

**本章要点：**主要包括结构力学课程的研究对象和研究内容、杆件结构计算简图的建立、杆件结构分类、荷载分类和叠加原理。重点是对杆系结构的结构体系、杆件、支座、结点和荷载等方面进行简化，建立既反映原结构主要力学特征，又便于计算的结构计算简图。

### 1.1 结构力学的研究对象和研究内容

#### 1.1.1 结构力学的研究对象

结构就是建筑物中能承受和传递荷载(作用)而起骨架作用的部分。土木工程中的工业厂房、房屋、电视塔、桥梁、隧道等都是典型的工程结构，水利工程中的大坝，石油工程中的海洋平台，以及其他工程领域中的飞机骨架、压力容器、船舶等都是些重要的结构。根据承载构件的几何特征，结构可以分为三类：

(1) 杆件结构。杆件的几何特征是其长度远大于其横截面的高度和宽度。将杆件按照一定的方式有机地连接起来形成的系统称为杆件结构。框架混凝土结构、桁架等都是比较典型的杆件结构。

(2) 板壳结构。板壳的几何特征是厚度比长和宽两个方向的尺寸小很多。房屋建筑中的楼板和剪力墙，压力容器等都可以简化为板壳结构进行分析。

(3) 实体结构。这类结构的长、宽、高三方向的尺度相当。重力式堤坝、大型基础等都属于实体结构。

实际的建筑往往是多种结构形式组合而成的。根据国内学科的划分，本门课程的主要研究对象是杆件结构。通常所说的结构力学是指杆件结构力学。

#### 1.1.2 结构力学的研究内容

任意一个结构总是为满足一定的功能而设计的，因此，工程师设计的结构必须能安全、正常地工作，同时还要满足经济性、美学和周边环境等方面的要求。在初步设计之后，必须进行结构的力学分析，以确保结构具有合适的强度、刚度和稳定性。具体地讲，结构力学的研究内容主要包括：

- (1) 合理选择结构的计算简图，探讨结构的组成规律及合理形式；
- (2) 在静力荷载作用下，结构的内力和位移的计算原理和方法；
- (3) 在动力荷载作用下，结构的动力特性和结构动力反应的计算原理和方法；

(4) 在静力荷载作用下,结构稳定性的计算原理和方法。

在学习结构力学前,已经学习了理论力学和材料力学。理论力学主要研究物体机械运动的基本规律和力学的一般原理,材料力学主要研究单个杆件的强度、刚度和稳定性。结构力学则是在理论力学和材料力学等课程基础上,主要研究杆件结构的强度、刚度和稳定性,从而为钢结构、钢筋混凝土结构等专业课程以及结构设计提供一般的计算原理和分析方法。因此,结构力学在基础课与专业课之间起着承上启下作用,是土木工程各专业方向一门重要的专业基础课。

## 1.2 结构的计算简图

实际结构一般是很复杂的,完全按照结构的实际情况进行计算是不可能的,也没有必要。对实际结构进行分析,可以略去一些次要因素,保留主要的受力特征,从而使计算切实可行。这种将实际结构适当简化,用做力学分析的简化图形,称为结构的计算简图或称为结构的计算模型。合理地选取结构的计算简图是结构计算中一项极其重要而又必须首先解决的问题。选取结构的计算简图应符合以下两点原则:

- (1) 略去次要因素,反映实际结构的主要受力特点,确保结果可靠。
- (2) 在满足精度的基础上,结构计算简图应当尽量简单,使计算方便。

计算简图的选取并不是唯一的,同一结构的计算简图与结构的重要性、设计阶段、计算问题的性质、计算工具等有关。譬如在初步设计阶段,计算简图可以比较粗糙,在施工图设计阶段则应选择精细的计算模型;动力问题计算比较复杂,可采用较粗的计算模型,而静力问题则可采用更为精细的模型。选取结构计算简图不但需要比较丰富的专业知识,还要一定的结构设计、计算的工作经验,因此,下文主要针对结构计算简图中的一般性问题进行初步介绍。通常,杆件结构的计算简图可从以下几个方面进行简化:①结构体系的简化;②杆件的简化;③支座的简化;④结点的简化;⑤荷载的简化。

### 1.2.1 结构体系的简化

实际的结构都是空间结构。然而,对于绝大多数空间结构来说,它的主要承重结构和力的传递路线是由若干平面组合形成的。显然,平面力系的计算要比空间力系简单得多,因此,在很多情况下,忽略一些次要的空间效应,而当做平面问题进行分析,以简化计算。如图 1.1 所示为一现浇楼盖的框架结构,它是一个典型空间受力体系。在竖向楼面荷载作用下,一般可将荷载按角平分线传至相应两侧的梁上,如图 1.1(b)所示。为方便计算,常忽略结构纵向和横向之间的空间联系,忽略各构件的抗扭作用,将横向框架和纵向框架分别按平面框架进行分析和计算,如图 1.1(c)、(d)所示。通常框架的间距和荷载都相同,因此取有代表性的一榀中间横向框架作为计算单元。纵向框架上荷载往往各不相同,故常有中列柱和边列柱的区别。中列柱纵向框架的计算单元宽度可各取两侧跨距的一半,边列柱的计算单元宽度可取为一侧跨距的一半,从而将空间结构简化为一系列平面结构进行计算。

### 1.2.2 杆件的简化

杆件的截面尺寸通常远小于杆件的长度,此时,截面变形符合平截面假定,即截面的应

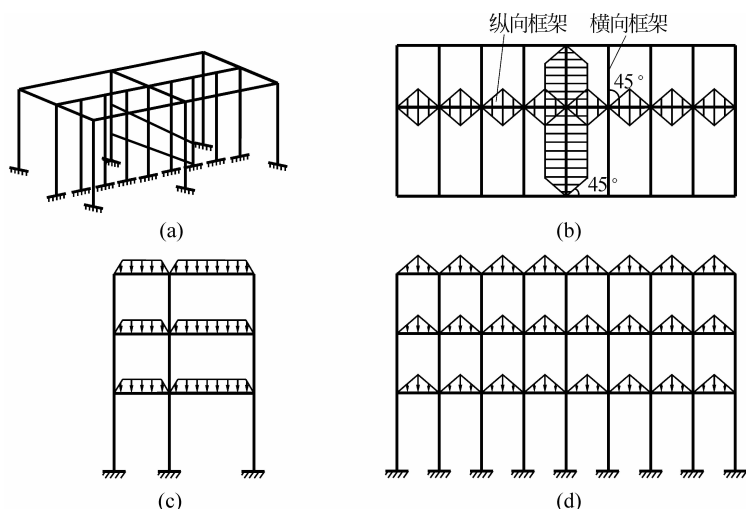


图 1.1

力可根据截面的内力来确定,截面上的变形可根据轴线上的应变分量来计算。因此,在结构的计算简图中,杆件用其轴线表示,杆件为直杆用直线表示,杆件为曲杆则用曲线表示。杆件之间的连接用结点表示,杆长用结点间距表示。

### 1.2.3 结点的简化

结点是指结构中两个或两个以上杆件的共同联结处。根据结点的力学特征和变形特征,结点可以分为铰结点、刚结点、组合结点、定向结点和半刚性结点。

#### 1. 铰结点

铰结点的变形特征是约束杆端使杆件不能相对移动,但可相对转动;其力学特征是可以传递力,不能传递力矩。图 1.2(a)为一装配式钢筋混凝土门式三铰刚架的顶铰结点构造图,这是一种较为典型的铰结点,计算简图如图 1.2(b)所示。两杆可绕结点自由转动,夹角 $\alpha$ 可以改变。这种连接两根杆的铰结点称为单铰结点。图 1.3(a)为一钢桁架的结点构造图,各杆借助结点板用电焊(或铆钉、螺栓等)连接起来,这种连接方式刚性较大,各杆之间不能相互转动。但由于桁架中各杆主要是承受轴向力,由结点刚性连接引起的杆件弯曲变形所产生的弯矩很小而忽略不计,所以计算时,仍可将这种结点简化为铰结点进行计算。这种连接两根以上杆件的铰结点称为复铰结点,计算简图如图 1.3(b)所示。

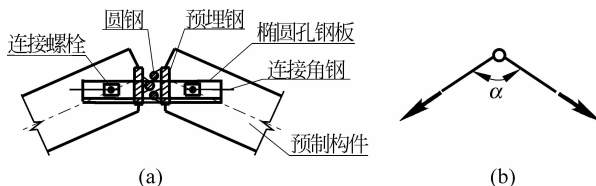


图 1.2

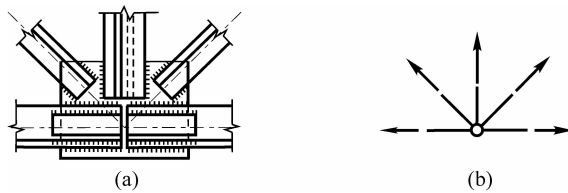


图 1.3

## 2. 刚结点

刚结点的变形特征是所连接的杆件之间既不能相对移动,又不能相对转动;其力学特征是既可以传递力,又可传递力矩。图 1.4(a)所示为一钢筋混凝土楼梯的刚结点构造图,其计算简图如图 1.4(b)所示。由于两杆牢固的连接成一个整体,夹角是不能改变的。这种连接两根杆的刚结点称为单刚结点。图 1.5(a)为钢筋混凝土边柱和梁结点的构造图,其计算简图如图 1.5(b)所示。由于梁和柱之间的钢筋布置以及混凝土将它们浇筑成整体,使梁和柱不能产生相对移动和转动,这种连接两根以上杆件的刚结点称为复刚结点(图 1.5(b))。

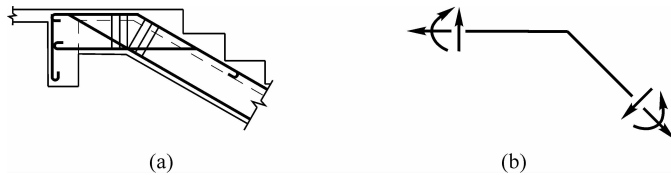


图 1.4

## 3. 组合结点

如果一个结点同时包含刚结点和铰结点,则称这种结点为组合结点。图 1.6(a)为钢结构柱和梁连接的构造图,其中梁通过腹板由单角钢与柱相连,转动刚度很小。因此,将梁和柱之间的连接看作铰结点,柱是连续的或者是刚性连接的,则其计算简图可表示为图 1.6(b)。

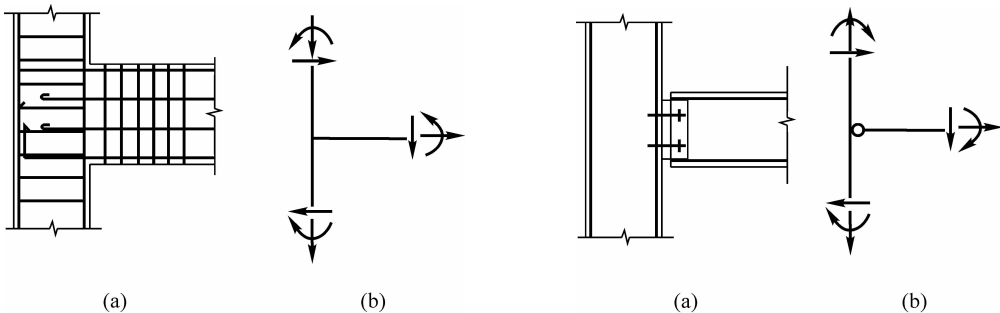


图 1.5

图 1.6

#### 4. 定向结点

定向结点的变形特征是能沿某一方向相对平动,但不能相对转动。其力学特征是可以传递力矩,无法传递相对平动方向的力。图 1.7(a)为允许剪切平移的定向结点,图 1.7(b)为允许轴向平移的定向结点。这类结点工程实例很少,但在结构计算中经常用到。

#### 5. 半刚性结点

前面介绍铰结点是指两杆可完全自由转动,但实际工程中一定存在摩擦力等阻止结构转动的因素,即杆件结点总有一定刚度的存在。刚结点中杆件之间完全没有相对转动,但由于钢筋焊接、锚固及接缝处混凝土不密实等因素的影响,在杆端弯矩作用下,结点上各杆之间的夹角多少会产生一些相对转角。这种在杆端力矩作用下,各杆之间可能产生相对转角弹性变形的结点称为半刚性结点,或称为旋转弹性结点。图 1.8(a)为具有两根杆件的旋转弹性结点,图 1.8(b)常用作带裂纹梁的计算模型。在杆端力矩  $M$  作用下,两杆之间产生相对转角为  $\varphi$ ,则根据刚度的定义,弹簧的转动刚度系数可定义为

$$k_{\varphi} = M/\varphi \quad (1.1)$$

当  $k_{\varphi} = 0$  时,实际上就是铰结点,而  $k_{\varphi} \rightarrow \infty$  实际上就表示刚结点。

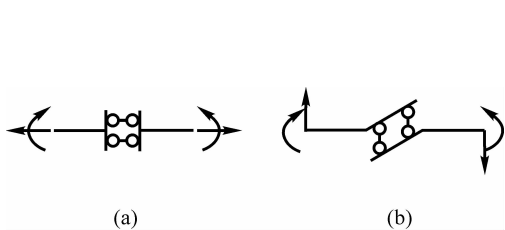


图 1.7

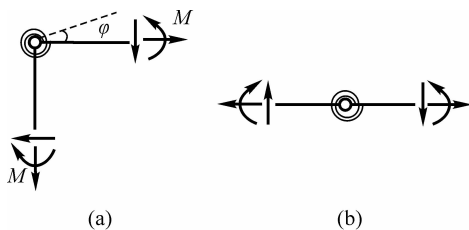


图 1.8

### 1.2.4 支座的简化

支座就是结构与基础相联结的装置。它的作用是限制结构沿某一个或几个方向运动,从而产生支座反力,所以支座是限制结构运动的外部约束。根据约束的作用区分,支座可分为:活动铰支座、固定铰支座、固定支座、定向支座和弹性支座。

#### 1. 活动铰支座

活动铰支座又称滚轴支座,其限制结构沿某一方向移动。图 1.9(a)是桥梁中常用的辊轴支座,这种支座的特点是它允许结构水平移动和转动,但是不能竖向移动。其计算简图可用一根支杆表示,如图 1.9(b)所示,它的约束反力只有竖向反力。

#### 2. 固定铰支座

固定铰支座简称铰支座。在这种约束下杆端不能移动,但可以转动。这种支座的构造如图 1.10(a)所示,它容许结构在支承处绕圆柱铰  $A$  转动,但不能作水平和竖向移动。铰支

座的计算简图可用图 1.10(b)表示。铰支座能产生水平和竖向两个反力,或合成为一个合力,力都通过铰的中心。

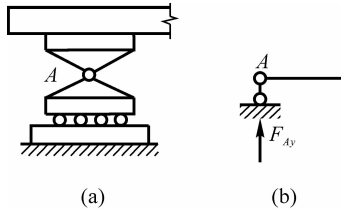


图 1.9

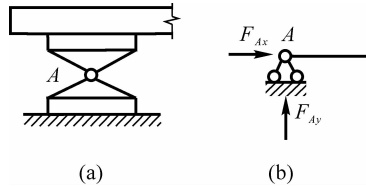


图 1.10

### 3. 固定支座

固定支座约束杆端既不能移动也不能转动,如图 1.11(a)所示。因此,它将产生三个反力,其计算简图可用固定端(图 1.11(b))或不交于一点的三根支杆表示(图 1.11(c))。图 1.11(d)所示为现浇的钢筋混凝土柱下独立基础,如果忽略地基的弹性变形,其计算简图可表示为图 1.11(e)或(f)。

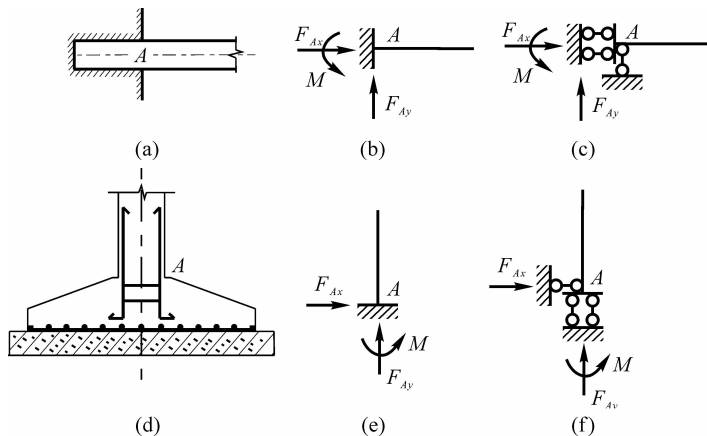


图 1.11

### 4. 定向支座

定向支座又称为滑动支座,其允许杆端沿一定方向自由移动,而沿其他方向不能移动,也不能转动。这种支座在现实中较少,在对称性计算的计算简图中使用较多。其计算简图如图 1.12 所示。图 1.12(a)约束限制杆件竖向运动和转动,图 1.12(b)约束限制杆件水平运动和转动,并可提供相应的两个反力。

### 5. 弹性支座

前面所提的支座实际上都假定地基是刚性的,在荷载作用下不产生任何变形。这种假定对于图 1.13(a)中修建在基岩上的结构 A 是比较符合实际情况的。但是对于修建于软土

中的结构  $B$ , 在荷载或地震作用下, 地基也会产生相应的变形。为考虑地基土变形对结构反应的影响, 可用图 1.13(b) 的计算简图表示, 图中能产生线位移的称为伸缩弹性支座, 弹簧水平位移刚度为  $k_N$ , 产生角位移的称为旋转弹性支座, 转动刚度为  $k_\theta$ 。

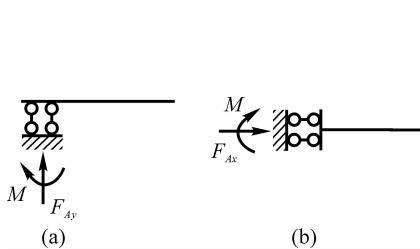


图 1.12

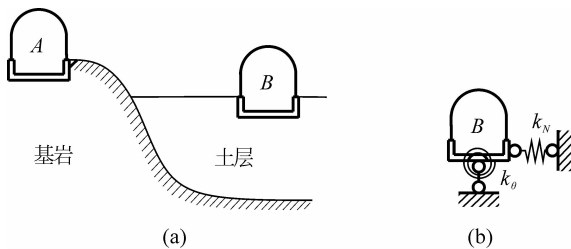


图 1.13

### 1.2.5 荷载的简化

结构最重要的一项功能是承受其使用过程中可能出现的各种荷载(作用)。譬如: 房屋结构要承受构件的自重、人群荷载等, 桥梁结构要承受车辆重力、制动力等, 挡土墙要承受水土压力等。在杆件结构中将杆件简化为轴线, 因此, 不管何种荷载都简化为作用在杆件轴线上的力。在计算简图中, 都需要将它们简化为作用在构件轴线上的分布荷载、集中荷载或力矩。

下面给出几个选取计算简图的例子。

**例 1.1** 一幢单层单跨的砌体房屋如图 1.14(a) 所示, 纵墙承重, 钢筋混凝土平屋顶由预制板和大梁组成搁置在纵墙上, 两端没有横墙, 纵墙受风荷载作用。现在就结构的计算简图建立过程说明如下。

由于纵墙上的窗口是均匀排列的, 风荷载沿纵向也是均匀分布的, 在水平荷载作用下整个房屋墙顶的水平位移相同, 如图 1.14(b) 所示。因此可通过两个窗口的中线截出一个单元代表整个房屋的受力状态, 从而将结构简化为图 1.14(c) 所示的平面问题来处理。屋面板是直接搁置在纵墙上, 墙和屋面板之间不会传递弯矩, 两者之间简化为铰连接。在水平荷载作用下, 屋面板的轴向变形与墙的水平位移相比是一个小量, 可以忽略不计, 横梁可进一步简化为刚性杆。则两端无横墙的房屋在水平风载作用下的静力分析可以按平面铰接排架体系来计算(图 1.14(c))。

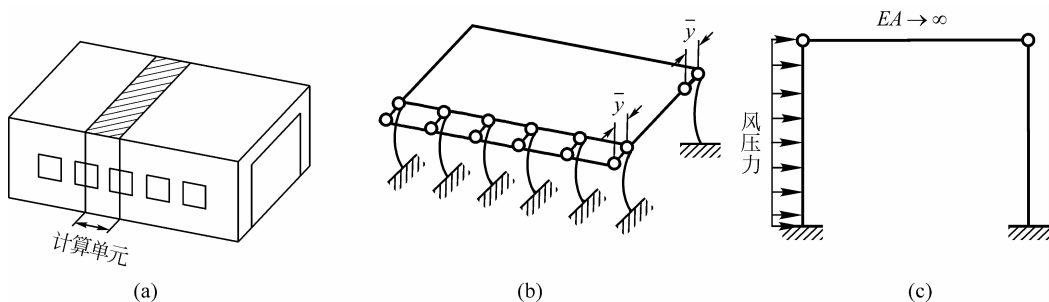


图 1.14

**例 1.2** 图 1.15(a)为一座钢筋混凝土高架桥,上部结构单位长度的质量为  $m$ ,支承在等间距的排架上,排架的间距为  $L$ 。基础由桩和承台两部分组成,桩穿过软土地带支承在坚硬的土层上,现在就地震作用下桥梁横向动力反应的计算简图说明如下。

取排架两侧跨距的一半作为计算单元宽度,采用集中质量的方法集聚在排架的顶端。桩基础支承在坚硬的土层上,结构的竖向位移反应很小可以忽略不计,但是软土地带中水平位移的土-结构相互作用影响较大。结构的计算简图可表示为如图 1.15(b)所示的两自由度问题进行近似计算,其中土的水平位移影响用水平弹簧近似计算。

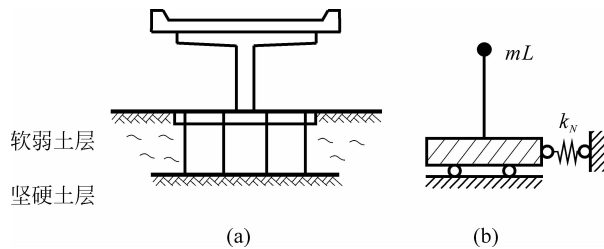


图 1.15

## 1.3 杆件结构的分类

在结构力学中,通常以结构计算简图代替实际结构,因此下面所讲的结构分类实际上是结构计算简图的分类。杆件结构应用广泛,类型很多,根据不同的观点有不同的分类方法。

### 1.3.1 按计算特性分类

#### 1. 静定结构

在任意荷载作用下,结构的内力和反力由静力平衡条件就可以完全确定的,称为静定结构。例如图 1.16(a)所示的简支梁,其反力和任一截面的内力均可由平衡条件求得,因此它是静定结构。

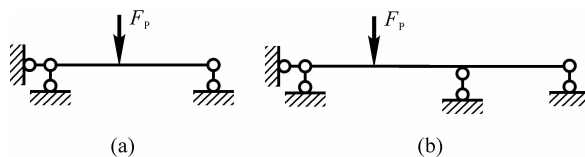


图 1.16

#### 2. 超静定结构

在任意荷载条件下,仅利用静力平衡条件无法完全确定所有的内力和反力,需要利用变形协调条件建立补充方程才能得到结构解的,称为超静定结构。例如图 1.16(b)所示的两跨连续梁,它有 4 个未知反力,但根据梁的平衡条件,却只能建立 3 个独立的平衡方程。若

要求出这些反力,需要根据变形协调条件建立补充方程,因此,它是一个超静定结构。

### 1.3.2 按结构型式和受力特性分类

#### 1. 梁

梁是一种受弯构件,在承受竖向荷载作用下不产生水平反力。结构可为单跨和多跨,可以是静定的也可以是超静定的。静定的多跨梁称为多跨静定梁(图 1.17(a)),超静定的多跨梁称为连续梁(图 1.16(b))。轴线可直可曲,轴线为直线的称为直梁,简称梁,轴线为曲线时,称为曲梁(图 1.17(b))。

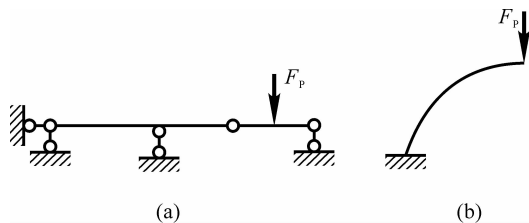


图 1.17

#### 2. 拱

拱的轴线为曲线,力学特征是在竖向荷载作用下支座将产生水平推力。在相同荷载作用下,与相同跨度梁的内力相比,由于水平推力的影响,使拱截面的弯矩和剪力大大减少,而有较大轴力的存在。因此,可利用一些脆性材料修建跨度很大的结构。工程中常见的拱有三铰拱、两铰拱和无铰拱(图 1.18)。其中三铰拱是静定的,两铰拱和无铰拱是超静定的。

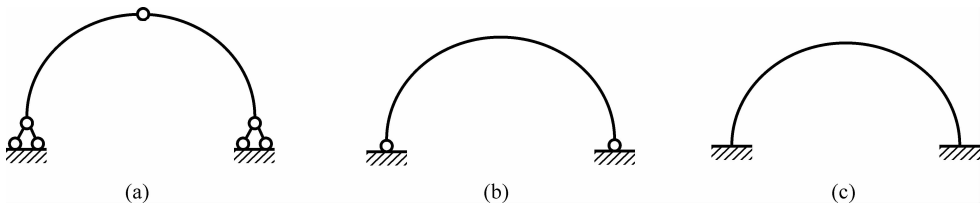


图 1.18

#### 3. 刚架(框架)

刚架是由一系列杆件采用刚性连接而组成的结构(图 1.19)。杆件的轴线通常为直线。在荷载作用下,杆件通常有弯矩、轴力和剪力三种内力存在,且一般情况下,弯矩为最主要的内力。

#### 4. 桁架

桁架是一系列杆件采用铰结点连接而成的结构。这种仅在两端与铰结点相连的直杆称为链杆。链杆的轴线为直线(图 1.20),在结点荷载作用下,链杆均为二力杆。

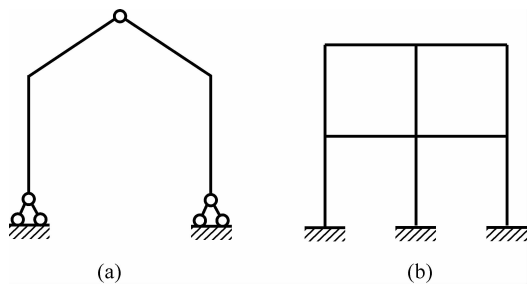


图 1.19

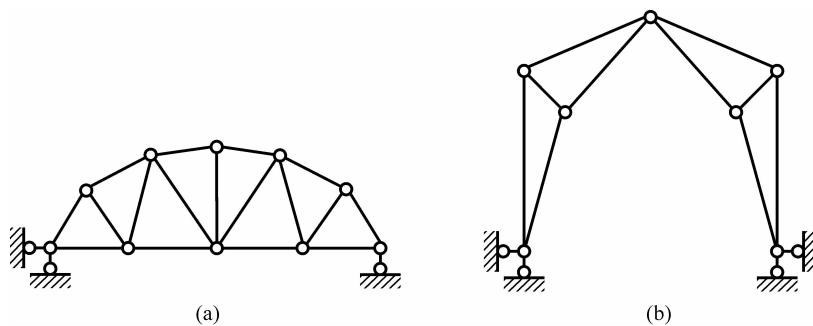


图 1.20

### 5. 组合结构

组合结构是由只受轴力作用的链杆和主要承受弯矩的梁或刚架组合而成的结构(图 1.21),即兼有桁架和刚架的特征。结构中通常含有组合结点。

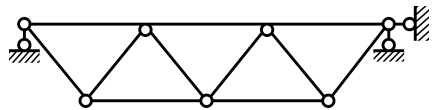


图 1.21

### 6. 悬索结构

悬索结构的主要特点是其主要承重构件为只受拉力的索(图 1.22)。索只受拉力作用,因此,可以充分发挥一些高强材料的强度,建成一些大跨度的结构,如大跨度斜拉桥、悬索桥等。

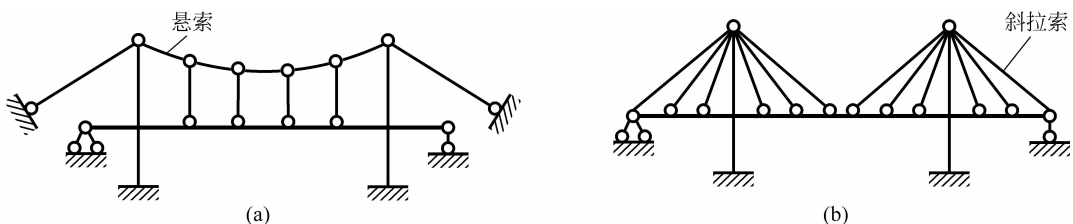


图 1.22

### 7. 张弦结构

张弦结构的主要特点是由上弦刚性构件(或结构)与下弦柔性索结合成的一种预应力结

构;撑杆是结构中必要构件,上弦与下弦之间通过撑杆连接,刚性构件(或结构)与柔性索必须要合理组合,以形成自平衡体系(图 1.23)。

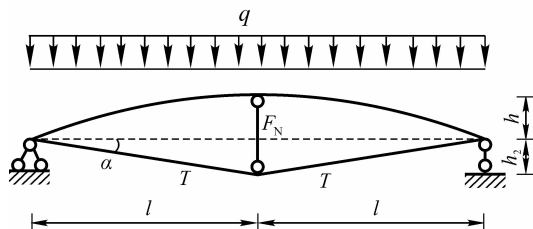


图 1.23

除以上两种分类方法外,按照杆件轴线及荷载作用线在空间所处的位置,可将结构分为平面结构和空间结构。当各杆件的轴线和荷载都在同一平面内时,称为平面结构。当各杆轴线和荷载不全在同一平面内时,称为空间结构。

## 1.4 荷载的分类

荷载是指由各种环境因素产生的直接作用在结构上的各种力。如由地球引力产生的重力,由土、水、风、雪等产生的作用在结构上的压力分别称为土压力、水压力、风荷载、雪荷载。作用在结构上的荷载会使结构产生效应(结构或构件的内力、应力、位移、应变等)。除上述直接作用在结构上的荷载外,一些非直接作用因素,如地震、温度变化、基础不均匀沉降等也使结构产生效应,从广义角度看,这些因素也可称为荷载。荷载的类型很多,不同荷载性质有很大差别,为便于工程结构设计,可从不同角度对荷载进行分类。下面介绍几种常用分类方法。

### 1. 按作用时间分类

(1) 永久荷载。在结构使用期间,其值不随时间变化,或其变化与平均值相比可以忽略不计,或其变化是单调的并能趋于限值的荷载,包括结构的自重、土压力、预应力等。

(2) 可变荷载。在结构使用期间,其值随时间变化且其变化与平均值相比不可以忽略不计的荷载,包括楼面活荷载、屋面活荷载、风荷载、雪荷载、温度作用等。

(3) 偶然荷载。在结构设计使用年限内不一定出现,而一旦出现其量值很大,且持续时间很短的荷载,包括爆炸力、撞击力等。

### 2. 按荷载分布分类

(1) 集中荷载。作用在结构上的荷载总有一定面积的存在。当荷载的作用面积远小于结构尺寸时,可认为此荷载作用在结构的一点上,称为集中荷载。例如,吊车梁上的吊车轮压,可看作是吊车梁上的集中荷载。

(2) 分布荷载。指连续分布在结构上的荷载。如果连续分布荷载是指单位体积所受的力则称为体分布荷载,如结构自重和惯性力;如果是单位面积所受的力则为面分布荷载,如雪荷载、楼面活荷载。如果是单位长度所受的力则为线分布荷载,如栏杆顶部的水平荷载和

垂直荷载。当分布荷载为常量时,则称为均布荷载。

### 3. 根据荷载作用性质分类

(1) 静力荷载。荷载的大小、方向、位置不随时间变化或变化极为缓慢,不使结构产生显著的运动,如自重和其他恒荷载等。

(2) 动力荷载。荷载随时间快速变化,使结构的质量产生不可忽略的惯性力,如机器运转偏心质量所产生的荷载,地震地面运动对结构的动力作用等。

### 4. 根据荷载的空间位置变异分类

(1) 固定荷载。荷载在结构上作用的位置可以认为是不变的,包括永久荷载和大部分的可变荷载(如雪荷载、风荷载)。

(2) 可动荷载(移动荷载)。荷载在结构上作用的位置是移动的,例如汽车荷载、吊车荷载等。

## 1.5 叠加原理

叠加原理就是在  $n$  个荷载  $F_i (i=1, 2, \dots, n)$  作用下,结构的任一反应量  $r$  (位移、内力等)等于单个荷载作用所产生反应的叠加,即

$$r = L\left(\sum_i^n F_i\right) = \sum_i^n r_i \quad (1.2)$$

$$r_i = L(F_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

要使叠加原理成立,结构必须满足以下两个条件:

(1) 材料必须是线弹性材料。荷载和变形之间满足胡克(Hooke)定律,则结构的位移与荷载之间具有线性比例关系。

(2) 结构的变形是小变形。即结构的位移不会引起荷载位置和方向的显著变化。

满足上述两个条件的结构为线弹性结构。此时,在荷载作用下,结构的解具有唯一性。叠加原理是结构力学中的一个基本原理。譬如结构动力学中的模态叠加法就是叠加原理的直接应用。而在结构内力计算中,可利用叠加原理将荷载分解为任意多组荷载的和。荷载分组在对称结构的计算中经常采用,譬如图 1.24(a)中的框架结构受到非对称荷载作用,可将荷载分解为图 1.24(b)和图 1.24(c)两组荷载。原结构的内力是图 1.24(b)和图 1.24(c)结构内力的叠加。

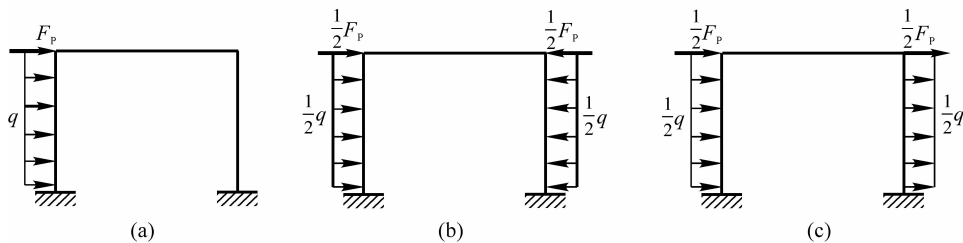


图 1.24

## 1.6 小结

(1) 实际的工程结构都是比较复杂的,在进行力学分析前,首先需要做的是根据分析内容对结构进行合理的简化,并建立相应的计算简图。计算简图通常从结构体系、杆件、支座、结点和荷载 5 个方面进行简化。

(2) 针对计算简图,可将结构分为不同的类型。掌握不同结构类型的力学共性,便于建立合适的计算方法。按计算特性可分为静定结构和超静定结构;按结构型式和受力特性可分为梁、拱、刚架、桁架、组合结构、悬索结构和张弦结构等。

(3) 对于结构所受的荷载,为便于工程结构设计,可从不同的角度对荷载进行分类。按作用时间可分为永久荷载、可变荷载和偶然荷载;按荷载分布可分为均布荷载和集中荷载;根据荷载作用性质可分为静力荷载和动力荷载;按荷载的空间位置变异可分为固定荷载和可动荷载。

(4) 叠加原理是线弹性体系的一个基本原理。在结构力学分析中,要灵活应用叠加原理进行结构的简化分析。

## 思考题

1. 结构力学的研究对象和任务是什么?
2. 什么是结构的计算简图? 选择计算简图时应该注意什么?
3. 杆件的结点类型有哪几种情形? 它们的力学特征是什么?
4. 结构的支座类型有哪几种情形? 它们的力学特征是什么?
5. 常用的杆件结构有哪几类?

## 第2章

# 平面体系的几何构造分析

**本章要点：**主要内容包括平面体系几何构造分析中的一些基本概念、杆件体系计算自由度的概念及两种计算方法、平面几何不变体系的组成规则、体系几何构造与静力特征之间的关系。重点是结构几何构造的判断。难点是瞬铰的灵活应用。

### 2.1 概述

几何构造分析就是按照几何学的原理对体系发生运动的可能性进行分析。一个实际的工程结构总是要承担一定荷载的,在荷载作用下,结构都会产生一定的变形。但是,这种变形与结构尺寸相比应是微小的,在符合设计规范的情况下,并不影响结构的正常使用。因此,在结构几何构造分析时,不考虑这种微小的变形而将杆件当作是刚性的。

在不考虑材料变形的条件下,受任意荷载作用,体系的位形均保持不变的体系,称为几何不变体系(图 2.1(a))。如果体系的位形可以改变则称为几何可变体系(图 2.1(b))。

几何可变体系在荷载作用下无法维持系统的稳定性,而无法成为结构。因此,在进行结构设计时,必须设计出几何不变体系作为结构,这是几何构造分析的直接目的。其次,通过几何构造分析,可以了解体系中杆件之间的相互关系,有利于利用结构的组成顺序选择适当的计算方法以及寻找简便的解题途径。

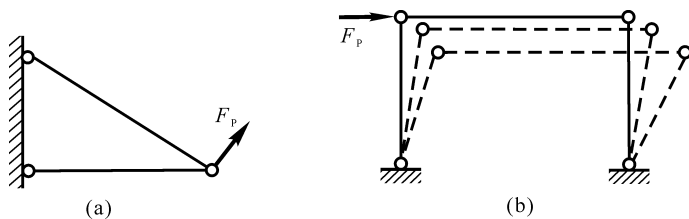


图 2.1

组成几何不变体系的条件应当包括两个方面:①具有足够的约束数量;②约束布置合理。当不能同时满足这两个条件时,体系将成为几何可变体系。几何可变体系中,根据结构的位移特征,又可分为瞬变体系和常变体系。如图 2.2(a)所示体系,在荷载作用下,其初始位置无法满足平衡条件,在发生微小位移后,铰 A、B、C 不在一条直线上,体系就成为几何不变体系了。也就是说,一个几何可变体系在微小位移后成为几何不变体系,称为瞬变体系。在图 2.2(b)中,AB 杆缺少必要的约束而可以绕 A 点自由转动。对于图 2.2(c)所示体

系,虽然具备了必要的约束数量,但它的约束布置方式不恰当, $AB$ 杆仍可以产生很大位移。这种可以产生很大位移的几何可变体系称为常变体系。而图 2.2(d)所示体系具备必要的约束数量,且约束布置方式合理,所以是几何不变体系。由此可见,要鉴别一个体系是否为几何不变,应当从以上两个方面作具体分析。

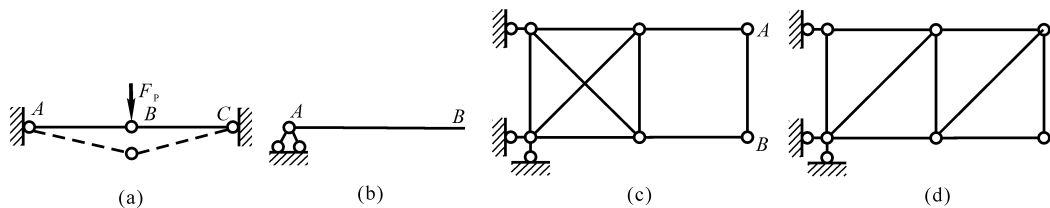


图 2.2

## 2.2 几何构造分析的几个概念

### 1. 刚片

在几何构造分析中,凡构件本身为几何形状不变的,均可把它作为刚片。例如图 2.3 所示体系中,用虚线所画的各部分中,Ⅰ为一根链杆,Ⅱ为几个杆件刚接形成的物体,Ⅲ为三根链杆所组成的物体,这些物体形状差别很大,组成的复杂程度完全不同,但都是几何不变体系,因此,都可以认为是一个刚片。

### 2. 自由度

所谓自由度就是完全确定体系位置所需要独立坐标的数目。如图 2.4(a)所示,点  $A$  在平面内运动时,用  $x$ 、 $y$  两个坐标就可以完全确定点的位置,因此,一个点在平面内有 2 个自由度。图 2.4(b)为一个刚片在平面内运动的情况,其位置可以用刚片内的任一点  $A$  的坐标  $x$ 、 $y$  及直线  $AB$  的倾角  $\varphi$  来确定,因此,一个刚片在平面内有 3 个自由度。

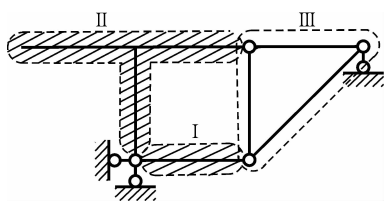


图 2.3

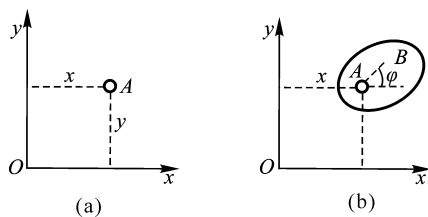


图 2.4

### 3. 约束

约束是限制物体或体系运动的装置,分为内部约束和外部约束两种。内部约束是指体系内各杆之间或结点之间的联系,如链杆、铰结点和刚结点等。外部约束是指体系与基础之间的联系,也就是支座。如果一个约束仅连接两个刚片,这样的约束称为单约束,而连接两个以上刚片的约束称为复约束。下面详细讨论各种约束对自由度的影响。

## 1) 单约束

## (1) 单链杆

一个刚片在平面内运动有 3 个自由度,若将刚片用一根链杆与基础联系起来(图 2.5(a)),此时刚片还有两个独立的坐标。由此可知,由于链杆的作用,刚片的自由度减少了一个,即一根链杆相当于一个约束。

## (2) 单铰

两个互不相连的刚片在平面内运动共有 6 个自由度,若用一个铰将两个刚片连接起来后(图 2.5(b)),则体系还有 4 个自由度。因此,一个单铰使体系的自由度减少 2 个,即一个单铰相当于 2 个约束。

## (3) 单刚结点

2 个互不相连的刚片若用刚结点将它们连接起来,则二者连成一体而成为 1 个刚片(图 2.5(c)),体系的自由度从 6 个减少为 3 个。因此,1 个单刚结点相当于 3 个约束。

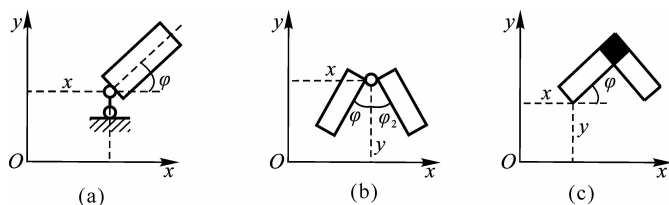


图 2.5

## 2) 复约束

## (1) 复铰

若用铰将 3 个刚片连接起来(图 2.6(a)),则体系的自由度从 9 个减少为 5 个,即体系丧失 4 个自由度。这表明该铰相当于 2 个单铰的作用。以此类推,连接  $n$  个刚片的复铰,体系的自由度由  $3n$  减少为  $n+2$ ,即体系丧失  $2(n-1)$  个自由度,该铰相当于  $n-1$  个单铰或  $2(n-1)$  个约束。

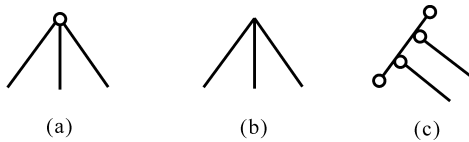


图 2.6

## (2) 复刚结点

互不相连的 3 个刚片若用刚结点将它们连接起来(图 2.6(b)),则 3 个刚片成为一体而变为 1 个刚片,故体系的自由度从 9 个减少为 3 个,即体系丧失 6 个自由度。这表明该刚结点相当于 2 个单刚结点的作用。以此类推,连接  $n$  个刚片刚结点,相当于  $n-1$  个单刚结点或  $3(n-1)$  个约束。

## (3) 复链杆

平面内任意 1 个结点的自由度为 2 个,  $n$  个结点的自由度为  $2n$  个,当将  $n$  个结点用 1 根链杆连接起来后,则所有结点就变成同一个刚片上的点,因此,只有 3 个自由度(图 2.6(c))。由此可知,连接  $n$  个结点的复链杆将体系的自由度由  $2n$  个减少为 3 个,即相当于  $2n-3$  个约束。

从约束的对象看,复铰和复刚结点约束的对象是刚片,复链杆约束的对象是结点。各种约束的特征见表 2.1。

表 2.1 复约束的约束特征( $n > 2$ )

名称	简图	体系总自由度	约束后自由度	约束个数	等效约束
复铰		$3n$	$n+2$	$2(n-1)$	$n-1$ 个单铰
复刚结点		$3n$	3	$3(n-1)$	$n-1$ 个单刚结点
复链杆		$2n$	3	$2n-3$	$2n-3$ 根单链杆

## 4. 瞬铰

图 2.7(a)所示 2 个刚片在平面内共有 6 个自由度,如果用 2 根不平行的链杆将它们联系起来,则体系还有 4 个自由度。从减少自由度的角度看,这 2 根链杆的约束效果和 1 个单铰相当。从运动角度看, $B$  点相对于  $A$  点的运动应与链杆 1 垂直, $D$  点相对于  $C$  点的运动应与链杆 2 垂直。以  $O$  点表示 2 根链杆轴线的交点,在当前位置下,刚片 II 相对于刚片 I 的运动为绕  $O$  点的瞬时转动。因此,从约束效果和运动效果看,2 根链杆与 1 个单铰的效果相同。但是,当刚片发生相应转动后,2 根链杆的位置也随之发生相应的变化,则交点  $O$  的位置是变化的。也就是说,链杆 1 和 2 所形成的铰仅在图示位置这一瞬间位于  $O$  点。这种联结 2 个刚片的 2 根相交链杆的作用相当于在其交点处的 1 个单铰,称为瞬铰,也可称为虚铰。而  $O$  点称为瞬时转动中心。与之相应,普通的铰称为实铰。

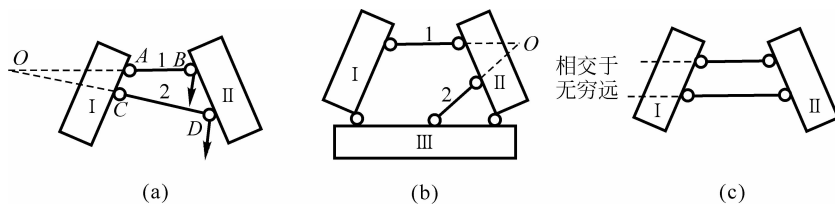


图 2.7

应当注意,并非任意 2 根链杆都可作为瞬铰来看待,必须是连接 2 个相同刚片的 2 根链杆才能形成 1 个瞬铰。例如图 2.7(b)中的链杆 1 是连接刚片 I 和 II 的,而链杆 2 是连接刚片 II 和 III 的,它们连接的并不是 2 个相同的刚片,因此,链杆 1 和 2 的交点  $O$  不能当作 1 个瞬铰来看待。

如果连接 2 个刚片的 2 根链杆是平行的(图 2.7(c)),2 根链杆的交点在无穷远处,刚片 II 相对于刚片 I 的运动为垂直于链杆的瞬时平动,其约束作用相当于无穷远处的瞬铰,简称无穷远铰。在应用无穷远铰进行几何构造分析时,可采用射线几何中关于 $\infty$ 点和 $\infty$ 线的四个结论:

- (1) 每个方向都有一个 $\infty$ 点;

- (2) 不同方向有不同的 $\infty$ 点;
- (3) 所有 $\infty$ 点在一条广义直线上,该直线称为 $\infty$ 线;
- (4) 所有有限点都不在 $\infty$ 线上。

### 5. 必要约束和多余约束

体系中增加一个或减少一个约束,体系自由度数发生相应变化,则该约束称为必要约束。而体系中增加一个或减少一个约束,并不改变体系自由度数,则该约束称为多余约束。图 2.8 (a)中, A 点受 2 根链杆的约束,因此,系统的自由度为零。撤掉其中任意 1 根链杆后,系统的自由度为 1。因此这 2 根链杆都是必要约束。在系统中如果再增加一个约束,如图 2.8(b)所示,体系的自由度依然为零。因此,这 3 根链杆中有 1 根对减少系统的自由度没有作用,是多余约束。

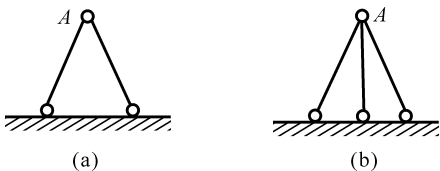


图 2.8

## 2.3 平面杆件体系的计算自由度

一个结构体系是由约束将各部件联系起来的一个整体,要成为几何不变体系,必须具有足够的约束数量使体系的自由度为零。设想体系中各个约束都不存在,此时,各部件自由度数的总和为  $a$ ;若体系的全部约束中,必要约束的个数为  $c$ ,则体系的自由度  $S$  可表示为

$$S = a - c \quad (2.1)$$

式(2.1)的概念非常简单,但是应用非常困难。这是因为难以事先将必要约束和多余约束区分开来。体系越复杂,难度越大。为了避免这个困难,而提出计算自由度  $W$  的概念,即

$$W = a - d \quad (2.2)$$

式中,  $d$  为全部约束的总数。多余约束数  $n$  等于全部约束数减去必要约束数,由式(2.1)和式(2.2)可知

$$n = S - W \quad (2.3)$$

式(2.3)反映了  $n$ 、 $S$ 、 $W$  三者之间的关系,已知其中两个值可求第三个。由于系统的自由度和多余约束数必然不是负数,即  $n \geq 0$ ,  $S \geq 0$ 。由式(2.3)可得

$$S \geq W, \quad n \geq -W \quad (2.4)$$

即  $W$  是自由度的下限,  $(-W)$  是多余约束的下限。式(2.2)中各部件可以是刚片,也可以是结点。从不同的角度分析体系,可以得到计算自由度不同的计算方法。

### 2.3.1 平面刚片体系的计算自由度

将体系看作是刚片通过刚结、铰接和链杆约束组合而成。如果体系中的刚片数、单刚结点数、单铰数和单链杆数(包括支座链杆数)分别为  $m$ 、 $g$ 、 $h$  和  $b$ ,则体系的计算自由度  $W$  可表示为

$$W = 3m - (3g + 2h + b) \quad (2.5)$$

式(2.5)中隐含大地是零自由度的刚片。

有时可不考虑支座链杆的作用,而仅分析体系自身的几何不变性。因为在平面体系中不与基础相连的每个刚片有 3 个自由度,一个体系的内部可变量  $V$  等于计算自由度减去 3,即

$$V = W - 3 \quad (2.6)$$

在应用上述公式计算体系计算自由度时,需要注意以下几点:

(1) 式中的  $g$ 、 $h$ 、 $b$  表示体系所受单约束的数目。如果是复约束的情形,需要转变为相应单约束进行统计。

(2) 统计体系刚片数的时候,每个刚片应该是无多余约束的几何不变体系。如果有内部多余约束,则应将多余约束去除将它变成内部无多余约束的刚片,去除的多余约束在计算体系的约束总数时考虑进去。

(3) 对于组合结点,统计单刚结点数时,可把铰结杆当作不存在;统计单铰数时,可把刚结杆看作是一个刚片。

如图 2.9(a)所示是内部没有多余约束的刚片,图 2.9(b)、(c)、(d)可看作在 2.9(a)的刚片内部分别附加了 1 根链杆、1 个铰接和 1 个刚结。因此,它们的多余约束个数分别为 1 个、2 个和 3 个。

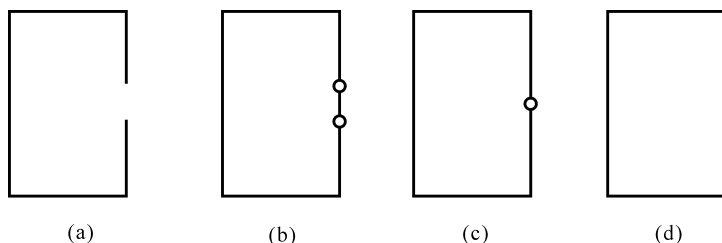


图 2.9

**例 2.1** 计算图 2.10 所示体系的计算自由度。

**解:** 在该体系中,将  $AC$ 、 $CE$ 、 $BF$ 、 $DG$ 、 $AF$ 、 $FG$ 、 $GE$  看作刚片,则  $m=7$ 。无刚结点,  $g=0$ 。结点  $F$  和  $G$  为连接 3 根杆件的复铰结点,相当于 2 个单铰,结点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  都是单铰,  $h=9$ 。支杆数  $b=3$ 。

由式(2-5)可得:  $W=3 \times 7 - (2 \times 9 + 3) = 0$ 。

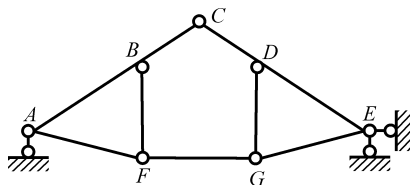


图 2.10

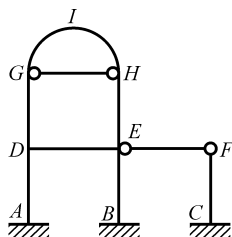


图 2.11

**例 2.2** 计算图 2.11 所示体系的计算自由度。

**解法一:** 将  $AD$ 、 $DG$ 、 $GIH$ 、 $HE$ 、 $EB$ 、 $GH$ 、 $DE$ 、 $EF$ 、 $FC$  看作刚片,  $m=9$ 。结点  $G$ 、 $H$ 、 $E$  为组合结点,对于这类结点将刚结点和铰结点分开统计,即  $G$  和  $H$  结点有 1 个单刚结点和 1 个单铰,  $E$  结点为复刚结点和 1 个单铰,相当于 2 个单刚结点和 1 个单铰。  $D$  结点为复刚

结点相当于 2 个单刚结点,  $A, B, C$  为固定支座, 相当于单刚结点,  $g=9$ 。结点  $F$  是单铰,  $h=4$ 。支杆数  $b=0$ 。

由式(2.5)可得:  $W=3 \times 9 - 3 \times 9 - 2 \times 4 = -8$ 。

**解法二:** 将  $ADEB, DGIHE, GH, EF, FC$  看作刚片,  $m=5$ 。 $D$  是单刚结点,  $E$  是组合结点, 相当于 1 个单刚结点和 1 个单铰,  $A, B, C$  为固定支座, 相当于单刚结点,  $g=5$ 。 $G, H, F$  是单铰,  $h=4$ 。支杆数  $b=0$ 。

由式(2.5)可得:  $W=3 \times 5 - 3 \times 5 - 2 \times 4 = -8$ 。

**解法三:** 将  $ADGIHEB, GH, EF, FC$  看作刚片,  $m=4$ 。 $ADGIHEB$  具有 1 个无铰闭合框的刚片, 相当于有 1 个单刚结点,  $A, B, C$  为固定支座, 相当于单刚结点,  $g=4$ 。 $E, F, G, H$  是单铰,  $h=4$ 。支杆数  $b=0$ 。

由式(2.5)可得:  $W=3 \times 4 - 3 \times 4 - 2 \times 4 = -8$ 。

三种计算方法的结果相同。由此可知, 对于同一个系统, 可以根据需要将体系的不同部分划分为刚体和约束, 但计算自由度不变。

### 2.3.2 平面铰结链杆体系的计算自由度

如果体系完全由两端铰结的杆件所组成, 该体系称为铰结链杆体系, 简称铰结体系。此时, 可将体系看做是结点受链杆约束而组成的。若体系的结点数为  $j$ , 单链杆数为  $b$  (包括支座链杆数), 则体系的计算自由度为

$$W = 2j - b \quad (2.7)$$

按照铰结链杆体系进行自由度计算时, 凡是链杆的端点, 都应当算作结点。对于活动铰支座和固定铰支座, 都根据约束数目等效为相应链杆数。

**例 2.3** 用式(2.7)重新计算图 2.10 所示体系的计算自由度。

**解:** 所有结点都是铰结点, 将体系可看做铰结链杆体系。体系的结点数为  $j=7$ 。 $AC$  和  $CE$  杆为连接 3 个结点的复链杆, 相当于 3 个单链杆, 因此, 包括支座在内共有连杆数:  $b=14$ , 则由式(2.7)可得:  $W=2 \times 7 - 14 = 0$ 。与例 2.1 的计算结果相同。

**例 2.4** 计算图 2.12 所示体系的计算自由度。

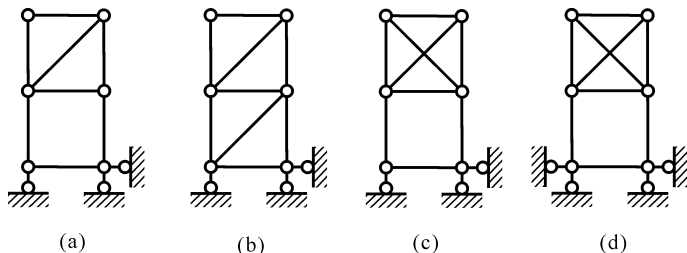


图 2.12

**解:** 按铰结链杆体系计算。4 个体系都有 6 个铰结点, 它们的单链杆数分别为 11、12、12、13, 则它们的计算自由度分别为 1, 0, 0, -1。图 2.12(a) 的计算自由度大于零, 这表明体