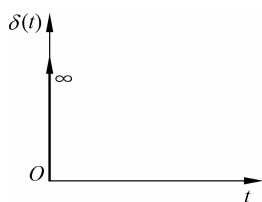


图 3-16 单位冲量函数 $\delta(t)$

理系统中的脉冲刺激。 $\delta(t)$ 函数是一个理想的单位冲量 (impulse), 它被定义为在 $t=0$ 处是一有无穷大幅度并宽度无穷小的冲量(图 3-16)。单位冲量具有如下的性质, 即其面积为 1。

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.3.17)$$

在线性自动控制系统中, 在单位冲量 $\delta(t)$ 激励下, 系统会产生一个调节过程, 并有输出 $y(t)$, 称作冲激响应 (impulse response)。同时可定义冲激响应函数 $g(t)$: 可以证明, 在任意输入 $u(t)$ 作用下, 输出 $y(t)$ 与冲激响应函数 $g(t)$ 的关系为

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (3.3.18)$$

当 $u(t) = \delta(t)$ 时, 该式给出 $y(t) = g(t)$ 。

因此, 对于自动控制系统的时域 (time domain) 研究法, 主要就是根据描述系统的微分方程或 3.4 节要叙述的传递函数, 直接求解在典型输入 $u(t)$ (或扰动 $d(t)$) 作用下系统输出 $y(t)$ 关于时间 t 变化的表达式 (微分方程的解)。然后根据此表达式或其相应的描述曲线来分析、鉴别系统的稳定性、稳态精度和动态品质等。

众所周知, 在计算机问世以前, 求解线性常系数的高阶微分方程是一件很烦琐的工作。由高等数学可知, 线性常系数微分方程的解是由微分方程的一个特解, 加

上其齐次微分方程的通解这两部分组成。通常取系统的稳态解作为特解。而其齐次微分方程的通解称为暂态解。作为简略复习,取一个简单的控制系统的2阶微分方程为例。

例 3.3.6 一个简单的控制系统的2阶微分方程

$$0.01 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.25 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (3.3.19)$$

设输入 $u(t)$ 是单位阶跃函数 $1(t)$, 由观察得到微分方程的一个特解(取稳态解)是 $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = u(\infty) = 1$ 。其齐次微分方程通解的求取,则要先求解齐次微分方程的特征方程式 $0.01\lambda^2 + 0.25\lambda + 1 = 0$, 求得根 $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -20$ 。于是,控制系统的2阶微分方程的通解有如下形式

$$y(t) = 1 + A_1 e^{-5t} + A_2 e^{-20t} \quad (3.3.20)$$

通过已知初始条件,如 $y(0)=0, y'(0)=0.05$, 则解出 $A_1 = -1.33, A_2 = 0.33$ 。最后控制系统的2阶微分方程的全解为

$$y(t) = 1 - 1.33e^{-5t} + 0.33e^{-20t} \quad (3.3.21)$$

从以上叙述可知,求解线性常系数的 n 阶微分方程的一个难点是,要求解一个 n 次的特征方程(代数方程);另一个难点是要根据给出的初始条件确定解的 n 个任意常数 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 。这在 n 大于3以上时,也是较麻烦的。

然而,在时间域研究法中自动控制系统的稳定性、稳态精度、动态品质要求不能全部满足的情况下,人们不得不修改系统的某些参数,如放大器放大倍数 k_1 、微分装置的时间常数 T_d 和比例系数 α 等,多次重新求解高阶微分方程以进行试凑。这导致自动控制系统的研究和设计相当费时和麻烦。

所以,在时间域研究、分析和设计自动控制系统,如采用直接求解控制系统微分方程的方法,虽然直截了当、一目了然,但带有试凑性和不够简洁。在时间域研究中也有一些间接的分析方法,但都烦琐、粗略。为此,人们不得不创建一些间接的方法如稳定性判据、频率法来研究控制系统的动态品质(参见3.3.6小节和3.4节)。

例如,对于图3-1所示的加热电炉温度自动控制系统,设电炉的滞后 τ 很小可以不计,在没有校正装置的情况下,式(3.3.14)为如下3阶微分方程

$$T_m T_f \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + (T_m + T_f) \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + \frac{du_w(t)}{dt} + k_a k_f k_h k_c u_w(t) = k_a k_f k_h k_c u_r(t)$$

从该式左、右侧不带微分项的两项可以看出,在稳态时 $k_c u_w(\infty) = u_r(\infty)$, 即系统是无差的(见3.3.1小节)。代入参数 $T_f = 30, T_m = 0.5, k_a = 250, k_f = 0.1, k_h = 1, k_c = 0.1, k_e = 1$ (所有参数的单位从略),则得

$$15 \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + 30.5 \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + \frac{du_w(t)}{dt} + 2.5 u_w = 25 u_r(t)$$

加热炉温度在单位阶跃输入作用 $u_r(t) = 1(t)$ 的激励下,利用 MATLAB 软件编程容易求得其解。具体程序可参阅下文。解的上升曲线 $u_w(t)$ 如图3-17中曲线 $k_1 (=k_a k_f) = 25$ 所示, $u_w(t)$ 曲线呈发散振荡状。这表明,加热电炉温度自动控制系统

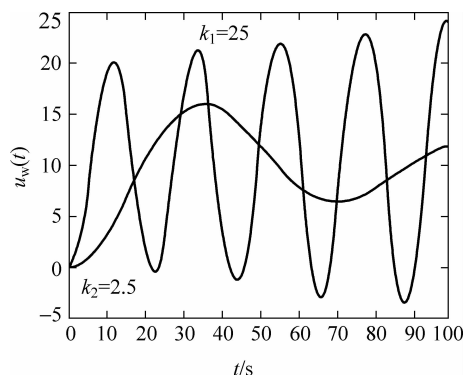


图 3-17 加热电炉温度自动控制系统 $k_1=25$ 和 $k_2=2.5$ 时的 $u_w(t)$ 上升曲线

统是不稳定的。

本书建议时间域研究分析的微分方程求解利用 MATLAB 软件进行。MATLAB 软件是美国 MathWorks 公司推出的高级的数值分析、处理和计算软件。它的控制工具箱 (Toolboxes) 是实现常规控制系统的设计、分析和建模的重要工具。进入 MATLAB 环境同时也打开 MATLAB 命令窗口。输入 MATLAB 命令和函数, 回车后立即执行该命令。例如用 MATLAB 软件求例 3.3.6 特征方程的根的程序为

```
d=[15 30.5 1 2.5]; roots(d)
```

显示 $-2.0407, 0.0037 \pm 0.2858j$; 可见存在一对实部为正的复根, 导致控制系统的不稳定 (参见式 (3.3.21))。

为此, 必须将 RC 微分装置 (图 3-15) 接入在放大器之前, 设置参数 $\alpha=0.1, T_d=10$ 。这时, 由于 RC 微分装置将系统放大倍数降为 $1/10$, 故提高放大器的放大倍数 10 倍, 使 $k_a k_f=250$, 得到系统的四阶微分方程如下

$$\begin{aligned} & 15 \frac{d^4 u_w(t)}{dt^4} + 45.5 \frac{d^3 u_w(t)}{dt^3} + 31.5 \frac{d^2 u_w(t)}{dt^2} + 3.5 \frac{du_w(t)}{dt} + 0.25 u_w(t) \\ &= 25 \frac{du_r(t)}{dt} + 2.5 u_r(t) \end{aligned}$$

它的解给出单位阶跃输入 $u_r(t)=1(t)$ 作用下的上升曲线 $u_w(t)$ 。今用 MATLAB 软件计算出单位阶跃输入作用下的响应 $u_w(t)$, 其微分方程求解和解的作图程序为

```
num=[25 2.5]; den=[15 45.5 31.5 3.5 0.25]; t=[0:0.1:100]; uw=step(num,den,t);  
plot(t,uw)
```

回车后即可画出, 如图 3-18 所示。用 MATLAB 软件计算出超调量为 18%, 振荡次数为 5 次。调节时间为 99.9s (程序从略)。并且 $k_c u_w(\infty) = u_i(\infty) = u_r(\infty)$, 系统是无差的。

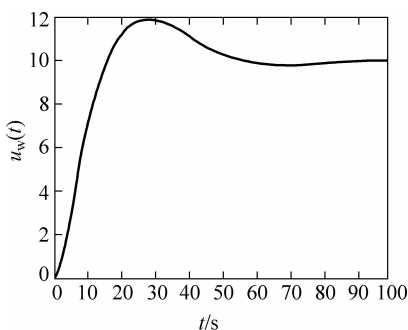


图 3-18 电炉温度自动控制系统具有微分装置的 $u_w(t)$ 上升曲线

如果在没有 RC 微分装置时降低放大器的放大倍数 $k_a=25$, 则系统是稳定的, 其 $u_w(t)$ 如图 3-17 中曲线 $k_2(=k_a k_f)=2.5$ 所示。此时, 可以用 MATLAB 软件计算出, 超调量为 60%, 振荡次数为 5 次, 调节时间为 500s。但调节过程的动态品质要比接用微分装置时下降很多, 这显示出校正装置(微分装置)的功能, 同时也说明利用 MATLAB 软件使求解线性常系数的高阶微分方程和求其动态品质指标变得容易和简便。

上述校正装置是在控制规律中引入微分, 还有其他两种最常用的由电阻器-电容器构成的 RC 校正装置, 给出在 3.5.1 小节。更复杂的 RC 校正装置可参阅本章参考文献。

3.3.6 稳定性分析及代数判据

控制系统的稳定性(2.9 节), 表示系统在没有输入或扰动时能平衡(静止)于它的稳态, 在有限输入或扰动时系统经过一段时间后趋近或运动至原稳态附近新的稳态的能力。

如 3.3.5 小节所述, 对线性控制系统受到输入或扰动后的运动(即其微分方程的解), 由两部分组成, 其特解显然用来描述系统的新的稳态, 而其通解(暂态解)决定系统能否运动至原稳态附近新的稳态, 或恢复到原稳态。从式(3.3.19)和式(3.3.20)进一步分析发现, 这又决定于齐次微分方程特征方程式的根的性质。如果特征根是负的, 如例 3.3.6, 或在特征根是复数的情况下根有负的实部, 则线性控制系统能恢复到原稳态(或附近), 换言之, 系统是稳定的; 否则就是不稳定的(见图 3-17 中 $k_1=25$ 之例)。

因此, 线性定常控制系统稳定的充分必要条件是: 系统微分方程特征方程式的所有根是负实数或是具有负实部的共轭复数。这样, 对线性控制系统稳定性的研究, 归结为要判断闭环系统微分方程的特征根是否是负实数或具有负实部。因此, 要设法用特征方程的系数来判断特征方程式根的性质。数学家 E. 劳思提出代数形式的判据, 来判断特征方程式根的性质。

劳思的代数稳定判据 先按降次幂列出闭环控制系统的特征方程式

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3.3.22)$$

然后,根据特征方程式的系数构造劳思阵列(也叫劳思表格)如下

$$\begin{array}{c|cccc} \lambda^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ \lambda^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ \lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \lambda^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda^2 & e_1 & e_2 & & & \\ \lambda^1 & f_1 & & & & \\ \lambda^0 & a_0 & & & & \end{array}$$

阵列外(竖线左侧)为 λ^n 的降次幂排列,直到 λ^0 。阵列中第一行和第二行的元素可按照特征方程式的系数直接填写。从第三行起,各元素按下列公式计算

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \dots$$

直到其余的 b_i 均为0为止。第四行由第二行和第三行按同样的方法产生,即

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_3 = \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}, \dots$$

依次类推直到求出第 $n+1$ 行为止。劳思阵列呈倒三角形,最后一行只有一个元素,即式(3.3.22)中最后一个系数 a_0 。

劳思提出和证明的代数稳定判据表述为:线性定常闭环控制系统稳定的充分必要条件是,微分方程特征方程式的系数均为正,以及劳思阵列中第一列的所有系数均为正。

例 3.3.7 闭环控制系统的特征方程式如下,试判断其稳定性。

$$D(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 12\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

解 特征方程式的系数均为正。

构造劳思阵列

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^4 & 1 & 12 & 6 \\ \lambda^3 & 6 & 11 & 0 \\ \lambda^2 & 61/6 & 6 & 0 \\ \lambda^1 & 455/6 & 0 & \\ \lambda^0 & 6 & 0 & \end{array}$$

由于特征方程式的系数均为正,第一列所有系数均为正,故该系统稳定。 ■

有些情况下代数稳定判据还是有它的优点的,例如,它可以方便地帮助决定能

使系统稳定的特征方程中某一参数的范围,见本章习题 3.10。

3.4 传递函数与频域分析法

3.4.1 拉普拉斯变换

为了在求取控制系统的高阶微分方程过程中避免消去中间变量的麻烦,简化其求取手续和求解系统微分方程,必须引入数学工具拉普拉斯变换。它将一个时间函数 $f(t)$ 通过下述积分变换为一个新变量 s 的函数 $F(s)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.4.1)$$

式中 s 是一个复变量, $s = \sigma + j\omega$, σ 是其实变量部分, ω 是虚变量部分, $j = \sqrt{-1}$ 是虚数。 $f(t)$ 和 $F(s)$ 相应互称变换的原函数和象函数。用运算符号将拉普拉斯变换式(3.4.1)表示成

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.4.1a)$$

研究控制系统动态过程所采用的典型输入信号单位阶跃函数 $1(t)$ 和单位冲激函数 $\delta(t)$ 都是可拉普拉斯变换的。

例 3.4.1 单位阶跃函数 $1(t)$ 的象函数

$1(t)$ 定义为 $1(t) = 0, t < 0$; $1(t) = 1, t \geq 0$, 则

$$\int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad \text{或} \quad \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (3.4.2)$$

例 3.4.2 单位冲激函数 $\delta(t)$ 的象函数

$$\int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad \text{或} \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (3.4.3)$$

由拉普拉斯变换的象函数 $F(s)$ 求取原函数 $f(t)$ 的数学运算,称为拉普拉斯反变换,它是通过下述积分运算实现的

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (3.4.4)$$

或用运算符号表示成 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。例 3.4.1 及例 3.4.2 的象函数都可通过拉普拉斯反变换找到原函数。

可以证明,拉普拉斯变换的原函数 $f(t)$ 和象函数 $F(s)$ 是一一对应的,而象函数 $F(s)$ 经过拉普拉斯反变换后得到原函数 $f(t)$; 或用运算符号表示成: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}[f(t)] = f(t)$ 。现将拉普拉斯变换的有关定理以及原函数和对应的象函数的简表列出于附录 A,可以方便地从原函数 $f(t)$ 查到象函数 $F(s)$,或反向查读,即从象函数 $F(s)$ 查到原函数 $f(t)$ 。附录 A 中拉普拉斯变换有关定理的证明从略。

3.4.2 元件和系统的传递函数,系统的结构图

1. 元件的传递函数

引用上述拉普拉斯变换可求取元件和系统微分方程的拉普拉斯变换式。今以 RC 微分装置(例 3.3.5,图 3-15)为例,它的微分方程模型如式(3.3.15)所示,即

$$\alpha T_d \frac{d}{dt} u_d(t) + u_d(t) = \alpha \left(T_d \frac{d}{dt} \Delta u(t) + \Delta u(t) \right)$$

式中时间常数 $T_d = R_1 C$, 系数 $\alpha = R_2 / (R_1 + R_2)$ 。根据附录 A 拉普拉斯变换简表的第 1 条线性定理,对上式逐项进行拉普拉斯变换,并设 $\mathcal{L}[u_d(t)] = U_d(s)$, $\mathcal{L}[\Delta u(t)] = \Delta U(s)$, 引用附录 A 的微分定理,并设初始条件为 $\Delta u(0) = 0$, 则

$$(\alpha T_d s + 1)U_d(s) = \alpha(T_d s + 1)\Delta U(s) \quad (3.4.5)$$

而元件(或系统)的传递函数 $G(s)$ 定义为: 在零初始条件下元件(或系统)输出的拉普拉斯变换 $U_d(s)$ 和输入的拉普拉斯变换 $\Delta U(s)$ 之比。RC 微分装置的传递函数为

$$G_d(s) = \frac{U_d(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\alpha(T_d s + 1)}{\alpha T_d s + 1} \quad (3.4.6)$$

式中 α 称为传递系数。当 α 很小时, RC 微分装置的传递函数 $G_d(s) \approx \alpha(T_d s + 1)$ 。

由式(3.3.15)和式(3.4.6)可以看出,前者是 RC 微分装置在时间域的描述,后者是在 s 域的描述。而在式(3.3.15)中如以输入和输出的象函数代替原函数,以复变量 s 代替 $\frac{d}{dt}$ 就可得到式(3.4.5)。两式又可以通过拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换互相推演,所以可以认为式(3.3.15)和传递函数式(3.4.6)包含着原微分方程的所有信息,即元件的动态性能的信息。只是复变量 s 可以像代数变量那样进行运算处理。这对于人们表述、处理一个动态元(部)件或系统的动态行为有很大的简便之处。

例 3.4.3 加热电炉的传递函数

加热电炉的微分方程模型在滞后 $\tau \neq 0$ 时如式(3.3.3a)所示,即

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t - \tau) + k_1 d_1(t - \tau) + k_2 d_2(t - \tau)$$

对上式进行拉普拉斯变换并考虑到附录 A 的滞后定理,又设 $\mathcal{L}[u_f(t)] = U_f(s)$, $\mathcal{L}[u_m(t)] = U_m(s)$, 则 $\mathcal{L}[u_m(t - \tau)] = e^{-\tau s} U_m(s)$, 得

$$U_w(s) = \frac{k_f e^{-\tau s}}{T_f s + 1} U_h(s) + \frac{k_1 e^{-\tau s}}{T_f s + 1} D_1(s) + \frac{k_2 e^{-\tau s}}{T_f s + 1} D_2(s) \quad (3.4.7)$$

当滞后时间 τ 很小, $\tau \approx 0$ 时,由加热电压变动引起的加热电炉的传递函数 $G_f(s)$, 传递系数为 k_f

$$G_f(s) = \frac{U_w(s)}{U_h(s)} = \frac{k_f}{T_f s + 1} \quad (3.4.7a)$$

例 3.4.4 热电偶的传递函数

由热电偶的微分方程式(3.3.4),得热电偶的传递函数 $G_c(s)$

$$G_c(s) = \frac{U_f(s)}{U_w(s)} = \frac{k_c}{T_c s + 1} \approx k_c \quad (3.4.8)$$

例 3.4.5 电枢控制直流电动机连同调压器的传递函数

电枢控制直流电动机连同调压器的微分方程模型如式(3.3.13)所示,即

$$T_m T_l \frac{d^3 u_h}{dt^3} + T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{du_h}{dt} = k_h k_e u_m$$

或忽略电磁时间常数 T_l , 则

$$T_m \frac{d^2 u_h}{dt^2} + \frac{du_h}{dt} = k_h k_e u_m$$

对式(3.3.13)进行拉普拉斯变换并设 $\mathcal{L}[u_h(t)] = U_h(s)$, 得电枢控制直流电动机的传递函数

$$G_m(s) = \frac{U_h(s)}{U_m(s)} = \frac{k_h k_e}{T_l T_m s^3 + T_m s^2 + s} \quad (3.4.9)$$

或忽略电磁时间常数 T_l , 则

$$G_m(s) = \frac{k_h k_e}{T_m s^2 + s} \quad (3.4.9a)$$

例 3.4.6 放大器的传递函数

由放大器的数学模型式(3.3.5) $u_d(t) = k_1 \Delta u(t)$, 则放大器的传递函数

$$G_a(s) = \frac{U_d(s)}{\Delta U(s)} = k_1 \quad (3.4.10)$$

2. 系统的传递函数及结构图

根据上述诸元件的传递函数式(3.4.6)、式(3.4.7)、式(3.4.8)、式(3.4.9)、式(3.4.10)以及比较环节的方程 $\Delta u(t) = u_r(t) - u_f(t)$ 的拉普拉斯变换式 $\Delta U(s) = U_r(s) - U_f(s)$, 则可以绘出加热炉在输入作用 $U_r(s)$ 下炉温自动控制系统的结构图(图 3-19)。控制系统的结构图, 由各元(部)件(环节)传递函数的方框组成, 并注明各个拉普拉斯变换后的变量, 再将各个环节之间按信息传递方向用箭头相连。此时, 方框仅表明各元(部)件经抽象后的表征动态性能的传递函数, 它们间的相互连接、反馈以及扰动和输入、输出。

图 3-19 中从误差 $\Delta U(s)$ 到输出 $U_w(s)$, 称为前向通道, 其传递函数设为 $G(s)$; 从输出 $U_w(s)$ 到比较环节 $\otimes$ 称为反馈通道, 其传递函数设为 $H(s)$ 。利用 $G(s)$ 和 $H(s)$ 将一般的方框图表示成图 3-20。 $E(s)$ 是误差 $e(t)$ 的拉普拉斯变换式, 即图 3-19 中的 $\Delta U(s)$ 。符号“ $\approx$ ”表示在图上该处切断连接, 使控制系统成为开环的。

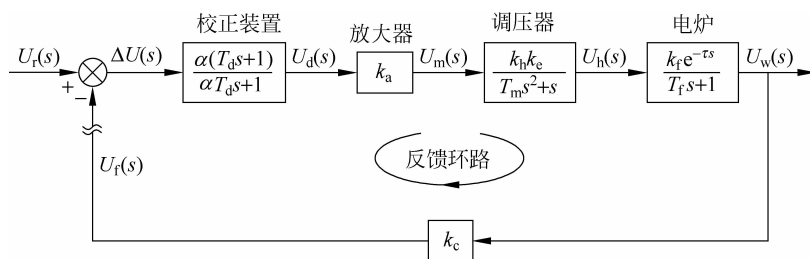


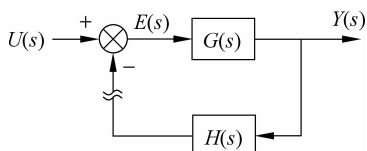
图 3-19 加热炉炉温控制系统的结构图

开环控制系统的传递函数定义为

$$G_0(s) = G(s)H(s) \quad (3.4.11)$$

是前向通道传递函数 $G(s)$ 和反馈通道传递函数 $H(s)$ 的乘积。而闭环控制系统的传递函数 $W(s)$ 定义为输出 $Y(s)$ 和输入 $U(s)$ 之比, 可由 $E(s) = U(s) - H(s)Y(s)$,

$Y(s) = G(s)E(s)$ 求得



$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)E(s)}{E(s) + H(s)Y(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

图 3-20 控制系统的典型结构图

由式(3.4.12)可以看出, 闭环传递函数将闭环传递函数 $W(s)$ 与前向通道的传递函数 $G(s)$ 和反馈通道的传递函数 $H(s)$ 联系在一起。像随动系统中(图 1-4)输出直接反馈与输入相比较, 即 $H(s) = 1$ 的场合, 则

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}U(s) = W(s)U(s) \quad (3.4.12a)$$

即闭环随动系统的输出 $Y(s)$ 取决于闭环传递函数 $W(s)$ 和输入 $U(s)$ 的性质。

加热炉炉温自动控制系统的反馈通道上只有一个热电偶(图 3-19), 其反馈通道传递函数

$$H(s) = k_c \quad (3.4.13)$$

3. 传递函数的性质

注意, 拉普拉斯变换只适宜应用于线性系统(参见 3.1.3 小节)。元(部)件和系统的传递函数, 通常是拉普拉斯变换复变量 s 的有理分式, 分母、分子都是 s 的多项式, 但分母阶数大于或等于分子阶数。所以, 可以将分母为 2 阶或以上的传递函数(如电枢控制下直流电动机)用部分分式法分解成 2 个或以上的基本环节。这些基本环节是: 比例环节 k (如放大器); 一阶惯性环节 $\frac{k}{T_s + 1}$ (如热电偶); 振荡环节 $\frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$, $0 < \zeta < 1$ (如电阻-电感-电容的串联回路); 理想微分环节 ks , (近似微分环节为 $\frac{ks}{T_s + 1}$, 如 RC 微分装置则包含近似微分环节和比例环节, 见本小节之 4.

环节(传递函数)的连接);积分环节 $\frac{1}{s}$;滞后环节 $ke^{-\tau s}$ 。在位置输出时的电枢控制下直流电动机的传递函数包含一积分环节;而加热电炉的传递函数包含一滞后环节。这些按动态性能划分的基本环节为数不多,但对了解和分析控制系统的性质有很大的帮助。元(部)件的物理属性可以不同,但可有同样的传递函数。这就是说有同样的动态性质。

4. 环节(传递函数)的连接

从图 3-19 可以看出在前向通道上几个环节串联连接,第一个环节的输出就是第二个环节的输入,第二个环节的输入就是第三个环节的输入等。串联环节的等效环节,其传递函数是以第一个环节的输入为输入,以最后一个环节的输入为输出,以图 3-19 为例,4 个元件串联后等效的传递函数再串联上第五环节(热电偶)得到加热炉在输入作用 $U_r(s)$ 下炉温自动控制系统的开环系统的传递函数 $G(s)H(s)$

$$\begin{aligned}
 G(s)H(s) &= \frac{U_f(s)}{\Delta U(s)} = \frac{U_d(s)}{\Delta U(s)} \frac{U_m(s)}{U_d(s)} \frac{U_h(s)}{U_m(s)} \frac{U_w(s)}{U_h(s)} \frac{U_f(s)}{U_w(s)} \\
 &= G_d(s)G_a(s)G_m(s)G_f(s)G_c(s) \\
 &= \frac{\alpha(T_d s + 1)}{\alpha T_d s + 1} k_a \frac{k_h k_e}{T_m s^2 + s} \frac{k_f}{T_f s + 1} k_c \\
 &= \frac{\alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s + 1)(T_f s + 1)s} \quad (3.4.14)
 \end{aligned}$$

可见环节串联后,其等效的传递函数等于各环节传递函数的积。这样,一个在 s 域求积的简单过程,相当于在时间域上对 5 个微分方程消去 4 个中间变量 $u_d(t)$, $u_m(t)$, $u_h(t)$ 和 $u_w(t)$,这就显示出传递函数方法即频率域研究法的优越性。

环节的并联表示两个以上的环节有相同的输入 $U(s)$,而输出 $Y(s)$ 则为各环节输出 $Y_1(s)$ 和 $Y_2(s)$ 等相加的和。例如,非理想的微分装置(图 3-15)是由一个非理想的微分环节和一个非理想的比例环节并联而成(图 3-21),则可以得到输入为 $U(s)$ 输出为 $Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)$ 的并联环节的等效结果

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s) + Y_2(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} + \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{\alpha T_d s}{\alpha T_d s + 1} + \frac{\alpha}{\alpha T_d s + 1} = \frac{\alpha(T_d s + 1)}{\alpha T_d s + 1} \quad (3.4.15)$$

这说明两者并联得到一个非理想的微分加非理想的的比例环节,即 RC 微分装置(例 3.3.5)。

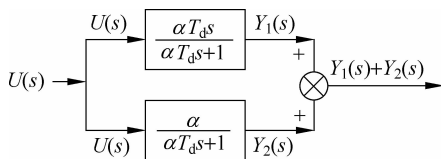


图 3-21 环节的并联

还有一种常用的环节连接是局部负反馈,如图 3-5 所示自动控制系统的各环节功能框图上所示的并联校正装置。这时合成环节的等效传递函数可仿照图 3-20 和式(3.4.12)。

5. 控制系统的稳态误差

由上面本小节之 2,可以推导出另一个重要的闭环误差 $E(s)$ 的传递函数关系式

$$\begin{aligned} E(s) &= U(s) - H(s)Y(s) = U(s) - H(s) \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} U(s) \\ &= \frac{1}{1 + H(s)G(s)} U(s) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

利用式(3.4.16)可以根据系统的传递函数,确定系统的稳态误差。

以研究加热炉炉温控制系统的稳态误差为例,如果输入作用 $u(t) = u_r(t) = 1(t)$ 是单位阶跃函数, $U(s) = \frac{1}{s}$; 输出作用 $y(t) = u_w(t)$, $E(s) = \Delta U(s)$,则由式(3.4.16)得

$$\Delta U(s) = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} \frac{1}{s} \quad (3.4.16a)$$

参照附录 A“拉普拉斯变换简表”中的终值定理,可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + sH(s)G(s)} = 0 \quad (3.4.16b)$$

这是由于 $G(s)H(s)$ 分母中含有一个由积分环节(电动机 M 所含有)提供的 $1/s$ (见式(3.4.13)),故上式分母不等于 0。所以,无论有无微分(校正)装置,系统的稳态误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u(t) = 0$ 。即对于单位阶跃输入作用,系统是无差的。这从理论上阐明了积分环节的消除稳态误差的功能。如果开环系统没有积分环节,则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H(s)G(s)} = \frac{1}{1 + K} \quad (3.4.16c)$$

式中 K 是开环系统的总放大倍数(总传递函数系数)。以加热炉炉温自动控制系统的结构图(图 3-19)为例, $K = \alpha k_a k_f k_h k_e k_c$ 。因此,稳态精度为 $1/(1+K)$, K 愈大,稳态精度愈高。

6. 加热炉炉温控制系统的闭环传递函数及时间响应

根据图 3-21 和式(3.4.13)、式(3.4.14)可以得到加热炉在输入作用 $U_r(s)$ 下炉温控制系统的闭环传递函数

$$\frac{U_w(s)}{U_r(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\alpha k_a k_f k_h k_e (T_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s + 1)(T_f s + 1)s + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)} \quad (3.4.17)$$

该式就是式(3.3.16)微分方程所相应的系统的传递函数,但它的推导就容易得多。必须指出,元件和环节的传递函数的合并,也可以采用信号流图的方法实现(参见 2.4 节和本章参考文献)。

一般的传递函数可以写成零极点的形式如下

$$\frac{U_w(s)}{U_r(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (3.4.18)$$

式中 $-z_i$, $-p_i$ 相应称为该传递函数的零点和极点。

可以看出,加热炉在输入作用 $U_r(s)$ 下炉温控制系统的闭环传递函数,其分母是闭环控制系统的特征方程,是4次代数方程。为了要查拉普拉斯变换表(见附录A)进行拉普拉斯反变换,必须依据传递函数的极点将式(3.4.17)化成部分分式。因此,还是要求出特征方程的根(传递函数的极点)。所以应用拉普拉斯变换来求解控制系统的动态响应,虽能绕过3.6.2小节所叙述的求解线性高阶常微分方程的第二个难点,但同样要解出特征方程的根这一难点依然无法避免。

然而,利用计算软件MATLAB可以方便地进行部分分式展开,更可以直接求解控制系统炉温的调节过程。这样,连拉普拉斯反变换运算都不需要进行了。此外,本章3.5节将阐明MATLAB中具有Simulink这一重要组成部分,它主要用于动态系统的仿真。利用Simulink在工作窗口建立系统结构图的方法,可以方便地得到系统的动态仿真(调节过程)。3.5节将阐明,这特别适合于控制系统的校正。

7. 加热炉炉温控制系统对抗扰的闭环传递函数

以上加热炉炉温闭环传递函数,是针对炉温控制系统处于跟随工作状态而推导出的。然而,加热炉炉温控制系统对抗扰的调节工作状态才是更重要的,因为它是一个恒值自动调节系统。图3-10所示为加入冷工件或环境温度突然下降时,加热炉炉膛温度的自动调节过程,即温度的下降曲线。研究这个动态调节过程需要采用加热炉炉温 $u_w(t)$ 的下列完整的微分方程式(略去滞后 τ 并且扰动 d_2 不变,参见式(3.3.3a))

$$T_f \frac{d}{dt} u_w(t) + u_w(t) = k_f u_h(t) - k_1 d_1(t)$$

式中 $d_1(t)$ 为扰动; $u_h(t)$ 为加热电压,也即 $u_h(t)$ 和扰动 $d_1(t)$ 两者联合作用时所引起的炉膛温度变动的方程。这样,加热炉炉温对抗扰的传递函数为

$$U_w(s) = \frac{k_f}{T_f s + 1} U_h(s) - \frac{k_1}{T_f s + 1} D_1(s) \quad (3.4.19)$$

而加热炉炉温控制系统对抗扰的结构图如图3-22所示,从中可以观察到控制系统在调节状态下工作,输入端没有给定量的变化, $U_r(s)=0$ 。同时加热炉传递函数的输入由两部分组成:一部分为由调压器端电压 $U_h(s)$ 来调节炉温(前向通道),另一部分为由扰动端 $D_1(s)$ 来影响炉温(扰动通道)。加热炉炉温控制系统温度对抗扰的闭环传递函数,从扰动端计入,由两部分串联组成:一部分是扰动通道的传递函数($-k_1/k_f$),另一部分是从扰动端比较器计入,有负反馈的闭环传递函数。对后者仍应用式(3.4.12)导出,这时前向通道只剩下对象加热炉。将上述两部分的传递函数相乘,则得加热炉

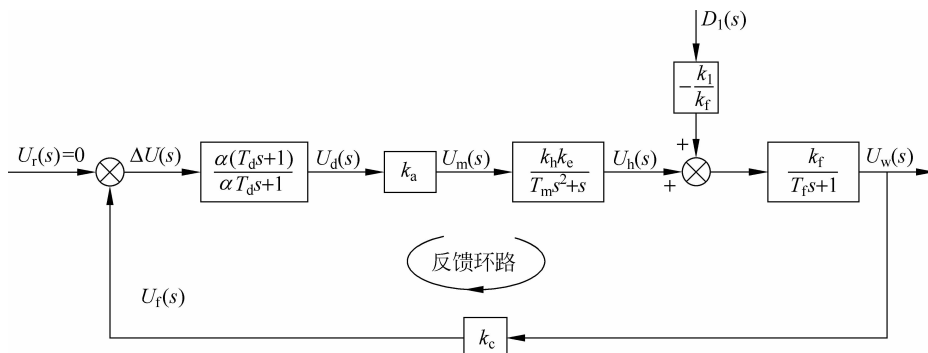


图 3-22 加热炉炉温控制系统对扰动的结构图

炉温控制系统对扰动的闭环传递函数,列出如下

$$\begin{aligned} \frac{U_w(s)}{D_1(s)} &= \frac{-k_1}{k_f} \frac{k_f/(T_f s + 1)}{1 + \frac{\alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s^2 + s)(T_f s + 1)}} \\ &= \frac{-k_1(\alpha T_d s + 1)(T_m s^2 + s)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s^2 + s)(T_f s + 1) + \alpha k_a k_f k_h k_e k_c (T_d s + 1)} \quad (3.4.20a) \end{aligned}$$

这是一个分母为 4 阶的闭环控制对扰动的传递函数。它相当于 3.3.4 小节提到而未列出的描述炉温 $u_w(t)$ 对扰动 $d_1(t)$ 的 4 阶微分方程。若未接校正装置, $T_d=0$, $\alpha=1$, 则成为分母为 3 阶的传递函数, 相当于 3 阶微分方程式。右侧符号表示扰动加大会引起炉温降低

$$\frac{U_w(s)}{D_1(s)} = \frac{-k_1(T_m s^2 + s)}{(T_m s^2 + s)(T_f s + 1) + k_a k_f k_h k_e k_c} \quad (3.4.20b)$$

将各参数代入, 并取低的总放大倍数 $K=k_a k_f=2.5$ 以保证系统稳定, 得到扰动作用下的闭环传递函数

$$\frac{U_w(s)}{D_1(s)} = \frac{-0.05(0.5s^2 + s)}{15s^3 + 30.5s^2 + s + 0.25}$$

具有微分装置时的扰动作用 $d_1(t)$ 下的闭环传递函数为

$$\frac{U_w(s)}{D_1(s)} = \frac{-0.05(0.5s^3 + 1.5s^2 + s)}{15s^4 + 45.5s^3 + 31.5s^2 + 3.5s + 0.25}$$

这样, 炉温 $U_w(s)$ 对扰动 $D_1(s)$ 的闭环传递函数退化为分母为 3 或 4 阶的有理分式, 可以采用 MATLAB 软件进行部分分式展开。经过拉普拉斯反变换运算扰动作用下对炉温的微分方程的解就可以求得了。

实际上, 本节仍采用 MATLAB 软件直接计算在扰动 $d_1(t)$ 为单位阶跃时的炉温响应 $u_w(t)$ 。图 3-23 中的曲线 1 为没有微分装置时炉温的响应, 曲线 2 为有微分装置时的响应。可见微分装置由于改善了闭环系统的动态特性, 使扰动的响应也显著减小。

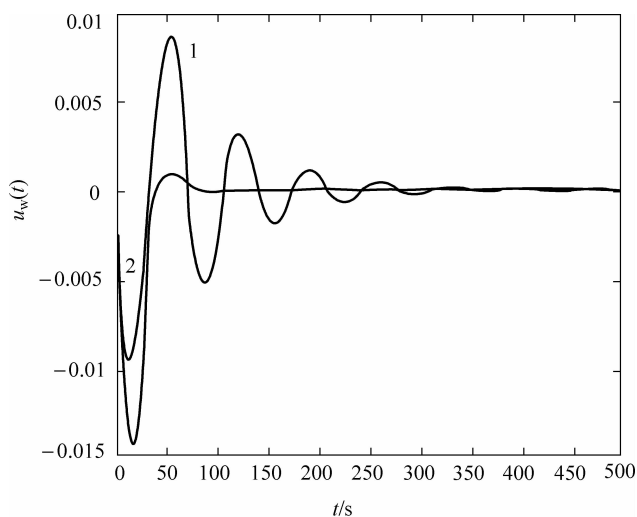


图 3-23 加热炉炉温控制系统对扰动的响应

3.4.3 自动控制系统的频率域分析法

1. 元(部)件和系统频率特性的实验求取

由于早期自动控制系统时间域研究法的局限性,在 20 世纪 40 年代,人们采用在实验室对控制系统(主要是随动系统)求取频率特性的方法对它进行分析研究。其方法是使用正弦信号发生器作为输入正弦信号源,将正弦信号从被断开的以 $G_0(s)$ 为开环传递函数的自动控制系统的输入端输入(参见图 3-24),从自动控制系统的输出端测量输出正弦信号的幅值和输出正弦信号与输入正弦信号的相位差。并且正弦信号源的频率值 ω 要求从很低值开始,一直做到高频即系统输出的正弦响应幅值很小为止。

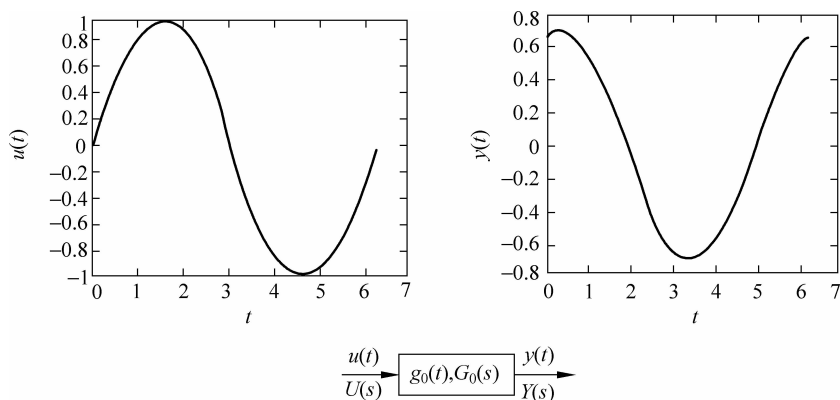


图 3-24 正弦信号的稳态响应

图 3-24 是在一特定的频率 ω_1 时的幅值与相位关系。图中 $g_0(t)$ 是系统的开环冲激响应, 它和开环传递函数 $G_0(s)$ 是一对拉普拉斯变换对, 即 $g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_0(s)]$, $g_0(t)$ 可用在时间域表征一个系统(或元件), 正像 $G_0(s)$ 在频率域表征同一个系统(或元件)一样。

对任意作用 $u(t)$ 的系统输出, 由式(3.3.18)得

$$y(t) = \int_0^{\infty} g_0(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

上式等号左右分别进行拉普拉斯变换, 可以得到

$$Y(s) = G_0(s)U(s)$$

这相当于式(3.4.12a), 因为控制系统处于开环, 系统传递函数是 $G_0(s)$ 。

以一个热电偶微分方程

$$T_c \frac{du_f(t)}{dt} + u_f(t) = k_c u_w(t)$$

即式(3.3.4)为例, 研究频率特性的实验求取。如果输入 $u_w(t) = u_{w0} \sin \omega t$, 则可以看出, 热电偶的稳态输出 $u_f(t)$ 必然也是一同频率正弦信号的函数, 可写成 $u_f(t) = u_{f0} \sin \omega(t - \varphi)$, 因为热电偶是线性元件, 数学上也只有这样类型的函数才能使上述微分方程满足。将假定的稳态解代入式(3.3.4), 则

$$T_c \omega u_{f0} \cos \omega(t - \varphi) + u_{f0} \sin \omega(t - \varphi) = k_c u_{w0} \sin \omega t \quad (3.4.21)$$

即

$$\sqrt{1 + T_c^2 \omega^2} u_{f0} \sin \omega(t - \varphi + \arctan T_c \omega) = k_c u_{w0} \sin \omega t$$

可知

$$u_{f0} = \frac{k_c u_{w0}}{\sqrt{1 + T_c^2 \omega^2}}, \quad \varphi = \arctan T_c \omega \quad (3.4.22)$$

所以, 热电偶的稳态输出

$$u_f(t) = \frac{k_c u_{w0}}{\sqrt{1 + T_c^2 \omega^2}} \sin \omega(t - \arctan T_c \omega) \quad (3.4.23)$$

由此可知, 对于数学模型为式(3.3.4)的热电偶元件, 在正弦信号的激励下其稳态输出也是正弦信号, 只是幅值 $A(\omega)$ 缩小为

$k_c u_{w0} / \sqrt{1 + T_c^2 \omega^2}$, 相位落后了角度 $\varphi(\omega) = \arctan T_c \omega$ 。在一般情况下, 即对任意的线性元

(部)件或线性控制系统的开环实体, 频率特性的实验求取结论是这样: 当正弦信号输入时, 其稳态输出是同频率的正弦信号, 不过振幅和相位发生了变化, 如图 3-25 所示。并且对不同的频率值, 输出的振幅和相位发生的变化也不同。将每个 ω 值的输出振幅/输入振幅比和相位画在极坐标图上就得到许多从原点出发的向量。而这些

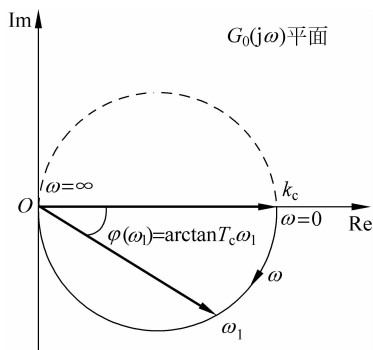


图 3-25 一阶惯性环节的幅相特性

向量的端点形成的轨迹称为相应元(部)件或线性开环系统的(振)幅-相(位)特性(简称幅相特性),这时 ω 成为轨迹上点的参变量(图3-25)。

下面将说明,图3-25的平面称为 $G_0(j\omega)$ 平面。通常,将极坐标图上的横、纵坐标相应取作 $\text{Re}G_0(j\omega)$ (符号Re表示取实部)和 $\text{Im}G_0(j\omega)$ (符号Im表示取虚部)。在 $\omega=0$ 时图中给出一个从原点出发沿横轴的 k_c 长度的向量,这是因为 $\omega=0$ (直流)输入时稳态输出 $k_c u(\infty)=y(\infty)$,即在时间 t 趋近无穷大时输出 $y(t)$ 的幅值趋近 k_c 倍的输入;在频率 ω 趋近无穷大时输出 $y(t)$ 的幅值趋近于0,所以幅相特性趋近原点。可以证明,整个轨迹是第IV象限的一个半圆(图3-25实线)。下面将阐明,开环控制系统的幅相特性可以用来判断闭环控制系统的稳定性,这对于模型未知的控制系统的判别稳定性尤为重要。

2. 传递函数与幅相特性的关系

今再从热电偶的传递函数式(3.4.8)出发

$$\frac{U_f(s)}{U_w(s)} = G_c(s) = \frac{k_c}{T_c s + 1}$$

k_c 为传递系数。以 $s=j\omega$ 代入,则得到

$$\frac{U_f(j\omega)}{U_w(j\omega)} = G_c(j\omega) = \frac{k_c}{jT_c\omega + 1} \quad (3.4.24)$$

将式(3.4.24)在复平面上以 $\omega=0$ 到 $\omega=\infty$ 画出。令人感兴趣的是,它就是图3-25。所要补充的是,理论上来说,它还可以画出 $\omega=0$ 到 $\omega=-\infty$ 的那一半轨迹,它是在图上第I象限的另一个半圆(虚线)。

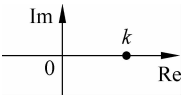
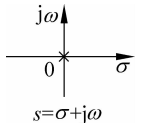
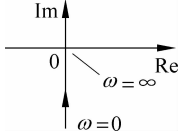
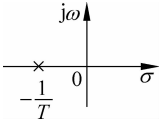
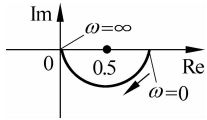
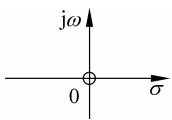
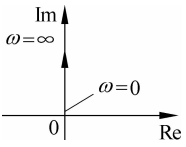
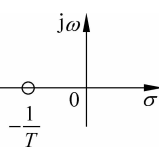
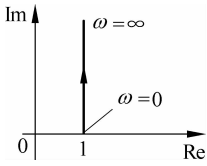
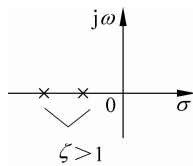
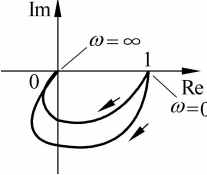
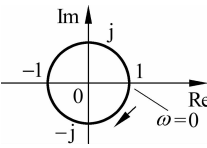
这说明一个极重要的概念:对于原本是复变量的 s 以 $s=j\omega$ 代入元(部)件或系统的传递函数,取 $\omega=0$ 到 $\omega=\infty$ 的值在复平面上绘制出曲线,这个曲线就是该元(部)件或系统的本应由实验测出的幅相(响应)特性。换言之,从实验测得的元(部)件或系统的幅相特性就是它相应传递函数的频率域表征。所以,看来是纯数学概念的传递函数却隐含着丰富的物理概念内涵,并且可以根据实验测得的幅相特性推断出相应的传递函数。所以,图3-25的平面就是 $G_0(j\omega)$ 平面。对于这类幅相特性,还将特性上 $\omega=1/T_c$ 的点称为特性上的转折频率,相当于传递函数的极点 $s=-1/T_c$ 。系统的开环幅相特性曲线特性上的转折频率(或称为传递函数的零、极点),其概念在对数(振)幅频(率)特性曲线上可以理解得最清楚,本章对此从略,在 $G_0(j\omega)$ 平面进行研究。

以一阶微分方程描述的其他惯性元件,具有图3-25上类似的幅相特性,仅是系数 k_c 和 T_c 不同。所以从频率特性或动态性能的观点来研究,自动控制系统的元件不仅能依据物理性质或功能、作用来分类,而更合适是以微分方程性质或动态性能来分类。它们被分成为6种最基本的典型动态环节(见3.4.2小节之3):比例环节、积分环节、微分环节、惯性环节、振荡环节(二阶惯性环节)和滞后环节。

3. 典型环节的频率(响应)特性

现将6种典型环节的微分方程、传递函数、零极点及频率特性列出在表3-1中。

表 3-1 6 种典型环节的微分方程、传递函数、零极点及频率特性

典型环节		微分方程	传递函数	零极点(s 平面)	幅相特性($G_0(j\omega)$ 平面)
比例环节		$y(t) = ku(t)$	$\frac{Y(s)}{U(s)} = k$		
积分环节		$y(t) = \int u(t) dt$	$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$		
惯性环节		$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$	$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts+1}$		
微分环节	纯微分环节	$y(t) = \dot{u}(t)$	$\frac{Y(s)}{U(s)} = s$		
	一阶微分环节	$y(t) = T\dot{u}(t) + u(t)$	$\frac{Y(s)}{U(s)} = Ts+1$		
振荡环节		$T^2\ddot{y}(t) + 2\zeta T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$	$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$		
滞后环节		$y(t) = u(t - \tau)$	$\frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-\tau s}$		

s 平面图中“○”表示零点,“×”表示极点。

4. 自动控制系统的幅相特性

从式(3.4.11)和图 3-20 可知,自动控制系统的开环传递函数是 $G_0(s) = G(s)H(s)$, 是前向通道和反馈通道诸传递函数的乘积。系统的开环幅相特性的绘制方法如下例所示。

例 3.4.7 系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(5s+1)}$$

则其相应幅相特性

$$G_0(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j5\omega+1)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.4.25)$$

式中 $G_0(j\omega)$ 向量的幅值 $A(\omega) = \frac{10}{\omega \sqrt{(5\omega)^2+1}}$;

$G_0(j\omega)$ 向量的相角 $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 5\omega$ 。

绘制开环幅相特性要逐 ω 点进行计算, 绘制成图 3-26。为了简便可以直接用 MATLAB 程序绘制成开环幅相特性曲线, 程序是

```
g=tf(10,[5 1 0]), nyquist(g)
```

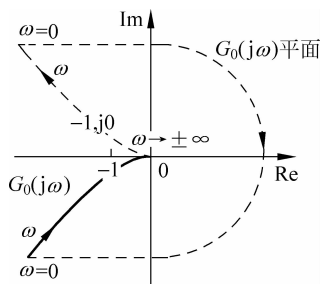


图 3-26 例 3.4.7 系统的开环幅相特性

5. 频率域与时间域的关系

幅相特性是由传递函数绘制出, 描述正弦输出量和正弦输入量间用向量终端轨迹表示的稳态关系。但大多数控制系统的实际输入量, 并不是正弦, 而是非周期函数, 如单位阶跃函数。众所周知, 一个非正弦周期函数可以分解成傅里叶级数, 即分解成一系列频率不同的谐波; 而一个非周期函数通过傅里叶积分可以分解成一系列频率连续的谐波。由于线性系统满足比例性和叠加性, 系统在非正弦函数作用下的暂态响应, 可以由这些频率连续的谐波作用下响应的积分来求得。因此, 可以用 $\omega=0$ 到 $\omega=\infty$ 全部频率下系统的频率响应来研究在非正弦函数作用下线性控制系统的暂态响应。

例如, 经常采用单位阶跃函数 $1(t)$ 作为线性控制系统的典型输入作用。在通过频率特性求取系统的阶跃响应时, 先将阶跃函数 $1(t)$ 通过傅里叶积分, 分解成一系列频率连续的谐波

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (3.4.26)$$

上式表明, 单位阶跃函数 $1(t)$ 是由 $\omega=0$ 的直流(恒定)分量和无穷多个幅值 $\left(\frac{d\omega}{\pi\omega}\right)$ 为无穷小、频率连续的谐波分量叠加组成。式(3.4.26)也是单位阶跃函数和它的频率特性的对应关系。设将此单位阶跃函数 $1(t)$ 加到一个具有下述频率特性 $W(j\omega)$ 的系统上

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.4.27)$$

根据 3.4.3 小节所阐明的原理, 该系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) d\omega \quad (3.4.28)$$

因此, 系统在一个时间函数作用下的响应 $y(t)$, 可以用该函数的傅里叶积分和 $\omega=0$

到 $\omega = \infty$ 全部频率的系统频率响应来描述。若要求在 t 值时的时间响应 $y(t)$, 需要对系统的全部频率响应来积分。

本节说明, 一个系统的频率特性与其时间响应存在一定的关系。因此, 可以用控制系统的频率特性在频率域间接来研究其在时间域的暂态响应, 包括稳定性、动态品质等问题。这个概念非常重要。这样, 人们在研究控制系统时就有可能绕过时间域研究法的一些困难, 从而使频率域 (frequency domain) 分析研究法 (简称频率法) 在 20 世纪 40~50 年代迅猛地发展起来。

3.4.4 频率法分析系统的动态性能和稳定性

由于开环传递函数与闭环传递函数之间存在式 (3.4.12) 或式 (3.4.12a) 的关系。所以, 从频率域的角度可以依据开环系统的幅相特性, 来判断和评价闭环系统调节过程的性能。对于开环系统的传递函数 $G(s)H(s)$ 或 $G(s)$, 其分母就相当于开环系统微分方程的特征方程。和闭环特征方程式一样, 开环传递函数的极点可以分为下列三类: (1) 负极点或有负实部的复极点; (2) 正实极点或有正实部的复极点; (3) 零值极点或零实部的虚极点。第一类极点处在左半 s 平面, 第二类极点处在右半 s 平面, 最后一类极点在 s 平面的虚轴上。因此, 开环系统也有稳定性的问题, 只有开环传递函数全部极点处在左半 s 平面的开环系统, 才是稳定的。

1. 按系统的开环幅相特性判断闭环系统的稳定性(奈奎斯特稳定判据)

按系统的开环幅相特性判断闭环系统的稳定性的稳定判据由美国电信工程师 N. 奈奎斯特提出, 可叙述如下: 如果线性控制系统的开环传递函数在右半 s 平面具有 p 个极点, 即开环系统是不稳定的, 则闭环系统稳定的充分必要条件是: 当 ω 从 $-\infty$ 到 ∞ 变化时, 系统的开环幅相频率特性 $G_0(j\omega)$ 逆时针方向包围 $G_0(j\omega)$ 平面上 $(-1, j0)$ 点 p 圈。

上述稳定判据又称为奈奎斯特判据。详细的理论证明本书从略。理论研究规定, 所谓包围是指沿着开环幅相特性曲线从 $\omega = -\infty$ 向 $+\infty$ 行走时, 右侧形成的封闭区域。

如果线性控制系统的开环传递函数在右半 s 平面没有极点, 稳定的闭环系统的开环幅相特性 $G_0(j\omega)$ 应不包围 $G_0(j\omega)$ 平面上 $(-1, j0)$ 点。

例 3.4.8 系统的开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{k_c}{T_c s + 1} \quad \text{或} \quad G_0(j\omega) = \frac{k_c}{jT_c \omega + 1}$$

开环传递函数没有不稳定的极点。由图 3-25 可知, 开环幅相特性曲线是一个以 k_c 为直径在第 I 和第 IV 象限间上下对称的圆。不管 k_c 多大, 该圆不会包围 $(-1, j0)$ 点, 因此系统闭环后是稳定的。 ■

例 3.4.9 系统的开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{10}{s(5s+1)} \quad \text{或} \quad G_0(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j5\omega+1)}$$

开环传递函数有一个虚轴原点上的极点。系统的开环幅相特性曲线不是封闭的,曲线随 ω 的增加在第Ⅲ象限沿着负虚轴趋近原点($\omega \rightarrow -\infty$),见图 3-26。理论研究证明:这种不封闭是由于零值极点造成的。必须增加补充曲线使开环幅相特性曲线闭合,其画法是,以平面上原点为圆心,以 ∞ 为半径从奈奎斯特曲线上的 $\omega=0$ 开始,逆时针方向画圆弧,转过($\nu \times 90^\circ$)为止。其中 ν 为积分环节的阶(零值极点个数)。图 3-26 中为具有一个积分环节, $\nu=1$,增加 90° 补充曲线的情况。从 $\omega \rightarrow -\infty$ 到 $\omega \rightarrow \infty$ 开环幅相特性不包围 $(-1, j0)$ 点,所以该闭环控制系统是稳定的。■

奈奎斯特稳定判据是复平面 $G_0(j\omega)$ 上开环幅相特性针对一个特殊的 $(-1, j0)$ 点而进行分析的。这可以解释如下:如输入一个频率为 ω_1 幅值为1的正弦波,设定它为零相位(图 3-25),则开环幅相特性上频率为 ω_1 的点所表征的向量(该点与原点的连线)就是开环系统输出,包括其幅值和相位(图 3-25)。然而,如果开环幅相特性上该 ω_1 点恰经过 $(-1, j0)$ 点,那么,系统的输出既和输入有同样幅值又有相反的相位。这时,如果将系统闭环,经过比较环节的系统的输出正好能维持系统的输入(图 3-20)。这样,系统中就发生以频率为 ω_1 的持续振荡,系统处于不稳定状态。

2. 开环幅相特性的特征指标

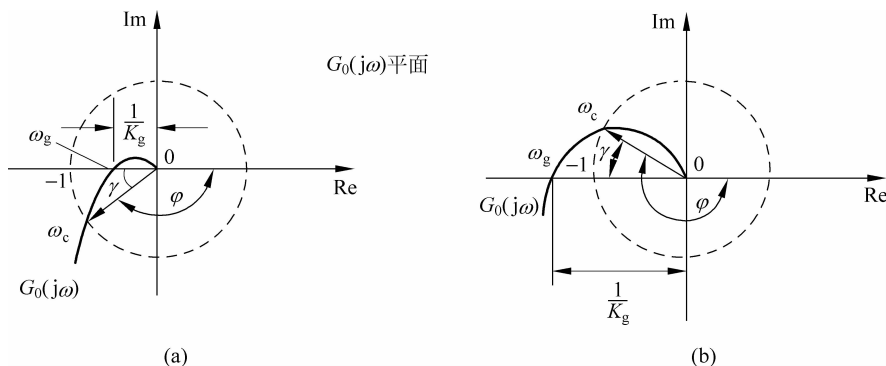
研究表明,线性控制系统的开环传递函数在右半 s 平面没有极点的情况下,幅相特性不包围 $(-1, j0)$ 点,特性愈靠近 $(-1, j0)$ 点,闭环系统的阶跃响应振荡愈剧烈。所以,可以用开环幅相特性曲线靠近 $(-1, j0)$ 点的程度来表示系统的相对稳定程度。这样,人们在开环幅相特性上取出几个标志性的量,即频率域特征指标来间接描绘闭环系统的稳定程度。

(1) 截止频率 ω_c 。开环幅相特性上幅值等于1的向量所对应的频率值,称为截止频率,常用 ω_c 表示,即 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1$ (图 3-27)。它是开环幅相特性与以原点为圆心的单位圆的交点所对应的频率,它表征闭环系统响应的快速性能。 ω_c 愈大,系统愈快速,即调节时间愈短。

(2) 相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 。幅相特性曲线在 $\omega=\omega_c$ 处的相角 $\varphi(\omega_c)$ 与 -180° 之差,称为相位裕量,常用 $\gamma(\omega_c)$ 表示。它表示,为了保持系统稳定,系统开环幅相特性在 $\omega=\omega_c$ 处所容许增加的最大相位滞后量。图 3-27(a)中角 γ 为正值,(b)中角 γ 则为负值,后者表示闭环系统的不稳定情况。

(3) 增益裕量 K_g 。又称为幅值裕量,是指幅相特性的相角为 -180° 这一频率值(图中频率 ω_g)所对应的幅值的倒数 $1/|G_0(j\omega_g)|$ 的分贝数。即增益裕量 $K_g(\text{dB}) = -20\log_{10}|G_0(j\omega_g)|$ 。它表示,为了保持系统稳定,系统开环增益所容许增加的最大分贝数。不稳定的系统增益裕量 K_g 为负值(图 3-27(b))。

(4) 中频宽度 h 。系统开环幅相特性曲线在 $\omega=\omega_c$ 处的前、后频段,称为中频段。

图 3-27 在开环幅相特性上的 ω_c , $\gamma(\omega_c)$, h 和 K_g

$\omega = \omega_c$ 点前、后两个转折频率的距离(实际是“商”),称为中频宽度,以 h 表示。 $h = \omega_2 / \omega_1$, ω_1 和 ω_2 相应为与 ω_c 最靠近的前、后两个转折频率, $\omega_1 < \omega_c$, $\omega_2 > \omega_c$ 。研究和设计经验表明, h 愈大,系统的稳定性愈好。

研究表明,低频段(即 $\omega \ll \omega_c$ 的频段)的特性,完全由开环传递函数的积分环节和开环增益决定,表征系统的稳态性能,即系统的稳态精度。中频段的特性,如上所述,反映系统的相对稳定性。高频段(即 $\omega \gg \omega_c$ 的频段)的特性由时间常数较小的环节决定,若幅值小,表征系统的抗干扰能力强。

研究又表明,如果在一条横轴 ω 上标出各元件(环节)传递函数的分母和分子的各个转折频率,则对于一个具有良好性能的控制系统的截止频率 ω_c 最好自左至右处在第 1 或第 2 个分母转折频率和第 1 个分子转折频率之后,并幅相特性在频率 ω_c 点幅值附近有一定的中频宽度 h 值。这称为截止频率 ω_c 与转折频率的“较佳布置”。

3. 按开环幅相特性评估闭环系统的动态品质

为评价闭环控制系统的稳态、动态品质,最直观和方便的是基于时间域指标:稳态误差、超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 T_s 等。稳态误差在 3.4.2 小节之 5 已作阐述。因此,有必要建立起开环幅相特性的频率域特征指标截止频率 ω_c 、相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 、中频宽度 h 和增益裕量 K_g 与上述闭环系统时间域指标超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 T_s 的关系。这种关系是较复杂的:不同的开环传递函数、不同的分母分子阶数,两者的关系就不同。现以一阶惯性环节和一个积分环节串联组成有如下开环传递函数的二阶控制系统为例按开环传递函数评估闭环系统的动态品质。但采用的是相对变量 ω_n 和 ζ 的标准式以便适用于一般情况:

$$G_0(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (3.4.29)$$

式中右侧式称为标准式,根据式(3.4.12a)得出闭环传递函数 $W(s)$

$$W(s) = \frac{k}{Ts^2 + s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.4.30)$$

式中右侧式也称为标准式。上式中式的分子、分母各除以 T , 简单推算可知

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{T}}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{kT}}; \quad \omega_c \approx k, \quad \text{如果} \quad \omega_c \ll \frac{1}{T} \quad (3.4.31)$$

从而建立两类指标间的关系如表 3-2 所示。给定一个上述类型开环系统, 即已知 k 和 T (或 ω_n 和 ζ), 就可决定或从表中可查到截止频率 ω_c , 同时可以得到相位裕量 $\gamma(\omega_c)$, 单位阶跃响应下的超调量 $\sigma\%$ 。

表 3-2 指标 $\gamma(\omega_c)$ 、 $\sigma\%$ 、 ζ 和 ω_c/ω_n 间的关系

$\gamma(\omega_c)/(^{\circ})$	0	11.42	22.60	33.25	43.10	51.80	59.20	65.5	69.86	73.50
$\sigma/\%$	100	72.9	52.7	37.2	25.3	16.3	9.5	4.32	1.5	0.15
ζ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ω_c/ω_n	1	0.99	0.96	0.91	0.85	0.79	0.72	0.65	0.59	0.53

表中 ζ 在 0.4~0.7 范围内闭环控制系统的动态性能较好。

对例 3.4.9 的开环系统

$$G_0(s) = \frac{10}{s(5s+1)}$$

得到 $\zeta=0.7071$, $\omega_n=1.4142$; 由此查表得 $\omega_c=0.92$, $\sigma\%=4.3\%$, $\gamma(\omega_c)=66^{\circ}$ 。可见单位阶跃作用下响应的调节过程超调量很小, 不足 5%。调节时间的估算可参阅本章参考文献, 5%稳态误差带下调节时间 $T_s \approx 3s$ 。顺便指出, 截止频率 ω_c 处在自左起第 1 个分母转折频率(相当于积分环节)之后。

对于分母高于二阶的控制系统, 或者不是式 (3.4.29) 类型的二阶控制系统 (例如传递函数分子有零点, 即有一阶微分环节; 或者系统没有积分环节而有振荡环节等), 有关文献介绍了对 $\sigma\%$ 和调节过程时间 T_s 估算的经验公式, 但较为复杂, 参见本章参考文献, 这里从略。由此可知, 按开环幅相特性对高阶闭环系统的时间域动态指标进行评估, 是既累赘又粗略。

例 3.4.10 由图 3-19 炉温控制系统的开环传递函数 (未接校正装置并且加热炉滞后 $\tau=0$), 根据 3.3.5 小节的数据: $T_f=30$, $T_m=0.5$, $k_a=250$, $k_f=0.1$, $k_h=1$, $k_c=1$, $k_e=0.1$ 则得开环传递函数为

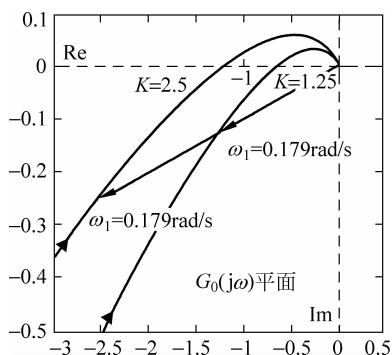
$$G_0(s) = \frac{k_a k_f k_h k_e k_c}{s(T_m s + 1)(T_f s + 1)}$$

或

$$G_0(j\omega) = \frac{2.5}{j\omega(j0.5\omega+1)(j30\omega+1)}$$

系统开环传递函数的分母是 3 阶系统, 表 3-2 已不能应用。

作出系统开环传递函数的两条幅相特性如图 3-28 所示, 分别对应总的开环传递系数 (放大倍数或增益) $K=2.5$ 和 $K=1.25$ 。其中前者 ($K=2.5$) 所对应的系统是不稳定的, 因为它包围了 $(-1, j0)$ 点; 后者所对应的系统是稳定的。图上还表示开环总传递系数 K 的影响: 在 $K=1.25$ 的幅相特性上找出相当于频率 $\omega_1=0.179\text{rad/s}$ 的点, 从原点画出到该点的向量, 表示 $G_{0, K=1.25}(j\omega_1)$; 而在 $K=2.5$ 的幅相特性已经包围了 $(-1, j0)$ 点, 频率 ω_1 点更移向特性的下端, 且截止频率 ω_c 增高。 ■

图 3-28 加热炉炉温控制系统的开环幅相特性 $G_0(j\omega)$

本节推荐采用 MATLAB 进行计算和仿真,方便直接得到系统的开环幅相特性所对应的调节过程,或者直接计算频率域(或时间域)指标,结果一目了然。例如本例的幅相特性图 3-28 就由 MATLAB 软件画出。对于本例的 $G_{0,K=2.5}(j\omega)$,采用 MATLAB 软件计算频率域指标的程序为

```
g=tf(2.5,[15 30.5 1 0]);margin(g)
```

直接显示计算的结果: $\omega_c = 0.286 \text{ rad/s}$, $\gamma(\omega_c) = -1.5^\circ$, $K_g = -1.79 \text{ dB}$ 。闭环系统是不稳定的。顺便指出,截止频率 ω_c 处在自左起两个分母转折频率(相当于积分环节和 $1/T_f$)之后,则在 ω_c 处开环幅相特性幅值下降过快,预示闭环控制系统动态性能欠佳。

4. 合适的稳定裕量范围

开环幅相特性的增益调整对系统的稳态、动态性能有极大的影响。从图 3-28 可以发现,开环增益 K 增大,相当于在 $G_0(j\omega)$ 平面上每个频率 ω 点的向量幅值增大,而相角不变。这样,整个开环幅相特性向左伸展开,引起截止频率 ω_c 增高、相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 减小和增益裕量 K_g 减小。

虽然大的稳定裕量使闭环系统的稳定性增强,但响应会变慢,见例 3.4.9。根据经验,工程系统设计时较为合适的稳定裕量取值范围一般是

伺服系统(伺服机构)	$K_g(\text{dB})$	12~20
	γ	$40^\circ \sim 60^\circ$
过程控制系统(3.1.1 小节)	$K_g(\text{dB})$	3~10
	γ	30° 以上

3.5 控制系统的校正

随动系统及基于电器元件的控制系统,如图 3-1 的炉温自动控制系统、图 3-2 仿模铣床等,其构成特点都是:被控的生产设备(对象)和手动控制的执行机构都已存

在(或选定),人们要解决的是如何配置放大器以及给定、比较等环节或部件,同时在已有设备框架的基础上单个地设计校正装置(如图 3-15 由电阻、电容组成的 RC 微分装置),以满足在给定作用阶跃变化情况下的时间响应和它的稳态精度、动态品质要求。这是这一类系统的校正。

另一类自动控制系统是过程控制(调节)系统(3.1.1 小节),是根据被控对象和控制要求,可以选用市场上有售的多种标准化的仪表(包括 PID 控制器、传感器、变送器)和作为执行机构的调节阀,以构建系统(见 3.5.4 小节之 5)。图 3-29 为由仪表构成的液位自动控制系统,其中被控对象为容器(塔、釜)的液位,由进料管道通过调节阀 R 注入容器内的液体积聚而成,容器内液体经底部出料管和阀门 OL 通往生产装置。调节阀 R 是执行环节。容器的液位由液位变送器 LT 测量,然后将被控液位的信号送至控制器(调节器) LC ,其中包含给定环节,由使用者借此设置液位的给定值。这样,经过选配恰当的仪表和调试它们的参数,可以构成液位的自动控制系统。

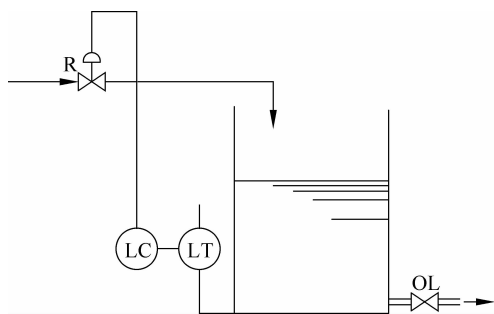


图 3-29 由仪表构成的液位自动控制系统示意图

这一类系统,习惯上都称为过程工业或流程工业(process industries)系统,包括电力、化工、造纸、冶金、制药、轻工、建材、核能等国民经济中举足轻重的许多工业,其中温度、压力、流量、液(料)位、浓度(成分)五大参数作为主要被控参数。这类控制系统主要在调节的工作状态下运行。

过程控制系统的校正是,如何选择 PID 控制器的控制规律和确定它的参数,以满足在给定作用阶跃变化情况下对时间响应的要求:稳态精度、动态品质。过程控制系统的这种校正称为控制器(PID 控制器)的参数整定,在 3.5.4 小节将加以阐明。

3.5.1 控制系统的频率法校正

以一类广泛使用的随动系统为例,其特点是由电动机或液压伺服机来驱动受控对象(如图 3-4),而对象的位置信号(如船舵的偏角 $\theta_0(t)$)则作为测量信号和给定信号 $\theta(t)$ 相比较,并形成误差 $e(t)$,见图 3-30。其中 $\theta_0(s)$, $\theta(s)$ 和 $E(s)$ 为相应的拉普拉斯变换后的变量。

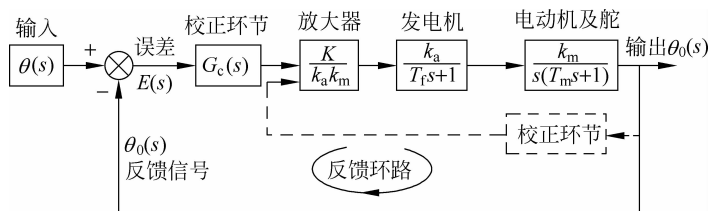


图 3-30 船舵偏角手轮的控制系统框图

随动系统(3.1.3 小节)中的被控对象(电动机及船舵)和它的放大器(包括电压放大和发电机)组成基本部分。除放大器的放大倍数(增益)外,这个基本部分的结构和参数是不能改变的,称为系统的“固有部分”。

校正的任务是,基于固有部分的开环幅相特性和对控制系统的稳态和动态品质的要求,找到必须采用的校正装置(环节)和它的参数,以满足对随动系统的稳态和动态指标要求。

校正装置分为两类:串联校正装置(图 3-15)和并联校正装置(图 3-5)。串联校正装置在图中处于控制器的位置,即置于放大器的前面以形成控制规律;并联校正装置又称为反馈校正,通常用于环绕被控对象(或固有部分)以产生与输出变量的导数成正比的信号并加以处理和反馈,来改善系统的稳态和动态品质。其作用可理解为改变固有部分的频率特性。

常用的 RC 校正装置有三类:(1)微分装置,如图 3-15 所示。主要作用是产生足够大的相角超前,以补偿系统“固有部分”过大的相角滞后,又称超前校正装置。它对缩短调节过程时间和提高响应快速性有利。(2)滞后校正装置,如图 3-31 所示。主要作用是有益于改善系统的稳态精度。(3)超前-滞后校正装置,如图 3-32 所示。兼有超前和滞后校正装置的优点,适用于既需要快速响应特性又需要良好稳态精度的控制系统。

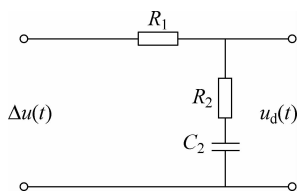


图 3-31 由 RC 组成滞后校正装置

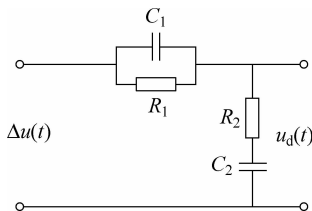


图 3-32 由 RC 组成超前-滞后校正装置

滞后校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_d(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\alpha T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \quad (3.5.1)$$

式中时间常数 $T_1 = (R_1 + R_2)C_2$, $\alpha = R_2 / (R_1 + R_2) < 1$ 。

超前-滞后校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_d(s)}{\Delta U(s)} = \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{T_2 T_1 s^2 + (T_1 + T_2 + T_{12})s + 1} \quad (3.5.2)$$

式中时间常数 $T_1 = R_1 C_1$, $T_2 = R_2 C_2$, $T_{12} = R_1 C_2$ 。

这两种校正装置的频率特性,在下文实际使用时再作说明。

校正是在 MATLAB 软件的支持下在 $G_0(j\omega)$ 平面上进行的,3.3.5 小节和 3.4.2 小节之 6 都曾提到。MATLAB 软件可以依据控制系统的开环传递函数 $G_0(s)$ 来绘制幅相特性 $G_0(j\omega)$,进而采用 MATLAB 得到阶跃作用下的调节过程。

校正前先要根据生产工艺要求对所研究的控制系统订出合理的调节过程品质指标。这些指标首先是控制系统开环增益 K 和无差阶数 ν ;其次,或是调节过程直观的时间域指标(如超调量 $\sigma\%$ 、调节时间 T_s),或是开环幅相特性的频率域指标(如截止频率 ω_c 、相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 等)。

如果给出的是时间域指标,而又具有由典型的 2、3 或 4 阶的典型系统所得出的两套品质指标之间的转换关系(如表 3-1,但它仅给出最简单典型系统的转换)。这样,除开环增益 K 和无差阶数 ν 外,通过转换关系可以得到要求的相应截止频率 ω_c 、相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 、中频宽度 h 。然后校正就在幅相特性的 $G_0(j\omega)$ 平面上进行,对待校正的固有部分的幅相特性加以修正、相位加以补偿等。这是频率法校正中经典的基于幅相特性的校正法。当然,如果给出的是频域指标更是可以直接采用这个方法。

如果待校正控制系统的时域指标难以转换,则采用 MATLAB/Simulink 仿真支持下对于待校正的固有部分的传递函数通过校正装置进行修正,并绘制闭环系统的调节过程;或者对调节过程的时域品质指标直接加以计算。然后将它们与要求的指标相比较,以选择校正装置和决定其传递函数。这称作频率法校正中 Simulink 仿真支持下基于开环传递函数的校正法。

上述两种方法中校正装置转折频率(零极点)的选择,都要考虑截止频率 ω_c 与转折频率(零极点)的“较佳布置”(3.4.4 小节之 2)。3.5.2 和 3.5.3 两小节分别阐述这两种校正。

3.5.2 随动系统基于开环幅相特性的频率法校正

经典的基于幅相特性法的频率法校正特别适用于随动系统,它分为三个步骤。

1. 系统固定部分开环幅相特性的修正步骤

按要求的开环增益 K 和无差阶数 ν 或稳态精度来调整原系统固定部分传递函数 $G'_0(s)$ 的相应部分,得出待校正系统的传递函数 $G_0(s)$,再采用 MATLAB 的简单程序即可绘制开环幅相特性 $G_0(j\omega)$ 。从而可以得出待校正系统的截止频率 ω_{0c} 、相位裕量 $\gamma(\omega_{0c})$ 等。一般,系统的频率域指标会不够好,如截止频率 $\omega_{0c} < \omega_c$ (小于要求的截止频率),相位裕量 $\gamma(\omega_{0c})$ 为负值等,故系统不稳定。如果还要在时间域品质指标上进行校验,则按待校正系统的传递函数 $G_0(s)$ 绘制调节过程读出或者直接计算出时间域指标,与要求的时间域指标相比较,得出差异。

2. 校正装置类型的确定

由稳定性和动态性能要求的截止频率 ω_c 和各个转折频率的分布,以及所需要的

相位补偿情况,决定校正装置的类型。初选它分子上的转折频率,并照顾到要求的中频宽度 h 值。如果所要求的频率域指标不能转换成时间域指标,则根据 $G_0(s)$ 绘制出调节过程的形态和读出动态指标,以决定校正装置的类型。

满足品质指标的校正装置和开环幅相特性不是唯一的,即不同类型的校正装置或其不同的系数有时都能使校正后系统达到品质指标的预定要求。

3. 校正装置参数的确定

串联校正装置的传递函数初步确定后,绘制校正后的幅相特性 $G_{02}(s)$ (或 $G_{0c}(s)$ 或 $G_{0d}(s)$, 见下文), 将该幅相特性的频率域指标 ω_c 及 $\gamma(\omega_c)$ 与要求的指标进行比较。如果能满足要求,则进一步求解出相应的 RC 校正装置的元件参数。

上述过程往往还需要几次反复修改和试凑,以使校正装置简单和切实可行(易于采用常规的电容器、电阻器实现),同时又满足控制系统对稳态精度和动态品质的要求。

例 3.5.1 图 3-30 船舵随动系统固有部分(包括发电机和电动机)的传递函数(无差阶数 $\nu=1$)如下,要求按几种方法选择开环增益(传递系数) K 并保持必要的动态品质。

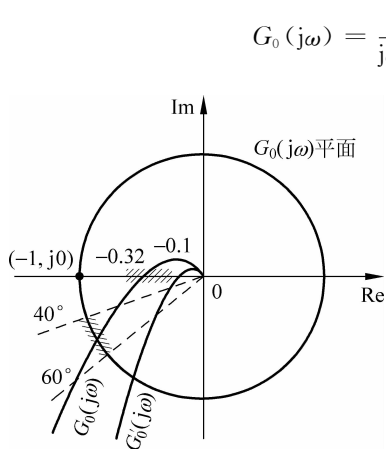


图 3-33 系统在校正前和校正后的幅相特性

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(0.25j\omega + 1)(0.05j\omega + 1)}$$

解 (1) 增益调整法

图 3-33 表示开环系统幅相特性由 $G'_0(j\omega)$ 到 $G_0(j\omega)$ 的开环增益被增大调为 $K=2.3\sim 5$, 相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 在 $40^\circ\sim 60^\circ$ 之间和增益裕量 K_g 在 $12\text{dB}\sim 20\text{dB}$ ($-0.32\sim -0.1$)。这都在可接受的、有较好动态性能的范围之内。

取开环增益 $K=3.6$, 得固有部分的(频率域)传递函数为

$$G_{01}(j\omega) = \frac{3.6}{j\omega(0.25j\omega + 1)(0.05j\omega + 1)}$$

采用 MATLAB 进行计算, 得出增益裕量 $K_g = 16.5\text{dB}$, 相位裕量 $\gamma(\omega_c) = 46^\circ$, 截止频率 $\omega_c =$

2.9rad/s ; 但调节过程太长, 稳态误差消失得很慢, 超调量 $\sigma\% \approx 28\%$ 和调节时间 $T_s = 2.5\text{s}$, 动态品质难以满意。

(2) 相位滞后校正法

如要求系统的开环增益 $K=60$, 并保持必要的动态品质: $\sigma\% \approx 30\%$ 和调节时间 $T_s \approx 2\text{s}$ 。系统固有部分的(频率域)传递函数如下, 并已成为不稳定的系统

$$G_{02}(j\omega) = \frac{60}{j\omega(0.25j\omega + 1)(0.05j\omega + 1)}$$

见图 3-34。它是由 $G_{01}(j\omega)$ 将开环增益按需要增大至 $K=60$ 而得到。由于该传递函

数形状令人省悟到要在分子上补上一个转折频率,以及在分母上补上一个大的时间常数以起近似积分的作用,以改善稳态品质。这时选择滞后串联校正网络(图 3-31),它的作用虽然在低频和中频段显著增大相位滞后,但设法设计得它的幅值很小,故反而增强了稳定性,但同时使截止频率 ω_c 减小,见图 3-34。图上 G_{02} 为未校正系统的幅相特性, G_{ci} 为滞后校正网络的幅相特性, G_{0i} 为合成后的开环系统的幅相特性,并用特性 G_{0i} 以频率 ω_a 和 ω_b 两点显示滞后校正网络的作用。因为是串联校正装置, $G_{ci}(j\omega_a)$ 向量,与系统 $G_{02}(j\omega_a)$ 向量相乘后得出 $G_{0i}(j\omega_a)$ 向量。对于图上的 ω_b 点可同样处理。这使得 G_{0i} 避开了 $(-1, j0)$ 点。特性 G_{02} 和 G_{ci} 同频率点逐点向量相乘,由 G_{02} 校正成为 G_{0i} 。

取滞后校正网络分母的大时间常数 $T_1=80s$ (转折频率为 $0.0125rad/s$)。这样,在它的后面必须有一个分子的转折频率,取滞后校正装置的 $T_2=4s$, $\alpha=T_2/T_1=R_2/(R_1+R_2)=0.05$ 。校正装置的(频率域)传递函数为 $G_{ci}(j\omega)=(4j\omega+1)/(80j\omega+1)$,校正后开环系统的(频率域)传递函数为

$$G_{0i}(j\omega) = \frac{60(4j\omega+1)}{j\omega(80j\omega+1)(0.25j\omega+1)(0.05j\omega+1)}$$

其幅相特性示于图 3-35。采用 MATLAB 进行计算和仿真,此时,截止频率 $\omega_c=2.53rad/s$,增益裕量 $K_g=18dB$,相位裕量 $\gamma(\omega_c)=46^\circ$;调节过程示于图 3-36,超调量 $\sigma\%\approx 30\%$ 和调节时间 $T_s=2s$ 。解(1)的调节过程也绘出在图 3-36 上。由图可见,解(2)的调节时间虽有缩短,但超调量却有所增加。校正装置的实现取电容器 $C_2=1\times 10^{-6}F$,则得电阻器 $R_2=4\times 10^6\Omega$, $R_1=76\times 10^6\Omega$ 。

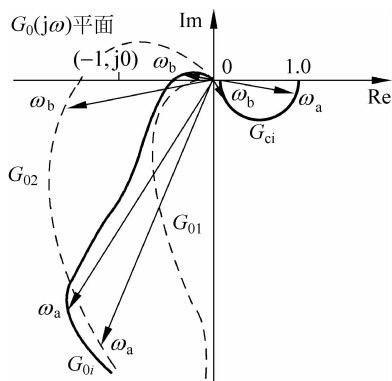


图 3-34 随动系统增益 $K=60$ 时未校正的开环幅相特性和相位滞后校正作用

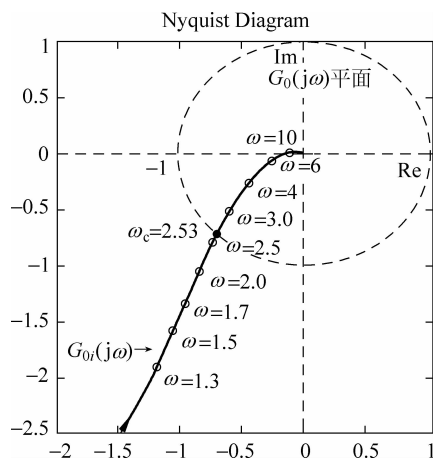


图 3-35 相位滞后校正后的开环幅相特性

(3) 相位超前校正法

对于小功率的随动系统,可再显著缩短调节过程的时间。如要求的开环增益 $K=16$,且要求的动态品质:超调量 $\sigma\%\approx 20\%$ 和调节时间 $T_s\leq 1.5s$ 。

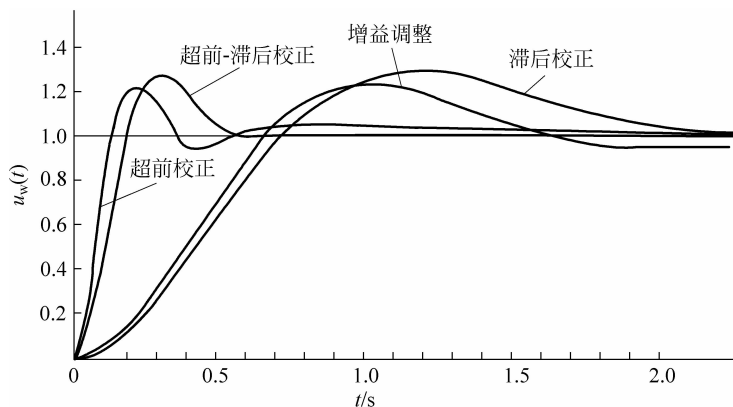


图 3-36 增益调整和三种串联校正后系统的调节过程

取超前串联校正装置(图 3-15)以引入微分,或者说用来抵消大的时间常数 $T_m = 0.25$ 。超前校正装置的(频率域)传递函数取为 $G_{od}(j\omega)/0.05 = (0.25j\omega + 1)/(0.0125j\omega + 1)$, 即 $\alpha = 0.05$ 。校正后开环系统的(频率域)传递函数为

$$G_{od}(j\omega) = \frac{16}{j\omega(0.05j\omega + 1)(0.0125j\omega + 1)}$$

α 值表示,要另外增大增益 20 倍以维持必要的开环增益 $K=16$ 。同时超前校正装置使校正后系统的各转折频率达到较佳布置。它对未校正系统的影响,可用图 3-37 来解释。图上 G_{01} 为上文解(1)增益调整后的幅相特性。 G_{od}/α 为超前校正网络的幅相特性, G_{od} 为合成后的开环幅相特性,并以 G_{od} 特性上的两点频率 ω_a 和 ω_b 来说明幅相特性向量的相乘来显示超前校正网络的作用,这使得 G_{od} 避开了 $(-1, j0)$ 点。特性 G_{02} 和 G_{od}/α 同频率点逐点向量相乘,由 G_{02} 校正成为 G_{od} 。

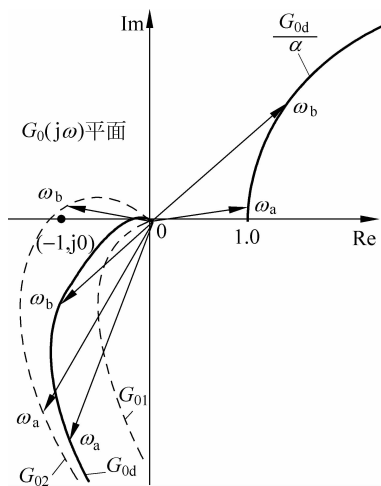


图 3-37 随动系统的相位超前校正作用

采用 MATLAB 进行计算和仿真,此时,截止频率 $\omega_c = 13.0 \text{ rad/s}$,增益裕量 $K_g = 16 \text{ dB}$,相位裕量 $\gamma(\omega_c) = 50^\circ$;调节过程示于图 3-36,超调量 $\sigma\% \approx 20\%$ 和调节时间 $T_s = 1.4 \text{ s}$ 。可见,调节过程时间缩短,超调量减少,达到预定的指标要求。

(4) 相位超前-滞后校正法

如要求开环增益 $K=110$,并缩短控制系统的调节时间 $T_s \leq 0.55 \text{ s}$,超调量 $\sigma\% \leq 26\%$ 。

要求增大系统的开环增益 $K=110$,适宜采用超前-滞后串联校正装置(图 3-32),以既达到快速响应特性又需要良好稳态精度。校正从 G_{02} 特性开始(图 3-38),校正

装置的(频率域)传递函数 G_{cc} 选为

$$G_{cc}(j\omega) = \frac{(j\omega + 1)(0.25j\omega + 1)}{(10j\omega + 1)(1 + 0.025j\omega)}$$

解释如下:超前-滞后校正装置分子上第一个转折频率($1/T_1$)的选择是按分母、分子转折频率在截止频率 ω_c 附近较佳分布的原则,根据 $G_{02}(j\omega)$ 取 $T_1=1$ 。分子上的第二个因子($0.25j\omega+1$)用来抵消分母上的相同因子。而分母上的($10j\omega+1$)因子用来引入一个大的时间常数。此外,还要考虑中频宽度 h 值要大一些,故取 $(10j\omega+1)$ 。图 3-38 表明超前-滞后校正装置的作用: G_{01} 为未校正的幅相特性, G_{0c} 为合成后的开环频率特性, G_{cc} 为超前-滞后校正网络的频率特性并以 G_{0c} 特性上的三点频率 ω_b , ω_m 和 ω_a 来说明,向量的相乘来显示校正装置的作用。这使得 G_{0c} 避开了 $(-1, j0)$ 点。 G_{02} 和 G_{cc} 同频率点的向量逐点相乘,由 G_{02} 校正成为特性 G_{0c} 。由于超前-滞后校正装置兼具有超前校正装置和滞后校正装置的优点,故控制系统频率特性的低和中频段都得到改善。

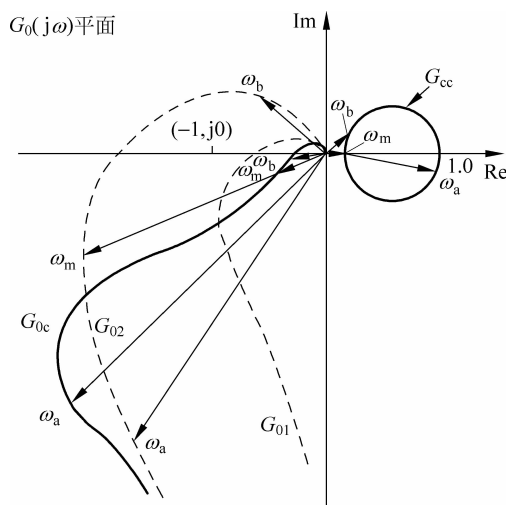


图 3-38 随动系统的相位超前-滞后校正作用

校正后开环系统的(频率域)传递函数为

$$G_{0c}(j\omega) = \frac{110(j\omega + 1)}{j\omega(10j\omega + 1)(0.05j\omega + 1)(0.025j\omega + 1)}$$

采用 MATLAB 进行计算和仿真,得出截止频率 $\omega_c = 9.7 \text{ rad/s}$,增益裕量 $K_g = 15 \text{ dB}$,相位裕量 $\gamma(\omega_c) = 45^\circ$;调节过程示于图 3-36,超调量 $\sigma\% \approx 26\%$ 和调节时间 $T_s = 0.52 \text{ s}$ 。可见,调节时间显著缩短,超调量也在容许的范围内。 ■

3.5.3 Simulink 仿真支持下基于开环传递函数的频率法校正

如果所要求的时域指标超调量 $\sigma\%$ 、调节时间 T_s 等难以转换成频域指标,则根

据总放大系数(开环增益)和无差阶数 ν 修正后的 $G_0(s)$,利用 MATLAB 绘制出调节过程并测定其时域动态指标。将这些指标与所要求的动态指标相比,然后依据传递函数的极零点(即频率特性的转折频率)较佳分布确定校正装置的传递函数和修正其参数。这个工作适宜采用 Simulink 来进行。

Simulink 是 MATLAB 的重要组成部分,主要用于动态系统的仿真和分析、设计。它采用模块和箭头组成系统的结构图模型(图 3-39),和基于传递函数的系统结构图非常相似。线性控制系统所需的传递函数模块、积分器和微分模块可由模块库中的 Continuous(连续)库中拖到图 3-39 中的工作窗口;从 Math Operations(数学运算)库中拖出 Sum(求和)模块和 Gain(增益)模块,并从 Sources(源点)库中拖出 Step(阶跃输入)模块和从 Sinks(汇点)库中拖出 Scope(示波器)模块等;然后设置各传递函数的参数并将各模块用箭头连接起来,如图 3-39 所示。

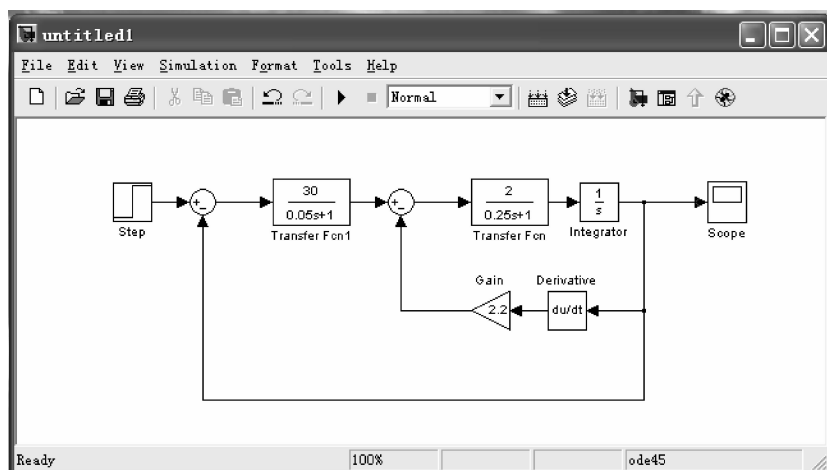


图 3-39 基于 Simulink 的随动系统结构框图

对于机械位置作为输出的随动系统,并联校正装置经常采用。因为从电动机轴上通过连接测速发电机容易取得轴的速度信号。此信号可以直接连接到放大器,也可以通过微分装置再连接到放大器。并联校正装置如采用频率法校正,在 $G_0(j\omega)$ 平面上来计算,则比串联校正法复杂得多。

例 3.5.2 对船舵系统固有部分(见例 3.5.1)进行并联校正,采用 Simulink 仿真支持下基于开环传递函数的频率法校正。

本例中选取基于测速发电机的局部负反馈的并联校正装置。校正系统时在 Simulink 的仿真结构图上一面通过调整反馈回路的 gain 模块的增益值(图 3-39),一面用 Scope 模块显示随动系统调节过程的仿真曲线(图 3-40),观测阶跃响应的指标调节时间 T_s 和超调量 $\sigma\%$ 。

本例要求综合的调节过程动态指标类似于例 3.5.1 解(2)的指标。当本例得出符合要求的反馈校正后,用 MATLAB 精确算得阶跃响应的指标为 $T_s = 0.653s$, $\sigma\% = 23.7\%$ 。由此,可最后肯定并联校正装置及其参数: $G_c(s) = 2.2s$ 。这样得出

校正后的开环传递函数为

$$G_{ob}(s) = \frac{30}{(0.05s+1)} \frac{\frac{2}{(0.25s+1)s}}{1+2.2s \frac{2}{(0.25s+1)s}} = \frac{30}{(0.05s+1)} \frac{0.37}{s(0.046s+1)}$$

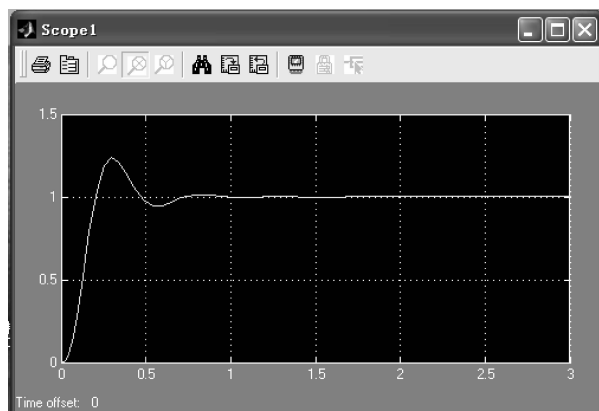


图 3-40 基于 Simulink 的随动系统调节过程仿真结果

以上是根据随动系统经常使用并联校正装置的概念作出的并联校正。但并联校正同时也将被包围的电动机传递系数 2 等效地缩小为 $2/(1+2 \times 2.2) = 0.37$, 则开环增益 $K = 11.1$ 。如果要求严格保持 $K = 16$, 例 3.5.1 的解(3), 还要同时调整随动系统结构框图(图 3-39)上 Transfer Fcn 1(传递函数 1)模块, 内含放大器放大倍数(传递系数)20 和局部负反馈的 Gain(增益)模块的值 2.2, 使开环增益和闭环动态指标能都满足。当然, 也可以选择其他的并联校正装置, 如 $G_c(s) = 3.0s/(0.01s+1)$, 即近似微分装置也能满足校正要求。但等效开环增益 K 也降低了。

本例着重说明, 如何在 Simulink 仿真支持下采用从开环传递函数法进行校正。其步骤与 3.5.2 小节经典的幅相特性法校正相似, 只不过在开环传递函数上作修正。先根据已调整好开环增益和无差阶的开环传递函数 $G_0(s)$ 绘制调节过程, 确定动态指标, 并找出与要求指标的差距。然后按三个校正装置的物理性能和 3.4.4 小节之 2 截止频率 ω_c 与所有传递函数 $G_0(s)$ 极零点(转折频率)分布的“较佳布置”和一定的中频宽度 h 值进行校正。至于截止频率 ω_c 还要根据开环传递函数利用 MATLAB 来计算。校正前要进行计算, 校正后要进行验算“较佳布置”。

注意, 频率特性上的转折频率 ω_i , 相当于传递函数的极点 $s = -\omega_i$ (3.4.3 小节之 2), 取频率 $s_c = -\omega_c$, 则上述极零点“较佳布置”宜改写成: 如果在一条横轴 s 上标出分母和分子的极、零点, 则对于具有良好性能的控制系统的截止频率 s_c 最好自右至左处在第 1 或第 2 个极点和第 1 个零点之后, 并有一定的中频宽度 h 值。

本例中开环传递函数自右至左有 3 个极点: $0, -1/0.25, -1/0.05$; 而从 2 阶等效系统(暂不计根 $-1/0.05$)的观点看, 由式(3.4.29)~式(3.4.30)可知: $\omega_c \approx k = 60$, 该截止频率位于上述 3 个极点之后, 导致动态品质不佳。

无疑,对于串联校正装置也可采用上述基于 Simulink 仿真支持下的方法进行校正。例如,采用串联校正装置 $G_{od}(s)=0.37(0.25s+1)/(0.046s+1)$,它抵消一个大的时间常数,引入一个小的时间常数,并压低开环增益。

上述经典频率法校正中的三个串联校正装置,都可以按开环传递函数的极零点和截止频率的“较佳分布”来解释,例如在例 3.5.1(3)的微分装置的传递函数 $G_{cd}(s)=0.05(0.25s+1)/(0.0125s+1)$ 和上述 $G_{od}(s)$ 类似,只是极点和系数不同。

上述所有校正方法,如果计算时用到开环系统和闭环系统的关系,例如,表 3-2 和式(3.4.12a),则只适用于校正随动系统。然而,直接在 MATLAB/Simulink 仿真支持下采用传递函数的零极点分布校正法进行计算和仿真,则无论对于基于输入端的随动系统或基于扰动端的调节系统的校正都能适用,无论对于串联校正或并联校正都能适用。

上文突出了三类常用校正装置的作用,以及它们在开环频率特性的 $G_o(j\omega)$ 平面上对于待校正系统幅相特性的影响,这些物理概念非常重要,是正确选择校正装置的物理基础。

3.5.4 过程控制系统的控制器参数整定

在阐述过程控制系统的控制器参数整定以前,有必要简单叙述各类自动化仪表。

1. 自动化仪表的分类

自动化仪表中传感器和变送器、执行机构、控制器是三类最主要的仪表。现作简单的介绍。

(1) 传感器和变送器

为进行自动控制,首先要对被控量进行测量。为此,根据物理量的性质,要选择一种敏感元件(sensing element)。敏感元件是能够灵敏地感受被测物理量的变化并作出响应的元件。例如,图 3-1 中选择热电偶作为炉温测量的敏感元件;图 3-2 仿模铣床自动控制系统中差动轮作为成品模型和被加工工件形状之间误差测量的敏感元件。

事实上,被测的物理量种类很多,每个被测的物理量又得根据其量限和测量精度要求,采用相应的测量手段和方法。例如,对温度的测量,低温度时可以采用电阻体(铜或铂),高温度时可以采用热电偶,而更高的温度还有其他测量办法。热电偶又按使用温度和测温精度要求分成一些种类和档次。

传感器(sensors,transducers)不仅应该对被测的物理量敏感,即具有敏感元件或其功能,而且具有将被测物理量的响应传出去至比较环节和显示环节的功能。这就是说,传感器的输出响应必须是易于传送的物理量,如电压、电流、电阻、频率等。

变送器(transmitter)是从传感器发展而来的,凡能输出标准信号的传感器就统称变送器。国际标准信号是:直流电流 4~20mA;空气压力 20~100kPa。

(2) 执行机构

执行机构(参见 3.1.4 小节)又称执行器,是自动控制系统的“手”,它接收来自控

制器(调节器)的信号,并根据这一信号直接或经放大后改变流经该机构的被控介质,达到对被控参数进行自动控制的目的。

执行机构按其能源种类可以分成气动执行器、电动执行器和液动执行器三大类。气动执行器中最普通的是气动薄膜调节阀(图 3-41),它可分为上部的执行机构和下部的调节阀部分(图 3-41(a)),其执行机构主要由弹性薄膜 1、压缩弹簧 2、推杆 3 组成;调节阀主要由推杆、阀体、阀芯 4、阀座 5 等部分组成。

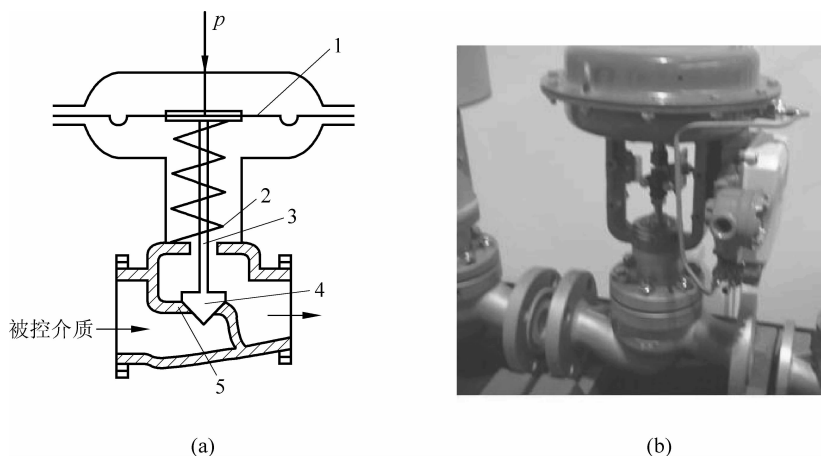


图 3-41 气动薄膜调节阀结构示意图(a)及照片(b)

由控制器输来的气动标准执行信号,自执行机构的顶部 p 进入,由弹性薄膜将其转变为对推杆的推力。通过推杆使阀芯产生相应的位移,改变调节阀的开启度,从而改变相连管道中被控介质的流量,达到控制的目的。例如,图 3-29 中调节阀用来控制进入容器的输入流体的流量。

电动执行机构可分为上部的执行机构和下部的调节机构部分。上部分的任务是将由控制器输来的电动标准执行信号转换成力或力矩;调节机构部分是和上述气动薄膜调节阀通用的。所不同的是电动执行部分采用电动机等电力元件产生推力,开闭调节阀。电动执行机构和调节机构一般两者连接在一起形成一个完整的执行机构,如电动调节阀、电磁阀等。

(3) 控制器

控制器(调节器)是自动控制系统或过程控制系统中重要的控制仪表,它将来自被控量变送器的信号和系统中的给定信号进行比较,得出误差信号,并按照预定的控制规律形成控制器输出,去驱使执行机构动作,以实现自动控制。

在各工业部门的自动控制系统中广泛使用制成工业产品的电子模拟比例积分微分(PID)控制器(调节器)。在电动模拟控制器中采用电阻(器)、电容(器)和晶体管放大器组成比例积分微分电路,实现 PID 功能。更有基于集成电路的电子模拟控制器。其他气动、液动控制器中采用类似方法实现比例积分微分功能。

模拟式电子控制器是定型的工业产品,其控制(调节)规律为“比例积分微分”规律

(见式(3.3.1), 3.3.2 小节), 故称为比例积分微分控制器(PID 控制器)。式(3.3.1)中比例增益 k_p 表示比例作用的强弱, 微分时间常数 T_D 表示微分作用的强弱, 积分时间常数 T_I 表示积分作用的强弱。

PID 控制器的特点是反应快速、可以完全消除稳态误差, 并可以根据误差信号的发展趋势作出超前动作, 从而抑制控制系统的振荡, 因此使系统具有良好的动态和静态性能。

模拟式电子控制器的用途, 是将基于标准信号 $4\sim 20\text{mA}$ 的给定信号与测量信号(也呈标准信号形式)相比较得出的误差按 PID(或 PI、PD)控制规律处理, 然后将输出连接到执行机构, 如电动调节阀。市场上出售的模拟式电子控制器, 都有三种作用: 比例积分微分。但有三个旋钮可以将它们分别设置: 如设置微分旋钮 $T_D=0$, 即成为 PI 控制器; 如设置积分旋钮 $T_I=\infty$, 即没有积分作用, 成为 PD 控制器; 另一个旋钮用来设置比例增益 k_p 。

早期的过程控制系统主要采用基地式仪表、气动单元组合式仪表、电动单元组合式仪表等传统技术工具, 尽管这些仪表、工具在过程工业的多数工厂中还在应用, 但随着微处理器和工业计算机技术的发展, 目前广泛采用可编程单回路、多回路调节器以及分布式控制系统(distributed computer control system, DCS)等。前者全名是可编程逻辑控制器(PLC)——一种专门为在工业环境下应用而设计的数字运算操作的, 集控制、数据处理、通信及联网功能于一身的电子控制装置。它在我国冶金、电力、汽车制造、化工等生产过程的控制上得到了应用, 未来应用范围会有更大的发展。

2. 控制器参数整定

工业自动控制系统的组成方案确定以后(参见图 3-29), 需要根据被测物理量性质和量限选定所用仪表: 传感器和变送器、执行机构、控制器等。下一步要对控制器的比例旋钮 k_p 、积分旋钮 T_I 、微分旋钮 T_D 进行设置, 这称为控制器(PID 控制器)的参数整定(controller parameter tuning)。这时控制系统的控制规律同时就决定了。这里介绍参数整定的齐格勒和尼科尔斯(Ziegler-Nichols)阶跃响应法。

大多数工业过程的单位阶跃响应具有如图 3-42 所示高阶系统的相应形状。响应的稳态值为 k_2 。将曲线以一阶指数曲线(图中一阶响应)逼近, 则可以找到近似的

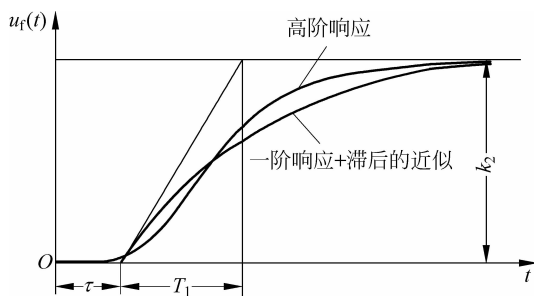


图 3-42 电炉的输入输出时间特性

时间常数 T_1 和滞后时间 τ (曲线拟合的方法, 如 3.3.3 小节)。换言之, 这条过程响应曲线可以用下列的传递函数加以近似描述

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_2 e^{-\tau s}}{T_1 s + 1} \quad (3.5.3)$$

也就是一个具有滞后的一阶惯性模型。指数曲线的斜率 $R = k_2 / T_1$, 齐格勒和尼科尔斯给出控制器的参数整定值的计算公式如下 (证明从略):

控制规律	比例 k_p	积分 T_i	微分 T_D
P	$1/R\tau$		
PI	$0.9/R\tau$	$\tau/0.3$	
PID	$1.2/R\tau$	2τ	0.5τ

由于过程响应曲线的近似性, 所以上述参数仅是针对输入端跟随工作状态的一个粗略的设置。事实上, 过程控制系统主要工作在调节工作状态。为此, 建议用 MATLAB/Simulink 来检验在扰动作用下调节工作状态的响应。在 Simulink 中有 Simulink Extras 库内含 PID 模块可以拖用。甚至可以直接使用 Simulink 和 PID 模块, 直接观察 Scope 模块显示的扰动作用下的调节过程来进行控制器的参数整定。不过, 参数整定完成后对输入阶跃作用下调节过程的品质指标还需要在 Scope 模块帮助下进行检验。

由于过程模型式 (3.5.3) 的近似性 (图 3-42), 过程控制系统在实际使用时, 针对过程的实际情况和扰动响应曲线, 宜对控制器参数作细小在线修正, 才能达到更好的响应。

3.5.5 扰动补偿器设计

3.2 节叙述了扰动补偿的控制原理和方法 (图 3-9), 本小节讨论前馈通道中扰动补偿器的设计方法。

由 3.2 节所述的扰动补偿原理, 参照图 3-43 得出

$$-D(s)G_b(s)G_1(s) + D(s) = 0 \quad (3.5.4)$$

所以

$$G_b(s) = 1/G_1(s) \quad (3.5.5)$$

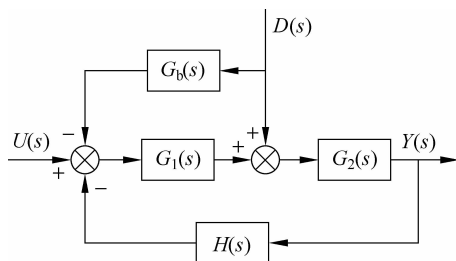


图 3-43 利用扰动补偿减少扰动的控制系统结构图

例 3.5.3 加热电炉温度自动控制系统如图 3-44 所示。元件各项参数如前(见 3.3.5 小节)。未补偿控制系统的传递函数为式(3.4.20)。可以发现,无论对于环境温度的变动和调压器工频电源波动引起的扰动,两者都是可测的,因此可以采用扰动补偿以改进对扰动引起的响应。

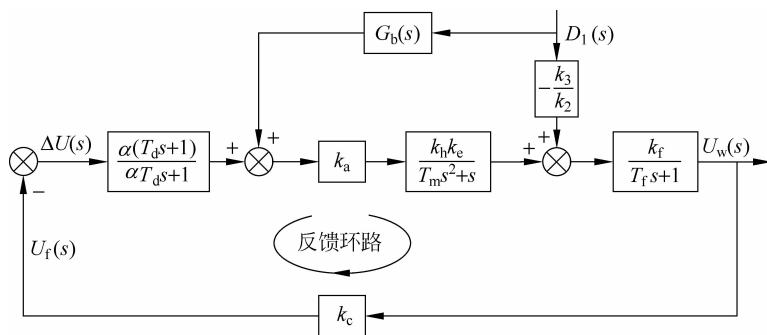


图 3-44 加热炉炉温控制系统对扰动补偿的结构图

将测出的扰动信号接至放大器前端,这样较妥,见图 3-44。未补偿控制系统在扰动作用下的炉温 $u_w(t)$ 调节过程如图 3-45 中的 $u_w(t)$ 曲线 2 所示,可见在扰动作用下炉温 $u_w(t)$ 还有很大的超调。

根据式(3.5.2)应得出扰动补偿器 $G_b(s)$ 的传递函数关系为 $G_b(s) k_a k_h k_c / (T_m s^2 + s) = k_3 / k_2$, 或

$$G_b(s) = k_3 (T_m s^2 + s) / k_a k_f k_h k_c = 0.02(0.5s^2 + s)$$

这需要一个理想的能生成二次微分加上一次微分的微分装置,这难以实现。利用 RC 微分装置和运算放大器,可以近似实现所使用的扰动补偿器,其传递函数为

$$G_{b0}(s) \approx 0.02(0.5s^2 + s) / (0.01s + 1)(0.1s + 1)$$

则已补偿控制系统的闭环传递函数为

$$\frac{U_w(s)}{D_1(s)} = - \left(k_3 / k_2 - \frac{k_f k_h k_c}{T_m s^2 + s} G_{b0}(s) \right) \frac{k_f / (T_f s + 1)}{1 + \frac{\alpha k_a k_f k_h k_c k_c (T_d s + 1)}{(\alpha T_d s + 1)(T_m s^2 + s)(T_f s + 1)}} \quad (3.5.6)$$

比较式(3.4.20)和式(3.5.6)可以看出扰动补偿前馈环路的作用,原来的式(3.4.20)中右侧 k_1 / k_f 被式(3.5.6)中右侧的第一个括号所代替,该括号中的第二项含有扰动补偿器 $G_{b0}(s)$ 。这样,扰动的影响大大削弱。

从图 3-45 可以明显看出,未补偿控制系统在负单位阶跃扰动下的炉温 $u_w(t)$ 响应曲线 2,就是图 3-23 上的响应曲线 2;而补偿后控制系统的相应的炉温 $u_w(t)$ 响应曲线,经过采用 MATLAB 软件进行计算得出曲线 1,其振荡幅度仅是原来的 1%,调节过程的时间也已明显缩短。

必须说明,自动控制系统前向通道上串联或并联校正装置用来改进输入端控制工作状态下调节过程的动态品质,包括闭环稳定性。扰动端调节工作状态必要时要

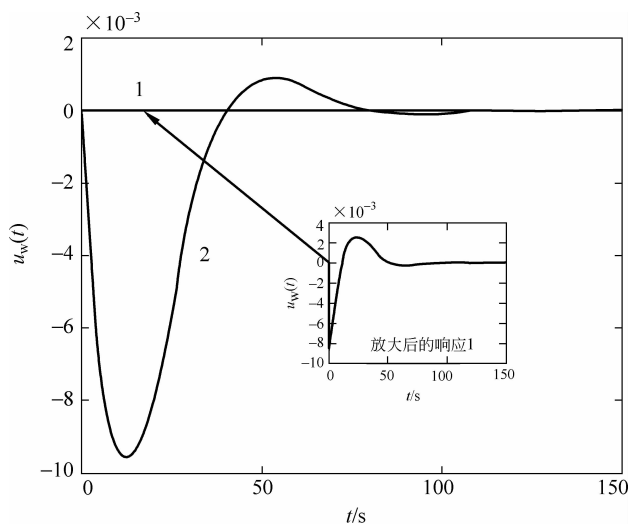


图 3-45 负单位阶跃扰动下炉温控制系统的响应

另加扰动补偿器以改进动态品质。这个前馈环路并不影响前向通道上串联或并联校正装置的工作,也不影响系统的稳定性。

3.6 其他线性控制系统

3.6.1 多变量控制系统和解耦设计

前文所介绍的各类自动控制系统都只有一个输入量和一个输出量,这类系统称为单输入单输出控制系统(single-input and single-output control system)或单变量控制系统(single-control system)。例如,3.1节的恒值自动调节系统中一个输入变量是给定电压 u_r ,而一个输出变量是炉温 u_f 。许多简单的或基本的控制系统往往都是单变量系统。然而,很多大型工业被控对象具有多个输入量或/及多个输出量,称为多输入多输出控制系统(multiple-input or multiple-output control system)或多变量控制系统(multivariable control system)。

工业锅炉是一个多输入多输出控制系统的典型例子(图 3-46)。这个被控对象有 5 个被控输出量:蒸汽压力 p_r ,蒸汽温度 θ ,汽包水位 H ,炉膛负压 p_v 和过量空气系数 α 。被控对象中也有 5 个可作为控制手段的输入量:给水量 W ,喷水量 W_s ,燃料量 B ,送风量 AF 以及引风量 EG 。这是一个 5 输入 5 输出的自动控制系统。

与单变量控制系统相比,多变量控制系统的控制要复杂得多。在多变量控制系统中,被控对象、测量元件、控制器和执行元件都可能具有一个以上的输入量或一个以上的输出量。多变量控制系统的每个输出量通常都同时受到几个输入量的控制和影响,这种现象称为耦合(coupling)或交叉影响(interaction),如图 3-47 中的交叉虚线。

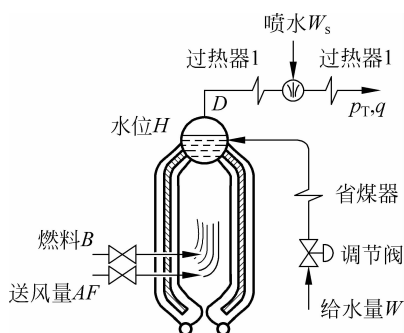


图 3-46 工业锅炉生产过程示意图

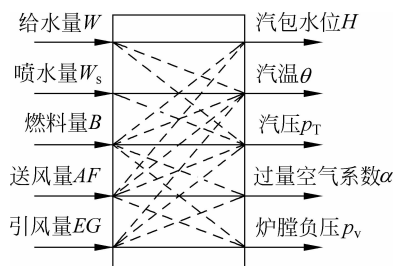


图 3-47 5 输入 5 输出锅炉对象框图

考虑一个简化情况：因汽包水位 H 低于要求值，通过汽包水位 H 自动控制系统会使锅炉输入量之一给水量 W 有所增加，而与此同时被控输出变量蒸汽压力 p_T ，蒸汽温度 θ 都会变动，见图 3-47 中的虚线。为了避免这种影响，工业锅炉的自动控制系统要设计成这样：给水量变动时有信息通过外加的去耦装置 1 和 2 (图 3-48) 分别作用到蒸汽压力 p_T 和蒸汽温度 θ 等的执行机构使两者不变或近似不变，或者说去耦装置用来抵消交叉影响。

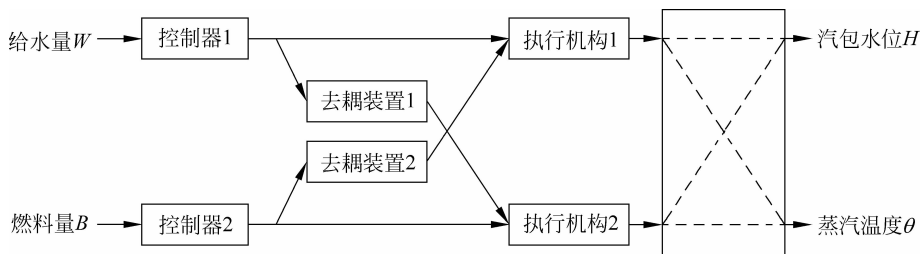


图 3-48 锅炉对象的 2 输入 2 输出部分框图

现在图 3-48 中只画出 2 个输入量和 2 个输出量的部分锅炉对象和相应的控制系统。其中每个输入量对 2 个输出量都有影响，例如给水量的变动对汽包水位和蒸汽温度都有影响等，如图 3-48 的虚线。而为简略起见，汽包水位 H 和蒸汽温度 θ 各自的测量传感器，以及到各自控制器的主反馈环路，在图上未予画出。

交叉影响的存在使多变量系统很可能成为一种条件稳定系统。对于多变量系统通常通过引入附加的去耦装置(环节)，实现一个输入只控制一个输出，称为解耦控制(decoupling control)。图 3-48 中锅炉的部分对象通过去耦装置 1 和 2 相应实现对蒸汽温度和汽包水位的解耦控制。解耦控制的原理如下：给水量 W 通过锅炉对象内部(交叉通道)对蒸汽温度 θ 的交叉影响，由去耦装置 1 通过锅炉对象内下部的正向通道对蒸汽温度 θ 施加的去耦作用，加以抵消。两个通道作用的和接近或等于零，并根据此原理来设计去耦装置 1。同理设计去耦装置 2。

实际上图 3-48 工业锅炉的耦合或交叉影响较多，每个控制环路的控制器都需要各自的去耦装置，才能实现整个锅炉的解耦控制。这里强调，为对多变量控制系统进行有效的控制，需要多个控制器(参见 2.14 节)。

3.6.2 线性离散控制系统

由图 3-6 和图 3-8 的离散控制系统的框图可以看出,控制系统中有些点的信号是离散的,而有些点的信号是连续的。离散信号在离散时刻上取值,通常是时间间隔(采样周期 T)相等的脉冲序列或数字序列。在图 3-7 上可观察到,采样开关每隔 T 时间接通一次,接通的持续时间不变为 Δ ,相当于脉冲的宽度(图上未标明)。图 3-49(b)说明,采样过程可以看成是一个调制过程。

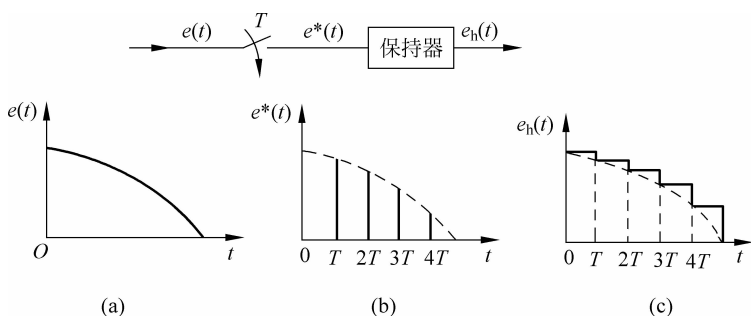


图 3-49 保持器的作用

一般,接通持续时间 Δ 远小于采样周期 T 。为了方便理论上的处理,通常都假设采样开关的闭合是瞬时的,即 $\Delta=0$ 。将这种信号经过控制器进行控制规律的变换、处理后先要经过保持器,再直接加到被控对象上(图 3-6)。保持器将所得到的脉冲序列转换为连续信号(图 3-49(c))。理论上可以推导出零阶保持器的传递函数 $G_h(s) = (1 - e^{-Ts})/s$ 。

1. 元(部)件的离散模型

在研究离散系统时,从图 3-8 可知,输入离散信号进入元(部)件或对象,输出也是同周期的离散信号。而元(部)件或对象却是以微分方程描述的。因此,常常需要将其中的连续变量部分(如被控对象)离散化,从而得到整个系统的差分方程。考虑以下一阶微分方程描述的连续惯性对象

$$T_1 \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = Ku(t) \quad (3.6.1)$$

的离散化。由于在离散系统中应将 dt 以采样周期 T 代替,因而 $\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y(k)}{T}$ 。其中 k 是离散时间,只能取整数,即 $k=1,2,3,\dots$; 一阶差分符号 $\Delta y(k)$ 定义为 $\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$ 。实际上,这是 $\Delta y(kT) = y[(k+1)T] - y(kT)$ 表达式的简洁表示。式(3.6.1)成为

$$T_1 \frac{y(k+1) - y(k)}{T} + y(k) \approx Ku(k) \quad (3.6.2)$$

整理后得到

$$T_1 y(k+1) + (T - T_1) y(k) = K T u(k) \quad (3.6.2a)$$

这就是以一阶微分方程描述的连续对象,经离散化后得出的以差分方程表示的离散模型。如果是二阶微分方程,则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} &\approx \frac{\Delta}{T} \frac{[\Delta y(k)]}{T} = \frac{1}{T^2} [y(k+2) - y(k+1) - (y(k+1) + y(k))] \\ &= \frac{1}{T^2} [y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)] \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

更高阶的微分方程也可照此类推。因此,差分符号 $\Delta y(k)$ 相当于连续变量中的微分 $dy(t)/dt$,只不过 Δt 不是无穷小量,而是一个可以另行处理的常量 T (采样周期)。同样,为表达式的简洁起见,以离散变量 $y(k)$ 和 $u(k)$ 相应表示 $y(kT)$ 和 $u(kT)$ 。

式(3.6.2a)中 $u(k)$ 是元(部)件的离散输入量, $y(k)$ 为其离散输出变量。更一般的情况下,离散系统在某一时刻 k 的输出 $y(k)$,不仅与同一时刻的输入 $u(k)$ 有关,还与过去时刻的输入 $u(k-1), \dots, u(k-m)$ 有关,而且还与过去时刻的输出 $y(k-1), \dots, y(k-n)$ 有关。因此,输入和输出之间的关系可表示为

$$\begin{aligned} &y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) \\ &= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m), \quad n \geq m \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

元(部)件离散化后,就可以按连续系统一样的方法,加入比较环节的离散表示 $e(k) = r(k) - y(k)$,其中 $r(k)$ 是离散系统的离散给定输入, $y(k)$ 为系统的离散输出, $e(k)$ 为离散误差。然后就可以得到闭环离散系统的差分方程,形式类似式(3.6.4),但右侧输入是给定 $r(k)$ 。

离散模型在社会经济控制论系统的建模中常常采用,因为建模所依据的统计(记录)数据本身就是按月或按年进行统计的,如人口系统和经济系统,参见第10章。而生物系统中信号的收集也往往是以离散方式进行的。

在连续控制系统中元件或系统的数学描述是以微分方程来进行的,并且通过拉普拉斯变换而得到传递函数。在离散控制系统中其数学描述是以差分方程来进行的,并且采用 z 变换来求解方程和从事动态研究,元件或系统经 z 变换后其输入和输出之比形成脉冲传递函数。离散控制系统也有稳定性和稳态及动态品质问题,以及对系统的分析和综合问题。连续控制系统中的频率域研究法经适当修正而推广应用于离散控制系统。本节采用时域法研究其分析问题,并适宜应用 MATLAB/Simulink 软件进行分析和设计研究。

2. 离散系统稳定性的充要条件

对于式(3.6.4)的时不变差分方程,其特征方程如下

$$\rho^n + a_1 \rho^{n-1} + a_2 \rho^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (3.6.5)$$

设式(3.6.5)有各不相同的实特征根 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, 则差分方程的通解为

$$y(k) = A_1 \rho_1^k + A_2 \rho_2^k + \cdots + A_n \rho_n^k = \sum_{i=1}^n A_i \rho_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n \quad (3.6.6)$$

式中系数 A_i 可由差分方程给定的 n 个初始条件决定。

当特征方程式(3.6.5)的根 $|\rho_i| < 1 (i=1, 2, \cdots, n)$ 时, 必有 $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0$, 故离散系统稳定的充分必要条件是: 当且仅当差分方程式(3.6.4)的所有特征根的模 $|\rho_i| < 1 (i=1, 2, \cdots, n)$ 时, 解所表征的线性时不变离散系统是稳定的。

若已知差分方程式(3.6.4)和它的输出系列的初值, 则可以利用递推关系, 采用 MATLAB 语言编程逐步递推出系列 $y(k)$ 。

例 3.6.1 已知差分方程 $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 0$, 初始条件为 $y(0) = 0, y(1) = 1$, 试求解该差分方程, 即递推出系列 $y(k)$ 。

解 原差分方程可改写为

$$y(k+2) = -3y(k+1) - 2y(k)$$

根据初始条件

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

和差分方程所形成的递推关系, 得

$$\text{对于 } k = 0, \quad y(2) = -3y(1) - 2y(0) = -3$$

$$\text{对于 } k = 1, \quad y(3) = -3y(2) - 2y(1) = 7$$

$$\text{对于 } k = 2, \quad y(4) = -3y(3) - 2y(2) = -15$$

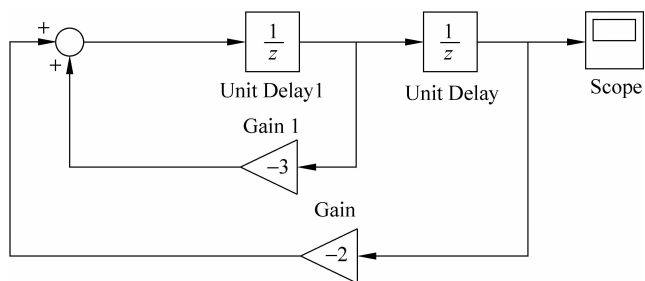
$$\text{对于 } k = 3, \quad y(5) = -3y(4) - 2y(3) = 31$$

⋮

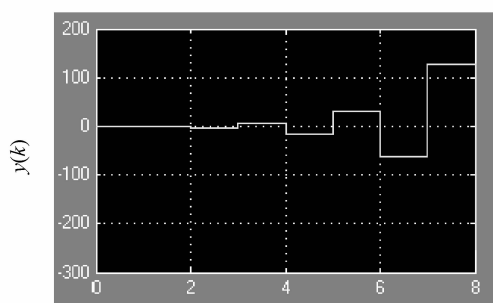
无论对连续控制系统离散化、离散控制系统的离散输出响应和离散控制系统的分析、设计(校正)等都可以用 MATLAB/Simulink 进行研究。对于例 3.6.1 可用 MATLAB 语言编写递推程序, 也可以用 Simulink 进行仿真, 解出差分方程。后者要利用 Unit Delay(单位延迟)模块 $1/z$ 和设置其初始条件, 结构见图 3-50(a), 求得差分方程的解 $y(k)$, 见图 3-50(b)。如果该差分方程式描绘一个离散闭环控制系统的调节过程, 则 $y(k)$ 表示其解。对于复杂的离散系统这是求解差分方程的重要方法。

图 3-51 所示为一个具有采样器和保持器的离散随动系统, 今研究其采样频率 $1/T$ 对系统稳定性的影响。采用 Simulink 进行仿真研究, 图中采样器和保持器可以从库中拖出的 Zero-Order Hold(零阶保持器)模块表示, 采样周期可在保持器上设置, 其他处都是连续信号。在图 3-52 上图采样周期 $T=1s$, 系统不稳定; 下图 $T=0.5s$, 系统是稳定的。在阶跃输入作用下的两个调节过程同时表示在 Scope 的图上(图 3-53)。采样频率对系统稳定性有影响, 这是离散控制系统的特点。利用 MATLAB/Simulink 也可以方便地进行校正装置的设计, 只要在仿真结构图上加上校正装置, 按 Scope 图示上的调节过程选择其参数即可。

对于计算机控制系统, 控制规律及数字 PID 参数可由计算机通过编程来设置。并且可以由 Simulink 仿真来进行设计和检验。



(a)



(b)

图 3-50 用 Simulink 求解差分方程

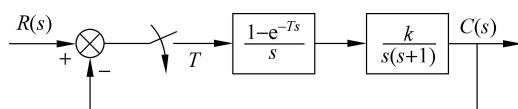


图 3-51 离散随动系统结构图

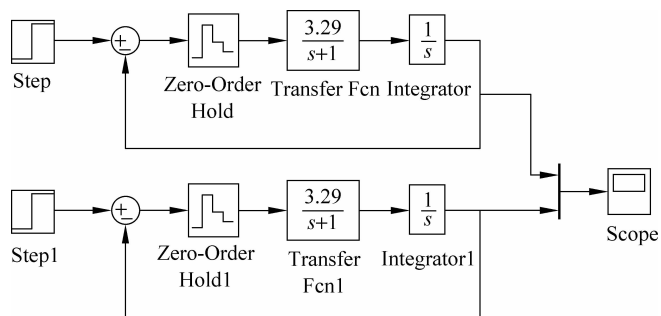


图 3-52 离散随动系统的 Simulink 仿真图

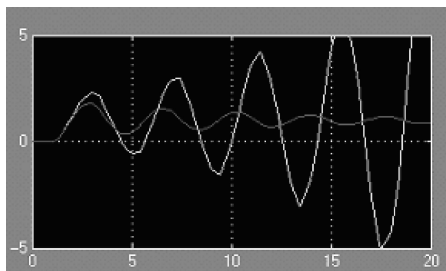


图 3-53 离散随动系统的采样频率对稳定性的影响

3.7 小结

本章是控制论基本方法篇中的第一章,也是最基本的章。本章所讨论的是线性定常自动控制系统的理论,也是工程控制论中早期的设计原则和试验方法的总结,所以也称为经典控制原理与方法。

反馈控制方法和补偿控制方法是自动控制系统的两大控制方法。前者通过控制的误差来产生控制作用,并力图消灭误差;而后者通过另一个前馈通道来补偿误差,理论上来说,误差甚至可以不出现。

为了精细地描述受控对象与系统的静态和动态特性,常需要建立它们的模型。本章采用以微分方程(或差分方程)描述或传递函数描述的数学模型。建立数学模型可以基于对受控对象机理的分析,也可以基于对受控对象实验响应曲线的拟合。系统的数学模型是对系统理论研究的基础。本章采用的数学描述方法归属于对系统的外部描述——输入输出描述,以区别于第5章的内部描述——状态空间描述。

长期以来在经典控制理论的分析 and 校正研究领域存在着两个主要研究方法:时域法和频域法。在20世纪40年代后期之后,因为频域法校正无可争辩的优点,频域法后来居上逐渐占据优势。目前在MATLAB/Simulink支持下,线性控制系统的分析和校正方法正面临新的变革。基于MATLAB可以使用经典意义上的时域法和频域法,也可以另辟新途。

本章结合MATLAB采用基于幅相频率特性的频域分析法和校正方法,以及Simulink仿真支持下基于传递函数的校正法。它们都还属于频域法的范畴。

至于过程控制系统的校正,本章介绍的是齐格勒和尼科尔斯的控制器参数整定方法。这些方法都是基于从输入端进行的随动工作状态进行设计的,而扰动端的校正(即调节工作状态)计算起来将更为复杂,而且时域和频域之间动态品质指标的相互转换只能是近似的,对于高于二阶的系统尤其如此。所以建议采用Simulink仿真下基于传递函数的校正法。

本章推荐使用MATLAB/Simulink来进行系统的时域分析:特征方程求根(稳

定性)、调节过程绘制和品质指标求取,以及频域分析:幅相频率特性的绘制和性能指标求取。本章强调在深刻理解校正的物理概念和校正装置物理性能的基础上,使用 MATLAB/Simulink 基于传递函数来进行串、并联校正装置的计算和从输入端和扰动端的校正,并采用调节过程的时域指标来验证校正是否符合要求。这实际上是基于 MATLAB/Simulink 的时域和频域相结合的新方法。虽然,校正时难免要进行试凑,但仍是简洁和直观的。传统意义上对控制系统的笔加纸和计算机的设计(校正)方法,正在因 MATLAB 软件的引用而更趋完美。

本章还包含其他一些线性系统问题:多变量控制系统和解耦设计、线性离散控制系统,至于网络化控制系统则在 8.7 节加以介绍。工业对象和社会经济对象常常是多变量对象,从而形成多变量控制系统。对于工业多变量对象解耦控制是非常重要的方法,解耦后可以按照过程控制的方法分别独立地对各个被控量进行分析,以及对各控制器的参数独立地整定。控制论中有必需变异度定律(law of requisite variety):当一个系统变得越来越复杂的时候,系统的控制器一定也要变得更为复杂,因为有更多的功能需要调节。对一个 2 输入—2 输出对象,一定要有 2 个控制器才能对它进行有效的控制。

离散控制系统在计算机控制和社会经济系统中都得到广泛应用。因为社会经济系统的数据都呈年度、月度等的统计数据,因而利用这些数据建模就得出多输入多输出的非线性离散系统,也即在社会经济控制论中的被控对象——宏观经济计量模型。离散控制系统的频率域研究方法基于与拉普拉斯变换相应的 z 变换和脉冲传递函数,这是与线性连续系统相并行的一套分析和校正方法。但本节仅采用时间域方法分析离散控制系统的稳定性,并强调基于传递函数和仿真结构图采用 MATLAB/Simulink 来进行分析和设计研究。

习题

- 3.1 自动控制系统有哪几个基本环节(元件)?
- 3.2 何谓自动控制系统的“负反馈”?它和自动控制系统是一个闭环系统有什么关系?
- 3.3 试述恒值自动调节系统、程序自动控制系统和随动系统的特点各是什么?
- 3.4 对自动控制系统有几种分类方法?各基于何种观点?
- 3.5 何谓“扰动”?试说明在图 3-1 上有几种主要扰动。
- 3.6 如果在图 3-1 上电动机和所驱动的调压器为大功率晶体管放大器所代替,问这是有差还是无差控制系统?为什么?
- 3.7 采样控制系统有什么特点?计算机控制的特点是什么?
- 3.8 试对图 3-29 上液位自动调节的过程控制系统作出含有基本环节的功能框图。
- 3.9 采用劳思的代数稳定判据,判断未接入和接入 RC 微分(校正)装置后加热

电炉温度自动控制系统(图 3-1)的稳定性。

3.10 若控制系统的特征方程式为: $D(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + K$, 试求能使系统保持稳定的 K 值的范围。

3.11 何谓研究自动控制系统的时间域研究法? 有何优缺点?

3.12 自动控制系统的稳态和动态质量指标是什么?

3.13 何谓连续控制系统? 它和采样控制系统有何区别?

3.14 试绘制下列振荡环节的幅相特性。

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

3.15 何谓研究自动控制系统的频率域研究法? 试述传递函数的概念。

3.16 三种常用的 RC 校正装置应如何选用? 试绘制它们的幅相特性。

3.17 何谓扰动补偿原理? 如何基于此原理进行补偿器设计?

3.18 多输入或多输出自动控制系统的特点是什么?

3.19 何谓“解耦控制”? 试叙述其基本概念。

3.20 求解差分方程 $y(k+2) - 4y(k+1) + y(k) = 0$, 初始条件为 $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ 。

参 考 文 献

1. 万百五, 韩崇昭, 蔡远利. 自动化(专业)概论(第3版). 武汉: 武汉理工大学出版社, 2010
2. 吴韞章. 自动控制理论基础. 西安: 西安交通大学出版社, 2000
3. 方康玲, 王新民, 刘彦春. 过程控制系统. 武汉: 武汉工业大学出版社, 2002
4. Anand D K, Zmood R B. Introduction to Control Systems. (Third Edition) Oxford: Butterworth-Heinemann Ltd, 1995
5. Dorf C D, Bishop R H. Modern Control Systems. (Ninth Edition) Pearson Education, Inc., USA, N. J. Prentice Hall, 2001
6. 李益华. 自动控制原理. 长沙: 湖南大学出版社, 2004
7. 曹克民. 自动控制概论. 北京: 中国建材工业出版社, 2002
8. 侯夔龙. 自动控制理论. 西安: 西安交通大学出版社, 1987
9. 金以慧. 过程控制. 北京: 清华大学出版社, 1993
10. 王俊杰. 检测技术与仪表. 武汉: 武汉工业大学出版社, 2002
11. 相良节夫. 基础自动制御. 日本东京: 森北出版株式会社, 1979
12. 张爱民. 自动控制原理. 北京: 清华大学出版社, 2005
13. Hanselman D, Littlefield B. (李人厚, 张平安等译校). 精通 MATLAB——综合辅导与指南. 西安: 西安交通大学出版社, 1998