第8章

矩阵位移法

本章要点：主要内容包括单元分析、整体分析、等效结点荷载的计算和后处理法中边界条件处理的常用方法。重点是理解一般单元的单元刚度矩阵的建立、坐标变换以及采用对号入座法建立整体刚度矩阵。

8.1 概述

《结构力学》(上册)介绍的力法和位移法是经典结构力学的内容。经典结构力学主要采用“手算”计算手段，因此只能计算一些简单的、未知量少的结构力学问题。结构矩阵分析与经典结构力学在原理上并无区别，仅在结构分析中运用矩阵格式。矩阵运算使计算公式紧凑，计算形式规格化，计算步骤标准化，适宜于编制通用程序用计算机进行“电算”，完成大型复杂结构的力学分析问题。

与力法和位移法相对应，结构矩阵分析中也存在矩阵力法和矩阵位移法。矩阵力法的基本结构可以有多种方案，这给通用程序的编制带来一定的困难；而矩阵位移法的基本结构通常是唯一的，计算比较规则，易于实现程序化。矩阵位移法可以认为是限单元法在杆系结构中的应用，也称为杆系有限单元法。

矩阵位移法的基本思路是(1)结构离散化，将结构分解为若干个单元；(2)进行单元分析，建立单元刚度方程；(3)以结点位移为基本未知量，根据变形协调条件将各单元综合成整体，根据平衡条件建立结构的总刚度方程；(4)由结构的总刚度方程求出结点位移，从而求出杆端内力。可见矩阵位移法是在一分一合的过程中，将复杂结构的求解问题转化为简单单元的分析和集合。

单元可根据力学性质进行分类。对杆系结构而言，主要可分为刚架中直杆单元和桁架中直杆单元。在有限元中，将刚架中的直杆单元称为梁单元，桁架中的直杆单元称为杆单元。梁单元的结点位移包括线位移和角位移，可以承受轴力、剪力和弯矩。杆单元的结点位移只有线位移，只能承受轴力。

8.1.1 矩阵位移法的基本步骤

1. 结构离散化

离散化是假想将结构分解为有限个单元，用这些单元的集合体代替真实结构。离散化

之后单元的数目不是无限的,所以叫做有限单元体系。离散化后的计算简图称为有限元模型。对于杆系结构而言,一根直杆通常可看做一个单元,有时可看做几个单元。单元与单元相连接的点称为结点。杆件的转折点、汇交点、支承点、截面突变点均是结点,有时集中荷载作用点也作为结点。

结构离散化时,划分单元的大小和数目应根据计算精度的要求和计算机的容量来确定。划分单元时,应考虑以下因素。

(1) 离散体系的外形应尽量和实际结构一致。

(2) 内力大、位移大的部位,单元要分得小一些;反之,可以分得大些。

(3) 每个单元由一种材料构成,单元内截面大小不变。

(4) 不能将结构离散化为一个几何可变体系。

如图8.1(a)所示,简支梁划分为1个梁单元、2个结点,而图8.1(b)中则将简支梁划分为4个梁单元、5个结点。可见,同一个结构可采用不同的离散方法,具体采用什么离散方法由计算问题的需要决定。

图 8.1

图8.2(a)为变截面无铰拱,为了实现利用等截面直杆单元近似计算变截面杆件的目的,在进行有限元划分时,用一系列短的直杆代替曲杆,以阶梯状变截面杆代替连续变截面杆。这样处理后就可以得到图8.2(b)所示的有限元模型。显然,这样处理的计算结果是近似的,计算精度取决于划分单元的多少。

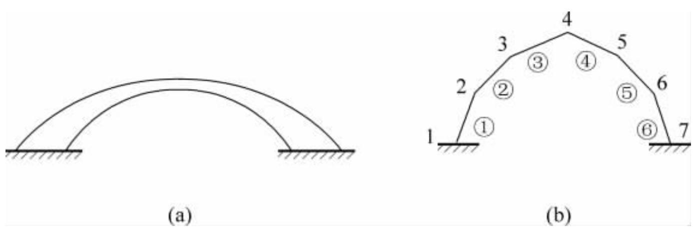

图 8.2

图8.3所示平面桁架可划分为7个杆单元、5个结点。注意,一根桁架杆件不能离散为两个杆单元,否则桁架将成为瞬变体系。

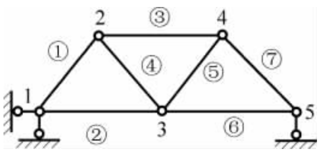

图 8.3

2. 单元分析

单元分析就是建立结点位移和结点力之间关系的单元刚度矩阵。对于杆系结构,单元为等截面直杆,此时单元刚度矩阵反映的是杆端位移和杆端力之间的关系。

此外,矩阵位移法分析的荷载必须作用在结点上。当荷载作用在单元中间时,可采用静力等效方法将单元中间的荷载转化为等效结点荷载。

对每一个单元进行上述分析，得到单元刚度矩阵和结点荷载向量。

3. 整体分析

整体分析就是将各个单元组成结构进行分析，从而建立整体结点位移和结点力之间的关系，即建立整体刚度方程。

8.1.2　坐标系及符号规定

为了便于形成通用的计算程序，在进行单元分析和整体分析时，通常采用局部坐标系（或称为单元坐标系）和整体坐标系。这里采用右手坐标系，以直杆单元 ij 的 i 端为坐标原点，以从 i 向 j 的方向为$\bar{x}$轴的正方向，以$\bar{x}$轴的正向逆时针转 90°为$\bar{y}$轴的正方向，这样就形成与单元完全结合在一起的坐标轴，称为局部坐标系。i 和 j 分别称为始端和末端。图 8.4 和图 8.5 分别为杆单元和梁单元的局部坐标系。图上所示的结点力和结点位移均为正方向，即线位移和力沿坐标轴的正方向时为正，转角和弯矩以逆时针为正。负值则表示实际方向与图示方向相反。当用局部坐标系时，杆端力和位移上均加一横线。图 8.4 表示杆单元中第ⓔ个单元，其两端的结点编号分别为 i 和 j，它在局部坐标系中的杆端位移向量和杆端力向量分别为

$$\bar{\boldsymbol{U}}^e = (\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j)^{eT} \tag{8.1}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = (\bar{F}_{Ni} \quad \bar{F}_{Qi} \quad \bar{F}_{Nj} \quad \bar{F}_{Qj})^{eT} \tag{8.2}$$

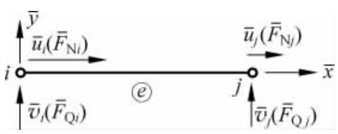

图　8.4

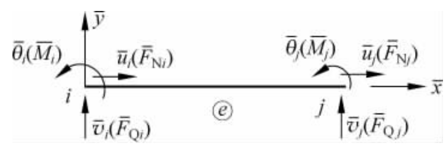

图　8.5

图 8.5 表示梁单元中第ⓔ个单元，其两端的结点编号分别为 i 和 j，它在局部坐标系中的梁端位移向量和梁端力向量分别为

$$\bar{\boldsymbol{U}}^e = (\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j)^{eT} \tag{8.3}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = (\bar{F}_{Ni} \quad \bar{F}_{Qi} \quad \bar{M}_i \quad \bar{F}_{Nj} \quad \bar{F}_{Qj} \quad \bar{M}_j)^{eT} \tag{8.4}$$

图 8.6 中第ⓔ个杆单元在图示整体坐标系 xOy 中杆端位移 $\boldsymbol{U}^e$ 和杆端力 $\boldsymbol{F}^e$ 的向量分别为

$$\boldsymbol{U}^e = (u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j)^{eT} \tag{8.5}$$

$$\boldsymbol{F}^e = (F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{xj} \quad F_{yj})^{eT} \tag{8.6}$$

图 8.7 中第ⓔ个梁单元在图示整体坐标系 xOy 中梁端位移 $\boldsymbol{U}^e$ 和梁端力 $\boldsymbol{F}^e$ 的向量分别为

$$\boldsymbol{U}^e = (u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j)^{eT} \tag{8.7}$$

$$\boldsymbol{F}^e = (F_{xi} \quad F_{yi} \quad M_i \quad F_{xj} \quad F_{yj} \quad M_j)^{eT} \tag{8.8}$$

结点位移和结点力向量中的各分量都与坐标系直接相关，采用不同坐标系时，同一向量中同一位置的分量值可能是不相同的，因此，必须注意是采用局部坐标系还是整体坐标系。

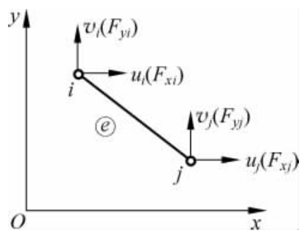

图 8.6

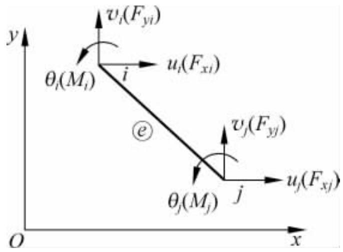

图 8.7

8.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵

8.2.1 局部坐标系下的梁单元

图 8.8 为没有任何约束的梁单元,称为一般单元或自由单元。设 6 个杆端位移已知,且杆上不受外荷载作用,要确定 6 个杆端力的大小,即建立单元杆端位移和杆端力之间的关系。这可采用位移法中基本体系的做法,在单元两端加上人为控制的附加约束,使梁单元在两端产生 6 个指定位移,然后根据这 6 个杆端位移来推导相应的 6 个杆端力。计算时忽略轴向受力状态和弯曲受力状态之间的相互影响,分别推导轴向变形和弯曲变形的刚度矩阵。

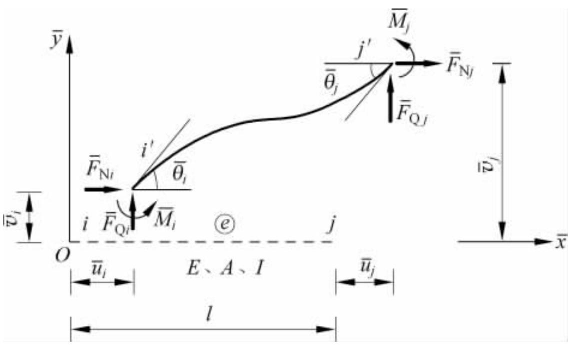

图 8.8

首先,由杆端轴向位移$\bar{u}_i$、$\bar{u}_j$,可得杆端的轴力 $\bar{F}_{Ni}$、$\bar{F}_{Nj}$为

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}_{Ni} &= -\frac{EA}{l}(\bar{u}_j - \bar{u}_i)\\ \bar{F}_{Nj} &= \frac{EA}{l}(\bar{u}_j - \bar{u}_i)\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

其次,由杆端横向位移$\bar{v}_i$、$\bar{v}_j$ 和转角 $\bar{\theta}_i$、$\bar{\theta}_j$ 可得杆端弯矩和杆端剪力为

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}_{Qi} &= \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_i + \frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_i - \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_j + \frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_j\\ \bar{M}_i &= \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_i + \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_i - \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_j + \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_j\\ \bar{F}_{Qj} &= -\frac{12EI}{l^3}\bar{v}_i - \frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_i + \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_j - \frac{6EI}{l^2}\bar{\theta}_j\\ \bar{M}_j &= \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_i + \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_i - \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_j + \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_j\end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

将式(8.9)和式(8.10)合在一起,写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{\mathrm{N}i}\\ \bar{F}_{\mathrm{Q}i}\\ \bar{M}_i\\ \bar{F}_{\mathrm{N}j}\\ \bar{F}_{\mathrm{Q}j}\\ \bar{M}_j\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\\ \bar{\theta}_i\\ \bar{u}_j\\ \bar{v}_j\\ \bar{\theta}_j\end{bmatrix}^e \tag{8.11}$$

它可简写为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e=\bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{U}}^e \tag{8.12}$$

式(8.11)和式(8.12)称为局部坐标系下的单元刚度方程。其中,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}\bar{u}_i=1 & \bar{v}_i=1 & \bar{\theta}_i=1 & \bar{u}_j=1 & \bar{v}_j=1 & \bar{\theta}_j=1\end{array}\\ \bar{\boldsymbol{k}}^e= & \begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}^e\end{array} \tag{8.13}$$

$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 为局部坐标系下的单元刚度矩阵,简称单刚。它的行数等于杆端力列向量的维数,而列数等于杆端位移列向量的维数。由于杆端力和杆端位移的维数总是相等的,因此,$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 是方阵。注意,这里的杆端位移和杆端力向量的各分量是按照式(8.3)和式(8.4)排列的。如果改变向量的排列顺序,矩阵$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 中的各元素也要发生相应的改变。单元刚度矩阵具有以下性质。

(1) 它只与杆件本身性质有关而与外荷载无关。

(2) 单元刚度系数具有明确的物理意义。$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 中的每个元素称为单元刚度系数。代表由单位杆端位移所引起的杆端力。$\bar{k}^e_{lm}$为$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 中第 l 行、第 m 列的元素,它表示第 m 个杆端位移分量等于 1 (其余杆端位移分量均为零) 时,引起的第 l 个杆端力。如:$\bar{k}^e_{63}=\frac{2EI}{l}$表示第 3 个杆端位移分量 $\bar{\theta}_i=1$ 时引起的第 6 个杆端力 $\bar{M}_j$(j 端的弯矩)。以此类推,$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 中某一列的 6 个元素分别表示当某个杆端位移分量等于 1 时所引起的 6 个杆端力分量。为帮助理解,式(8.13)中$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 每一列的上方都标明了对应的单位位移分量。例如第 2 列对应于$\bar{v}_i=1$

所引起的杆端力。

(3) 单元刚度矩阵是对称的,即$\bar{\boldsymbol{k}}^e$中$\bar{k}_{lm}^e=\bar{k}_{ml}^e$,这是反力互等定理的必然结果。

(4) 一般单元的刚度矩阵$\bar{\boldsymbol{k}}^e$具有奇异性,即$\bar{\boldsymbol{k}}^e$的行列式$|\bar{\boldsymbol{k}}^e|=0$,它不存在逆矩阵。因此,若已知单元杆端位移$\bar{\boldsymbol{U}}^e$,由式(8.11)可求单元杆端力$\bar{\boldsymbol{F}}^e$。但对于给定杆端力$\bar{\boldsymbol{F}}^e$,式(8.11)不能求得唯一确定的位移。从物理概念上来说,这是由于所讨论的单元是一个自由单元,两端没有任何支承约束,此时杆件除了由杆端力引起的轴向变形和弯曲变形外,还可以有任意的刚体位移,因此,给定$\bar{\boldsymbol{F}}^e$无法求解$\bar{\boldsymbol{U}}^e$,除非增加足够的约束条件。从数学角度看,式(8.13)所示矩阵具有线性相关性,则$\bar{\boldsymbol{k}}^e$是奇异的。譬如:第1行元素和第4行元素相加,所得的一行元素全为零,第2行元素和第5行元素相加,所得的一行元素全为零。因此,第1行和第4行线性相关,第2行和第5行线性相关。

例 8.1 建立图8.9所示刚架中各单元在局部坐标下的单元刚度矩阵。已知各杆的$EI=2\times10^5\text{kN}\cdot\text{m}^2$,$EA=1\times10^4\text{kN}$。

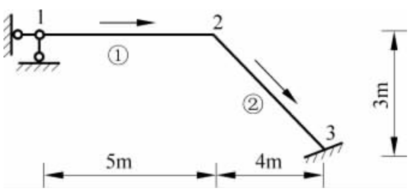

图 8.9

解:(1) 对结点和单元进行编号。杆旁边的箭头指示该杆局部坐标系的$\bar{x}$轴方向。

(2) 单元①长度$l=5\text{m}$,相关参数计算如下:

$\frac{EA}{l}=2\times10^3\text{kN/m}$,$\frac{12EI}{l^3}=1.92\times10^4\text{kN/m}$,$\frac{6EI}{l^2}=4.8\times10^4\text{kN}$,$\frac{4EI}{l}=1.6\times10^5\text{kN}\cdot\text{m}$,$\frac{2EI}{l}=8\times10^4\text{kN}\cdot\text{m}$。

将上述数值代入式(8.13),可得单元①的刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{(1)}=10^3\times\begin{bmatrix}2&0&0&-2&0&0\\0&19.2&48&0&-19.2&48\\0&48&160&0&-48&80\\-2&0&0&2&0&0\\0&-19.2&-48&0&19.2&-48\\0&48&80&0&-48&160\end{bmatrix}$$

(3) 单元②长度及力学参数与单元①一样,因此,局部坐标系下的单元刚度矩阵也完全一样,即

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{(2)}=\bar{\boldsymbol{k}}^{(1)}$$

8.2.2 连续梁单元

对于连续梁,在忽略轴向变形情况下,取每跨为一个单元,如图8.10所示。

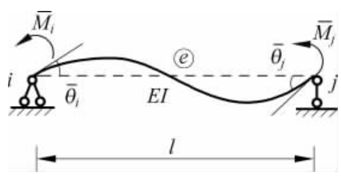

图 8.10

此时梁单元的杆端位移只有$\bar{\theta}_i$、$\bar{\theta}_j$,其余杆端线位移均为零,即

$$\bar{u}_i=\bar{v}_i=\bar{u}_j=\bar{v}_j=0\tag{8.14}$$

将式(8.14)代入式(8.11),整理后可得

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{\mathrm{N}i}\\ \bar{F}_{\mathrm{N}j}\\ \bar{F}_{\mathrm{Q}i}\\ \bar{F}_{\mathrm{Q}j}\\ \bar{M}_i\\ \bar{M}_j\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{6EI}{l^2}\\ -\dfrac{6EI}{l^2} & -\dfrac{6EI}{l^2}\\ \dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l}\\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i\\ \bar{\theta}_j\end{bmatrix}^e \tag{8.15}$$

取弯矩-角位移相关的子矩阵,可得连续梁的单元刚度方程为

$$\begin{bmatrix}\bar{M}_i\\ \bar{M}_j\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}\dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l}\\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\theta}_i\\ \bar{\theta}_j\end{bmatrix}^e \tag{8.16}$$

连续梁单元的刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e=\begin{bmatrix}\dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l}\\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l}\end{bmatrix}^e \tag{8.17}$$

连续梁单元的刚度矩阵是非奇异的。这是由于图 8.10 所示的简支单元不是自由单元,而是具有完整约束的简支梁,因此,刚度矩阵可逆。

通常,在单元中某个或某些杆端位移的值已知情况下,可建立特定单元,称为特殊单元。特殊单元的刚度矩阵是否奇异取决于特殊单元是否存在刚体位移,如果存在刚体位移,则刚度矩阵是奇异的,否则可逆。

8.2.3　局部坐标系下的杆单元

图 8.11 所示杆单元在局部坐标系下的刚度方程如式(8.9)所示。写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{\mathrm{N}i}\\ \bar{F}_{\mathrm{N}j}\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}\dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l}\\ -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l}\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{u}_j\end{bmatrix}^e \tag{8.18}$$

式(8.18)也可理解为式(8.11)的特殊情况,相当于梁单元没有抗弯能力,而将第 2、3、5、6 行和列删除后得出。

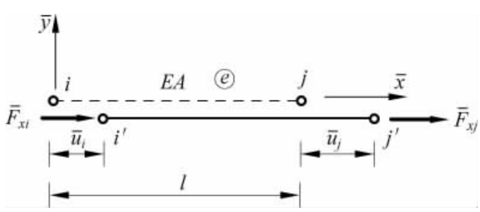

图　8.11

对于斜杆单元,其轴力和轴向位移在整体坐标系中将有沿 x 轴和 y 轴的两个分量,为了便于将局部坐标系的单元刚度方程转化为整体坐标系下的刚度方程,可将式(8.18)扩展为 4 阶形式,即

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{Ni}\\ \bar{F}_{Qi}\\ \bar{F}_{Nj}\\ \bar{F}_{Qj}\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^e\begin{bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\\ \bar{u}_j\\ \bar{v}_j\end{bmatrix}^e \tag{8.19}$$

因此,相应的刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^e \tag{8.20}$$

式(8.20)为杆单元在局部坐标系下的刚度矩阵。它是 4×4 的方阵,为奇异阵。

8.3 整体坐标系下的单元刚度矩阵

8.2 节中的单元刚度矩阵是建立在局部坐标系下的。对于一个结构来说,各单元的局部坐标系可能各不相同。为便于建立结构整体的变形协调条件和平衡条件,必须选定一个统一的坐标系,称为整体坐标系。为推导整体坐标系下的单元刚度方程和刚度矩阵,需要用坐标变换的方法将局部坐标系下的杆端位移和杆端力转换到整体坐标系下,然后建立整体坐标系下的刚度方程和刚度矩阵。

8.3.1 坐标变换

设有整体坐标系 xOy 和一局部坐标系 $\bar{x}O\bar{y}$。Ox 轴逆时针方向的转角 α 为正,如图 8.12 所示。设向量 $\boldsymbol{V}$ 在整体坐标系 x、y 轴上的投影为 V_x、V_y,现欲求它在局部坐标系 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 轴上的投影 $\bar{V}_x$、$\bar{V}_y$。由图 8.12 可知:

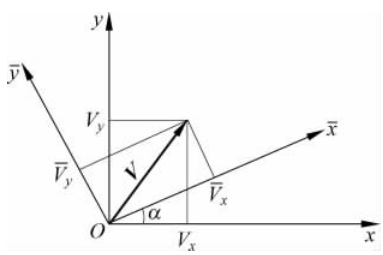

图 8.12

$$\left.\begin{aligned}\bar{V}_x&=V_x\cos\alpha+V_y\sin\alpha\\ \bar{V}_y&=-V_x\sin\alpha+V_y\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

记 $C=\cos\alpha$,$S=\sin\alpha$,将式(8.21)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}\bar{V}_x\\ \bar{V}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C & S\\ -S & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_x\\ V_y\end{bmatrix} \tag{8.22}$$

或

$$\bar{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{V} \tag{8.23}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{V}}=(\bar{V}_x\quad \bar{V}_y)^{\mathrm{T}}$ 为局部坐标系下的向量,$\boldsymbol{V}=(V_x\quad V_y)^{\mathrm{T}}$ 为整体坐标系下的向量,$\boldsymbol{T}_1$ 为坐标变换矩阵。

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}C & S\\ -S & C\end{bmatrix} \tag{8.24}$$

若向量从局部坐标系变换到整体坐标系，由式(8.23)可得

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}_1^{-1}\overline{\boldsymbol{V}} \tag{8.25}$$

由于坐标变换矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 为正交矩阵，因此，其逆矩阵等于转置矩阵，即

$$\boldsymbol{T}_1^{-1} = \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}} \tag{8.26}$$

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{I} \tag{8.27}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为与 $\boldsymbol{T}_1$ 同阶的单位矩阵。因此，式(8.25)可表示为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{V}} \tag{8.28}$$

1. 梁单元的坐标变换矩阵

对平面梁单元的杆端力向量或杆端位移向量做坐标变换时，由于弯矩(或角位移)在坐标系中可看成是沿 z 轴方向的向量。当坐标系转动 α 角时，绕 z 轴旋转的弯矩(或角位移)无变化，因此可得

$$\begin{bmatrix} \overline{F}_{\mathrm{N}i} \\ \overline{F}_{\mathrm{Q}i} \\ \overline{M}_i \\ \overline{F}_{\mathrm{N}j} \\ \overline{F}_{\mathrm{Q}j} \\ \overline{M}_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} C & S & 0 & & & \\ -S & C & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & C & S & 0 \\ & 0 & & -S & C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_i \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_j \end{bmatrix}^e \tag{8.29}$$

写成矩阵形式为

$$\overline{\boldsymbol{F}}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^e \tag{8.30}$$

式中，

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & & & \\ -S & C & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & C & S & 0 \\ & 0 & & -S & C & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.31}$$

称为梁单元的坐标变换矩阵。矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{T}_1$ 具有相同的性质，也是正交矩阵，即

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{8.32}$$

因此，式(8.30)的逆变换为

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}^e \tag{8.33}$$

显然，杆端力之间的这种变换关系同样适用于杆端位移，即

$$\overline{\boldsymbol{U}}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^e \tag{8.34}$$

$$\boldsymbol{U}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{U}}^e \tag{8.35}$$

2. 杆单元的坐标变换矩阵

直接应用式(8.22)可得平面杆单元的杆端力向量的坐标变换：

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{Ni}\\ \bar{F}_{Qi}\\ \bar{F}_{Nj}\\ \bar{F}_{Qj}\end{bmatrix}^e=\begin{bmatrix}C & S & & \\ -S & C & & 0\\ & & C & S\\ 0 & & -S & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{xi}\\ F_{yi}\\ F_{xj}\\ F_{yj}\end{bmatrix}^e \tag{8.36}$$

写成矩阵形式：

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e=\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^e \tag{8.37}$$

式中，T 为杆单元的坐标变换矩阵，

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}C & S & & \\ -S & C & & 0\\ & & C & S\\ 0 & & -S & C\end{bmatrix} \tag{8.38}$$

同理杆单元的杆端位移的转换关系为

$$\bar{\boldsymbol{U}}^e=\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^e \tag{8.39}$$

由式(8.30)和式(8.37)可知，梁单元和杆单元的坐标变换公式形式是一样的，仅坐标变换矩阵不同。当局部坐标系和整体坐标系一致时，$\alpha=0$，矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为单位矩阵，此时 $\bar{\boldsymbol{F}}^e=\boldsymbol{F}^e$，$\bar{\boldsymbol{U}}^e=\boldsymbol{U}^e$。

8.3.2 整体坐标系下的梁单元

1. 单元刚度矩阵的建立

梁单元在局部坐标系的刚度方程为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e=\bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{U}}^e \tag{8.40}$$

将式(8.30)和式(8.34)代入式(8.40)，可得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^e=\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^e \tag{8.41}$$

式(8.41)两边同乘以 $\boldsymbol{T}^{-1}$，并由坐标变换矩阵为正交阵可得

$$\boldsymbol{F}^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^e \tag{8.42}$$

记

$$\boldsymbol{k}^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T} \tag{8.43}$$

则

$$\boldsymbol{F}^e=\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{U}^e \tag{8.44}$$

式(8.44)称为梁单元在整体坐标系下的单元刚度方程，式中 $\boldsymbol{k}^e$ 即为梁单元在整体坐标系中的单元刚度矩阵。

2. 单元刚度矩阵的性质

整体坐标系中的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 和 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 同阶，性质类似，它具有以下性质。

(1) k_{lm}^e 表示 $\boldsymbol{k}^e$ 中第 l 行、第 m 列的元素。它表示在整体坐标系下第 m 个杆端位移分量等于1（其余杆端位移分量均为零）时，引起的第 l 个杆端力。

(2) 单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 是对称的。

(3) 一般单元的刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 具有奇异性。