

第3章

傅里叶变换

3.1 引言

本章以及第4章、第6章将把LTI系统的时域分析转入变换域分析。变换域包括傅里叶变换、拉普拉斯变换和离散时间系统的 z 变换(第6章)。在变换域分析中,先讨论傅里叶变换。傅里叶变换是在傅里叶正弦、余弦正交函数级数展开式的基础上发展而产生的,这方面的问题也称为傅里叶分析,可以说傅里叶分析是研究信号频谱构成,分析系统频率特性较为简单的途径,也是较为常用的方法,与后续课程如“数字信号处理”等有着不可分割的联系。从时间函数到傅里叶变换形式的频率函数可归纳为4种不同的情况:连续和非周期(时间函数) \rightarrow 非周期和连续(频谱函数);连续和周期(时间函数) \rightarrow 非周期和离散(频谱函数);离散和非周期(时间函数) \rightarrow 周期和连续(频谱函数);离散和周期(时间函数) \rightarrow 周期和离散(频谱函数)。

傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier,1768—1830)是法国著名数学家、物理学家。傅里叶分析是他本人1807年就撰写并向巴黎科学院呈交,1811年再次提交了修改后的论文,是1822年出版的专著 *Theorie Analytique De La Chaleur*(《热的解析理论》,1822)中的核心内容。傅里叶在《热的解析理论》专著中,应用三角级数求解热传导方程,为了处理无穷区域的热传导问题又导出了当前所称的“傅里叶积分”,这一切都极大地推动了偏微分方程边值问题的研究。傅里叶分析的意义远不止此,它使人们对函数概念做修正、推广,特别是引起了对不连续函数的探讨,三角级数收敛性问题更促进了集合论的诞生和发展。之后,这一成果被应用到电学中去,伴随着电机制造、交流电的产生与传输等实际问题的需要得到广泛的应用。

19世纪末,人们才制造出能够用于工程实际的电容器,进入20世纪以后,谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为正弦函数与傅里叶分析的进一步应用开辟了更为广阔的前景。从此,人们逐渐认识到,在通信与控制系统的理论研究和实际应用之中,采用频率域(频域)的分析方法较之经典的时间域(时域)方法有许多突出的优点。当今,傅里叶分析方法已经成为信号分析与系统设计不可缺少的重要工具。

随着计算机技术的进步与发展,傅里叶变换广泛应用于数字信号处理分析、光信号分析、图像处理等领域。实现图像变换的手段有数字和光学两种形式,它们分别对应二维离散和连续函数运算。数字变换在计算机中进行,提高运算速度是这种方式的关键。常用的有3种变换方法:傅里叶变换;沃尔什-阿达玛变换;离散卡夫纳-勒维变换。其中,傅里叶变换是应用最广泛和最重要的变换。它的变换核心是复指数函数,转换域图像是原空间域图像的二维频谱,其“直流”项与原图像亮度的平均值成比例,高频项表示图像中边缘变化的强度和方向。为了提高运算速度,计算机中多采用傅里叶快速算法。它是一种便于运算的变换。变换核心是值+1或-1的有序序列。这种变换只需要做加法或减法运算,不需要像傅里叶变换那样做复指数积分运算,所以能提高计算机的运算速度,减少存储容量。这种变换已有快速算法(FFT),能进一步提高运算速度。它是以图像的统计特性为基础的变换,又称霍特林变换或本征向量变换。变换核心是样本图像

的协方差矩阵的特征向量。这种变换用于图像压缩、滤波和特征抽取时在均方误差意义下是最优的,但在实际应用中往往不能获得真正协方差矩阵,所以不一定有最优效果。它的运算较复杂且没有统一的快速算法。可以用它完成图像分析、图像增强及图像压缩等工作。目前,快速傅里叶变换的研究与应用已相当成熟,而且仍在不断更新与发展,使得傅里叶分析方法不仅应用于电力工程、通信和控制领域之中,而且在力学、光学、量子物理和各种线性系统分析等许多有关数学、物理和工程技术领域中得到广泛而普遍的应用。

本章从傅里叶级数的正交函数展开问题开始讨论,建立信号频率的概念,再引出傅里叶变换。通过典型信号频谱以及傅里叶变换性质的研究,能够初步理解傅里叶分析方法的应用。对于周期信号而言,在进行频谱分析时应以利用傅里叶级数,也可利用傅里叶变换,傅里叶级数相当于傅里叶变换的特殊表达形式。第3.2、3.3节将专门研究非正弦周期信号的傅里叶级数展开式和信号频谱,在第3.4至第3.7节将研究傅里叶变换方法及其应用,第3.8节将介绍抽样定理。

3.2 傅里叶级数

正交函数的定义:若函数 $\frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt} = 0$, 即函数的内积为 $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt = 0$,

则可以认为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间内为正交函数。

正交函数 $\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t$ 的积分:当 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 时,由于

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin 2n\omega_0 t dt = \frac{-\cos 2n\omega_0 t}{4n\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \quad (3-1)$$

由式(3-1)可知, $\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t$ 在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 区间内为正交函数。

同理有

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt = \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \quad (3-2)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt = \frac{-\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0 \quad (3-3)$$

利用正弦、余弦三角函数的两角和及两角差公式,可以得到结论

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t \cos k\omega_0 t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [\sin(n+k)\omega_0 t + \sin(n-k)\omega_0 t] dt = 0 \quad (3-4)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \sin k\omega_0 t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [\sin(n+k)\omega_0 t - \sin(n-k)\omega_0 t] dt = 0 \quad (3-5)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [\cos(n+k)\omega_0 t + \cos(n-k)\omega_0 t] dt = 0 \quad (3-6)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t \sin k\omega_0 t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [\cos(n+k)\omega_0 t - \cos(n-k)\omega_0 t] dt = 0 \quad (3-7)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 n\omega_0 t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [1 + \cos 2n\omega_0 t] dt = \frac{T}{2} \quad (3-8)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 n\omega_0 t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} [1 - \cos 2n\omega_0 t] dt = \frac{T}{2} \quad (3-9)$$

三角形式的傅里叶级数定义：设 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的实函数，且在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 上满足狄利克雷条件，即连续或至多存在有限多个第一类间断点，只存在有限多个极值点，则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (3-10)$$

其中， $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。若式(3-10)两边乘以 $\cos k\omega_0 t$ ，得到

$$f_T(t) \cos k\omega_0 t = \frac{a_0}{2} \cos k\omega_0 t + \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] \cos k\omega_0 t \quad (3-11)$$

在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 对式(3-11)两边积分，当 $k=0$ 时， $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{a_0}{2} dt = \frac{a_0 T}{2}$ ，由式(3-1)~式(3-9)可知，式(3-11)的其他右边各项在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 的积分为 0。

所以

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt \quad (3-12)$$

若 $k \neq 0$ ，由式(3-1)~式(3-9)可知，只有 $k=n$ 时，式(3-11)的右边项在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 的积分均不为 0，式(3-11)的其他右边各项在区间 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 的积分为 0，则

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n \cos^2 n\omega_0 t dt = a_n \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2n\omega_0 t}{4n\omega_0} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{a_n T}{2}$$

所以

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3-13)$$

同理，若式(3-10)两边乘以 $\sin k\omega_0 t$ 可以得到

$$f_T(t) \sin k\omega_0 t = \frac{a_0}{2} \sin k\omega_0 t + \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] \sin k\omega_0 t$$

在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 内，对等式两边积分，只有 $k=n$ 时，右边项在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 的积分均不为 0，其他各项在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 的积分均为 0，则

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n \sin^2 n\omega_0 t dt = \frac{b_n t}{2} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{b_n T}{2}$$

所以

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3-14)$$

式(3-10)称为傅里叶级数的三角形式。

若定义

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt \quad (3-15)$$

其他情况不变,则式(3-10)可以改写为

$$f_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (3-16)$$

式(3-16)也称为傅里叶级数的三角形式,由于式(3-15)中 a_0 的计算方式与式(3-12)中 a_0 的计算方式系数相差 $1/2$,所以两者是等价的,以后在涉及 a_0 的计算中采用 $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt$ 形式,即式(3-15)的形式。

傅里叶级数的函数展开式,是非正弦周期信号函数的正交分解形式,是组成一谐波关系的正弦、余弦信号的正交函数信号集(包括直流分量),其中每个谐波信号都是以 $T = 2\pi/n\omega_0$ 为周期的,它们的公共周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$,且该集合中所有的信号都是彼此独立的,如果将该信号集中所有的信号线性组合起来,则有式(3-10),显然 $f_T(t)$ 也是以 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 为周期的。采用式(3-16)所表示傅里叶三角形式的系数, a_0 为信号的直流成分, a_n 、 b_n 为信号的同频率谐波信号的系数。由于同频率正弦量可以用相量形式表示,三角形式的傅里叶级数的系数(直流分量以外),也可以表示为 $a_n - jb_n$ 的相量形式(用余弦量作为参考分量,正弦量比余弦量的初相位滞后 90° 相位角),对应谐波频率 $n\omega_0$ 分量的信号幅值为 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,对应谐波频率 $n\omega_0$ 分量的信号初相位为 $\varphi = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$,其值一般在 $\pm 90^\circ$ 区间变化,如果只有正弦项或余弦项,则谐波信号的相移为 $0 \sim 180^\circ$ 变化。

式(3-16)表明用傅里叶级数可以表示连续时间周期信号,即非正弦的连续周期时间信号可以分解成无数多个正弦、余弦信号谐波分量的组合,这些谐波分量的组合就是非正弦周期信号的频谱组成,简称为频谱;也表明傅里叶原论点“周期信号都可以表示为成谐波关系的正弦信号的加权和”,“非周期信号都可以用正弦信号的加权积分来表示”。

这种分解必须在 $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ 之内进行,其中 $\tau < T$,如果 $f_T(t)$ 有定义区间不在 $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ 内,可以采用拓展方式,如半波正弦信号, $f_T(t)$ 仅在 $(0, \frac{T}{2})$ 有定义,等于 $\sin \omega_0 t$,在 $(-\frac{T}{2}, 0)$ 内为 0,计算展开式的 a_n 、 b_n 时,对 $f_T(t)$ 积分区间仍为 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$,而实际的计算则在 $(0, \frac{T}{2})$ 内进行。而半波余弦信号,计算展开式的 a_n 、 b_n 时,对 $f_T(t)$ 积分

区间仍为 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$,而实际的计算则在 $(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4})$ 内进行。

利用欧拉公式有 $e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$, $e^{-jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t$,可得

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t}$$

设

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_{-n} + jb_{-n}}{2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3-17)$$

则三角形式的傅里叶级数可以改写为指数形式的级数为

$$f_T(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3-18)$$

其中,

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-19)$$

式(3-18)定义为傅里叶级数的指数形式,指数形式的傅里叶级数是傅里叶变换的基础。称 $c_n (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为周期函数 $f_T(t)$ 的离散频谱,称 $|c_n|$ 模数为离散振幅谱,称 $\arctan(c_n) = \arctan\left(\frac{\pm b_n}{a_n}\right)$ 为离散相位谱。

式(3-18)的指数形式傅里叶级数,同样是组成一谐波关系的复指数信号集 $y(t) = \{e^{jn\omega_0 t}\}$,复指数信号也是正弦、余弦形式信号的正交函数信号,其中每个信号都是以 $T = 2\pi/n\omega_0$ 为周期的,它们的公共周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$,且该集合中所有的信号都是彼此独立的,如果将该信号集中所有的信号线性组合起来,就是复指数形式的傅里叶级数, $c_n (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ 信号的频谱系数,反映对应频率分量的幅值和相位。对应谐波频率 $n\omega_0$ 分量的信号幅值为 $\frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,可见其值是三角形式傅里叶级数的一半,对应谐波频率 $n\omega_0$ 分量的信号初相位为 $\varphi = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$,其值在 $\pm 90^\circ$ 区间变化,如果只有正弦项或余弦项,则谐波信号的相移为 $0 \sim 180^\circ$ 变化。这与三角形式的傅里叶级数一致。

3.3 常见非正弦周期信号的频谱

非正弦周期信号,可用傅里叶级数表示成无数个正弦、余弦信号谐波分量的组合,本节分析常见非正弦周期信号的傅里叶级数的构成及其频谱组合,包括矩形脉冲信号、斜坡信号、半波正弦、余弦信号、三角波信号等傅里叶级数形式。

1. 矩形脉冲周期信号

矩形脉冲信号是目前数字系统常见的信号,了解矩形脉冲信号的频谱构成,对于数字信号处理、放大有着重要的意义。为了方便分析,以下所讨论的信号都定义信号的幅值为1,这样当实际的信号幅值为A时,则只要将结果乘以系数A就可以了。

例 3-1 求以 T 为周期的矩形脉冲信号(波形如图 3-1 所示) $f_T(t)=\begin{cases} 1, & \frac{T}{2} < t < 0 \\ 0, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$ 的傅里叶级数。

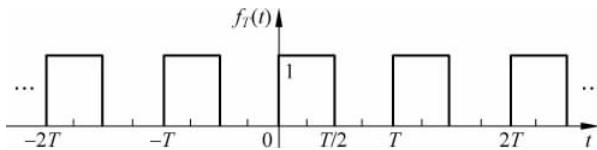


图 3-1 等脉冲宽度,起始位置为 0 的周期矩形脉冲信号波形图

解: 由式(3-15)有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt = \frac{1}{2}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{Tn\omega_0} \sin n\omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2}{Tn2\pi/T} \left(\sin n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} - \sin n \frac{2\pi}{T} \times 0 \right) = 0 \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt = -\frac{2}{Tn\omega_0} \cos n\omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2}{Tn2\pi/T} \left(\cos n \frac{2\pi}{T} \times 0 - \cos n \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$f_T(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega_0 t + \dots \quad (3-20)$$

由式(3-20)可见,起始点为 $t=0$ 的矩形脉冲信号,展开式中只有直流分量和正弦奇数谐波分量。所以,信号频谱为直流分量以及正弦奇数谐波分量的叠加。

$c_0 = a_0 = \frac{1}{2}$, $c_n = \frac{\pm jb_n}{2} = \mp j \frac{1}{n\pi}$, ($\pm n$ 为奇数), 所以周期函数 $f_T(t) = 1, \frac{T}{2} < t < 0;$

$0, 0 < t < \frac{T}{2}$ 的指数形式傅里叶级数为

$$f_T(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pm j}{n\pi} e^{\pm j n \omega_0 t} \quad (\pm n \text{ 为奇数}) \quad (3-21)$$

例 3-2 求以 T 为周期的矩形脉冲函数 $f_T(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}$ 的傅里叶级数, 其

波形如图 3-2 所示, 求其傅里叶级数。

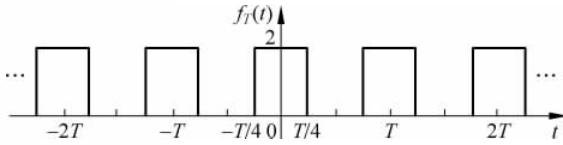


图 3-2 例 3-2 周期矩形脉冲信号波形图

解: 由式(3-15)有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 1 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 1 dt = \frac{1}{2}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{Tn\omega_0} \sin n\omega_0 t \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \\ &= \frac{2}{Tn2\pi/T} \left(\sin n\frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} - \sin n\frac{2\pi}{T} \times -\frac{T}{4} \right) = \frac{2}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \\ &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \sin n\omega_0 t dt = -\frac{2}{Tn\omega_0} \cos n\omega_0 t \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \\ &= -\frac{2}{Tn2\pi/T} \left(\cos n\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4} - \cos n\frac{2\pi}{T} \times -\frac{T}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

所以

$$f_T(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \omega_0 t - \frac{2}{3\pi} \cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi} \cos 5\omega_0 t + \dots \quad (3-22)$$

由式(3-22)可见, 对称矩形脉冲周期信号的展开式中只有直流分量和余弦奇数谐波分量。所以, 信号频谱为直流分量以及余弦奇数谐波分量的叠加。

$c_0 = a_0 = \frac{1}{2}$, $c_n = \frac{a_n}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\pi}$, ($\pm n$ 为奇数), 所以求解的周期函数 $f_T(t)$ 的指数

形式傅里叶级数为

$$f_T(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\pi} e^{jn\omega_0 t} \quad (\pm n \text{ 为奇数}) \quad (3-23)$$

若本例中, $f_T(t) = \begin{cases} 1, & -\tau < t < \tau \\ 0, & \tau < t < T \end{cases}$, 其波形如图 3-3 所示, 即脉冲宽度任意的情况

下,由式(3-15)有 $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{\tau} 1 dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{\tau} 1 dt = \frac{2\tau}{T}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。

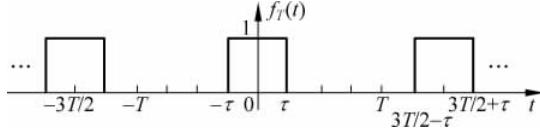


图 3-3 任意脉冲宽度的周期矩形脉冲信号波形图

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau}^{\tau} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau}^{\tau} A \cos n\omega_0 t dt = \frac{2A}{Tn\omega_0} \sin n\omega_0 t \Big|_{-\tau}^{\tau} \\ &= \frac{2}{Tn\omega_0} \left(\sin \frac{2\pi}{T} \tau - \sin \frac{2\pi}{T} \times (-\tau) \right) = \frac{4\tau}{T} \frac{\sin n\omega_0 \tau}{n\omega_0 \tau} = \frac{4\tau}{T} \text{Sa}(n\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau}^{\tau} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau}^{\tau} \sin n\omega_0 t dt = -\frac{2}{Tn\omega_0} \cos n\omega_0 t \Big|_{-\tau}^{\tau} \\ &= -\frac{2}{Tn2\pi/T} [\cos n\omega_0 \times \tau - \cos(-n\omega_0 \tau)] = 0 \end{aligned}$$

由式(3-16)有

$$c_n = \frac{a_n}{2} = \frac{2\tau}{T} \frac{\sin n\omega_0 \tau}{n\omega_0 \tau} = \frac{2\tau}{T} \text{Sa}\left(n\pi \frac{2\tau}{T}\right) = \frac{2\tau}{T} \text{sinc}\left(n \frac{2\tau}{T}\right), \text{其中 } \text{Sa}(\pi t) = \text{sinc}(x), t = n \frac{2\tau}{T},$$

$$x = \pi n \frac{2\tau}{T}.$$

所以

$$f_T(t) = \frac{2\tau}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\tau}{T} \text{sinc}\left(n \frac{2\tau}{T}\right) \cdot e^{j n \omega_0 t} \quad (n \text{ 为 } \pm \text{ 整数}) \quad (3-24)$$

从式(3-24)中可以看出, 双边离散频谱的幅值为 $\frac{2\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{2\tau}{T} n \pi\right)$ 或 $\frac{2\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{2\tau}{T} n\right)$, 最大值为 $\frac{2\tau}{T}$, 而其单边展开式为

$$f_T(t) = \frac{2\tau}{T} \left[1 + 2 \text{sinc}\left(\frac{2\tau}{T}\right) \cos \omega_0 t + 2 \text{sinc}\left(2 \frac{2\tau}{T}\right) \cos 2\omega_0 t + 2 \text{sinc}\left(3 \frac{2\tau}{T}\right) \cos 3\omega_0 t + \dots \right] \quad (3-25)$$

由式(3-25)可以看出, 单边频谱交流量的幅值为 $2 \frac{2\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{2\tau}{T} n \pi\right)$ 或 $2 \frac{2\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{2\tau}{T} n\right)$ 。

$n=0$ 的直流分量为 $\frac{2\tau}{T}$ 。所以, 最大值出现在 $n=0$ 处。

由于 $2 \frac{2\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{2\tau}{T} n \pi\right)$ 或 $2 \frac{2\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{2\tau}{T} n\right)$ 的值在 $\frac{2\tau}{T} n$ 为整数时, 其值发生从正值到负值或从负值到正值的变化, 所以相位频谱发生 180° 的相移, 因此 $f_T(t)$ 相位频谱为 0 与 180° 两种情况。

由式(3-25)表示的指数形式展开式的双边频谱如图 3-4 和图 3-5 所示。

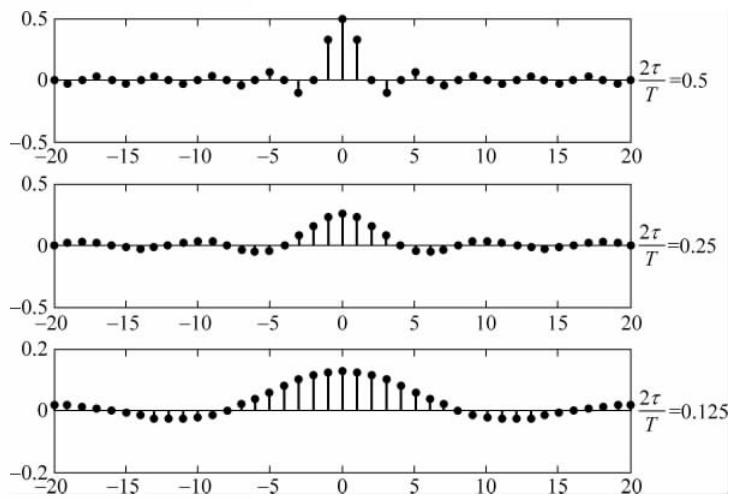


图 3-4 τ 变小 T 不变时, 矩形脉冲函数的频谱

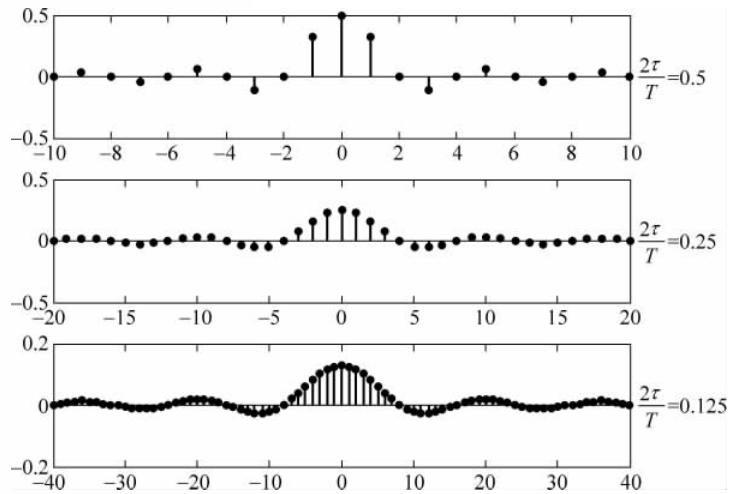


图 3-5 T 变大, τ 不变时, 矩形脉冲函数的频谱

可见, 周期性矩形脉冲信号具有离散性、谐波性、收敛性的频谱特征。一般情况下, 周期 T 和脉冲宽度 2τ 改变时频谱也发生变化。

当周期 T 改变, 脉冲宽度 2τ 不变时, 随脉冲宽度 2τ 使占空比减小, T 增加, 谱线间隔 $\frac{n}{T}$ 变小, 幅度 $2 \frac{2\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{2\tau}{T}n\pi\right)$ 下降。但频谱包络的形状不变, 包络主瓣内包含的谐波分量数 ($k = \frac{T}{2\tau}$ 整数个) 增加。

当脉冲宽度 2τ 改变, 周期 T 不变时, 同样随 2τ 变小使占空比减小, 由于 T 不变, 谱

线间隔 $\frac{n}{T}$ 不变, 幅度 $2A \frac{2\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{2\tau}{T}n\pi\right)$ 下降。频谱的包络改变, 包络主瓣变宽。主瓣内包含的谐波数量 ($k = \frac{T}{2\tau}$ 整数个) 也增加。

例 3-3 斜坡周期函数 $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(t-nT)}{T} [u(t-(2n-1)T/2) - u(t-(2n+1)T/2)]$, 其波形如图 3-6 所示, 求其傅里叶级数。

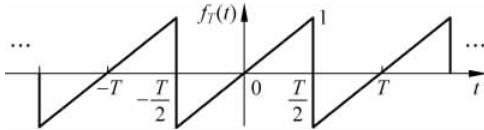


图 3-6 斜波周期信号的波形图

解: 由式(3-15)有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} dt = \frac{1}{T^2} t^2 \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \cos n\omega_0 t dt = \left[\frac{4}{T^2 n \omega_0} t \sin n\omega_0 t + \frac{4 \cos n\omega_0 t}{T^2 (n \omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{4}{T^2 n \omega_0} \left[\frac{T}{2} \sin n\omega_0 \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \sin n\omega_0 \times \left(-\frac{T}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{4}{T^2 (n \omega_0)^2} \left[\cos n\omega_0 \times \left(\frac{T}{2} \right) - \cos n\omega_0 \times \left(-\frac{T}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2t}{T} \sin n\omega_0 t dt = \left[-\frac{4}{T^2 n \omega_0} t \cos n\omega_0 t + \frac{4 \sin n\omega_0 t}{T^2 (n \omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{-4}{T^2 n \omega_0} \left[\frac{T}{2} \cos n\omega_0 \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \cos n\omega_0 \times \left(-\frac{T}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{4}{T^2 (n \omega_0)^2} \left[\sin n\omega_0 \times \left(\frac{T}{2} \right) - \sin n\omega_0 \times \left(-\frac{T}{2} \right) \right] \\ &= \frac{-1}{n\pi} [2 \cos n\pi] + \frac{4}{T^2 (n \omega_0)^2} [2 \sin n\pi] \\ &= \frac{-2 \cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \frac{-2}{n\pi}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{2}{n\pi}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \\ f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(t-nT)}{T} [u(t+nT/2) - u(t-nT/2)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin n\omega_0 t \end{aligned} \tag{3-26}$$

由式(3-26)可见,对斜坡奇函数周期信号展开式中的直流分量为零,余弦分量也为零,只有正弦奇数谐波分量。所以,信号频谱为正弦谐波分量的叠加。如果用正弦信号作参考量,谐波相位频谱为0和180°。

例 3-4 余弦半波周期函数 $f_T(t) = \begin{cases} \cos\omega_0 t, & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0, & \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \end{cases}$, 其波形如图 3-7 所示,

求其傅里叶级数。

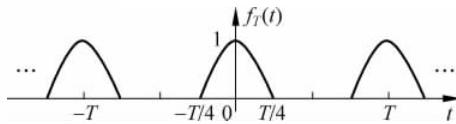


图 3-7 余弦半波周期信号的波形图

解: 由式(3-15)有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\omega_0 t dt = \frac{1}{T\omega_0} \sin\omega_0 t \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{1}{\pi}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} [\cos((n+1)\omega_0 t) + \cos((n-1)\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{\sin(n+1)\omega_0 t}{T(n+1)\omega_0} + \frac{\sin(n-1)\omega_0 t}{T(n-1)\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{2\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\pi} + \frac{2\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{(n-1)\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)} + \frac{2\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{(n-1)} \right] = -(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{4}{\pi(n^2-1)}, \quad n \text{ 为偶数} \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} [\sin((n+1)\omega_0 t) - \sin((n-1)\omega_0 t)] dt \\ &= -\frac{\cos((n\pm 1)\omega_0 t)}{T(n\pm 1)\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = -\frac{\cos(n\pm 1)\frac{\pi}{2}}{(n\pm 1)\pi} + \frac{\cos(n\pm 1)(-\frac{\pi}{2})}{(n\pm 1)\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{4}{\pi(n^2-1)} \cos\omega_0 t, \quad n \text{ 为偶数} \quad (3-27)$$

由式(3-27)可见,对余弦半波函数周期信号的展开式中有直流分量和余弦分量,正弦谐波分量为零。所以,信号频谱为余弦谐波分量的叠加。如果用余弦信号作参考量,谐波相位频谱为0和180°。

例 3-5 正弦半波周期函数 $f_T(t) = \begin{cases} \sin\omega_0 t, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$, 其波形如图 3-8 所示,求其

傅里叶级数。

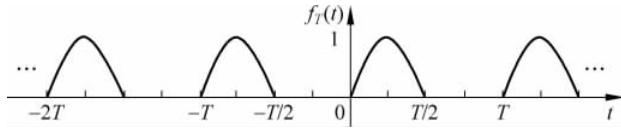


图 3-8 正弦半波周期信号的波形图

解：由式(3-15)有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega_0 t dt = \frac{-1}{T \omega_0} \cos \omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{-1}{2\pi} [\cos \pi - \cos 0] = \frac{1}{\pi}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin 2\omega_0 t dt = \frac{-1}{T 2\omega_0} \cos 2\omega_0 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{-1}{4\pi} [\cos 2\pi - \cos 0] = 0 \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega_0 t \cos n \omega_0 t dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [\sin(n+1)\omega_0 t - \sin(n-1)\omega_0 t] dt \\ &= \frac{-\cos(n+1)\omega_0 t}{T(n+1)\omega_0} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{\cos(n-1)\omega_0 t}{T(n-1)\omega_0} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{\cos 0 - \cos(n+1)\pi}{(n+1)\pi} + \frac{\cos(n-1)\pi - \cos 0}{(n-1)\pi} \\ &= \frac{1 + \cos n\pi}{(n+1)\pi} - \frac{\cos n\pi + 1}{(n-1)\pi} = \frac{-2(1 + \cos n\pi)}{(n^2 - 1)\pi} = \frac{-4}{(n^2 - 1)\pi}, \quad n \neq 1, \text{为偶数} \end{aligned}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega_0 t \sin n \omega_0 t dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [\cos(n-1)\omega_0 t - \cos(n+1)\omega_0 t] dt \\ &= \frac{\sin(n-1)\omega_0 t}{T(n-1)\omega_0} - \frac{\sin(n+1)\omega_0 t}{T(n+1)\omega_0} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{\sin(n-1)\pi - \sin 0}{(n-1)\pi} - \frac{\sin(n+1)\pi - \sin 0}{(n+1)\pi} = 0 \\ f_T(t) &= \frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(n^2 - 1)} \cos n \omega_0 t, \quad n \text{ 为偶数} \end{aligned} \tag{3-28}$$

由式(3-28)可见，对正弦半波函数周期信号的展开式中有直流分量和余弦分量，正弦谐波分量为0，所以，信号频谱为余弦谐波分量的叠加。如果用余弦信号作参考量，谐波相位频谱180°。

例 3-6 偶函数三角斜坡信号 $f_T(t) = \begin{cases} 2\left(t + \frac{T}{2}\right)/T, & 0 > t > -\frac{T}{2} \\ 2\left(-t + \frac{T}{2}\right)/T, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$, 其波形如

图 3-9 所示,求其傅里叶级数。

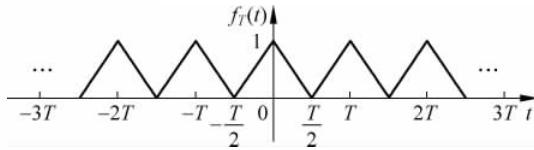


图 3-9 偶三角斜波周期信号的波形图

解: 由式(3-15)有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 2\left(t + \frac{T}{2}\right)/T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2\left(-t + \frac{T}{2}\right)/T dt \right] \\ &= \frac{\left(t + \frac{T}{2}\right)^2}{T^2} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{\left(-t + \frac{T}{2}\right)^2}{T^2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 2\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 t / T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2\left(-t + \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 t / T dt \right] \\ &= \left[\frac{4\left(t + \frac{T}{2}\right) \sin n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{4\cos n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[\frac{4\left(-t + \frac{T}{2}\right) \sin n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} - \frac{4\cos n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos n\pi}{(n\pi)^2} - \frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2} = \frac{4}{(n\pi)^2}, \quad n \text{ 为奇数} \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 2\left(t + \frac{T}{2}\right) \sin n\omega_0 t / T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2\left(-t + \frac{T}{2}\right) \sin n\omega_0 t / T dt \right] \\ &= \left[\frac{-4\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{4\sin n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[\frac{-4\left(-t + \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{4\sin n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

偶函数斜坡函数的傅里叶级数为

$$f_T(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos n\omega_0 t, \quad n \text{ 为奇数} \quad (3-29)$$

由式(3-29)可见,对偶三角斜坡周期信号的展开式中有直流分量和余弦分量,正弦谐波分量为 0,所以信号频谱为余弦谐波分量的叠加。如果用余弦信号作参考量,谐波相位频谱 0° 。

例 3-7 移位半波偶函数斜坡信号为 $f_T(t) = \begin{cases} 2t/T, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -2t/T, & -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$, 其波形如图 3-10 所示, 求其傅里叶级数。

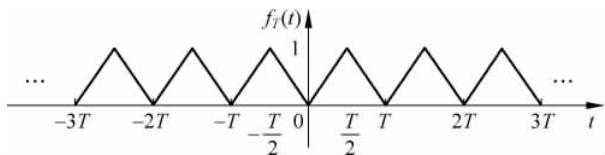


图 3-10 半周移位偶斜波信号的波形图

解: 由式(3-15)有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -2t/T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2t/T dt \right], \\ a_0 &= \frac{-t^2}{T^2} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{t^2}{T^2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -2t \cos n\omega_0 t / T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2t \cos n\omega_0 t / T dt \right] \\ &= \left[\frac{-2t \sin n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} - \frac{2 \cos n\omega_0 t}{(T n\omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[\frac{2t \sin n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{2 \cos n\omega_0 t}{(T n\omega_0)^2} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{1 - \cos n\pi}{2(n\pi)^2} + \frac{\cos n\pi - 1}{2(n\pi)^2}, \quad n \text{ 为奇数} \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 2 \left(t + \frac{T}{2} \right) \sin n\omega_0 t / T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2 \left(-t + \frac{T}{2} \right) \sin n\omega_0 t / T dt \right] \\ &= \left[\frac{-4 \left(t + \frac{T}{2} \right) \cos n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{4 \sin n\omega_0 t}{(T n\omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[\frac{-4 \left(-t + \frac{T}{2} \right) \cos n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{4 \sin n\omega_0 t}{(T n\omega_0)^2} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

半周移位斜坡函数的傅里叶级数为

$$f_T(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos n\omega_0 t, \quad n \text{ 为奇数} \quad (3-30)$$

由式(3-30)可见, 对移位半周偶函数三角斜坡周期信号的展开式中有直流分量和余

弦分量,正弦谐波分量为0,所以信号频谱为余弦谐波分量的叠加。如果用余弦信号作参考量,谐波相位频谱 180° 。

例 3-8 奇谐斜坡函数为 $f_T(t) = \begin{cases} -2\left(t + \frac{T}{2}\right)/T, & 0 > t > -\frac{T}{2} \\ 2t/T, & \frac{T}{2} > t > 0 \end{cases}$, 其波形如图 3-11 所示。求其傅里叶级数。

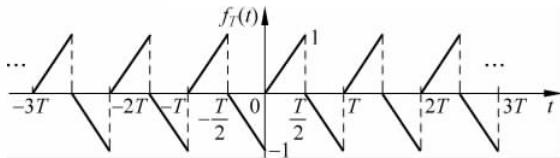


图 3-11 奇谐斜坡信号的波形图

解: 由式(3-15)有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -2\left(t + \frac{T}{2}\right)/T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2t/T dt \right] \\ &= \frac{-\left(t + \frac{T}{2}\right)^2}{T^2} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{t^2}{T^2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = 0 \end{aligned}$$

由式(3-13)有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -2\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 t / T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2t \cos n\omega_0 t / T dt \right] \\ &= \left[\frac{-2\left(t + \frac{T}{2}\right) \sin n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} - \frac{2 \cos n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[\frac{2t \sin n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{2 \cos n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{1 - \cos n\pi}{2(n\pi)^2} + \frac{\cos n\pi - 1}{2(n\pi)^2}, \quad n \text{ 为奇数} \end{aligned}$$

由式(3-14)有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 -2\left(t + \frac{T}{2}\right) \sin n\omega_0 t / T dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2t \sin n\omega_0 t / T dt \right] \\ &= \left[\frac{2\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} - \frac{2 \sin n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[\frac{-2t \cos n\omega_0 t}{T^2 n\omega_0} + \frac{2 \sin n\omega_0 t}{(Tn\omega_0)^2} \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{2n\pi} + \frac{-\cos n\pi}{2n\pi} = \frac{1}{n\pi}, \quad n \text{ 为奇数} \end{aligned}$$

奇谐斜坡函数的傅里叶级数为

$$f_T(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin n\omega_0 t, \quad n \text{ 为奇数} \quad (3-31)$$

由式(3-31)可见,对奇谐周期信号展开式中的直流分量为零,余弦分量和正弦谐波分量不为零,所以信号频谱为余弦谐波分量和正弦谐波分量的叠加。如果用余弦信号作参考量,谐波相位频谱在 $90^\circ \sim 270^\circ$ 之间变化。

奇、偶函数傅里叶展开式的特点是:考察上述5种周期函数信号的傅里叶展开式,对于偶函数的周期信号傅里叶展开式将只有余弦项,如等宽(非等宽)对称脉冲信号、余弦半波信号,这些信号的直流分量也不为零;对于奇函数的周期信号,其傅里叶级数形式将只有正弦项,如斜坡波形信号;对于既不是奇函数,也不是偶函数的周期信号,如奇谐函数,其傅里叶展开式将既有余弦项,也有正弦项,如奇谐函数周期信号,信号的特点是直流分量为零;也可以出现只有余弦项的,如正弦半波信号;也可以出现只有正弦项的,如等宽起始点为 $t=0$ 的脉冲信号,这类周期信号的特点是直流分量不为零。

3.4 连续时间信号的傅里叶变换

在实际应用中,有相当广泛的信号是非周期信号,对非周期信号应该如何进行分解,对非周期信号频谱构成的了解,就是了解连续时间信号的傅里叶变换(continuous-time Fourier transform),是本节需要解决的首要问题。

如图3-12所示的单个矩形脉冲信号,就是一个非周期的实际常用信号,其频谱的构成也将是我们讨论的对象。

从式(3-25)表达的傅里叶级数已经看到,周期性矩形脉冲,当周期无限增大时,频谱的幅度随 T 的增大而下降,谱线间隔 $\omega_0 = 2\pi/T$ 随 T 的增大而减小,但频谱的包络不变。再次考察周期性矩形脉冲的频谱图如图3-13和图3-14所示。

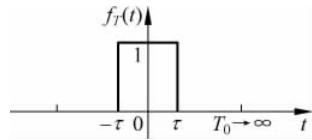


图3-12 单个矩形脉冲信号波形图

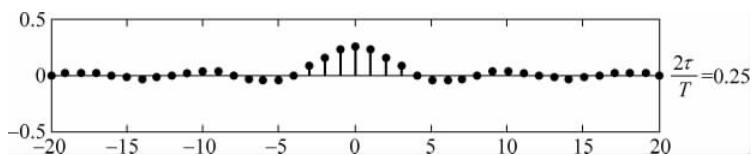


图3-13 T 变大 τ 不变时,矩形脉冲函数的频谱

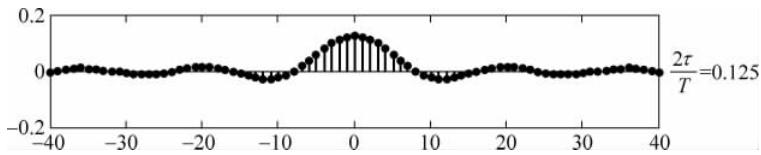


图3-14 T 变大 τ 不变时,矩形脉冲函数的频谱

如图 3-14 所示,如果一个周期信号的周期趋于无穷大,则周期信号将演变成一个非周期信号;反过来,任何非周期信号如果进行周期性拓展,将形成一个周期信号。这样我们把非周期信号看成是周期信号在周期趋于无穷大时的极限,从而考查连续时间傅里叶级数在周期趋于无穷大时的变化,就应该能够得到对非周期信号的频域表示方法。

显然,当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时,如图 3-3 所示的对称周期性矩形脉冲信号将演变成为非周期的单个矩形脉冲信号如图 3-12 所示,如图 3-14 所示的信号频谱也将变成连续的频谱。

对于指数形式的傅里叶级数,由式(3-18)有 $f_T(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$, 当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, 得到 $c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ (可认为 $n=0$ 时的情况), $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ 都将全部趋近于零,而角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\omega$, 将变成微分变量,离散频谱 $n\omega_0 \rightarrow \omega$ 将转变成连续的频谱。

将式(3-18)改写为 $T_0 f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_0 c_n e^{jn\omega_0 t}$, 即 $f_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_0 c_n e^{jn\omega_0 t}$ 。

于是得到 $T_0 c_n = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$, 当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, $Tc_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$, 而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \cdot d\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [Tc_n] e^{jn\omega_0 t} d\omega$$

定义

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (= Tc_n) \quad (3-32)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-33)$$

式(3-32)、式(3-33)称为傅里叶变换对,记为 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 。式(3-32)可记为 $\Im[f(t)] = F(j\omega)$, 或者 $F[f(t)] = F(j\omega)$, 定义为非周期连续时间信号的傅里叶变换,其特点是反映信号 $f(t)$ 的频域特性,包括不同频率成分分量的相位变化等;式(3-33)定义为非周期连续时间信号的傅里叶逆变换。

式(3-33)可记为 $\Im^{(-1)}[F(j\omega)] = f(t)$, 或者 $F^{-1}[F(j\omega)]$ 表明非周期信号可记为 $f(t)$ 可以分解成无数多个频率连续分布、振幅为 $\frac{1}{2\pi} F(j\omega) d\omega$ 的复数指数信号之和。

由于 $F(j\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 c_n = \lim_{T_0 \rightarrow \infty, f_0 \rightarrow 0} \frac{c_n}{f_0}$ 具有频谱随频率分布的物理含义,因而称 $F(j\omega)$ 为频谱密度函数。显然,周期信号的频谱是对应的非周期信号频谱的样本;而非周期信号的频谱是对应的周期信号频谱的包络。

关于傅里叶变换的收敛性,由于傅里叶变换的引出是从周期信号的傅里叶级数表示并讨论周期趋于无穷大时的极限得来的,傅里叶变换的收敛问题就应该和傅里叶级数的

收敛相一致。也有相应的两组条件：

(1) 平方可积条件：若时间信号 $f(t)$ 在区间 $-\infty \rightarrow \infty$ 的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ 存在，则 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 也存在。

(2) 荻利克雷(Dirichlet)条件： $f(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ ；在任何有限区间内， $f(t)$ 只有有限个极值点，且极值有限；在任何有限区间内， $f(t)$ 只有有限个第一类间断点。应该指出的是，这些条件只是傅里叶变换存在的充分条件；这两组条件并不等价。例如， $\frac{\sin t}{t}$ 是平方可积的，但是并不绝对可积。

其次，和周期信号的情况一样，当 $f(t)$ 的傅里叶变换存在时，其傅里叶变换在 $f(t)$ 的连续处收敛于信号本身，在间断点处收敛于左右极限的平均值，在间断点附近会产生 Gibbs(吉布斯) 现象。

3.5 傅里叶变换的性质

傅里叶变换及其逆变换的直接运算都是积分过程，讨论傅里叶变换的性质 (properties of the continuous-time Fourier transform)，是通过了解这些性质揭示信号时域特性与频域特性之间的关系，并掌握和运用这些性质可以简化傅里叶变换及其逆变换的求取，简化积分过程。傅里叶变换的性质包括线性、时移性、共轭对称性(包括奇偶虚实性)、时域微分积分特性、频域微分积分特性、时域和频域的尺度变换特性、对偶性、频域时域能量等价性——Parseval 定理、时域频域卷积特性——卷积定理。

1. 线性(linearity)

若傅里叶变换对 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$ 成立，则

$$af(t) + by(t) \leftrightarrow aF(j\omega) + bY(j\omega) \quad (3-34)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } Z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [af(t) + by(t)] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} af(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} by(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = aF(j\omega) + bY(j\omega) \end{aligned}$$

2. 时移和频移特性(time and frequency shifting)

若傅里叶变换对 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 成立，则

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (3-35)$$

$$f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F(j\omega \mp j\omega_0) \quad (3-36)$$

式(3-35)表达傅里叶变换的时移特性，式(3-36)表达傅里叶变换的频移特性。

$$\text{证明: } \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

这表明信号的时移只影响它的相频特性，其相频特性会增加一个线性相移。

$$\text{证明: } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\pm j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt = F(j\omega \mp j\omega_0)$$

这表明信号的频移将影响它的频谱特性,其频谱特性会增加一个线性频移。

3. 共轭对称性(conjugate and symmetry)

若傅里叶变换对 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 成立,则

$$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-j\omega) \quad (3-37)$$

证明: 由于 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, 则其共轭函数为 $F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{j\omega t} dt$, 将共轭函数中的 $j\omega$ 代换为 $-j\omega$, 可以得到 $F^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt$, 这就是 $f(t)$ 的共轭函数 $f^*(t)$ 的傅里叶变换式,也就是式(3-37)成立。

奇偶虚实性: 若 $f(t)$ 为实函数,如果虚部为零,则 $f(t) = f^*(t)$, 由于 $f^*(t) \leftrightarrow F^*(-j\omega)$ 则两者的傅里叶变换关系为 $F(j\omega) = F^*(-j\omega)$ 。原函数与共轭函数的频域变换式也是实函数,变换式的实部为偶函数,虚部为奇函数,这一特性称为奇偶性。

证明: 由于 $F(j\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)] + j\operatorname{Im}[F(j\omega)]$, 则 $f(t)$ 的傅里叶变换式可以分解为实部和虚部之和,同样 $f^*(t)$ 的傅里叶变换式也可以分解为实部和虚部之和,则 $F^*(-j\omega) = \operatorname{Re}[F^*(-j\omega)] + j\operatorname{Im}[F^*(-j\omega)]$ 。

$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi}$ ($\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega)]}$), $\cos \varphi$ 为偶函数, $\sin \varphi$ 为奇函数,由于 $|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|$, 且为正值,则绝对值为偶函数,变换式的实部: $\operatorname{Re}[F(j\omega)] = |F(j\omega)| \cos \varphi$ 为偶函数, $\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \operatorname{Re}[F(-j\omega)]$, 则变换式的实部为偶函数,相位角是奇函数。

$\operatorname{Im}[F(j\omega)] = |F(j\omega)| \sin \varphi$ 为奇函数,所以 $\operatorname{Im}[F(j\omega)] = -\operatorname{Im}[F(-j\omega)]$, 则傅里叶变换式的虚部为奇函数。

结论: $\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \operatorname{Re}[F(-j\omega)]$ 及 $\operatorname{Re}[F^*(j\omega)] = \operatorname{Re}[F^*(-j\omega)]$, 则傅里叶变换式的实部是偶函数。

$\operatorname{Im}[F(j\omega)] = -\operatorname{Im}[F(-j\omega)]$ 及 $\operatorname{Im}[F^*(j\omega)] = -\operatorname{Im}[F^*(-j\omega)]$, 则傅里叶变换式的虚部是奇函数。

若 $f(t) = f(-t)$, 信号为实偶函数信号,如果虚部为零,则 $f(t) = f^*(t)$, 则 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, 而 $\int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau = F(-j\omega)$, 表明实偶信号的傅里叶变换式是偶函数。

又因为傅里叶变换的共轭函数为 $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$, 所以 $F(j\omega) = F^*(j\omega)$, 所以傅里叶变换式中只有实部,也就是实函数。

若 $f(t) = -f(-t)$, 信号为奇实函数信号,如果虚部为零,则 $f(t) = f^*(t)$, 则 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, 而 $\int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau = -F(-j\omega)$, 表明实数奇函数信号的傅里叶变换式是奇函数。

又因为傅里叶变换的共轭函数为 $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$, $F(j\omega) = -F^*(-j\omega)$, 所以傅里叶变换式中只有虚部, 也就是虚函数。

若 $f(t)$ 可以分解为实偶函数部 $f_e(t)$ 和实奇函数部 $f_o(t)$, 则函数的傅里叶变换式为

$$F(j\omega) = F_e(j\omega) + jF_o(j\omega)$$

其中, $F_e(j\omega) \leftrightarrow f_e(t)$, 为变换式的实部函数, 则 $F_e(j\omega) = \text{Re}[F(j\omega)]$; 而 $jF_o(j\omega) \leftrightarrow f_o(t)$, 为变换式的虚部函数, 则 $F_o(j\omega) = \text{Im}[F(j\omega)]$ 。

结论: 傅里叶变换的奇偶虚实性可以描述为, 若时域函数 $f(t)$ 为实偶函数, 则变换式为实函数, 即只有实部 $F_e(j\omega)$; 若时域函数 $f(t)$ 为实奇函数, 则变换式为虚函数, 即只有虚部 $F_o(j\omega)$; 若时域函数 $f(t)$ 为实函数, 则可以进行偶、奇函数分解, 则变换式为实函数, 即可以表达为 $F_e(j\omega) + jF_o(j\omega)$; 若变换式的实部为偶函数, 变换式的奇部为奇函数, 变换式的相位角为奇函数。

共轭对称性的应用可以通过例 3-9 进一步理解。

例 3-9 求解如图 3-15 所示的单位阶跃信号 $u(t)$ 的傅里叶变换。

解: 如图 3-15 所示的单位阶跃信号 $u(t)$ 可以分解为实偶函数部 $u_e(t) = 1/2$ (直流分量信号) 如图 3-16 所示; 实奇函数部 $u_o(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$, 如图 3-17 所示。



图 3-15 单位阶跃信号
波形图

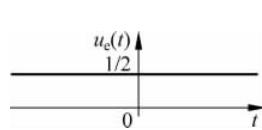


图 3-16 分解的实偶函数
波形图

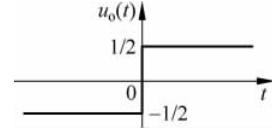


图 3-17 分解的实奇函数的
波形图

实偶函数部 $u_e(t) = 1/2$ 的傅里叶变换为

$$F_e(j\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

$$\left. \frac{e^{-j\omega t}}{-2j\omega} \right|_{-\infty}^{\infty} = \left. \frac{\cos\omega t - j\sin\omega t}{-2j\omega} \right|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin\omega k}{\omega} = \pi \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \frac{\sin\omega k}{k\omega} = \pi\delta(\omega) \quad (\text{见 } 3.7 \text{ 节说明})$$

$$u_e(t) = 1/2 \leftrightarrow \pi \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \frac{\sin\omega k}{k\omega} = \pi\delta(\omega) \quad (3-38)$$

将符号函数可以表示为 $\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$, 实奇函数部 $u_o(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F_o(j\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[- \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\left. \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right|_0^{-\infty} - \left. \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \right|_0^{\infty} \right] = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{另外,由于 } F_o(j\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[- \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_0^{-\infty} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \right] \\
&= \frac{\cos \omega t - j \sin \omega t}{-2j\omega} \Big|_0^{-\infty} + \frac{\cos \omega t - j \sin \omega t}{-2j\omega} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{j\omega} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \omega k}{j\omega} = \frac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$

比较两种方法的结果,则可以认为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \omega k}{j\omega}$ 趋近于 0。

所以

$$u_o(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \quad (3-39)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \quad (3-40)$$

4. 时域微分与积分性质 (time domain differentiation and integration)

微分性质: 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$, 这就是傅里叶变换的微分性质。

证明: 由于 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, 将等式对 t 微分可得

$$\begin{aligned}
\frac{d[f(t)]}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega, \text{ 则} \\
&\frac{d[f(t)]}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)
\end{aligned} \quad (3-41)$$

积分性质: 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$, 这就是傅里叶变换的积分性质。

$$\begin{aligned}
\text{证明: 由于 } \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega \tau} d\omega \right] dt, \text{ 等式右边先对 } t \text{ 进行积分可得} \\
\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[\int_{-\infty}^t 1 \cdot u(\tau) \cdot e^{j\omega \tau} d\tau \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(j\omega) \frac{1}{j\omega} + \pi F(j\omega) \cdot \delta(\omega) \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \cdot \delta(\omega) \right] d\omega
\end{aligned}$$

则

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega) \quad (3-42)$$

证明过程中,插入函数 $\int_{-\infty}^t 1 \cdot u(\tau) \cdot e^{j\omega \tau} d\tau$, 是考虑信号 $F(j\omega) \cdot [1 \cdot u(\tau)]$ 在时域中的起

始时间一般都在 $t = 0$ 处,这也跟实际的情况相吻合。如时域中 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = u(t)$, 由于 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 利用傅里叶变换的积分性质 $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$; 反之, 时域中 $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$, 则利用傅里叶变换的微分性质 $\delta(t) \leftrightarrow j\omega \cdot \frac{1}{j\omega} + j\omega\pi\delta(\omega) = 1$ 。这些信号, 时域中的起始时间一般都在 $t=0$ 处。若 $f(t)$ 的起始时间不在 $t=0$ 处, 则积分性质还需加入时移性质综合修正。

其次, 利用微分和积分要注意的是单位阶跃信号 $u(t)$, 若令 $f_1(t) = u(t)$, 或令 $u(t) = f_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}u(-t)$, 并直接对其求导数, 结论都是 $f'_1(t) = \delta(t)$, $f'_2(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - (-1)\frac{1}{2}\delta(-t) = \delta(t)$ 。 $\Im[u(t)] = \frac{1}{j\omega}$, 这一结论与前述结果不同, 这是由于直流信号的导数为 0, 冲激量 $\pi \cdot \delta(\omega)$ 就不再出现。因此, 存在直流分量的情况下, 使用微分性质时要加以注意。

5. 时域和频域的尺度变换 (time domain and frequency domain scaling)

时域尺度变换性质: 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$, 若 $a = -1$, 则可以有 $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$, $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ 这一变换关系, 就是傅里叶变换的时域尺度变换性质。

证明: 由于 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, $f(at) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega at} d\omega$ (若 $a > 0$), 及 $f(at) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} F(j\omega) e^{j\omega at} d\omega$ (若 $a < 0$), 令右边积分 $\omega = \lambda/a$, $d\omega = d\lambda/a$ 将结果代入 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega at} d\omega$ (若 $a > 0$), 及 $\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} F(j\omega) e^{j\omega at} d\omega$ (若 $a < 0$) 将得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} F\left(\frac{j\lambda}{a}\right) e^{j\lambda t} d\lambda \quad (\text{若 } a > 0)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{a} F\left(\frac{j\lambda}{a}\right) e^{j\lambda t} d\lambda \quad (\text{若 } a < 0)$$

所以

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-43)$$

尺度变换特性表明, 信号如果在时域拉伸 a 倍, 也可以理解为时域中, 信号的周期拉伸 a 倍, 则其带宽相应压缩 a 倍, 反之亦然。这就从理论上证明了时域与频域的相反关系, 这也证明了信号的脉宽与带宽积等于常数的结论。时域中的压缩(拉伸)对应频域中的拉伸(压缩)。

6. 对偶性 (duality)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则有 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ 称为傅里叶变换的对偶性。对偶关系是指频域与时域变换对之间的对偶。对偶关系中, 时域函数中的 $f(t)$ 是将 t 换成 $-\omega$, 频域函

数的 $F(j\omega)$ 是仅仅将 ω 换成 t , 注意两者是有区别的。

证明: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, 将 t 与 ω 互换, 则 $2\pi f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{j\omega t} dt$, 将 ω 换成 $-\omega$, $2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$ 。所以

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3-44)$$

对偶性也可以由式 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ 得到证明

$$F(jt) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

所以 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ 。

由对偶性可以方便地将时域的某些特性对偶到频域, 如 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 有对偶关系 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$, 利用傅里叶变换的时移特性有 $X[j(t-t_0)] \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) e^{-j\omega t_0}$, 此时时域函数为 $X[j(t-t_0)]$, 频域函数为 $2\pi x(-\omega) e^{-j\omega t_0}$, 将 t_0 换成 ω_0 , 变换中 $\omega_0 = \pi/t_0$, 再次利用对偶性有 $2\pi x(-t) e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi X[j(-\omega-\omega_0)]$, 利用尺度变换中的结论 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$, 于是有

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)] \quad (3-45)$$

式(3-45)与傅里叶变换的频移特性的结论是相一致的。

$$f_1(t) = u(t+\tau) - u(t-\tau) \Leftrightarrow 2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$$

$$2\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t) \Leftrightarrow F(j\omega) = 2\pi [\tau u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]$$

对偶性的应用可以通过以下两组对偶关系深入理解。如图 3-18 所示的时域矩形脉冲(门函数 $G_{2\tau}(t)$)信号的频谱图是抽样函数 $2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$, 其频谱的波形如图 3-19 所示。而频域频谱图是如图 3-21 所示的矩形频谱图 $G_{2\omega_0}(\omega)$, 其时域函数是抽样函数 $2\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t)$, 波形如图 3-20 所示, 这是两对典型的对偶变换关系。变换过程为

$$F_1(j\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega\tau} - e^{j\omega\tau}}{-j\omega} = \frac{-2j\sin\omega\tau}{-j\omega} = 2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} 2\pi e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{jt} = \frac{2j\sin\omega_0 t}{jt} = 2\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t)$$

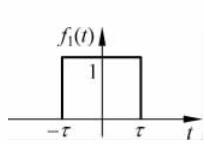


图 3-18 矩形脉冲函数信号的波形

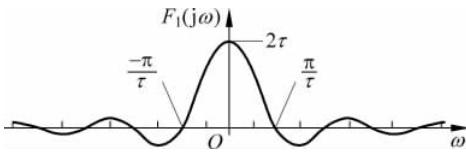


图 3-19 矩形脉冲函数信号的频谱图

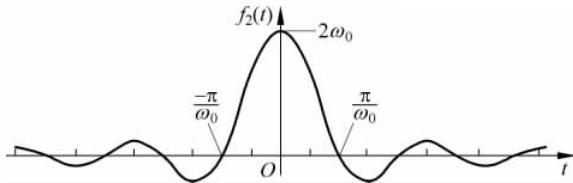


图 3-20 时域抽样函数信号的波形图

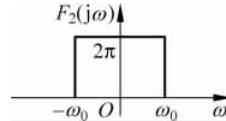


图 3-21 频域矩形脉冲信号的频谱图

关于抽样信号 $2E\tau \cdot \text{Sa}(\omega\tau)$ 的傅里叶反变换计算过程如下。

由于幅值为 E 的门函数 $F(j\omega) = 2E\tau \times \frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} = 2E\tau \cdot \text{Sa}(\omega\tau)$, 所以有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2E\tau \cdot \frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E\tau \cdot \frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} (\cos\omega t + j\sin\omega t) d\omega$$

由于 $\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}$ 是偶函数, $\sin\omega t$ 是奇函数, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} j2E\tau \cdot \frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} \sin\omega t d\omega = 0$$

则

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E\tau \cdot \frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} \cos\omega t d\omega = \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega(\tau-t)}{\omega} d\omega$$

当 $|t| = \tau$, $\tau \pm t$ 中, 必定有一项为零, 上述积分式中, 不为零的一项的积分为 $E \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega 2\tau}{\omega} d\omega$, 令 $x = 2\omega\tau$, $dx = 2\tau d\omega$, 即 $d\omega = \frac{1}{2\tau} dx$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega 2\tau}{\omega} d\omega \\ &= \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega 2\tau}{2\omega\tau} dx = \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{E}{2\pi} \cdot \pi = \frac{E}{2} \end{aligned}$$

当 $|t| < \tau$, 则 $t + \tau > 0$, 而 $\tau - t > 0$, 令 $\omega(t + \tau) = x$, $\omega(\tau - t) = y$, 则 $dx = (t + \tau) d\omega$, $dy = (\tau - t) d\omega$, 或 $\frac{dx}{(t + \tau)} = d\omega$, 及 $\frac{dy}{(\tau - t)} = d\omega$, 则可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega(\tau-t)}{\omega} d\omega = \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy \\ &= \frac{E}{2\pi} (\pi + \pi) = E \end{aligned}$$

当 $|t| > \tau$, 则 $t + \tau > 0$, $\tau - t < 0$, 或者 $t + \tau < 0$, $\tau - t > 0$, 则可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega(\tau-t)}{\omega} d\omega = \pm \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \mp \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy \\ &= \frac{E}{2\pi} (\pm \pi \mp \pi) = 0 \end{aligned}$$

结论: 若傅里叶变换函数 $F(\omega) = 2E\tau \cdot \text{Sa}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)$, 则其原函数为 $f(t) =$

$$\begin{cases} E/2, & |t| = \tau \\ E, & |t| < \tau, \text{ 是一个矩形脉冲信号。} \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

同理, 若 $f(t) = 2E\omega_0 \cdot \text{Sa}(\omega_0 t)$, 则其傅里叶变换式为 $F(\omega) = \begin{cases} \pi E, & |\omega| = \omega_0 \\ 2\pi E, & |\omega| < \omega_0, \text{ 是} \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$

一个矩形脉冲频谱。

分析过程中的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 称为正弦积分, 等于 $2 \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$ 记为 $Siy = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right)$ 。当 $x \rightarrow \infty$ 时, 将趋近于 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ 。

比较时域矩形脉冲信号 $F_1(j\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = 2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$ 和频域矩形频谱函数信号 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_0}{\pi} \text{Sa}(\omega_0 t)$ 的变换过程, 以及 $2E\tau \cdot \text{Sa}(\omega\tau)$ 的逆变换计算过程。显然, 采用矩形脉冲进行计算是比较简单的。因此, 傅里叶变换和逆变换的计算要学会逆向思维, 若时域函数比较复杂, 可以用频域相近函数求逆变换得到的结果, 与之比较获得变换式, 反之亦然。

7. 频域微分和积分特性 (frequency domain differentiation and integration)

微分特性: 由于 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, 所以 $\frac{d}{d\omega} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtf(t) e^{-j\omega t} dt$, 则可以得到

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(j\omega) \quad (3-46)$$

式(3-46)表达了傅里叶变换的频域微分特性。

频域微分特性也可由对偶性从时域微分特性得出。

由于 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 对偶性有 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$, $\frac{d}{dt} F(jt) \leftrightarrow 2\pi j\omega f(-\omega)$, 再次利用对偶关系有 $2\pi jtf(-t) \leftrightarrow 2\pi \frac{d}{d(-\omega)} F(-j\omega)$, 由于 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$, 于是 $-jtf(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$ 。

积分特性: 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 利用对偶特性有 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$, 利用时域傅里叶变换的积分性质有 $\int_{-\infty}^t F(j\tau) d\tau \leftrightarrow 2\pi \left[\frac{f(-\omega)}{j\omega} + \pi f(0)\delta(\omega) \right]$, 利用对偶关系有 $2\pi \left[\frac{f(-t)}{jt} + \pi f(0)\delta(t) \right] \leftrightarrow 2\pi \int_{-\infty}^{-\omega} F(j\tau) d\tau$, 由于 $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$, 所以可以得到

$$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\tau) d\tau \quad (3-47)$$

式(3-47)表达了傅里叶变换的频域积分特性, 式中的 $\tau \leftrightarrow \omega$ 。

8. 帕萨伐尔 (Parseval) 定理

若函数 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 以及 $g^*(t) \leftrightarrow G^*(\omega)$ 的变换关系存在, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)f^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\omega})f^*(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3-48)$$

若 $f(t)$ 及其变换函数 $F(j\omega)$, 都是平方可积函数, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-49)$$

证明: 由于 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t) dt$, 信号函数模的平方等于共轭函数与其自身的乘积, 即信号的实部平方加上虚部的平方。用逆变换式表示共轭函数, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \text{(调换积分顺序)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \text{(中括号内的积分为 } F(j\omega)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) F(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

式(3-47)称为帕萨伐尔定理, 式(3-48)称为普朗歇尔定理, 由 Michel Plancherel 在 1910 年证明, 因为证明过程是建立在帕萨伐尔定理的基础上, 所以也将式(3-49)称为帕萨伐尔定理。这两个定理表明, 若时域函数和傅里叶变换域函数都是平方可积的, 信号的能量既可以在时域求得, 也可以在频域求得。由于 $|F(j\omega)|^2$ 表示了信号能量在频域的分布, 因而称其为能量谱密度函数。

3.6 卷积性质

由于卷积特性(the convolution property)的存在, 使对 LTI 系统在频域进行分析成为可能。本质上, 卷积特性成立正是因为复指数信号是 LTI 系统的特征函数。

卷积分的性质可以描述为: 若系统输入信号的傅里叶变换关系为 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 系统函数的傅里叶变换关系为 $h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$, 则系统的响应函数的傅里叶变换关系为 $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$, 则三者的变换关系为

$$y(t) = f(t) * h(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) \quad (3-50)$$

式(3-50)是时域卷积定理数学表达式, 表达了时域卷积与傅里叶变换的数学关系, 即时域的卷积分计算, 可以用计算频域变换式的乘积进行, 并用频域乘积结果求出逆变换得到。这种计算过程可以拓宽时域卷积积分的计算方法。使时域中对 LTI 系统进行分析可以转换到频域进行分析, 使其成为可能。

$$\text{证明: 由于 } F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt.$$

时域中有

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)h(t-\tau) d\tau, \quad -\infty \rightarrow t \rightarrow \infty, \text{且上限 } t \rightarrow \infty$$

频域中有

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

交换积分顺序，并利用傅里叶变换的时移特性为

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) [H(j\omega) e^{-j\omega\tau}] d\tau, \text{上限 } t \rightarrow \infty$$

$$\text{积分式中 } H(j\omega) \text{ 为常量 } Y(j\omega) = H(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(j\omega) F(j\omega)。$$

$$\text{所以 } Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)。$$

同理，频域的卷积，可以转换成时域的乘积运算为

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F(j\omega) * H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) H(j\omega - \lambda) d\lambda \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega - \lambda) e^{j\omega t} d\omega \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega - \lambda) e^{j\omega t} d\omega \right] d\lambda = h(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{2\pi} F(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda = 2\pi h(t) f(t) \end{aligned}$$

也就是

$$2\pi f(t) h(t) \leftrightarrow F(j\omega) * H(j\omega) \quad (3-51)$$

式(3-51)为频域卷积定理的数学表达式，表达了傅里叶变换的频域卷积与时域乘积的数学关系，即频域的卷积计算，可以用计算时域的乘积进行，并用时域乘积结果求出逆变换得到。

归纳傅里叶的变换性质可以用表 3-1 表示。

表 3-1 连续傅里叶变换性质及其对偶关系表

连续傅里叶变换对			相对偶的连续傅里叶变换对		
名称	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	名称	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$
线性	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$			
尺度比例变换	$f(at), a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$			
对偶性	$f(t)$	$g(\omega)$		$g(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\omega) e^{-j\omega t_0}$	频移	$f(t) e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
时域微分性质	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega F(\omega)$	频域微分性质	$-jtf(t)$	$\frac{d}{d\omega} F(\omega)$
时域积分性质	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$	频域积分性质	$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0) \delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\sigma) d\sigma$
时域卷积性质	$f(t) * h(t)$	$F(\omega) H(\omega)$	频域卷积性质	$f(t) p(t)$	$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$

续表

连续傅里叶变换对				相对偶的连续傅里叶变换对	
名称	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	名称	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$
对称性	$f(-t)$ $f^*(t)$ $f^*(-t)$	$F(-\omega)$ $F^*(-\omega)$ $F^*(\omega)$	奇偶虚实性质	$f(t)$ 是实函数 $f_o(t) = \text{Od}\{f(t)\}$ $f_e(t) = \text{Ev}\{f(t)\}$	$\text{jIm}\{F(\omega)\}$ $\text{Re}\{F(\omega)\}$
希尔伯特变换	$f(t) = f(t)u(t)$	$F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ $R(\omega) = I(\omega) * \frac{1}{\pi\omega}$			
时域抽样	$f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$	频域抽样	$\frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(t - n \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$	$F(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$
帕萨伐尔公式	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$				

3.7 常用函数信号的傅里叶变换

1. 单边指数信号

单边指数信号的时域表达式为 $f(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, 信号的波形如图 3-22 所示。

$$\text{单边指数信号的傅里叶变换式 } F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}.$$

傅里叶变换式的幅频特性为 $|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$, 幅频特性的波形图如图 3-23 所

示。相频特性表达式为 $\angle F(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a}$, 相频特性的波形图如图 3-24 所示。

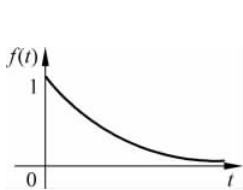


图 3-22 单边指数信号波形图

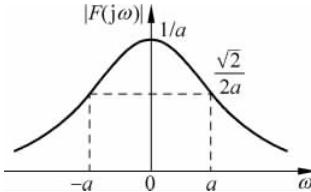


图 3-23 指数信号的幅频特性图

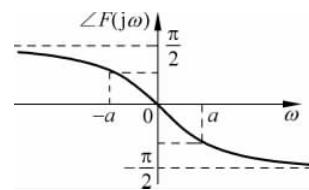


图 3-24 指数信号的相频特性图

单边指数信号的变换关系为 $f(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$ 。

2. 双边指数信号

双边指数信号的时域表达式为 $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, 信号的波形如图 3-25 所示。双边

指数信号的傅里叶变换式 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 。

双边指数信号的变换关系为 $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 。

傅里叶变换式的幅频特性为 $|F(j\omega)| = F(j\omega)$, 幅频特性的波形图如图 3-26 所示。相频特性表达式为 $\angle F(j\omega) = 0$ 。

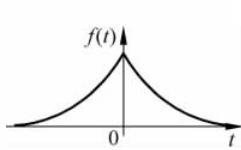


图 3-25 双边指数信号波形图

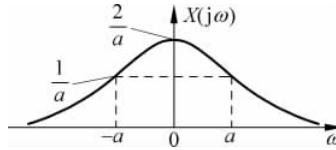


图 3-26 双边指数信号频谱图

3. 单位冲激信号与直流信号

单位冲激信号的时域表达式为 $f(t) = \delta(t)$, $t=0$, 信号的波形如图 3-27 所示。单位冲激信号的傅里叶变换式为 $F(j\omega) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$ 。

傅里叶变换式的幅频特性为 $|F(j\omega)| = 1$, 幅频特性的波形图如图 3-28 所示。其频带宽度为 $\pm\infty$, 角频特性表达式为 $\angle F(j\omega) = 0$ 。利用傅里叶变换的微分性质, $f(t) = d[\delta(t)]/dt = \delta'(t)$ (冲激偶函数)。 $\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$ 。同理, $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$ 。

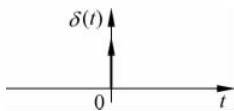


图 3-27 单位冲激信号波形图

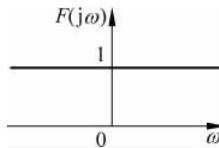


图 3-28 单位冲激信号频谱图

利用傅里叶变换的对偶性质, 可以得到如图 3-29 所示直流信号(对于直流信号, $F(jt)=1=F(-t)=F(t)$)的傅里叶变换为单位冲激频谱(由于 $\delta(-\omega)=\delta(\omega)$), 如图 3-30 所示。所以, 存在 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, $E \leftrightarrow 2\pi E\delta(\omega)$ 的变换关系。

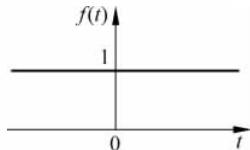


图 3-29 直流信号波形图

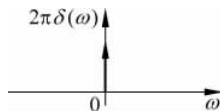


图 3-30 直流信号频谱图

4. 符号函数

利用共轭对称性质举例得到的结论, $u_o(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$ 可以得到符号函数的傅里叶变换式。

叶变换关系为 $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$ 。

5. 单位阶跃函数

利用共轭对称性质举例得到的结论,单位阶跃信号的傅里叶变换关系为

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

6. 门函数信号和抽样信号

利用傅里叶变换对偶性质举例得到的结论,如图 3-31 所示的门函数的傅里叶变换关系为 $f(t) = [u(t+\tau) - u(t-\tau)] \leftrightarrow 2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$, 时间函数脉冲宽度与频谱图变化关系如图 3-32 所示。同理,用傅里叶变换举例得到的结论,对于抽样函数 $2\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t)$, 其傅里叶变换关系为(理想低通滤波器)

$$f(t) = 2\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t) \leftrightarrow F(j\omega) = [u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]$$

$$f_1(t) = u(t+\tau) - u(t-\tau) \leftrightarrow 2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$$

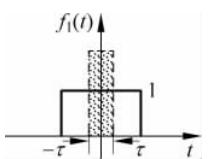


图 3-31 矩形脉冲函数信号脉宽改变的波形

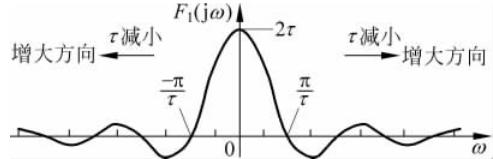


图 3-32 矩形脉冲函数信号的频谱图

如图 3-31 和图 3-32 所示,信号在时域和频域之间也有一种相反的关系。即信号在时域脉冲越窄, τ 越小, 则其频谱主瓣越宽, π/τ 越大, 反之亦然。

对图 3-31 的脉冲信号可以想到,如果 $\omega = \pi/\tau \rightarrow \infty$, 则 $\tau \rightarrow 0$, $f(t)$ 将趋于一个冲激; 反之, $\omega = \pi/\tau \rightarrow 0$, 则 $\tau \rightarrow \infty$, $f(t)$ 将趋于一个幅值为 1 的直流信号, $2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$ 将趋于一个冲激 $2\pi\delta(\omega)$ 频谱。函数 $2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$ 可以改写为 $2\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \frac{\sin \omega \tau}{\omega} = 2\pi\delta(\omega)$, 所以可以有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega \tau}{\omega} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega \tau}{\tau} = \delta(\omega), \text{ 其中的 } \tau \rightarrow k, \omega \rightarrow t \text{ 也是成立的关系。}$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$, 信号 $f(t) = 2\omega_0 A \text{Sa}(\omega_0 t)$ 具有的能量, 在时域中是难以直接计算,但在频域中很容易可以算的结果为 $8\pi^2 \omega_0 A^2$ 。反之,在频域中也很难计算出 $2\tau A \text{Sa}(\omega\tau)$ 具有的能量,但在时域中也是很容易可以算的结果为 $2\tau A^2$ 。注意,计算时域函数 $|f(t)|^2 = A^2 [u(t+\tau) - u(t-\tau)]$ 时,其中 $u(t+\tau) - u(t-\tau)$ 仅仅是确定时间函数的定义域。同理, $|F(j\omega)|^2 = 4\pi^2 A^2 [u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]$, 其中 $u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$ 也仅仅是确定频域函数的定义域而已,不必进行平方运算。

* 7. 升余弦信号

升余弦信号的脉冲宽度为 τ , 加上余弦信号, 信号的波形如图 3-33 所示, 信号的表达式为

$$f(t) = E \left[1 + \cos \frac{\pi t}{\tau} \right] [u(t + \tau) - u(t - \tau)]$$

$$F(j\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} E \left[1 + \cos \frac{\pi t}{\tau} \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} E \left[e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} (e^{j\frac{\pi t}{\tau}} + e^{-j\frac{\pi t}{\tau}}) e^{-j\omega t} \right] dt, \text{令 } \pi/\tau = \omega_0, \text{得}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} E \left[e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} \right] dt$$

$$= E \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-j(\omega-\omega_0)t}}{-j\omega+j\omega_0} + \frac{e^{-j(\omega+\omega_0)t}}{-j\omega+j\omega_0} \right) \right]_{-\tau}^{\tau}$$

$$= 2\tau E \operatorname{Sa}(\omega\tau) + E \left[\frac{\sin(\omega\tau - \pi)}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega\tau + \pi)}{\omega + \omega_0} \right] = \frac{2\tau E \operatorname{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2}$$

式中, $\sin(\omega\tau - \pi) = -\sin\omega\tau$, $\sin(\omega\tau + \pi) = -\sin\omega\tau$ 。

升余弦的频谱图如图 3-34 所示, 能量谱集中在 $|\omega| = \pi/\tau$ 之间。

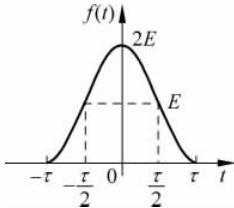


图 3-33 升余弦信号的波形图

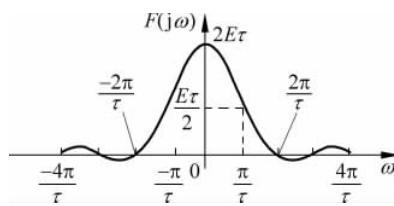


图 3-34 升余弦信号的频谱图

* 8. 钟形信号

钟形信号的波形如图 3-35 所示, 信号的表达式为

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\left|\frac{t}{\tau}\right|^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\left|\frac{t}{\tau}\right|^2} (\cos\omega t - j\sin\omega t) dt$$

后一项由于 $\sin\omega t$ 是奇函数, 在 $-\infty \rightarrow \infty$ 的积分值为 0。 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\left|\frac{t}{\tau}\right|^2} \cos\omega t dt$, 这称为余弦的积分, 其结论为 $\sqrt{\pi} E \tau e^{-\left|\frac{\omega\tau}{2}\right|^2}$, 所以钟形脉冲信号的傅里叶变换关系为 $E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \leftrightarrow \sqrt{\pi} E \tau e^{-\left|\frac{\omega\tau}{2}\right|^2}$, 信号的频谱图如图 3-36 所示。频谱图与时域信号的波形图显示, 都是呈现钟形形状, 故称为钟形信号。

关于余弦积分的计算有

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \text{令 } \alpha = 1/\tau, \text{则}$$

$$f(t) = E e^{-(at)^2}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-(\alpha t)^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-(\alpha t)^2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

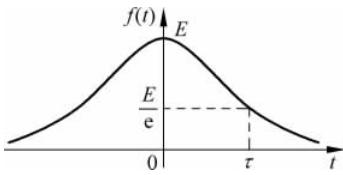


图 3-35 钟形信号的波形图

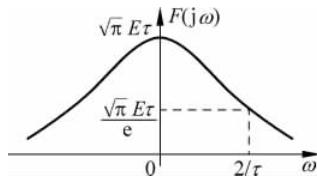


图 3-36 钟形信号的频谱图

由于 $f(t) = E e^{-(\frac{t}{\tau})^2}$ 是偶函数, $\sin \omega t$ 是奇函数, 所以 $-\int_{-\infty}^{\infty} E e^{-(\alpha t)^2} j \sin \omega t dt = 0$ 。则

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-(\alpha t)^2} \cos \omega t dt = 2E \int_0^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} \cos \omega t dt$$

设 $I(\alpha, \omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} \cos \omega t dt$, 则

$$F(\omega) = 2E \cdot I$$

将 I 对 ω 求偏导, 可以得到 $\frac{\partial I(\alpha, \omega)}{\partial \omega} = \int_0^{\infty} (-t) e^{-(\alpha t)^2} \sin \omega t dt$, 则

$$\int_0^{\infty} (-t) e^{-(\alpha t)^2} \sin \omega t dt = \frac{1}{2\alpha^2} e^{-(\alpha t)^2} \sin \omega t \Big|_0^{\infty} - \frac{\omega}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} \cos \omega t dt = 0 - \frac{\omega}{2\alpha^2} I(\alpha, \omega)$$

$$\frac{\partial I(\alpha, \omega)}{\partial \omega} = -\frac{\omega}{2\alpha^2} I(\alpha, \omega)$$

故有 $\frac{dI}{I} = -\frac{\omega}{2\alpha^2} d\omega$, $\ln I = -\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + C$

$$I = C_1 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$$

其中 C_1 为待定常数, 应由等式 $-\frac{\omega}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} \cos \omega t dt = -\frac{\omega}{2\alpha^2} I(\alpha, \omega)$, $I(\alpha, 0) = C_1 e^{-\frac{0^2}{4\alpha^2}} = C_1$ 确定。即 $\omega = 0$ 时,

$$C_1 = I(\alpha, 0) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} \cos 0 t dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} \cdot 1 \cdot dt$$

令 $\alpha t = x$, $dx = \alpha dt$, $\frac{dx}{\alpha} = dt$, $\int_0^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\pi}$, $C_1 = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\pi}$, $F(\omega) =$

$$2E \cdot I = \frac{E}{\alpha} \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$$

关于 $\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ 的计算, 令 $\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$ (进行坐标变换) =

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \Big|_0^{\infty} \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$

此过程,可以看到傅里叶变换的计算是比较复杂的,尤其是对于不能用初等函数表达的信号,变换过程的计算需有较好的数学基础。

* 9. 三角信号

三角信号的波形如图 3-37 所示。其数学表达式为

$$\begin{aligned} f(t) &= t[u(t) - u(t-1)] + (2-t)[u(t-1) - u(t-2)] \\ &= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

所以 $\frac{d[f(t)]}{dt} = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) + t\delta(t) - 2(t-1)\delta(t-1) + (t-2)\delta(t-2) =$

$u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$, $\frac{d^2[f(t)]}{dt^2} = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$, 利用傅里叶变换的微分性质时移性质可以得到

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2} \cdot F\left[\frac{d^2[f(t)]}{dt^2}\right] = \frac{1}{-\omega^2} \cdot F[\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)] \\ &= \frac{1}{-\omega^2} \cdot (1 - 2e^{-\mathrm{j}\omega} + e^{-\mathrm{j}2\omega}) \\ &= \frac{1}{-\omega^2} \cdot [1 - 2(\cos\omega - \mathrm{j}\sin\omega) + \cos2\omega + \mathrm{j}\sin2\omega] \\ &= \frac{1}{-\omega^2} \cdot [2\cos\omega(\cos\omega - 1) + \mathrm{j}2\sin\omega(1 + \cos\omega)] \\ &= \frac{4}{-\omega^2} \cdot \left(-\cos\omega\sin^2\frac{\omega}{2} + \mathrm{j}\sin\omega\cos^2\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

信号的频谱为抽样信号平方的形状。变换过程还可以用卷积分的性质进行,其过程如下。

如图 3-37 所示的信号,可以看成是两个矩形脉冲信号 $f_1(t) = u(t) - u(t-1)$ 的卷积积分。利用卷积积分的微分、积分性质有 $\int_{-\infty}^t [u(t) - u(t-1)] dt = tu(t) - (t-1)u(t-1)$, 而 $f(t)$ 的微分等于 $\delta(t) - \delta(t-1)$, 所以有

$f_1(t) * f_1(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) * [\delta(t) - \delta(t-1)] = tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$, 而 $f(t) = u(t) - u(t-1)$ 的傅里叶变换式为 $F_1(\mathrm{j}\omega) = \int_0^1 e^{-\mathrm{j}\omega t} dt = \frac{e^{-\mathrm{j}\omega} - 1}{-\mathrm{j}\omega}$, 如图 3-37 所示波形的三角信号,其傅里叶变换为

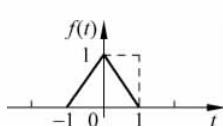


图 3-38 三角信号的波形图

$$F(\mathrm{j}\omega) = \left(\frac{e^{-\mathrm{j}\omega} - 1}{-\mathrm{j}\omega}\right)^2 = \frac{e^{-2\mathrm{j}\omega} - 2e^{-\mathrm{j}\omega} + 1}{-\omega^2}$$

可见这一结论与时域微分积分性质得到的结论是一致的。

若将如图 3-37 所示三角波形信号左移一个单位,如图 3-38 所示波形的信号,可以看成是两个矩形脉冲信号

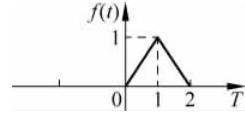


图 3-37 三角信号的波形图

$f_1(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$ 的卷积积分, 即 $f(t) = f_1(t) * f_1(t)$ 。利用卷积积分的微分、积分性质, $f_1(t)$ 的积分为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \left[u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \right] dt &= \int_{-1/2}^t u\left(t + \frac{1}{2}\right) dt - \int_{1/2}^t u\left(t - \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right) u\left(t + \frac{1}{2}\right) - \left(t - \frac{1}{2}\right) u\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$f_1(t)$ 的微分等于 $\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$, 所以有

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) * f_1(t) \\ &= \left[\left(t + \frac{1}{2}\right) u\left(t + \frac{1}{2}\right) - \left(t - \frac{1}{2}\right) u\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] * \left[\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= (t+1)u(t+1) - tu(t) - tu(t) + (t-1)u(t-1) \\ &= (t+1)u(t+1) - 2tu(t) + (t-1)u(t-1) \end{aligned}$$

$f_1(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$ 的傅里叶变换式为

$$\begin{aligned} F_1(j\omega) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}}{-j\omega} = \frac{-2j\sin\frac{\omega}{2}}{-j\omega} = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ F(j\omega) &= F_1(j\omega)F_1(j\omega) = \text{Sa}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

对应的频谱波形如图 3-39 所示。

利用对偶关系, 如果频域频谱函数为三角波形, 如图 3-40 所示。可以看成是频域两个同宽矩形脉冲频谱信号的卷积。即

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \left[U\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) - U\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right)\right] * \left[U\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) - U\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right)\right] \\ U\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) - U\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right) &\text{的逆变换为} \\ f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t/2}}{2\pi j t} \Big|_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{Sa}(\omega_0 t/2) \\ f(t) &= f_1(t) * f_1(t) = \frac{\omega_0^2}{4\pi^2} \text{Sa}^2(\omega_0 t/2) \end{aligned}$$

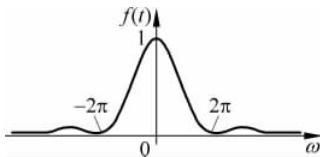


图 3-39 三角信号的频谱图

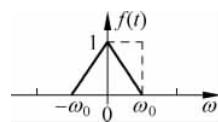


图 3-40 三角频谱的波形图

认识这些变换关系,对于信号的频谱搬移、调制与解调的信号分析,将会有较大的帮助。

从各种信号的变换求解过程可以看到,傅里叶变换及其反变换的求解,可以使用定义进行求解,也可以用变换的性质进行。计算过程可以出现较为复杂的积分运算,这需要具有良好的数学基础知识的运用。使用对偶性质,要求较多的掌握傅里叶变换对,才能较为容易的得到相应的时域函数或频域函数,利用时域微分、积分性质获得频域函数,一般是时域函数微分后的函数表达式为单位冲激函数及其导数的形式,或时域函数为单位冲激函数及其导数形式的积分,这样可以充分利用单位冲激函数的特性获得对应的频域函数。在此基础上结合时移性、尺度变换性、频移性等性质可以体会到,傅里叶变换的计算是可以掌握的。

3.8 周期信号的傅里叶变换

1. 正弦周期信号和余弦周期信号的傅里叶变换

由于 $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$, $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$, 故可以将正弦或余弦信号看成是直流信号 $E = \frac{1}{2}$ 与对应频移指数信号相乘。直流信号 $E = \frac{1}{2}$ 的傅里叶变换为 $\pi \cdot \delta(\omega)$, 所以有

$$F(\sin\omega_0 t) = -j \cdot [\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) - \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$F(\cos\omega_0 t) = [\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)]$$

可见,正弦周期信号和余弦周期信号的傅里叶变换仅仅只有 ω_0 和 $-\omega_0$ 两个频率成分分量,幅度为 π 。

2. 非正弦周期信号的傅里叶变换

若周期信号 $f_T(t)$ 的周期为 T , 则其频率为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, 该信号的傅里叶级数形式为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t}$$
。由于 $A(n\omega_1) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$ 为常数, 该信号的傅里叶变换式为

$$\begin{aligned} F_T(\omega) &= F[f_T(t)] = F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\omega) \cdot e^{jn\omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\omega) F[1 \cdot e^{jn\omega_1 t}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\omega_1) 2\pi \cdot \delta(\omega - n\omega_1) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1) \end{aligned}$$

结论: 周期信号的傅里叶变换是由冲激函数组成的频谱冲激序列, 频谱序列的频率间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T$, 冲激强度是周期信号傅里叶级数指数形式的系数 $A(n\omega) \times 2\pi$ 。由于 $A(n\omega_1) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$, 在这种条件下, 因为 $\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega t} dt = F_T(j\omega)$, 则有

$A(n\omega_1) = (1/T) \cdot F_T(\omega)|_{\omega=n} \cdot \frac{2\pi}{T} = n\omega_1$ 。这一表达式表明,求周期信号的频谱系数 $A(n\omega_1)$ 的一种新的方法,即抽取周期信号的一个周期并求取其傅里叶变换式 $F(j\omega)$,然后乘以 $1/T$,再将 $F(\omega)$ 的 ω 代换为 $n\omega_1$,就可以得到 $A(n\omega_1)$ 的值。

3. 单位冲激序列

单位冲激序列的时域表达式为 $\delta_T(t) = \delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t \pm nT)$,同样可以将其展开成正弦周期信号的组合,其中 $A(n) = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = 1/T$,所以 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/T) \cdot e^{jn\omega_1 t}$,则

$$\Im[\delta_T(t)] = \frac{1}{T} F \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{jn\omega_1 t} \right] = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

若 $T \rightarrow \infty$,则 $\omega_1 = d\Omega$, $\delta_T(t)$ 为单个的冲激信号 $\delta(t)$,其傅里叶变换为 $F(\omega) = d\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \Omega) d\Omega = 1$ 。可见,结论与 $\delta(t)$ 的变换结论是一致的。

函数 $\delta_N(t) = \delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t \pm nT)$ 直接傅里叶变换的推导。

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F[\delta_N(t)] = e^{-jn\omega T} + \dots + e^{-j\omega T} + e^{-j0 \cdot \omega T} + e^{j\omega T} + \dots + e^{jn\omega T} \\ &= e^{-jn\omega T} \left[\sum_{k=1}^{2N} (e^{j\omega T})^k \right] \end{aligned}$$

其中,总和各项是一个公比为 $e^{j\omega T}$ 的等比级数,其和为 $e^{-jn\omega T} \cdot \frac{1 - (e^{j\omega T})^{2N+1}}{1 - e^{j\omega T}} = \frac{e^{-jn\omega T} - e^{jN\omega T}}{1 - e^{j\omega T}} = \frac{e^{-j(N\omega T + \omega T/2)} - e^{j(N\omega T + \omega T/2)}}{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}} = \frac{\sin((N+1/2)\omega T)}{\sin\omega T/2}$,所以, $F(j\omega) = \frac{\sin((N+1/2)\omega T)}{\sin\omega T/2}$ 。这是一个频域周期信号,周期间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T$ 。

证明:用 $\omega + \omega_1$ 代替 ω , $F(j\omega) = \frac{\sin((N+1/2)(\omega + \omega_1)T)}{\sin(\omega + \omega_1)T/2} = \frac{\sin[(N+1/2)\omega T + (N+1/2)\omega_1 T]}{\sin(\omega T + \omega_1 T/2)} = \frac{\sin[(N+1/2)\omega T + (2\pi N + \pi)]}{\sin(\omega T + \pi)} = \frac{\sin(N+1/2)\omega T}{\sin\omega T/2}$ 。

为了获得变换结果,将 $F(j\omega) = \frac{\sin(N+1/2)\omega T}{\sin\omega T/2}$ 改写为 $\frac{\sin(N+1/2)\omega T}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\sin\omega T/2}$ 。

其中,当 $N \rightarrow \infty$ 时, $F(j\omega)$ 就是 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换结果。令 $a = (N+1/2)T$,则有 $N \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty$,由于 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(N+1/2)\omega T}{\omega} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin a \omega}{\omega} = \pi \cdot \delta(\omega)$,所以有 $F(j\omega) = \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \omega / \sin\omega T/2$,由于 $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{\sin\omega T/2} = 2/T$,当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $F(j\omega) = \omega_1 \cdot \delta(\omega)$,已经证明这是一个频域周期信号,周期间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T$,所以 $F(j\omega) = \omega_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$ 。这样结论与前面的方法得到的结果完全一致。

结论：任何周期信号的傅里叶变换是由冲激函数组成的频谱冲激序列，频谱序列的频率间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T$ ，冲激强度是周期信号傅里叶级数指数形式的系数 $c_n(n\omega_1) \times 2\pi$ 。所以，周期信号的傅里叶变换一般是先求取周期信号的傅里叶级数指数形式的系数 $A(n\omega_1)$ ，然后按 $F_T(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$ 下结论，或者抽取周期信号的一个周期并求取其傅里叶变换式 $F(j\omega)$ ，则 $F_T(j\omega) = \omega_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$ 。例如，脉宽为 2τ 偶函数形式的矩形脉冲 $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[u\left(t + \frac{n+1}{2}T + \tau\right) - u\left(t - \frac{n+1}{2}T - \tau\right) \right]$ 的傅里叶级数的系数为 $c_n = \frac{2\tau}{T} \text{Sa}(n\omega_0\tau)$ ，其单个脉冲的傅里叶变换为 $2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$ ，则其傅里叶变换为 $2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\tau}{T} \text{Sa}(n\omega_0\tau) \cdot \delta(\omega - n\omega_0)$ 。显然，熟悉单个信号的傅里叶变换形式，对于快速实现由单个信号形式组成的周期信号的傅里叶变换是很重要的。这些在“数字信号处理”等后续课程学习中是很重要的概念。一些常用函数的变换关系如表 3-2 所示。

表 3-2 常用的连续傅里叶变换对及其对偶关系表

连续傅里叶变换对		相对偶的连续傅里叶变换对	
连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$
$\delta(t)$	1	1	$2\pi\delta(\omega)$
$\frac{d}{dt}\delta(t)$	$j\omega$	t	$j2\pi \frac{d}{d\omega}\delta(\omega)$
$\frac{d^k}{dt^k}\delta(t)$	$(j\omega)^k$	t^k	$2\pi j^k \frac{d^k}{d\omega^k}\delta(\omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	$\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t}$	$u(\omega)$
$tu(t)$	$j\pi \frac{d}{d\omega}\delta(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$		
$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	$\frac{1}{\pi}, t \neq 0$	$F(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega_0 t_0}$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	$\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)$	$2\cos\omega_0 t$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	$\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)$	$j2\sin\omega_0 t$

续表

连续傅里叶变换对		相对偶的连续傅里叶变换对	
连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$
$f(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$	$\frac{\omega_0}{\pi} \text{Sa}(\omega_0 t)$	$F(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0 \end{cases}$
$f(t) = \begin{cases} 1 - t /\tau, & t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$\tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	$\frac{\omega_0}{2\pi} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$	$F(\omega) = \begin{cases} 1 - \omega /\omega_0, & \omega < \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0 \end{cases}$
$e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$\frac{1}{\tau - jt}$	$2\pi e^{-\tau\omega} u(\omega), \tau > 0$
$e^{-a t }, \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$	$\frac{\tau}{t^2 + \tau^2}$	$\pi e^{-\tau \omega }, \tau > 0$
$e^{-at} \cos\omega_0 t u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$		
$e^{-at} \sin\omega_0 t u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$		
$t e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$\frac{1}{(\tau - jt)^2}, \tau > 0$	$2\pi\omega e^{-\tau\omega} u(\omega)$
$\frac{t^{k-1} e^{-at}}{(k-1)!} u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^k}$		
$\delta_T(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$		
$e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$	$\sqrt{\pi\tau} e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$		
$\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] \cos\omega_0 t$	$\frac{\tau}{2} \left[\text{Sa}\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right) + \text{Sa}\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right) \right]$		
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\omega_0)$		

3.9 傅里叶变换在 LTI 系统分析中的应用

傅里叶变换在 LTI 系统分析的应用,也称为线性系统的频域分析法,就是将系统的响应及与响应相关的激励信号应用傅里叶变换,从时域中变换到频域中去进行考察。通过这样的变换,时间变量 t 将转化为频域变量 ω 。而时域中的微分及积分方程将转化为频域中的代数方程进行求解。完成上述分析之后,再将频域的解,通过傅里叶反变换成为时域解。这就是傅里叶变换解决实际问题的广泛意义。

由于时域的冲激响应 $h(t)$ 的傅氏变换 $H(j\omega)$ 就是频率为 ω 的复指数信号 $e^{j\omega t}$ 通过 LTI 系统时,系统对输入信号在幅度上产生的影响,所以称为系统的频率响应,分析系统

的频率响应时,往往采用傅里叶变换进行分析。

鉴于 $h(t)$ 与 $H(j\omega)$ 是一一对应的,因而 LTI 系统可以由其频率响应完全表示。实际上,并非任何系统的频率响应 $H(j\omega)$ 都存在,因此用频率响应表示系统时,一般都限于对稳定系统。

利用傅里叶变换的卷积性质,可以对 LTI 系统的时域卷积运算变换到频域进行代数运算分析。任意信号输入的系统响应 $y(t) = f(t) * h(t)$,只要能够得到系统的冲击响应 $h(t)$,则可进行如下过程的变换运算,就得到任意信号作用下系统的零状态频域响应和时域响应。

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega), \quad Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega), \quad y(t) = F^{(-1)}[Y(j\omega)]$$

同样,对于已经用微分方程表示的系统,简称为 LCCDE 系统(Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Differential Equations),也可以用变换法得到任意信号作用下系统的零状态频域响应和时域响应。

若系统的微分方程为 $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k}$, 利用时域微分性质,两边取傅里叶变换,可以得到 $\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k F(j\omega)$ 。于是

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k \Big/ \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \quad (3-52)$$

$$Y_1(j\omega) = H(j\omega)F_1(j\omega) = \left[\sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k \Big/ \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] F_1(j\omega) \quad (3-53)$$

$$F_2(j\omega) = \frac{Y_2(j\omega)}{H(j\omega)} = \left[\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \Big/ \sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k \right] Y_2(j\omega) \quad (3-54)$$

式(3-52)表明,已知输入信号 $f(t)$,系统响应 $y(t)$ 建立的微分方程情况下,获得频域系统函数 $H(j\omega)$ 的过程;式(3-53)表明,已知输入信号 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$,频域系统函数 $H(j\omega)$ 情况下,获得系统频域响应 $Y_1(j\omega)$ 的过程;式(3-54)表明,已知系统频域响应 $y_2(t) \leftrightarrow Y_2(j\omega)$,频域系统函数情况下,获得输入信号频域表达式 $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$ 的过程;对应的时域输入信号 $f(t)$,以及系统的冲激响应 $h(t)$,系统的时域响应 $y(t)$,则可以通过频域表达式的逆变换获得。

3.9.1 傅里叶变换在信号调制与解调中的应用

1. 信号调制

如图 3-41 所示的信号幅度调制系统方框图。系统的输入信号为 $f(t)$,调制信号为 $x(t)$,则系统的响应时域表达式为 $y(t) = f(t)x(t)$ 。

若调制信号为 $x(t) = \cos\omega_0 t$ 对信号进行变换 $X(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$, $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$,则系统的频域响应表达式为

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} F[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} F[j(\omega + \omega_0)]$$

对于如图 3-41 所示的系统,如果输入信号的频谱范围如图 3-42 所示,调制信号如图 3-43 所示,则系统的响应如图 3-44 所示。

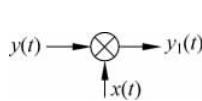


图 3-41 信号幅度调制方框图

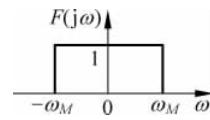


图 3-42 输入信号频谱图

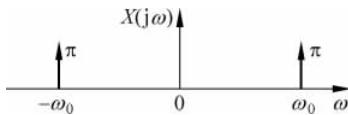


图 3-43 调制信号频谱图

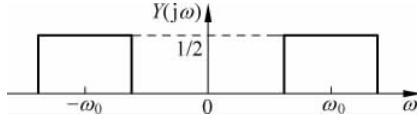


图 3-44 系统响应信号频谱图

可见时域中信号幅度调制,是将输入信号与单频调制信号进行相乘运算,调制的结果,在频域中是实现输入信号的线性搬移,搬移的频率是 ω_0 。

2. 同步(相干)解调

如图 3-41 所示的系统方框图也可以用作信号同步(相干)解调。系统的输入信号改为 $y(t)$,调制信号为 $x(t)$ 不变,则系统的响应时域表达式为 $y_1(t) = y(t)x(t)$ 。则有

$$y(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

其中 $Y(j\omega) = \frac{1}{2} F[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} F[j(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} F(j\omega) + \frac{1}{4} F[j(\omega - 2\omega_0)] + \frac{1}{4} F[j(\omega + 2\omega_0)]$ 。

可见,对于如图 3-41 所示的系统,如果输入信号改为幅度已调信号 $y(t)$,调制信号为 $x(t)$ 不变,则系统的响应的频谱如图 3-45 所示。

如图 3-45 所示,通过同步解调,输出信号的频谱中已经恢复幅度调制中输入信号为 $f(t)$ 的频谱成分,就是将幅度已调的信号 $y(t)$ 的频谱向低频段又搬移 ω_0 的频率,恢复到输入信号为 $f(t)$ 的频谱,由于解调后的频谱中尚有高频频谱成分,要求通过低通滤波器将高频成分滤除。所以,在信号的调制与解调系统中,低通滤波器是不可缺少的组成部分。

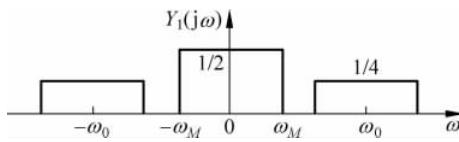


图 3-45 系统响应信号频谱图

3.9.2 傅里叶变换在电路响应分析中的应用

如图 3-46 所示的电路 $v(t)$ 为有起因信号, L 、 C 的初始状态为零状态。即 $v_C(0) = 0$,

$i_L(0)=0$ 。因为是有起因系统,所以 $i(0)=0$ 。这就是零状态条件下,电路电流初始状态的时域解。

选择电路电流 $i(t)$ 作为系统的响应,则 $i(t)=i_L(t)=i_C(t)$, 所以电路的微分方程为

$$Ri(t) + L \frac{d[i(t)]}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t)$$

两边取傅里叶变换,且 $i(0)=0$ 。

$$RI(j\omega) + j\omega LI(j\omega) + \frac{1}{j\omega C} I(j\omega) = V(j\omega), \text{ 可得}$$

$$I(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{V(j\omega)}{Z(j\omega)}$$

这一结论与电路分析中的相量法结论一致,所以电路的频域分析等效形式如图 3-47 所示。值得注意的是,此处的阻抗 $Z(j\omega)$, 导纳 $Y(j\omega)$, 电流 $I(j\omega)$, 电压 $V(j\omega)$ 与交流电路中的概念相同。但在进行交流电路分析时, ω 常为单一频率的正弦量,而此处的 ω 为变量,所以不用相量表示,这又是其不同之处。电路中元件的阻抗和导纳的变换关系如表 3-3 所示。

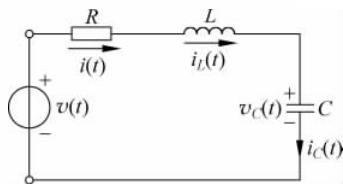


图 3-46 RLC 电路系统的构成

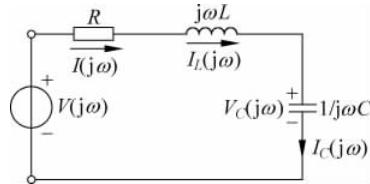


图 3-47 RLC 电路的频域分析等效形式

表 3-3 电路中 RLC 元件的阻抗和导纳的变换关系

阻抗和电抗	$Z(\omega)$	$Y(\omega)$	注解
电阻元件 R	R	$1/R$	单个元件时电流和电压的关系
电感元件 L	$j\omega L$	$1/j\omega L$	
电容元件 C	$1/j\omega C$	$j\omega C$	

其次, $V(j\omega)$ 为激励电压信号在频域中的频谱函数。 $I(j\omega)$ 为响应电流信号在频域中的频谱函数,而此处的 ω 为变量,所以不用相量表示。经过这样处理之后,电路中的 KCL、KVL 定律仍然适用于分析非正弦信号作用。系统的响应,即节点电流之和 $\sum I(j\omega) = 0$, 回路电压之和 $\sum V(j\omega) = 0$ 。

结论: 求电路系统响应的步骤和方法如下所述。

(1) 首先把激励信号变成 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 并把元件用其相应阻抗 $Z(j\omega)$ 、导纳 $Y(j\omega)$ 电路模型表示,做出频域下的电路模型。

(2) 根据频域下的电路模型解出频域下系统的响应,这一过程中在电路中所学过的求解电路问题的方法均可使用。

(3) 求取响应的傅里叶反变换,就可以得到零状态下的电路时域响应。

由此可以看出,要比较自如地使用这种方法求解电路问题,熟悉傅里叶变换和反变换的关系是十分重要的。

例 3-10 电路如图 3-48 所示,已知 $v(t) = u(t + \tau) - u(t - \tau)$, $R_1 = R_2 = \frac{1}{G}$ 。在输入信号之前,电路中无初始储能,即 $v_C(0^+) = 0$ 。试用频域分析法求电路中的输出电压 $v_2(t)$ 。

解: $v(t) = u(t + \tau) - u(t - \tau)$, $v_c(0^+) = 0$, 则

$$V(j\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{j\omega}$$

电路的频域模型如图 3-49 所示。用戴维南定理简化:

由于 $R_1 = R_2 = \frac{1}{G}$, $V_{oc}(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{2}$, $R_0 = \frac{1}{2G}$, 电路的频域等效电路如图 3-50 所示。

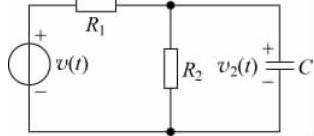


图 3-48 例 3-10 的时域电路图

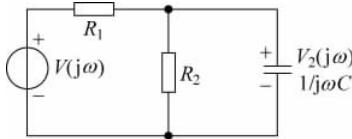


图 3-49 例 3-10 的频域电路图

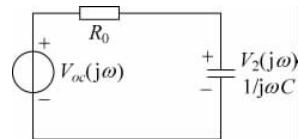


图 3-50 频域等效电路图

$$V_2(\omega) = \frac{V_{oc}(\omega) \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{2G} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{V(\omega) G}{2G + j\omega C}, \text{ 令 } 2 \frac{G}{C} = \alpha, V_2(\omega) = \frac{V(\omega) \frac{G}{C}}{\frac{2G}{C} + j\omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V(\omega) \alpha}{\alpha + j\omega} \text{ 代入}$$

$$V(j\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega}, \text{ 得}$$

$$V_2(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})$$

则

$$\begin{aligned} v_2(t) &= F^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) \right] \\ &= \frac{1}{2} [u(t + \tau) - u(t - \tau)] - \frac{1}{2} [e^{-\alpha(t+\tau)} u(t + \tau) - e^{-\alpha(t-\tau)} u(t - \tau)] \\ &= \frac{1}{4} [\operatorname{sgn}(t + \tau)(1 - e^{-\alpha(t+\tau)}) - \operatorname{sgn}(t - \tau)(1 - e^{-\alpha(t-\tau)})] \end{aligned}$$

分析计算这一例题的过程中,没有 $V(j\omega) = \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = 2\operatorname{Sa}(\omega\tau)$ 的形式,显然更加便于后来的逆变换求解,因为可以利用时移性。其次,门函数在 $-\infty \sim \infty$ 是绝对可积函数,所以计算傅里叶变换时,采用定义进行直接积分计算,这些都是要加以注意的情况。

3.9.3 傅里叶变换在系统分析中的应用

当已经建立微分方程或系统框图已经给出的系统,也能够用傅里叶变换的方法,求

出系统的频域响应,再经过逆变换求解系统的时域响应。由于傅里叶变换中,不涉及响应的初始状态,所以求解往往只是系统的零状态响应。

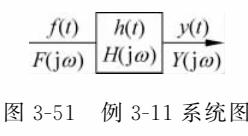


图 3-51 例 3-11 系统图

例 3-11 系统的构成方框图如图 3-51 所示。若 $H(\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}$, 系统的输入信号 $f(t) = 2e^{-t}u(t)$, 试求系统的零状态响应。

$$\text{解: } F(\omega) = F[2e^{-t}u(t)] = \frac{2}{1+j\omega} = \int_0^{\infty} 2e^{-t}e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{1+j\omega}$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= F(\omega)H(\omega) = \frac{2}{1+j\omega} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} \\ &= \frac{2}{1+j\omega} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega+3) \cdot (j\omega+2)} \cdot \left[\frac{A_1}{1+j\omega} + \frac{A_2}{(j\omega+3)} + \frac{A_3}{(j\omega+2)} \right] \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{j\omega}{(j\omega+3) \cdot (j\omega+2)} \Big|_{j\omega=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \frac{j\omega}{(j\omega+1) \cdot (j\omega+2)} \Big|_{j\omega=-3} = -\frac{3}{2}$$

$$A_3 = \frac{j\omega}{(j\omega+3) \cdot (j\omega+1)} \Big|_{j\omega=-2} = 2$$

$$Y(\omega) = \left[\frac{-1}{1+j\omega} + \frac{-3}{(j\omega+3)} + \frac{4}{(j\omega+2)} \right]$$

用傅里叶变换的频移性质求 $Y(\omega)$ 的逆变换得

$$y(t) = -e^{-t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) + 4e^{-2t}u(t) = (4e^{-2t} - e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$$

若系统具有初始储能,则 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ 。其中, $y_{zs}(t)$ 为电路的零状态响应, $y_{zi}(t)$ 为电路的零输入响应。

例 3-12 已知系统的微分方程为 $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{df(t)}{dt} + 3f(t)$, 试求系统的冲激响应。

解: 对系统微分方程两边取傅里叶变换可得

$$-\omega^2 Y(j\omega) + 6j\omega Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = j\omega F(j\omega) + 3F(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \frac{j\omega + 3}{(4 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{4 + j\omega} \right]$$

用傅里叶变换的频移性质求 $H(j\omega)$ 的逆变换得 $h(t) = \frac{1}{2}[e^{-2t} + e^{-4t}]u(t)$ 。

可见,对微分方程所描述的系统,通过求频率响应可以方便地求出其单位冲激响应。

例 3-13 反馈联结系统的方框图如图 3-52 所示,求系统的频谱传输函数。

解: 根据系统的方框图可得

$$Y(j\omega) = [F(j\omega) - Y(j\omega)H_2(j\omega)]H_1(j\omega)$$

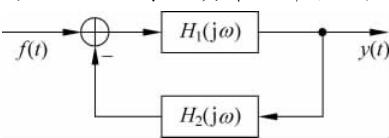


图 3-52 例 3-13 系统图

整理得

$$F(j\omega)H_1(j\omega) = Y(j\omega)[1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)]$$

所以

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)}$$

同理,对于如图 3-53 所示的串联型系统框图的系统频谱函数为

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

对于如图 3-54 所示的并联型系统框图的系统频谱函数为

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

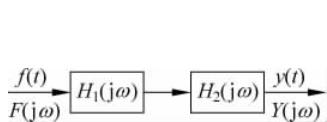


图 3-53 串联型级联系统框图

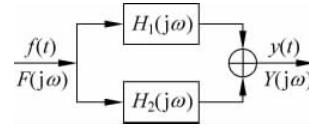


图 3-54 并联型级联系统框图

从上述各个例子中可以看出,系统本身是一个信号处理器,系统的功能就是它可以按照一定的方式对信号进行加工和处理。在时域中,信号 $f(t)$ 经过系统的处理变成 $y(t)$,在频域中,也就是从信号的频谱结构来看,系统起着改变输入信号的频率分布规律的作用,这就是说,要依照系统频谱函数 $H(j\omega)$ 的特性对输入信号的频谱 $F(j\omega)$ 进行处理。使输出信号的频谱变为 $Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$ 。系统对信号的这种处理功能成为“加权”。 $H(j\omega)$ 称为加权函数。由于 $H(j\omega)$ 是对输入信号不同频率分量进行加权,故它使得一些频率分量加强了,另一些频率分量可能衰减了。同时,每一频率分量经过系统的传输,还会产生不同的相移。因此,要求对信号实现无失真的传输,必须同时满足相位特性和幅度特性的要求。

失真: 系统响应的波形与输入激励信号的波形在一般的情况下是不相同的。这种情况称为失真。

无失真传输: 若系统的激励信号为 $f(t)$,系统的响应信号为 $y(t)$,若能够满足条件 $y(t) = kf(t - t_0)$ 时,输出响应信号与输入激励信号的波形完全一致,但扩大 k 倍,时延 t_0 。

显然,系统的幅度特性要求在 $F(j\omega)$ 的频谱范围内, $H(j\omega)$ 的“加权”(k 倍)必须保持一致,则 $|H(j\omega)|$ 在 $F(j\omega)$ 的频谱范围内是一条平行于横轴的直线。满足相位特性,则要求在 $F(j\omega)$ 的频谱范围内,必须使相位特性是一条通过原点的直线。也就是说,当一个信号的基波分量产生 t_0 时移时,而其高次谐波分量也应产生相应的 t_0 时移量。频率为周期的反比例,因此基波的频率相移 $\omega_0 t_0$,三次谐波频谱应产生的相移 $3\omega_0 t_0$,才能使两者在时域中保持一致。无失真传输系统在理论上讲应具有无限大的频宽。但实际上是很困难做到的,由于信号的频谱系数一般随着频率的升高而降低,即信号的能量集中在较低的五次谐波以下,即使高频分量受到带宽限制而具有较大的衰减,但引起的失真是很小的,只要带宽大于五次谐波分量就可以被认为是无失真传输系统。

系统分析中,往往将具有矩形频谱特性的系统频谱函数 $H(j\omega)$ 称为理想低通滤波

器,这就要求系统的冲激响应 $h(t)$ 是一个抽样函数 $2\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t)$,也就是 $2\sin(\omega_0 t)/t$ 。但是理想低通滤波器的频宽仅仅只有 ω_0 ,只能实现频宽有限信号的无失真传输,对于频宽较大的信号,是不能实现无失真传输的,如 $\delta(t)$ 信号。

*3.9.4 傅里叶变换在信号抽样的应用

前面讨论的是连续时间信号的频域分析,除此之外还有离散时间信号的频域分析,离散时间信号可以从每隔一定时间对连续时间信号进行抽样(也称抽样)而获得。系统的构成方框图如图 3-55 所示。

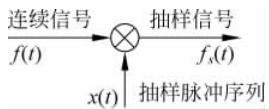


图 3-55 取样系统的组成方框图

抽样可以在时域或频域进行,在时域进行抽样的,称为时域抽样;在频域进行抽样的,称为频域抽样。抽样的方法可以用冲激信号抽样,则 $x(t)$ 或 $X(j\omega)$ 为冲激函数序列;也可以用矩形脉冲信号抽样,则 $x(t)$ 或 $X(j\omega)$ 为一系列的矩形脉冲函数。用矩形脉冲信号抽样,比较合乎实际情况,当脉冲宽度趋近于无穷小时,就可以近似地看作是冲激函数抽样。

1. 时域抽样

如图 3-55 所示的系统可以看出,从数学运算讲,抽样的实质意义是指连续时间信号 $f(t)$ 与抽样脉冲序列 $x(t)$ 作相乘运算。抽样后的信号 $f_s(t)$ 可写成 $f_s(t) = f(t) \cdot x(t)$ 。

若采用冲激函数抽样, $x(t)$ 为周期 T_s 的单位冲激序列函数信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)$, 其傅里叶变换式为 $X(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$, 输入信号的变换关系为 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 图解说明如图 3-56 所示,则

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} F(\omega - n\omega_s)$$

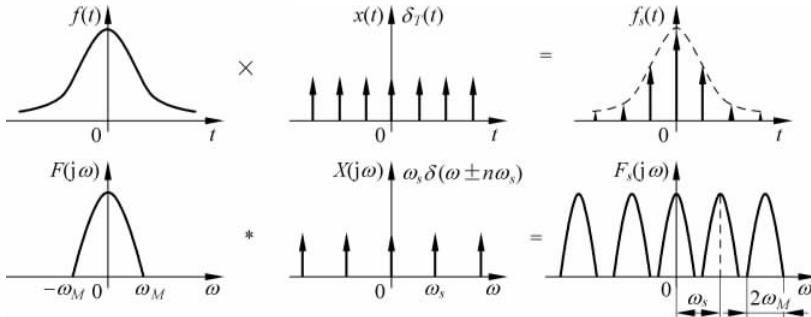


图 3-56 冲激函数信号时域抽样的图解说明

若采用矩形脉冲函数抽样, $x(t)$ 为周期性脉冲函数信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[u\left(t - \frac{n+1}{2}T_s + \tau\right) - u\left(t - \frac{n+1}{2}T_s - \tau\right) \right]$, 其傅里叶变换为 $X(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\tau}{T_s} \text{Sa}(n\omega_s \tau) \cdot \delta(\omega - n\omega_s)$, 输入信号为 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 变换关系, 抽样过程的图解说明如图 3-57 所示, 则

$$\begin{aligned} F_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\tau}{T_s} \text{Sa}(n\omega_s \tau) F(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{2\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)] \end{aligned}$$

如图 3-57 所示, 抽样信号 $x(t)$ 的频率满足 $\omega_s > 2\omega_M$, 才能够使得 $F_s(j\omega)$ 不会出现交叠。也就是说, 只有 $\omega_s > 2\omega_M$ 时, $F_s(j\omega)$ 才能唯一地表示 $F(j\omega)$ 的全部频谱内容。因此, 有时域抽样定律。

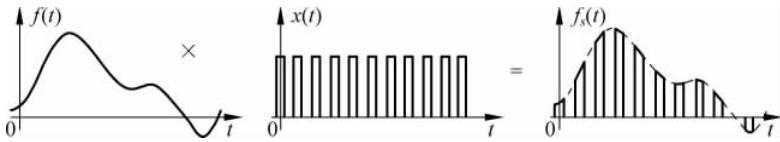


图 3-57 冲激函数信号抽样的图解说明

一个频带宽度有限的时间信号 $f(t)$, 如果信号的频谱范围为 $-\omega_M \sim \omega_M$, 则可以用一个等时间间隔的抽样信号 $x(t)$ 与其相乘对其抽样, 抽样得到的值能够唯一地表示信号 $f(t)$ 的原有内容。抽样信号 $x(t)$ 的频率必须满足 $\omega_s > 2\omega_M$, 也就是抽样信号的周期间隔为 $T_s < T_M/2$ 。

抽样定理, 也称抽样定理或奈奎斯特(Nyquist)抽样定理。论述在一定条件下连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔上的瞬时值(样本值)来表示。这些样本值包含了被抽样连续信号的全部信息, 利用这些样本值可以没有失真地恢复原信号。抽样定理为连续时间信号与离散时间信号相互转换提供了理论依据。从图 3-55 也可以看出, 如果要求从抽样信号恢复原信号, 则只要将信号通过一个理想的低通滤波器进行处理就可以恢复原信号 $f(t)$ 。

2. 频域抽样

频域抽样中, 若采用冲激函数抽样, $X(j\omega)$ 为周期性单位冲激序列函数信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$, 图解说明如图 3-58 所示。

频域抽样定律。表述为若一个在时域区间 $-t_m \sim t_m$ 以外, 为零的时间函数信号 $f(t)$, 其频谱函数为 $F(j\omega)$, 可以唯一地由其在均匀的频率间隔上 $f_s \left(f_s < \frac{1}{2t_m} \right)$ 的样点值确定。

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(j \frac{n\pi}{t_m}\right) \text{Sa}(\omega t_m - n\pi), \text{其中 } t_m = \frac{1}{2f_s}.$$

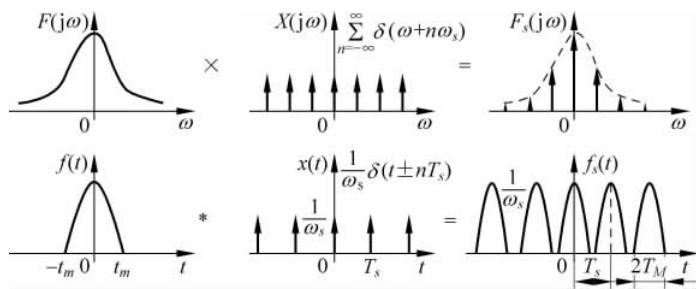


图 3-58 冲激函数信号频域取样的图解说明

时域抽样针对时间无限频域有限的信号抽样,频域抽样是针对频域无限时间有限的信号抽样,因此时间抽样重视抽样信号的频率大小,而频率抽样注重抽样信号的抽样时间大小,这是两者的主要区别。

* 3.9.5 傅里叶变换在滤波技术的应用

电子电路中通常利用电路容抗或感抗随频率变化的特性,对不同频率的输入信号产生不同的响应,让需要的某一频率的信号顺利的通过,而抑制不需要的其他频率信号,这一过程即为滤波,实现该过程的系统称为滤波器。滤波器的框图模型如图 3-59 所示。

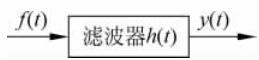


图 3-59 滤波器的框图模型

设滤波器的输入信号 $f(t)$,输出信号 $y(t)$,滤波器的冲激响应为 $h(t)$,则时域中滤波器系统的输入关系为 $y(t) = h(t) * f(t)$,利用时域卷积定理可知,将其转换为频域函数的点积关系,即 $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot F(j\omega)$,其中 $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$, $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, $h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$ 。

可见,借助傅里叶变换不仅使运算得到简化,而且从频域上对信号进行研究和频谱分析提供了可能。由频域函数关系,可得 $H(j\omega) = Y(j\omega) / F(j\omega)$, $H(j\omega)$ 称为系统的频域函数,可完全表示系统的频率特性和特征。因此,若输入信号 $f(t)$ 及要求的输出信号 $y(t)$ 已经确定,对其分别进行傅里叶变换后,便可根据需要设计出适当的滤波器,从而适当地满足实际需要。若输入信号 $f(t)$ 及系统的频域函数 $H(j\omega)$ 已经确定,对输入信号 $f(t)$ 进行傅里叶变换后,利用 $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot F(j\omega)$ 可以确定输出信号的频谱特征,确定是否产生频率失真。可以肯定,系统分析中涉及频率的分析,一般采用傅里叶变换的频域分析法。

模拟或数字滤波器中,通常把信号通过的频率范围称为滤波器的通带,阻止信号通过的频率范围称为阻带,通带的边界频率称为截止频率。根据滤波器通、阻带所处的位置不同,可分为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器 4 种基本滤波器。常用的模拟滤波器是有源滤波器。

理想滤波器能够较好地选择滤波的频率特性,具有对某个频率范围内的复指数信号 $f(t) = e^{j\omega t}$ 或正弦信号 $\cos(\omega t)$ 能无失真地通过,在频率范围之外的信号则给予彻底抑制。低通滤波器的系统频域函数频谱图如图 3-60 所示。高通滤波器的系统频域函数频

谱图如图 3-61 所示,带通滤波器的系统频域函数频谱图如图 3-62(a)和图 3-62(b)所示,其中图 3-62(b)所示的频谱图为门函数式频谱图,其频谱函数用 $G_{2\omega_0}(j\omega)$ 表示,带阻滤波器的系统频域函数频谱图如图 3-63 所示。

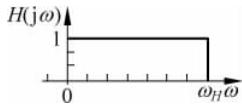


图 3-60 低通频谱图

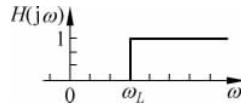


图 3-61 高通频谱图

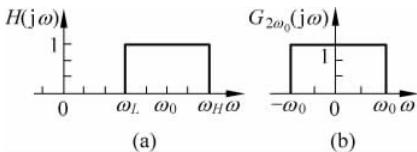


图 3-62 带通频谱图

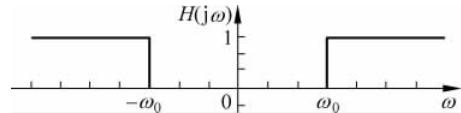


图 3-63 带阻频谱图

当输入信号 $f(t)$ 的频谱范围超过滤波器的通带范围时,将只有通带范围内的频谱通过,因此滤波器的输出信号 $y(t)$,将只保留 $f(t)$ 的频谱范围落在滤波器的通带范围的频谱,这些是滤波器系统的工作特点。

本章小结

本章所讲解的傅里叶级数是建立如何用正交函数表示一个非正弦周期信号的方法,傅里叶级数具有指数形式和三角形式两种形式,利用欧拉公式,两者之间是统一的。

傅里叶级数的三角形式为 $a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n \cos \omega_0 nt + b_n \sin \omega_0 nt]$, 其中 $\omega_0 = 2\pi/T$, $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$, $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^T f(t) \cos \omega_0 nt dt$, $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 nt dt$ 。信号的谐波振幅为 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, 信号谐波相位角为 $\theta_n = \arctan b_n/a_n$ 。若 $f(t)$ 偶函数,则 $a_n = 0$, 若 $f(t)$ 奇函数,则 $b_n = 0$ 。

指数形式的傅里叶级数为 $f(t) = c_n(0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t}$, 其中频谱系数 $c_n(n\omega_1) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = |c_n(n\omega_1)| \cdot e^{-j\theta_n}$, 频谱相位角 $\theta_n = \arctan [X(n\omega_1)/R(n\omega_1)]$ 。与三角形式频谱系数的关系为 $a_0 = c_n(0)$, $a_n = 2|c_n(n\omega_1)| \cdot \cos \theta_n$, $b_n = -2|c_n(n\omega_1)| \sin \theta_n$, 频谱幅度关系为 $c_n = A_n/2$, 频谱相位移是一致的。指数形式的傅里叶级数频谱系数除了与三角形式一样的奇偶性之外,还具有微分特性,即 $f(t)$ 的 n 阶频谱系数为 $(jn\omega_1)^n c_n(n\omega_1)$; 时移性,即 $f(t)$ 的时间变量移动右移 τ 个单位后,信号的频谱系数为 $c_n(n\omega_1) \cdot e^{-jn\omega_1 \cdot \tau}$ 。

非周期信号的频谱分析可以利用傅里叶变换 $F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, 和

反变换 $F^{-1}[F(j\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, 傅里叶变换的存在条件为 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ 。变换反变换也称傅里叶变换对, 记为 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 。傅里叶变换是信号处理的基础, 被广泛使用。具有 15 个重要的性质, 见本章表 3-1。

常用信号变换关系中矩形脉冲信号在信号处理中是用得较多的变换关系。时域脉宽为 2τ 的时间矩形脉冲信号, 频谱函数为抽样函数 $2\tau \text{Sa}(\omega\tau)$, 频域脉宽为 $2\omega_0$ 的频域矩形脉冲信号, 时间函数为 $2\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t)$ 。变量关系为 $\omega_0 = \pi/\tau$ 。这些关系是理想低通滤波器的设计依据, 也可以作为数字滤波的设计依据。

傅里叶变换引申的帕塞伐尔(Parseval)定理 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$, 提供能量守恒的证明, 信号能量可以在时域进行计算, 也可以在频域进行计算, 两者的结果是一致的。因此, 称频域函数 $|F(j\omega)|^2$ 为信号的频谱密度函数。

傅里叶变换的卷积积分定理, 以及时域微分、积分性质使傅里叶变换在求解时对 LTI 系统建立了频域分析的方法。对 LCCDE 描述的 LTI 系统, 可以很方便地由 LCCDE 或系统框图得到其频域系统函数, 再利用傅里叶逆变换求得系统的时域响应。稳定的 LTI 系统也可以通过其频率响应来描述, 从而建立了系统互连时, 系统频率响应与各子系统频率响应的关系。

第 3 章习题

一、选择与填空

题 3.1.1 信号 $f(t)$ 波形如图 P3.1.1 所示, 其傅里叶级数为()。

- | | |
|---|---|
| A. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi t), n \text{ 为奇数}$ | B. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi t), n \text{ 为偶数}$ |
| C. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos(n\pi t), n \text{ 为奇数}$ | D. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos(n\pi t), n \text{ 为偶数}$ |

题 3.1.2 如信号的 $f(t)$ 波形图 P3.1.2 所示, 其傅里叶级数为()。

- | | |
|--|--|
| A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{E}{n\pi} \sin(n\omega_0 t)$ | B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{E}{n\pi} \sin(n\omega_0 t)$ |
| C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{E}{n\pi} \cos(n\omega_0 t)$ | D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{E}{n\pi} \cos(n\omega_0 t)$ |

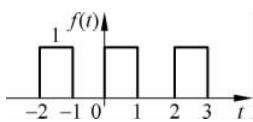


图 P3.1.1

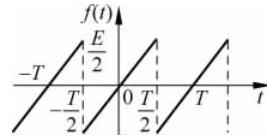


图 P3.1.2

题 3.1.3 单位冲激序列 $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ 的频谱为图 P3.1.3 中的()。

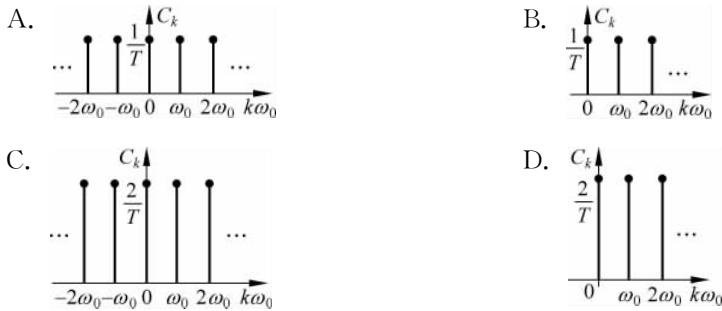


图 P3.1.3

题 3.1.4 周期信号 $f(t)$ 的双边频谱如图 P3.1.4 所示, 其三角函数表示式为()。

- A. $2\cos\omega_0 t - j2\sin 3\omega_0 t$
B. $2\sin\omega_0 t - j2\sin 3\omega_0 t$
C. $2\cos\omega_0 t - j2\cos 3\omega_0 t$
D. $2\sin\omega_0 t - j2\cos 3\omega_0 t$

题 3.1.5 信号 $f(t)$ 如图 P3.1.5 所示, 其傅里叶变换为()。

- A. $\frac{2A}{j\omega} [\text{sinc}(2\omega) - j\cos 2\omega]$
B. $\frac{2A}{j\omega} [\sin(2\omega) - \cos 2\omega]$
C. $\frac{2A}{j\omega} [\sin 2\omega - \text{sinc}(2\omega)]$
D. $\frac{2A}{j\omega} [\sin 2\omega - \sin(2\omega)]$

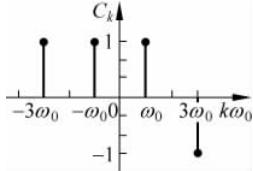


图 P3.1.4

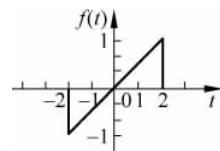


图 P3.1.5

题 3.1.6 信号如图 P3.1.6 所示, 其频谱函数为()。

- A. $4\cos 2\omega \cdot \text{sinc}\omega$
B. $4\sin 2\omega \cdot \text{sinc}\omega$
C. $4\cos 2\omega \cdot \sin\omega$
D. $4\sin 2\omega \cdot \sin\omega$

题 3.1.7 信号 $f(t)$ 如图 P3.1.7 所示, 其傅里叶变换为()。

- A. $\frac{2e^{-j\omega}}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega)$
B. $\frac{2e^{-j\omega}}{j\omega}$
C. $\frac{2e^{j\omega}}{j\omega}$
D. $\frac{2e^{-j\omega}}{j\omega} - 2\pi\delta(\omega)$

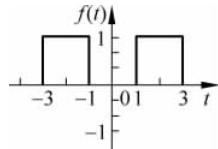


图 P3.1.6

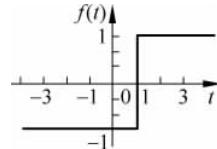


图 P3.1.7

题 3.1.8 已知周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数表达式为

$f(t) = 2 + 3\cos 2\omega_0 t + 4\sin 2\omega_0 t + 2\sin(3\omega_0 t + 30^\circ) - \cos(7\omega_0 t + 150^\circ)$, 其单边幅度谱、相位谱图为图 P3.1.8 中的()。

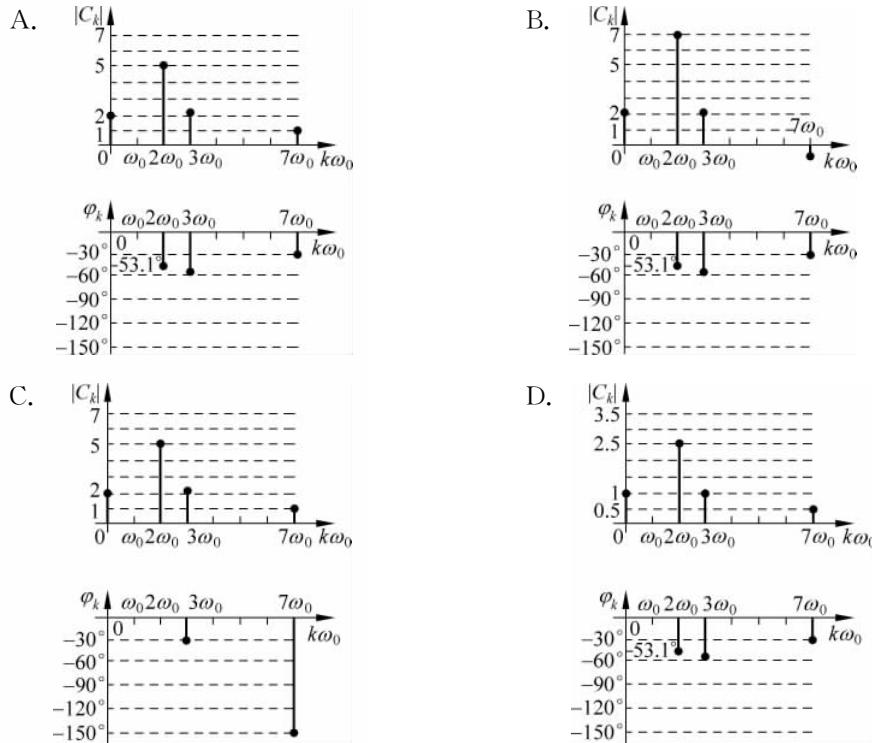


图 P3.1.8

题 3.1.9 信号 $e^{-(2+j5)t} u(t)$ 的傅里叶变换为()。

- A. $\frac{1}{2+j\omega} e^{j5\omega}$ B. $\frac{1}{5+j\omega} e^{-j\omega}$ C. $\frac{1}{2+j(\omega+5)}$ D. $\frac{1}{-2+j(\omega-5)}$

题 3.1.10 信号 $f(t) = u(t) - u(t-1)$, 其傅里叶变换为()。

- A. $\frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}}$ B. $\frac{2}{j\omega}(1 - e^{-j\omega})$ C. $j\omega(1 - e^{j\omega})$ D. $\frac{1}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}}$

题 3.1.11 已知信号频谱如图 P3.1.11 所示, 其原函数为()。

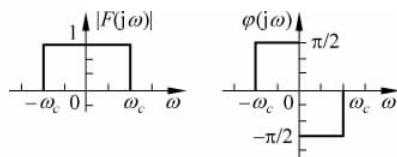


图 P3.1.11

- A. $\frac{2A}{\pi t} \sin^2\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$ B. $\frac{A}{\pi t} \sin^2\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$ C. $\frac{2A}{\pi t} \sin^2(\omega_c t)$ D. $\frac{A}{\pi t} \sin^2(\omega_c t)$

题 3.1.12 已知信号频谱如图 P3.1.12 所示,其原函数为()。

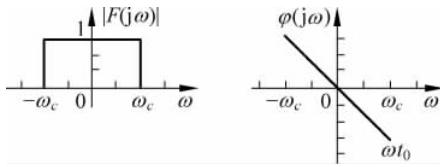


图 P3.1.12

- | | |
|---|---|
| A. $\frac{\omega_0 A}{\pi} \text{sinc}[\omega_c(t-t_0)]$ | B. $\frac{\omega_0 A}{\pi} \text{sinc}[\omega_c(t+t_0)]$ |
| C. $\frac{2\omega_0 A}{\pi} \text{sinc}[\omega_c(t-t_0)]$ | D. $\frac{2\omega_0 A}{\pi} \text{sinc}[\omega_c(t+t_0)]$ |

题 3.1.13 已知 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$, $F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, 则 $f(t)$ 为()。

- | | | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| A. $\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$ | B. $\frac{1}{\pi} e^{j\omega_0 t}$ | C. $\frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t}$ | D. $\frac{1}{\pi} e^{-j\omega_0 t}$ |
|-------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|

题 3.1.14 函数 $F(j\omega) = \cos(2\omega)$ 的傅里叶逆变换()。

- | | |
|---|--|
| A. $\frac{1}{2\pi} [\delta(t+2) + \delta(t-2)]$ | B. $\delta(t+2) + \delta(t-2)$ |
| C. $2[\delta(t+2) + \delta(t-2)]$ | D. $\frac{1}{2} [\delta(t+2) + \delta(t-2)]$ |

题 3.1.15 已知 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$, $F(j\omega)$ 如图 P3.1.15 所示, 对应 $f(t)$ 为()。

- | | |
|--|--|
| A. $\frac{2\omega_1}{\pi} \text{sinc}(\omega_1 t) \cos \omega_0 t$ | B. $\frac{2\omega_1}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t) \cos \omega_1 t$ |
| C. $\frac{2\omega_1}{\pi} \text{sinc}(\omega_1 t) \sin \omega_0 t$ | D. $\frac{2\omega_1}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t) \sin \omega_1 t$ |

题 3.1.16 周期信号 $f(t)$ 如图 P3.1.16 所示, 其傅里叶变换为()。

- | | |
|--|---|
| A. $\pi\delta(\omega) + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega - n\pi)$ | B. $\pi\delta(\omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega - n\pi)$ |
| C. $\pi\delta(\omega) + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega)$ | D. $\pi\delta(\omega) + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\pi) \delta(\omega - n\pi)$ |

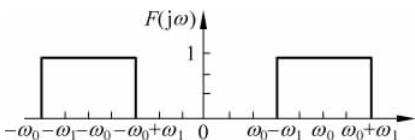


图 P3.1.15

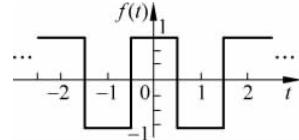


图 P3.1.16

题 3.1.17 周期信号 $f(t)$ 如图 P3.1.17 所示, 其傅里叶变换为()。

- | | |
|---|--|
| A. $\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2 + (-1)^k] \delta(\omega - k\pi)$ | B. $2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2 + (-1)^k] \delta(\omega - k\pi)$ |
| C. $\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2 + (-1)^k] \delta(\omega - k\pi)$ | D. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2 + (-1)^k] \delta(\omega - k\pi)$ |

题 3.1.18 周期信号 $f(t)$ 如图 P3.1.18 所示, 其傅里叶变换为()。

- A. $2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^k}{k\pi} \cdot \delta(\omega - k\omega_0), k \neq 0$ B. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^k}{k\pi}, k \neq 0$
 C. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^k}{k\pi} \cdot \delta(\omega - k\omega_0), k \neq 0$ D. $\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^k}{k\pi} \cdot \delta(\omega - k\omega_0), k \neq 0$

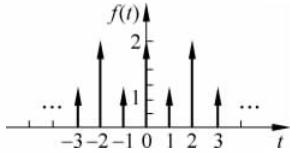


图 P3.1.17

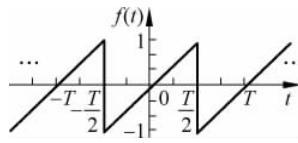


图 P3.1.18

题 3.1.19 已知信号 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-2k)}$, 其傅里叶变换为()。

- A. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{1+(k\pi)^2} \delta(\omega - k\pi)$ B. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{1+(k\pi)^2} \delta(\omega - k\pi)$
 C. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+(k\pi)^2} \delta(\omega - k\pi)$ D. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(k\pi)^2} \delta(\omega - k\pi)$

题 3.1.20 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$ $y(t) = f(2t+3)$ 的傅里叶变换为()。

- A. $\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{j\frac{3\omega}{2}}$ B. $\frac{1}{2}F(2\omega)e^{j\frac{3\omega}{2}}$ C. $\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{3\omega}{2}}$ D. $\frac{1}{2}F(2\omega)e^{-j\frac{3\omega}{2}}$

题 3.1.21 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$, $t d[f(t)]/dt$ 的傅里叶变换为()。

- A. $-F(j\omega) - \omega F'(j\omega)$ B. $F(j\omega) - \omega F'(j\omega)$
 C. $-F(j\omega) + \omega F'(j\omega)$ D. $F(j\omega) - \omega F'(j\omega)$

题 3.1.22 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$ $Y(j\omega) = F(\omega - \omega_0)$ 则对应原函数 $y(t)$ 为()。

- A. $f(t)e^{j\omega_0 t}$ B. $f(t)e^{-j\omega_0 t}$ C. $f(t)e^{j(\omega - \omega_0)t}$ D. $f(t)e^{-j(\omega + \omega_0)t}$

题 3.1.23 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$, $t [f(2t)]$ 的傅里叶变换为()。

- A. $\frac{j}{4}F'\left(\frac{j\omega}{2}\right)$ B. $\frac{j}{2}F'\left(\frac{j\omega}{2}\right)$ C. $\frac{j}{4}F'(j2\omega)$ D. $\frac{j}{2}F'(j2\omega)$

题 3.1.24 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$ 若 a, b 为常数, 且 $y(t) = \frac{d}{dt}f(at-b)$ 则 $Y(j\omega)$ 为()。

- A. $\frac{j\omega}{|a|}F\left(\frac{j\omega}{a}\right)e^{-j\frac{b}{a}\omega}$ B. $\frac{j\omega}{|a|}F\left(\frac{j\omega}{a}\right)e^{-j\frac{a}{b}\omega}$
 C. $\frac{j\omega}{|a|}F\left(\frac{j\omega}{a}\right)e^{j\frac{a}{b}\omega}$ D. $\frac{j\omega}{|a|}F\left(\frac{j\omega}{a}\right)e^{j\frac{b}{a}\omega}$

题 3.1.25 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$ 信号 $(t-2)f(t)$ 的傅里叶变换为()。

- A. $j \frac{d}{d\omega}F(j\omega) + 2F(j\omega)$ B. $j \frac{d}{d\omega}F(j\omega) - 2F(j\omega)$
 C. $\frac{1}{2\pi} \left[-j \frac{d}{d\omega}F(j\omega) + 2F(j\omega) \right]$ D. $\frac{1}{2\pi} \left[j \frac{d}{d\omega}F(j\omega) - 2F(j\omega) \right]$

题 3.1.26 已知周期函数 $f(t)$ 的前 $1/4$ 周期波形如图 P3.1.26 所示, 若 $f(t)$ 是奇函数, 只含偶次谐波, 则 $f(t)$ 在一个函数 $-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$ 周期内的波形为()。

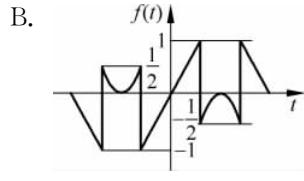
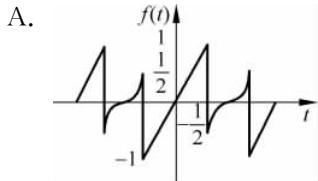
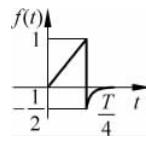
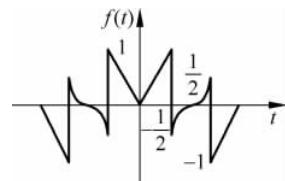
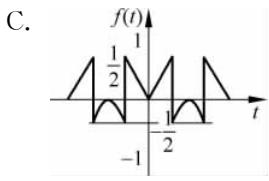


图 P3.1.26



题 3.1.27 如果周期函数满足 $f(t) = -f(-t)$, 则其傅里叶级数中()。

- A. 只有余弦项 B. 只有奇次谐波项
C. 只有正弦项 D. 只有偶次谐波项

题 3.1.28 如图 P3.1.28 所示的信号 $f(t)$ 和 $y(t)$ 的波形, 已知信号 $f(t)$ 的傅里叶变换包含实部和虚部, 表示为 $F(j\omega) = R(j\omega) + jI(j\omega)$, 则信号 $y(t)$ 的傅里叶变换为()。

- A. $\frac{1}{2}R(j\omega)$ B. $2R(j\omega)$ C. $jI(j\omega)$ D. $R(j\omega)$

题 3.1.29 如图 P3.1.29 所示信号为周期信号的一个周期, 其傅里叶级数包含()。

- A. 直流、偶次余弦项 B. 直流、奇次余弦项
C. 直流、偶次正弦项 D. 直流、奇次正弦项

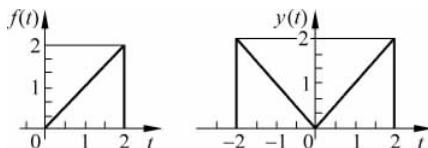


图 P3.1.28

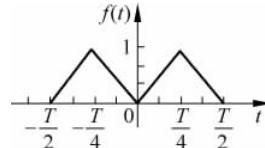


图 P3.1.29

题 3.1.30 已知一个实函数信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 满足 $\ln|F(j\omega)| = -|\omega|$, 当 $f(t)$ 为偶函数时, 函数的表达式为()。

- A. $\frac{-1}{\pi(1+t^2)}$ B. $\frac{t}{\pi(1+t^2)}$ C. $\frac{1}{\pi(1+t^2)}$ D. $\frac{-t}{\pi(1+t^2)}$

题 3.1.31 对频率在 6000~7000Hz 之间的信号进行采样, 无失真恢复信号的最低

采样频率为()。

- A. 3000Hz B. 14 000Hz C. 3500Hz D. 1.2kHz

题 3.1.32 对信号 $\left[\text{sinc}(100t)\right]$ 进行冲激抽样,为了使抽样信号频谱不产生混叠,则奈奎斯特抽样间隔为()。

- A. $\pi/200s$ B. $\pi/100s$ C. $1/400s$ D. $1/200s$

题 3.1.33 已知信号 $f(t) = \text{sinc}(100t) + 2 [\text{sinc}(50t)]$,对信号 $f(2t)$ 进行冲激抽样,则奈奎斯特抽样频率为()。

- A. 100 B. 200 C. 50 D. 400

题 3.1.34 已知信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$,对其进行抽样,抽样间隔为 T ,则抽样信号的频谱为()。

- A. $\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$
 B. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$
 C. $\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)$
 D. $F\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)$

题 3.1.35 已知连续时间信号 $f(t) = \frac{\sin(\beta t)}{\pi t}$ $\beta \leq \pi$ 的频谱为 $G_{2\beta}(\omega)$,若以 $T=2$ 为抽样间隔,对 $f(t)$ 进行抽样,所得的离散时间信号为 $x(2n)$,则 $x(2n)$ 的频谱为()。

- A. $\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{2\beta}(\omega - k\pi)$
 B. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{2\beta}(\omega - k\pi)$
 C. $G_{2\beta}(\omega - \pi)$
 D. $\frac{1}{2} G_{2\beta}(\omega - \pi)$

题 3.1.36 下面说法中正确的是()。

- A. 离散时间信号 $x(n)$ 的绝对可和是其离散时间傅里叶变换存在的充分条件
 B. 非周期离散时间信号 $x(n)$ 的偶部,频谱为 Ω 的实偶函数
 C. 非周期离散时间信号 $x(n)$ 的虚部,频谱为 Ω 的虚奇函数
 D. $x(n)$ 是实值的,则其频谱 $X(\Omega)$ 的模是 Ω 的奇函数

题 3.1.37 下面说法中不正确的是()。

- A. 离散时间信号 $x_0(n) = 0.5^n u(n)$ 的大部分频谱集中在 $\Omega=0$ 的低频附近
 B. 离散时间信号 $x_1(n) = (-0.5)^n u(n)$ 的大部分频谱集中在 $\Omega=\pi$ 的高频附近
 C. 离散时间低通滤波器 $h_{Lp}(n)$ 与高通滤波器 $h_{Hp}(n)$ 的关系为 $h_{Hp}(n) = e^{j\pi n} h_{Lp}(n)$
 D. 若 $x_2(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, $x_2(n)$ 的频谱为周期函数,周期为 π

题 3.1.38 关于傅里叶变换,下列()说法是错误的。

- A. 时域是非周期连续的,则频域是非周期连续的
 B. 时域是周期离散的,则频域也是周期离散的
 C. 频域不是周期连续的,则时域也不是周期连续的

D. 时域是非周期离散的,则频域是周期连续的

题 3.1.39 单位抽样序列 $\delta(n)$ 的傅里叶变换等于()。

- A. 2π B. π C. 1 D. $\pi/2$

题 3.1.40 某 LTI 系统的频率特性已知为 $H(j\omega) = \frac{a+j\omega}{a-j\omega}$, 其中 $a>0$, 则此系统的

幅频特性 $|H(j\omega)|$ 为()。

- A. 1 B. $1/2$ C. $\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$ D. $2\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$

题 3.1.41 如图 P3.1.41 所示电路的频率响应 $H(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{F(j\omega)}$ 为()。

- A. $\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$ B. $\frac{1}{j\omega RC + 1}$ C. $\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{j\omega RC + 1}$ D. $\frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$

题 3.1.42 LTI 系统如图 P3.1.42 所示,其频率响应 $H(j\omega)$ 为()。

- A. $\frac{1}{4-j\omega}$ B. $\frac{1}{4+j\omega}$ C. $4-j\omega$ D. $4+j\omega$

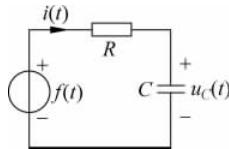


图 P3.1.41

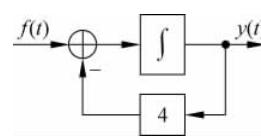


图 P3.1.42

题 3.1.43 级联系统如图 P3.1.43 所示,其中各子系统的单位冲激响应分别为 $h_1(t) = \delta(t)$, $h_2(t) = u(t)$, $h_3(t) = \frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$, 因此该级联系统总的频响特性 $H(j\omega)$ 为()。

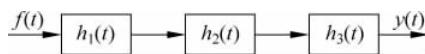


图 P3.1.43

- A. 1 B. $\frac{\sin\omega}{\pi\omega} + \pi\delta(\omega)$ C. $G_{2\omega_0}(\omega)$ D. $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

题 3.1.44 已知连续系的频率特性为 $H(j\omega) = \begin{cases} +j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases}$, 该系统对于 $f(t) = \sin 3t$ 的响应 $y(t)$ 为()。

- A. $j\sin 3t$ B. $\sin 3t$ C. $-j\cos 3t$ D. $\cos 3t$

题 3.1.45 一个 LTI 系统对应输入 $f(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ 的响应为 $y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)$, 其系统单位激响应为()。

- A. $\frac{3}{2}(e^{-t} + e^{-4t})u(t)$ B. $\frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-4t})u(t)$

C. $\frac{3}{2}(e^t + e^{4t})u(t)$

D. $\frac{3}{2}(e^t - e^{4t})u(t)$

题 3.1.46 一个 LTI 系统的频率响应为 $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)^3}$, 该系统可由()。

- A. 三个一阶系统并联
- B. 三个一阶系统级联
- C. 一个二阶系统和一个一阶系统并联
- D. 一个二阶系统和一个一阶系统级联
- E. 以上全对

题 3.1.47 如图 P3.1.47 所示, 系统 $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \cos 10t$, $H(j\omega)$ 是图示的带通滤波器, 系统响应 $y(t)$ 为()。

- A. $2\cos 11t + \cos 9t$
- B. $2\cos 11t - \cos 9t$
- C. $2\cos 9t - \cos 11t$
- D. $2\cos 9t + \cos 11t$

题 3.1.48 系统如图 P3.1.48 所示, $h(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t}$, 所以整个系统是一个理想()

滤波器。

- A. 低通
- B. 高通
- C. 带通
- D. 全通

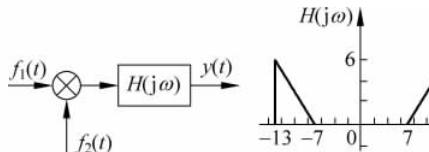


图 P3.1.47

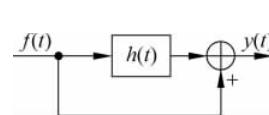


图 P3.1.48

题 3.1.49 系统如图 P3.1.49 所示, 其中 $f(t) = \cos t$, $H_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 5/2 \\ 0, & |\omega| > 5/2 \end{cases}$,

$H_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 5 \\ 0, & |\omega| > 5 \end{cases}$, 则系统输出为()。

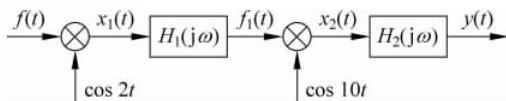


图 P3.1.49

- A. $\frac{9}{4}\cos 9t$
- B. $\frac{1}{4}\cos 11t$
- C. $\frac{1}{4}(\cos 11t + \cos 9t)$
- D. $\frac{1}{4}(\cos 11t - \cos 9t)$
- E. 0

题 3.1.50 理想低通滤波器频响特性 $H(j\omega) = G_{2\pi}(\omega)$, 输入 $f(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$, 系统响应为()。

- A. $\text{sinc}(\pi t)$ B. $\text{sinc}(2\pi t)$ C. $\text{sinc}(5\pi t)$ D. $\text{sinc}(6\pi t)$

题 3.1.51 系统如图 P3.1.51 所示, $f(t) = 20 \cos 100t \cos^2(10^4 t)$, 理想低通滤波器频率响应特性 $H(j\omega) = G_{240}(\omega)$ 系统响应 $y(t)$ 为()。

- A. $10 \cos(100t)$
 B. $100 \cos(10t)$
 C. $10 \cos(100t) + 5 \cos(2000t)$
 D. $10 \cos(100t) + 5 \cos(19900t)$



图 P3.1.51

题 3.1.52 系统如图 P3.1.52(a)所示 $f(t) = A \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t)$, $H(j\omega)$ 波形如图 P3.1.52(b)所示, 其中 $\omega_1 = 2\pi 10^3$ (rad/s), $\omega_2 = 2\pi 10^6$ (rad/s), $T = 10^{-5}$ (s), 响应 $y(t)$ 为()。

- A. $A \cdot 10^5 \cos(2\pi 10^3 t)$
 B. $2A \cdot 10^5 \cos(2\pi 10^5 t)$
 C. $2A \cdot 10^5 \cos(2\pi 10^6 t)$
 D. $2A \cdot 10^5 \cos(2\pi 10^3 t)$

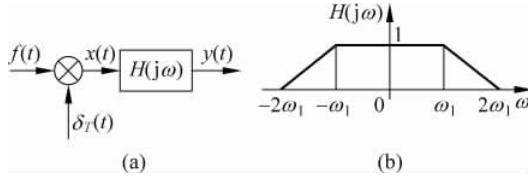


图 P3.1.52

题 3.1.53 系统如图 P3.1.53(a)所示, $f(t)$ 的傅里叶变换如图 P3.1.53(b)所示, $y(t)$ 的频谱为图 P3.1.53(c)中的()。

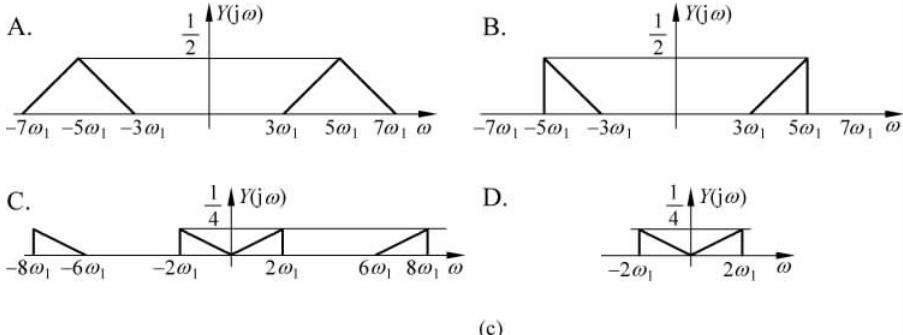
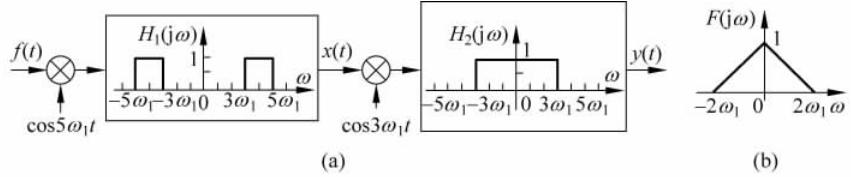


图 P3.1.53

题 3.1.54 系统如图 P3.1.54(a)所示, $F_1(j\omega)$ 、 $H(j\omega)$ 如图 P3.1.54(b)和图 P3.1.54(c)所示, $f_2(t) = \cos \omega_0 t$, $\omega_0 > 2\omega_m$ 系统输出 $y(t)$ 为()。

- A. $\frac{A}{\pi t} \cdot \sin(\omega_m t)$ B. $\frac{2A}{\pi t} \cdot \sin(\omega_m t)$ C. $\frac{A}{2\pi t} \cdot \sin(\omega_m t)$ D. $\frac{A}{\pi t} \cdot \sin(\omega_0 t)$

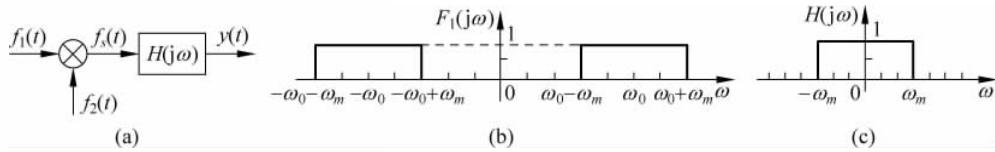


图 P3.1.54

二、分析与计算

题 3.2.1 求下列周期信号的基波角频率 Ω 和周期 T 。

- | | |
|---|--|
| (1) $\cos[\pi(t-2)]$ | (2) $\cos(2\pi t) + \cos(3\pi t) + \cos(5\pi t)$ |
| (3) $\cos(2t) + \sin(5t)$ | (4) $\cos(\pi t) + \cos(3\pi t) + \cos(5\pi t)$ |
| (5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ | (6) e^{j100t} |

题 3.2.2 用计算傅里叶系数的方法,求图 P3.2.2 所示周期函数的傅里叶系数(三角形式或指数形式)。

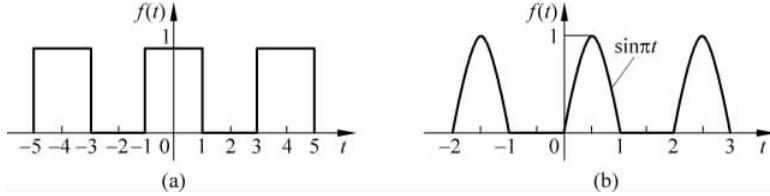


图 P3.2.2

题 3.2.3 利用奇偶性判断图 P3.2.3 示各周期信号的傅里叶系数中所含有的频率分量。并计算各个周期信号的傅里叶系数。

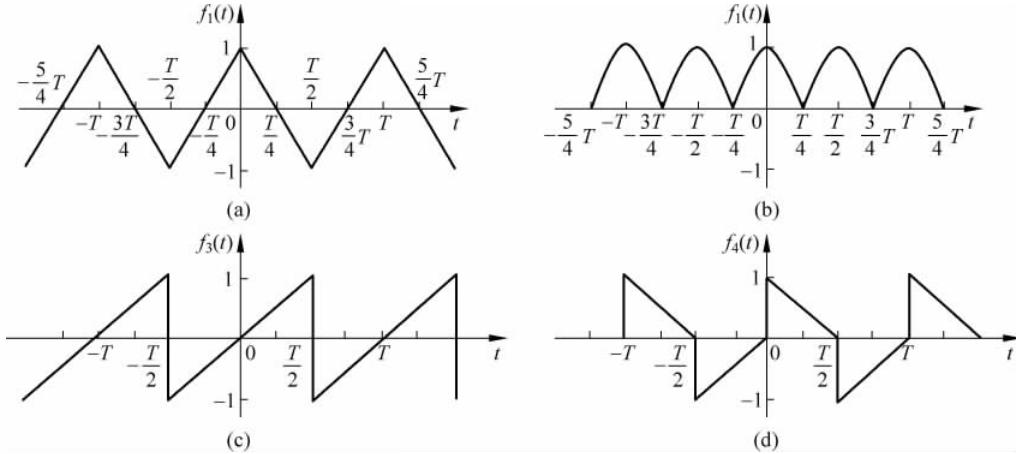


图 P3.2.3

题 3.2.4 试求图 P3.2.4 示周期信号的频谱函数。图 P3.2.4(b) 中冲激函数的强度均为 1。

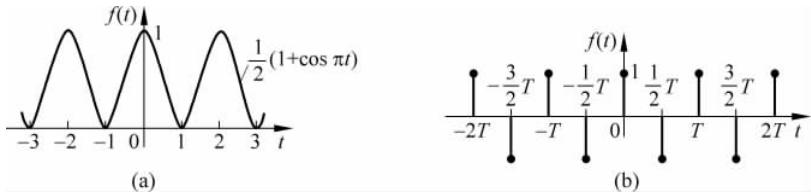


图 P3.2.4

题 3.2.5 某 1Ω 电阻两端的电压 $v(t)$ 如图 P3.2.5 所示,

- (1) 求 $v(t)$ 的三角形式傅里叶系数。
- (2) 利用(1)的结果和 $v\left(\frac{1}{2}\right)=1$, 求下列无穷级数之和 $S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$ 。
- (3) 求 1Ω 电阻上的平均功率和电压有效值。
- (4) 利用(3)的结果求下列无穷级数之和 $S=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots$ 。

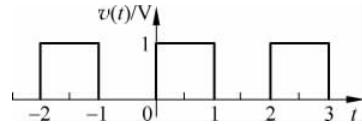


图 P3.2.5

题 3.2.6 一周期为 T 的周期信号 $f(t)$, 已知其指数形式的傅里叶系数为 F_n , 求下列周期信号的傅里叶系数。

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| (1) $f_1(t)=f(t-t_0)$ | (2) $f_2(t)=f(-t)$ |
| (3) $f_3(t)=\frac{df(t)}{dt}$ | (4) $f_4(t)=f(at), a>0$ |

题 3.2.7 根据傅里叶变换对称性求下列函数的傅里叶变换。

- (1) $f(t)=\frac{\sin[2\pi(t)]}{\pi t}, -\infty < t < \infty$
- (2) $f(t)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}, -\infty < t < \infty$
- (3) $f(t)=\left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right]^2, -\infty < t < \infty$

题 3.2.8 求下列信号的傅里叶变换。

- (1) $f(t)=e^{-jt}\delta(t-2)$
- (2) $f(t)=e^{-3(t-1)}\delta'(t-1)$
- (3) $f(t)=\operatorname{sgn}(t+3)-\operatorname{sgn}(t-3)$
- (4) $f(t)=e^{-2t}u(t+1)$
- (5) $f(t)=u\left(\frac{t}{2}-1\right)$
- (6) $f(t)=e^{-t} \cdot \cos t$

题 3.2.9 若已知 $F[f(t)]=F(j\omega)$, 试求下列函数的频谱函数表达式。

- (1) $tf(2t)$
- (2) $t \frac{df(t)}{dt}$
- (3) $(1-t)f(1-t)$
- (4) $e^{jt}f(3-2t)$

(5) $\frac{df(t)}{dt} * \frac{1}{\pi t}$

(6) $f(-2t)$

(7) $(t-1)f(t)$

(8) $(t-2)f(-2t)$

(9) $t \frac{df(t)}{dt}$

(10) $f(2-2t)$

(11) $(2-t)f(2-t)$

(12) $f(2t-6)$

题 3.2.10 求下列函数的傅里叶逆变换 $f(t)$ 。

(1) $F(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$

(2) $F(j\omega) = 2\cos(3\omega)$

(3) $F(j\omega) = \sum_{n=0}^2 \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{-j(2n+1)\omega}$

题 3.2.11 试用时域微分、积分性质,求图 P3.2.11 信号的频谱。

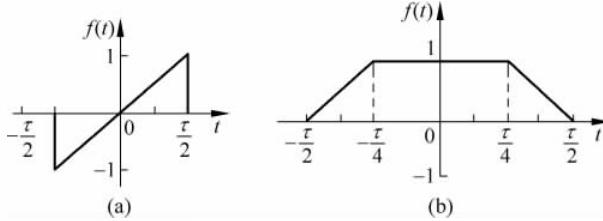


图 P3.2.11

题 3.2.12 试用下列方式求图 P3.2.12 所示信号的频谱函数。

(1) 利用延时和线性性质(门函数的频谱可利用已知结果)。

(2) 利用时域的积分定理。

(3) 将 $f(t)$ 看作门函数 $g_2(t)$ 与冲激函数 $\delta(t+2), \delta(t-2)$ 的卷积之和。

题 3.2.13 如图 P3.2.13 信号 $f(t)$ 的频谱为 $F(j\omega)$,求下列各值(不必求出 $F(j\omega)$)

(1) $F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

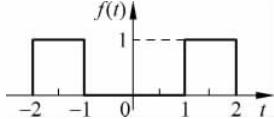


图 P3.2.12

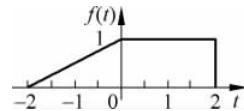


图 P3.2.13

题 3.2.14 利用能量等式 $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$ 计算下列积分的值。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(t)}{t} \right]^2 dt$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

题 3.2.15 已知如图 P3.2.15 所示信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为

$$F[x(t)] = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)}$$

试根据傅里叶变换的性质(不做积分运算)求:

- (1) $\phi(j\omega)$ (2) $X(0)$
 (3) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$ (4) $F^{-1}\{Re[X(\omega)]\}$ 的图形

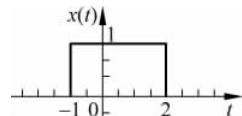


图 P3.2.15

题 3.2.16 某 LTI 系统, 其输入为 $f(t)$, 输出为 $y(t) =$

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} r\left(\frac{x-a}{a}\right) f(x-2) dx.$$

式中 a 为常数, 且已知 $r(t) \leftrightarrow R(j\omega)$, 求该系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。

题 3.2.17 某 LTI 系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{2-j\omega}{2+j\omega}$, 若系统输入 $f(t) = \cos(2t)$, 求该系统的输出 $y(t)$ 。

题 3.2.18 图 P3.2.18 所示信号 $f(t)$, 已知其傅里叶变换式 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$, 利用傅里叶变换的性质(不作积分变换), 求:

- (1) $\phi(\omega)$
 (2) $F(0)$
 (3) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$
 (4) $F^{-1}\{Re[F(\omega)]\}$ 的图形。

题 3.2.19 如图 P3.2.19 的系统, 其输出是输入的平方, 即 $y(t) = f^2(t)$ (设 $f(t)$ 为实函数)。该系统是线性的吗?

(1) 如 $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, 求 $y(t)$ 的频谱函数(或画出频谱图)。

(2) 如 $f(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos(2t)$, 求 $y(t)$ 的频谱函数(或画出频谱图)。

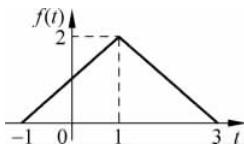


图 P3.2.18

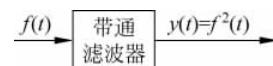


图 P3.2.19

题 3.2.20 有限频带信号 $f(t)$ 的最高频率为 100Hz, 若对下列信号进行时域取样, 求最小取样频率 f_s 。

- (1) $f(3t)$ (2) $f^2(t)$ (3) $f(t) * f(2t)$ (4) $f(t) + f^2(t)$

题 3.2.21 一个 LTI 系统的频率响应。 $H(j\omega) = \begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}}, & -6 \text{ rad/s} < \omega < 0 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}}, & 0 < \omega < 6 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 若输入

$f(t) = \frac{\sin(3t)}{t} \cos(5t)$, 求该系统的输出 $y(t)$ 。

题 3.2.22 如图 P3.2.22(a)所示的系统,带通滤波器的频率响应如图 P3.2.22(b)所示,其相频特性 $\varphi(j\omega)=0$,若输入 $f_1(t) = \frac{\sin(200\pi t)}{200\pi t}$, $f_2(t) = \cos(1000t)$ 。求输出信号 $y(t)$ 。

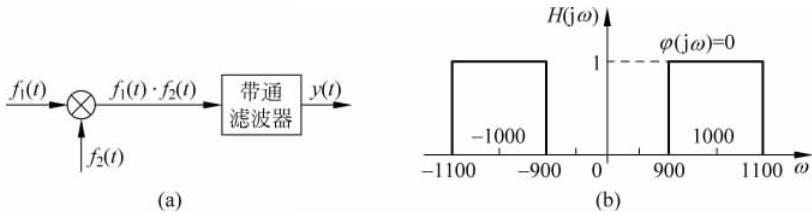


图 P3.2.22

题 3.2.23 有限频带信号 $f(t) = 5 + 2\cos(2\pi f_1 t) + \cos(4\pi f_1 t)$, 其中 $f_1 = 1\text{kHz}$, 求 $f_s = 800\text{Hz}$ 的冲激函数序列 $\delta_T(t)$ 进行取样(请注意 $f_s < f_1$)。

- (1) 画出 $f(t)$ 及取样信号 $f_s(t)$ 在频率区间 $(-2\text{kHz}, 2\text{kHz})$ 的频谱图。
- (2) 若将取样信号 $f_s(t)$ 输入到截止频率 $f_c = 500\text{Hz}$, 幅度为 1 的理想低通滤波器, 即其频率响应 $H(j\omega) = H(j2\pi f) = \begin{cases} T_s, & |f| < 500\text{Hz} \\ 0, & |f| > 500\text{Hz} \end{cases}$, 画出滤波器的输出信号的频谱, 并求出输出信号 $y(t)$ 。

题 3.2.24 求图 P3.2.24 输出电压电路中,输出电压 $v_C(t)$ 对输入电流 $i_s(t)$ 的频率响应 $H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{I_s(j\omega)}$, 为了能无失真的传输,试确定 R_1 、 R_2 的值。

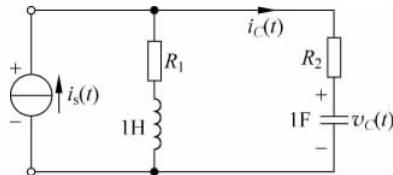


图 P3.2.24

题 3.2.25 系统如图 P3.2.25 所示。已知 $f(t) = A \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t)$, $h(t)$ 波形如图所示,其中 $\omega_1 = 2\pi 10^3 (\text{rad/s})$, $\omega_2 = 2\pi 10^6 (\text{rad/s})$, $T = 10^{-5} (\text{s})$, 求系统的响应 $y(t)$ 。

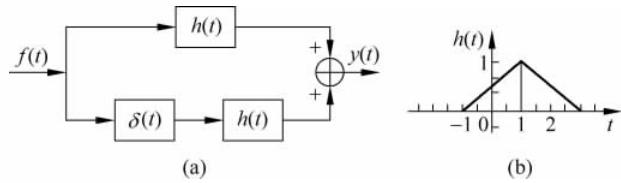


图 P3.2.25

题 3.2.26 系统如图 P3.2.26(a)所示, $F_1(j\omega)$ 、 $H(j\omega)$ 如图 P3.2.26(b)所示, $f_2(t) = \cos\omega_0 t$, $\omega_0 > 2\omega_m$ ($F_1(j\omega)$ 的最高频率), 做出系统输出 $y(t)$ 的频谱图。

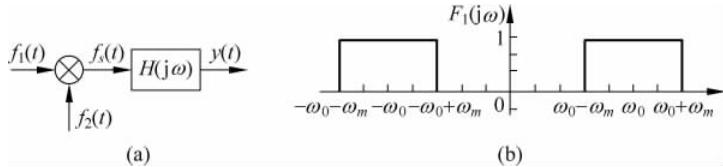


图 P3.2.26

题 3.2.27 系统如图 P3.2.27(a)所示, $F(j\omega)$ 、 $H(j\omega)$ 如图 P3.2.27(b)、P3.2.27(c)所示, 做出系统输出 $y(t)$ 的频谱图。

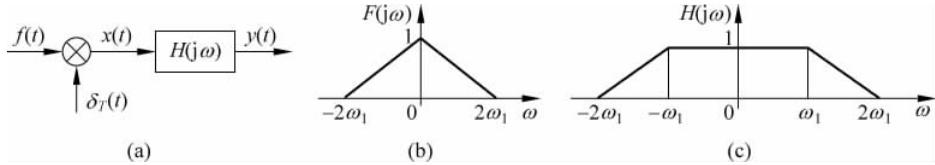


图 P3.2.27

题 3.2.28 系统如图 P3.2.28(a)所示, $F(j\omega)$ 如图 P3.2.28(b)所示, 做出系统输出 $y(t)$ 的频谱图。

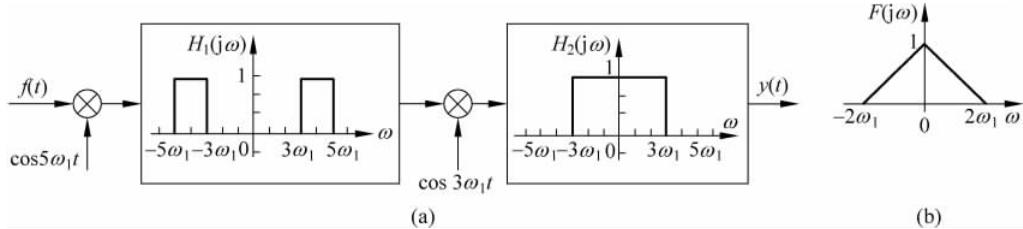


图 P3.2.28

题 3.2.29 求离散 $f(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($0 \leq k \leq 3$) ($N=4$) 周期信号的傅里叶系数。

题 3.2.30 已知信号 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\Omega})$, 求下述格式的值。

- (1) $X(e^{j0})$ (2) $X(e^{j\Omega})$ (3) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) d\Omega$ (4) $\operatorname{Re}[X(e^{j\Omega})]$