

第 3 章

CHAPTER 3

离散傅里叶变换

3.1 重点与难点

离散傅里叶变换(DFT)是数字信号处理中的核心内容。因为通过 DFT 使信号在频域离散化,从而使得计算机在频域进行信号处理成为可能,而且 DFT 有多种快速算法,可使信号处理速度大大提高。可以说,凡是利用快速信号处理的领域都可能用到 DFT。

本章重点: 离散傅里叶变换的定义、性质,DFT 和 Z 变换以及 DTFT 的关系,DFT 的物理意义,频域采样理论及 DFT 在信号频谱分析、快速卷积等方面的应用。

本章难点: DFT 的引出,DFT 的共轭对称性,频域采样理论,用 DFT 进行谱分析的误差问题。

3.2 知识结构

本章包括离散傅里叶变换的几种形式、离散傅里叶级数、离散傅里叶变换、频域采样理论、DFT 的应用等五部分,其知识结构图如图 3-1 所示。

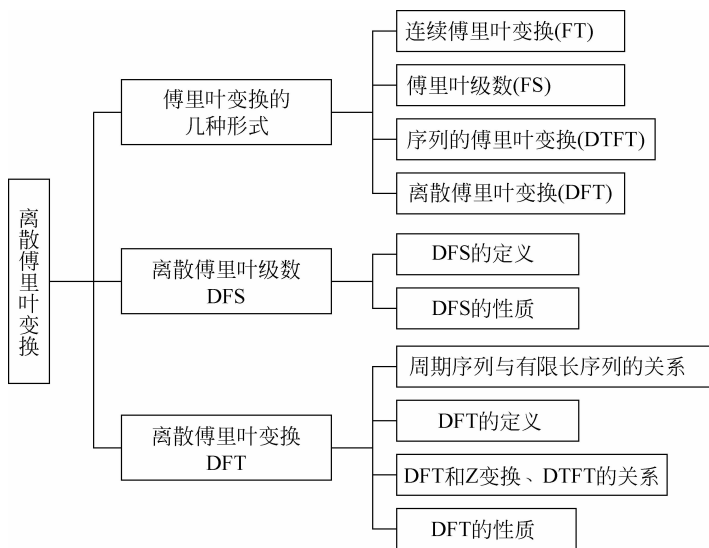


图 3-1 第 3 章的知识结构图

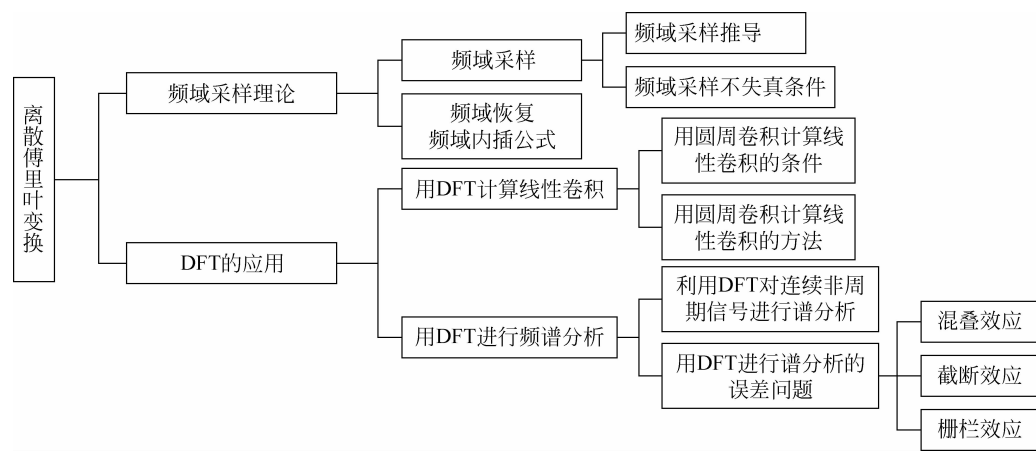


图 3-1 （续）

3.3 内容提要

3.3.1 傅里叶变换的几种形式

在学习离散傅里叶变换(DFT)之前,先对傅里叶变换的 4 种形式的变换表达式及特点做如下归纳,如表 3-1 所示。

表 3-1 4 种傅里叶变换形式的归纳

名 称	变换表达式	时 间 函 数	频 率 函 数
连续傅里叶变换(FT)	$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$	连续和非周期	非周期和连续
傅里叶级数(FS)	$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$	连续和周期(T_p)	非周期和离散 ($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)
序列的傅里叶变换(DTFT)	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$	离散(T)和非周期	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和连续
离散傅里叶变换(DFT)	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$	离散(T)和周期(T_p)	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)

要点:

(1) 时域和频域变换的一般规律是,一个域的离散对应另一个域的周期延拓,一个域的

连续必定对应另一个域的非周期。

(2) 讨论离散傅里叶变换(DFT),要从周期序列的离散傅里叶级数(DFS)入手。

3.3.2 离散傅里叶级数(DFS)

1. DFS 的定义

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}\end{aligned}$$

式中, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 均为周期为 N 点的周期序列。周期序列与有限长序列有着本质的联系。

要点: 周期序列不存在 Z 变换和序列傅里叶变换(DTFT)。

2. DFS 的性质

1) 线性

设

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k), \quad \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \tilde{Y}(k)$$

则

$$\text{DFS}[a\tilde{x}(n) + b\tilde{y}(n)] = a\tilde{X}(k) + b\tilde{Y}(k)$$

其中 a, b 为任意常数。

2) 移位特性

设

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

则

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk} \tilde{X}(k)$$

3) 周期卷积

若

$$\tilde{F}(k) = \tilde{X}(k) \tilde{Y}(k)$$

则

$$\tilde{f}(n) = \text{IDFS}[\tilde{F}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m)$$

要点: 只有同周期的两个周期序列才能进行周期卷积,且卷积后周期不变。

3.3.3 离散傅里叶变换

1. 周期序列与有限长序列的关系

设 $x(n)$ 为有限长序列,长度为 N 。我们把它看成周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期(取主值),而把周期序列 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓,即

$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

2. DFT 的定义

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

要点: DFT 适用于有限长序列, $x(n)$ 和 $X(k)$ 只有 N 个值, 但隐含周期性。

3. DFT 和 Z 变换以及 DTFT 的关系

$$X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \text{DFT}[x(n)]$$

即

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

上式说明, $X(k)$ 是 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样, 也可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 其采样间隔为 $\omega = \frac{2\pi}{N}$, 这就是 DFT 的物理意义。DFT 与 Z 变换以及序列傅里叶变换 DTFT 的关系如图 3-2 所示。

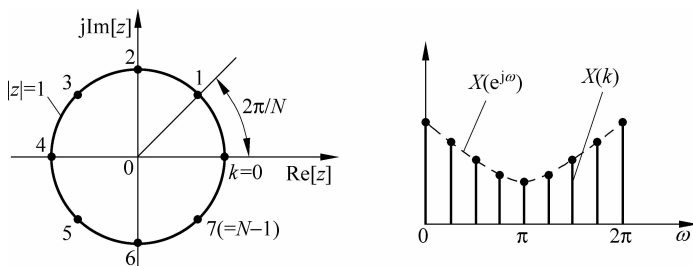


图 3-2 DFT 与 Z 变换以及 DTFT 的关系

4. DFT 的性质

1) 线性

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

式中, a, b 为任意常数。该式可根据 DFT 定义证明。若两个序列长度不等, 取长度最大者, 将短的序列通过补零加长, 注意此时 DFT 与未补零的 DFT 不相等。

2) 圆周移位

(1) 圆周移位定义

$$y(n) = x((n+m))_N \cdot R_N(n)$$

(2) 时域圆周移位定理

$$Y(k) = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$$

(3) 频域圆周移位定理

若 $Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$, 则

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

3) 圆周卷积

若 $Y(k) = X_1(k)X_2(k)$, 则

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)$$

或

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N R_N(n)$$

上式所表示的运算称为圆周卷积(也叫循环卷积), 通常简记为 $y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$ 。

4) 共轭对称性

DFT 的共轭对称性可概括为图 3-3。

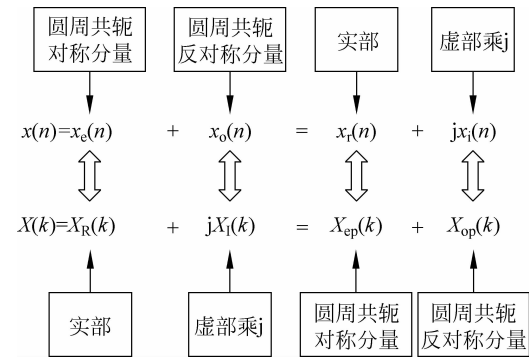


图 3-3 序列的两种表示与其 DFT 的对应关系示意图

注意以下几个问题:

(1) DFT 的共轭对称性的推导利用了共轭复序列 $x^*(n)$ 的性质:

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k)$$

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)$$

(2) 这里讨论的 DFT 对称性是关于序列区间中心 $N/2$ 点的对称, 称为圆周对称, 而在第 2 章讨论的序列傅里叶变换 DTFT 的对称性是指关于坐标原点的对称性。两者对称序列的定义见表 3-2。

表 3-2 DFT 和 DTFT 中的对称序列定义

名 称	DFT 中的对称序列	名 称	DTFT 中的对称序列
圆周共轭对称序列	$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$	共轭对称序列	$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$
圆周共轭反对称序列	$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$	共轭反对称序列	$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$
满足的关系	$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n)$ $x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n)$	满足的关系	$x_e(n) = x_e^*(-n)$ $x_o(n) = -x_o^*(-n)$

(3) 任何有限长序列 $x(n)$ 有两种表示:

① 表示成圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和, 即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

② 表示为实部 $x_r(n)$ 及虚部 $x_i(n)$ 之和, 即

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

这两种表示所对应的 DFT 特点如图 3-3 所示。

(4) 若 $x(n)$ 是实序列, 则 $X(k)$ 只有圆周共轭对称分量。即满足

$$X(k) = X^*(N-k)$$

若 $x(n)$ 是纯虚序列, 则 $X(k)$ 只有圆周共轭反对称分量, 即满足

$$X(k) = -X^*(N-k)$$

结论: 以上这两种情况, 只要知道一半数目的 $X(k)$ 就可以了, 另一半可利用对称性求得。

3.3.4 频域采样理论

类似于时域采样定理, 频域采样定理包括以下内容:

1. 频域采样

对一个任意的绝对可和的序列 $x(n)$ 的 $X(z)$ 在单位圆上进行等距离采样, 得到

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{nk}$$

对于 M 点的有限长序列 $x(n)$, 频域采样不失真的条件是频域采样点数 N 要大于或等于时域序列长度 M (时域采样点数), 即满足

$$N \geq M$$

此时可得到

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) R_N(n) = x(n), \quad N \geq M$$

这一概念非常重要, 通过频域采样得到频域函数在 $[0, 2\pi]$ 上均匀采样的 N 点, 再对其进行 N 点 IDFT, 得到的序列是原序列以 N 为周期进行周期延拓后的主值序列。若不产生时域混叠现象, 则采样点数就必须满足一定的关系, 即 $N \geq M$, 此时才可由频域采样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$, 这就是频域采样定理。

比较时域采样定理: 一个频带有限的信号可以进行时域采样而不产生频域混叠现象, 条件是采样频率 $f_s \geq 2f_c$ 。其中 f_c 为信号最高频率。

2. 频域恢复——频域内插公式

如果频域采样满足频域采样定理, 则可以用频率采样值恢复序列的 Z 变换:

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

这就是用 N 个频域采样来恢复 $X(z)$ 的内插公式。它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z)$$

其中

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

称为内插函数。

同样, 频率响应的内插公式为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

其中, $\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$ 为内插函数。

频域内插函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性如图 3-4 所示。可以看出满足

$$\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & \omega = \frac{2\pi}{N}k \\ 0, & \omega = \frac{2\pi}{N}i, i \neq k \end{cases}$$

整个 $X(e^{j\omega})$ 就是由 N 个 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 函数被 N 个 $X(k)$ 加权求和构成。很明显, 在每个采样点上 $X(e^{j\omega})$ 的值精确等于 $X(k)$, 即 $X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(k) \quad k=0, 1, \dots, N-1$, 而各采样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值, 则由各采样点的加权内插函数 $X(k)\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 在所求 ω 点上的值的叠加而得, 如图 3-5 所示。

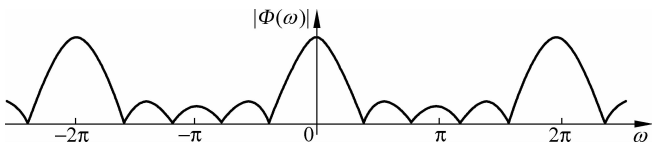


图 3-4 内插函数幅度特性($N=5$)

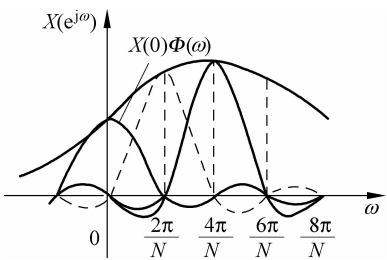


图 3-5 由内插函数求频率响应的示意图

表 3-3 给出了频域与时域采样恢复的比较, 可以看到时域采样与频域采样的内在关系, 它们具有某种对偶关系。

表 3-3 频域与时域采样恢复的比较

	时域角度	频域角度
时域采样的恢复	内插 $x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \varphi_n(t)$ 其中, 内插函数为 $\varphi_n(t) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}$	加低通, 频域截断 $X(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega) \cdot G(j\Omega)$ 其中, 理想低通为 $G(j\Omega) = \begin{cases} T, & \Omega < \Omega_s/2 \\ 0, & \Omega \geq \Omega_s/2 \end{cases}$

续表

	时域角度	频域角度
频域采样的恢复	加矩形窗, 时域截断 $x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n)$	内插 $X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z)$ 其中, 内插函数为 $\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$

3.3.5 用 DFT 计算线性卷积

1. 用圆周卷积计算线性卷积的条件

两个有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 其中

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}, \quad x_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

有

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n)$$

即 L 点圆周卷积 $y_c(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。

圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

要点:

(1) 线性卷积的对象可以是有限长或无限长非周期序列。若两个序列长度分别为 N_1 和 N_2 , 则卷积后的序列长度为 $L = N_1 + N_2 - 1$ 。

(2) 圆周卷积的对象是两个同长度(若长度不同, 可用补零的方法达到相同长度)的有限长序列, 并且圆周卷积的结果也是具有同一长度的有限长序列。

2. 用圆周卷积计算线性卷积的方法

用圆周卷积计算线性卷积的实现框图如图 3-6 所示。

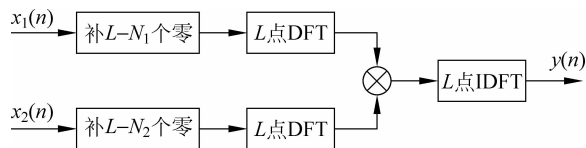


图 3-6 圆周卷积代替线性卷积的实现框图

图 3-6 中, $L \geq N_1 + N_2 - 1$, 并且 DFT 与 IDFT 子程序可以共用, 而且通常用快速算法 (FFT) 来实现, 故圆周卷积也称为快速卷积。

3.3.6 用 DFT 进行频谱分析

1. 利用 DFT 对连续非周期信号进行谱分析

由 $X_a(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt$, 可推得

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)]$$

由 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df$, 可推得

$$x(n) = x_a(nT) = F \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)]$$

上面两式分别说明连续非周期信号的频谱可以通过对连续信号采样后进行 DFT 并乘以系数 T 的方法来近似得到, 而对该 DFT 值做反变换并除以系数 $\frac{1}{T}$ 就得到时域采样信号。

有关参数公式为

$$F = \frac{1}{T_p} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT}, \quad T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{NF} = \frac{T_p}{N}$$

其中, T 为时域采样间隔, 即时间分辨率; F 为频域抽样间隔, 即频率分辨率。 N 为采样点数, T_p 为信号的记录长度。

2. 用 DFT 进行谱分析的误差问题

用 DFT 逼近连续非周期信号的傅里叶变换过程中除了对幅度的线性加权外, 由于用到了采样与截断的方法, 因此也会带来一些可能产生的问题, 使谱分析产生误差, 例如, 混叠效应、截断效应、栅栏效应等。

1) 混叠效应

利用 DFT 对连续时间信号进行谱分析, 首先要对连续时间信号进行采样。为避免混叠失真, 要求满足采样定理: $f_s \geq 2f_c$, f_s 为采样频率, f_c 为信号最高频率 (即谱分析范围)。注意并不是 f_s 越高越好, 它还要受采样间隔 F 的约束。

$$F = \frac{f_s}{N} \geq 2 \frac{f_c}{N}$$

在采样点数 N 给定时, 一味提高采样频率 f_s , 必然导致 F 增加, 即频率分辨率下降; 反之, 若要提高频率分辨率即减小 F , 则导致减小 f_s , 最终必须减小信号的高频容量 f_c 。

在 f_c 与 F 参数中, 保持其中一个不变而使另一个性能得以提高的唯一办法, 就是增加记录长度内的点数 N 。记录长度 T_p 和 N 可以按照 $N > 2 \frac{f_c}{F}$, $T_p \geq \frac{1}{F}$ 两式进行选择。

2) 截断效应

在实际中, 要把观测的信号 $x(n)$ 限制在一定的时间间隔之内, 即采取截断数据的过程。时域的截断在数学上的意义为原无限长时间信号乘上一个窗函数, 使原时间函数成为两端突然截断, 中间为原信号与窗函数相乘的结果。时域两函数相乘, 在频域是其频谱的卷积。由于窗函数不可能取无限宽, 即其频谱不可能为一冲激函数, 信号的频谱与窗函数的卷积必然产生展宽和拖尾现象, 造成频谱的泄漏现象。为了减小截断效应的影响, 截断时要根据具体的情况, 选择适当形状的窗函数, 如汉宁窗或海明窗等。

3) 栅栏效应

由于DFT是有限长序列的频谱等间隔采样所得到的样本值,这就相当于透过一个栅栏去观察原来信号的频谱,因此必然有一些地方被栅栏所遮挡,这些被遮挡的部分就是未被采样的部分,这种现象称为栅栏效应。

但要注意,由于栅栏效应,使得被分析的频谱变得较为稀疏,为此,在采样样本序列 $x(n)$ 后面补零,在数据长度 T_p 不变的情况,可以改变频谱的频率取样密度,得到高密度频谱。但因在 $x(n)$ 后面补零并没有增加新的信息量,改善的仅是栅栏效应。所以补零是不能提高频率分辨率的,即得不到高分辨率谱。

3. DFT 参数选择的一般原则

(1) 确定信号的最高频率 f_c 后,为防止混叠,采样频率 $f_s \geq (3 \sim 6)f_c$;

(2) 根据实际需要,即根据频谱的“计算分辨率”需要确定频率采样两点之间的间隔 F , F 越小频谱越密,计算量也越大;

(3) F 确定后,就可确定做DFT所需的点数 N ,即 $N = \frac{f_s}{F}$;

为了使用后面一章将要介绍的基2-FFT算法,一般取 $N = 2^M$ 。

(4) f_s 和 N 确定后,则可确定所需的数据长度,即 $T_p = \frac{N}{f_s} = NT_s$ 。

要点:

$F = \frac{f_s}{N}$ 称为“计算分辨率”,即该分辨率是靠计算得出的,但它并不能反映真实的频率分辨率。能力。 $F = \frac{1}{T_p}$ 称为“物理分辨率”,数据的有效长度越大,频率分辨能力越强。

3.4 典型例题分析

例 3-1 $x(n)$ 为长为 N 的有限长序列, $x_e(n)$, $x_o(n)$ 分别为 $x(n)$ 的圆周共轭偶部及奇部,也即

$$x_e(n) = x_e^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_o(n) = -x_o^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

证明: $\text{DFT}[x_e(n)] = \text{Re}[X(k)]$, $\text{DFT}[x_o(n)] = \text{jIm}[X(k)]$

分析: 利用共轭复序列 $x^*(n)$ 的性质: $\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k)$, $\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)$

证明: $\text{DFT}[x_e(n)] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n)] + \frac{1}{2}\text{DFT}[x^*(N-n)]$

$$= \frac{1}{2}X(k) + \frac{1}{2}X^*(k) = \text{Re}[X(k)]$$

$$\text{DFT}[x_o(n)] = \frac{1}{2}X(k) - \frac{1}{2}X^*(k) = \text{jIm}[X(k)]$$

例 3-2 已知 $x(n)$ 是长为 N 的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$,现将 $x(n)$ 的每两点之

间补进 $r-1$ 个零点,得到一长为 rN 的有限长序列 $y(n)$:

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, i = 0, \dots, N-1 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases}$$

求 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

分析: 离散时域信号每两点插入 $r-1$ 个零值,相当于频域以 N 为周期延拓 r 次,即 $Y(k)$ 周期为 rN 。

解: 因为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

可得

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n)W_{rN}^{kn} = \sum_{i=0}^{N-1} x(ir/r)W_{rN}^{kir} = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)W_N^{ki}, \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

即

$$Y(k) = X((k))_{rN} R_{rN}(k)$$

所以 $Y(k)$ 是将长为 N 的有限长序列 $X(k)$ 延拓 r 次形成的,即 $Y(k)$ 的周期是 rN 。

例 3-3 已知一个有限长序列为 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$

(1) 求它的 10 点离散傅里叶变换 $X(k)$ 。

(2) 已知序列 $y(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换为 $Y(k) = W_{10}^{2k} X(k)$, 求序列 $y(n)$ 。

(3) 已知序列 $g(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换为 $G(k) = X(k)Y(k)$, 求序列 $g(n)$ 。

分析: 利用时域圆周移位定理 $x((n+m))_N R_N(n) \leftrightarrow W_N^{-mk} X(k)$

$$\text{解: (1)} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^9 [\delta(n) + 2\delta(n-5)]W_{10}^{nk} = 1 + 2W_{10}^{5k} = 1 + 2(-1)^k,$$

$k = 0, 1, \dots, 9$

(2) 由 $Y(k) = W_{10}^{2k} X(k)$ 可知, $y(n)$ 是 $x(n)$ 向右循环移 2 位的结果, 即

$$y(n) = x((n-2))_{10} R_{10}(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n-7)$$

或者

由 $Y(k) = W_{10}^{2k} X(k) = W_{10}^{2k} (1 + 2W_{10}^{5k}) = W_{10}^{2k} + 2W_{10}^{7k}$, 可知

$$\text{IDFT}[Y(k)] = \delta(n-2) + 2\delta(n-7)$$

$$\begin{aligned} \text{(3) 因为 } G(k) &= X(k)Y(k) = (1 + 2W_{10}^{5k})(W_{10}^{2k} + 2W_{10}^{7k}) = W_{10}^{2k} + 2W_{10}^{7k} + 2W_{10}^{7k} + 4W_{10}^{2k} \\ &= 5W_{10}^{2k} + 4W_{10}^{7k} \end{aligned}$$

所以

$$g(n) = 5\delta(n-2) + 4\delta(n-7)$$

例 3-4 已知序列 $x(n)$ 的长度为 120 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 185 点, 若计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 试分析结果中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是多少?

分析: 本题首先要理解 L 点圆周卷积是线性卷积以 L 为周期的延拓序列的主值序列, 圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是 $L \geq N_1 + N_2 - 1$; 否则, 就会产生混叠失真。做题时, 最好画出分析示意图, 便于理解。

解: $x(n)$ 的长度为 120 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 185 点, 故 $x(n) * y(n)$ 的长度为

$$N = N_1 + N_2 - 1 = 304$$

因为计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 即 $L = 256$, 所以混淆的长度为 $N - L = 304 - 256 = 48$, 当线性卷积以 $L = 256$ 为周期延拓形成圆周卷积序列时, 一个周期内在 $n = 0$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nm} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(m-k)} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}} \\
 &= \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad 0 \leq k \leq N-1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad X(k) &= \text{DFT}[x(n)] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} W_N^{kn} R_N(k) = \frac{1 - e^{j\omega_0 N} W_N^{kN}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} R_N(k) \\
 &= e^{j(\frac{\pi}{N}k + \frac{N-1}{2}\omega_0)} \frac{\sin\left(\frac{\omega_0}{2}N\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)} R_N(k)
 \end{aligned}$$

(5) 因为 $\sin\omega_0 n = \text{Im}[e^{j\omega_0 n}]$, 由关系 $\text{Im}[x(n)] \leftrightarrow \frac{1}{2j}[X(k) - X^*(k)]$, 有

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \text{DFT}[x(n)] \\
 &= \left[\frac{1}{2j} \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j\omega_0} W_N^k} - \frac{1}{2j} \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j\omega_0} W_N^k} \right] R_N(k) \\
 &= \frac{W_N^k \sin\omega_0 - \sin\omega_0 N - \sin(N-1)\omega_0 W_N^k}{1 - 2\cos\omega_0 W_N^k + W_N^{2k}} R_N(k)
 \end{aligned}$$

3-2 长度为 $N=10$ 的两个有限长序列

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}; \quad x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ -1, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

试分别用图解法和列表法求 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 。

解: 方法 1: 图解法。运算过程如图 3-8 所示。

所以 $y(n) = \{-3, -1, 1, 3, 5, 3, 1, -1, -3, -5\}$, $0 \leq n \leq 9$

方法 2: 列表法。运算过程如表 3-4 所示。

表 3-4 题 3-2 圆周卷积运算过程

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$y(n)$
$x_1(m)$	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
$x_2(m)$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	
$x_2((-m))R_N(m)$	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	$y(0) = -3$
$x_2((1-m))R_N(m)$	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	$y(1) = -1$
$x_2((2-m))R_N(m)$	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	$y(2) = 1$
$x_2((3-m))R_N(m)$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	$y(3) = 3$
$x_2((4-m))R_N(m)$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	$y(4) = 5$
$x_2((5-m))R_N(m)$	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	$y(5) = 3$
$x_2((6-m))R_N(m)$	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	$y(6) = 1$
$x_2((7-m))R_N(m)$	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	$y(7) = -1$
$x_2((8-m))R_N(m)$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	$y(8) = -3$
$x_2((9-m))R_N(m)$	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	$y(9) = -5$

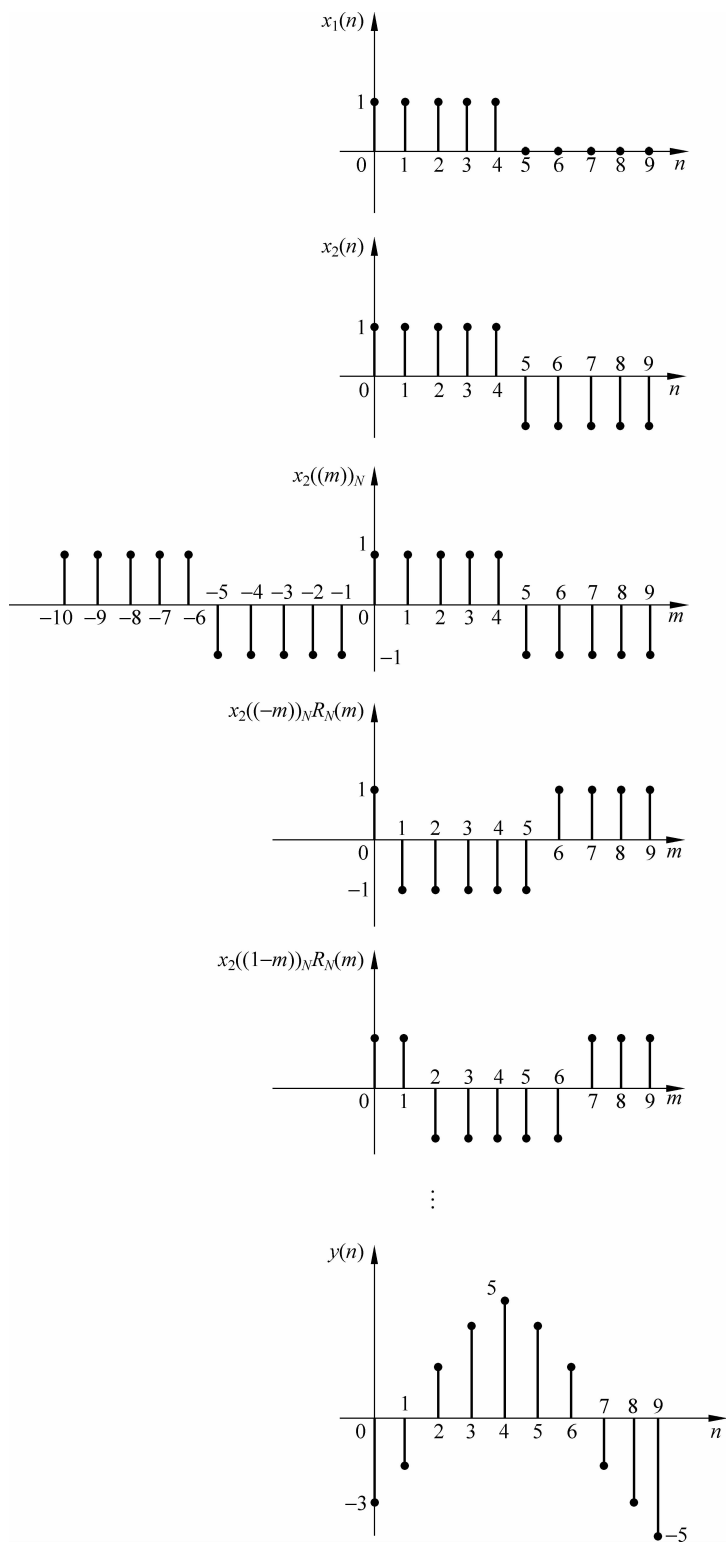


图 3-8 题 3-2 图解法示意图

所以 $y(n) = \{-3, -1, 1, 3, 5, 3, 1, -1, -3, -5\}, 0 \leq n \leq 9$

3-3 设 $x(n) = R_4(n)$, $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, 试求 $\tilde{X}(k)$, 并画出 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的图形。

解: 由 $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^5 \tilde{x}(n) W_6^{nk} = \sum_{n=0}^5 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\pi k}$

可求得

$$\tilde{X}(0) = 4, \tilde{X}(1) = -j/\sqrt{3}, \tilde{X}(2) = 1$$

$$\tilde{X}(3) = 0, \tilde{X}(4) = 1, \tilde{X}(5) = j/\sqrt{3}$$

$\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的图形如图 3-9 所示。

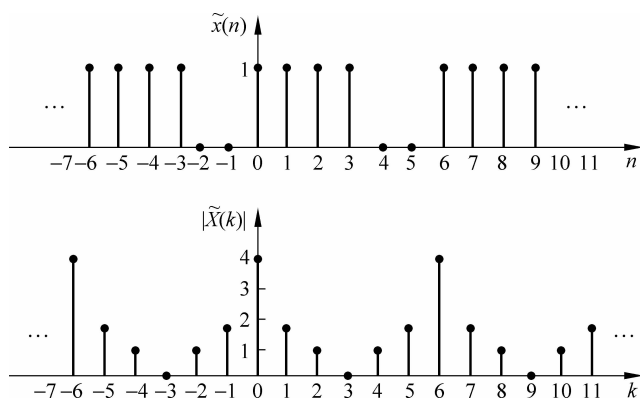


图 3-9 题 3-3 图

3-4 证明 DFT 的对称定理, 即假设 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 试证明:

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$$

证明: 因为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

所以

$$\begin{aligned} \text{DFT}[X(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mn} \right) W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(m+k)} \end{aligned}$$

式中

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(m+k)} = \begin{cases} N, & m = N-k \\ 0, & m \neq N-k \end{cases}, \quad 0 \leq m \leq N-1$$

所以

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$$

3-5 证明离散傅里叶变换的下列对称性质:

$$(1) x^*(n) \leftrightarrow X^*((-k))_N R_N(k);$$

$$(2) x^*((-n))_N R_N(n) \leftrightarrow X^*(k);$$

$$(3) \operatorname{Re}[x(n)] \leftrightarrow X_{\text{ep}}(k);$$

$$(4) \operatorname{jIm}[x(n)] \leftrightarrow X_{\text{op}}(k)。$$

$$\text{证明: (1) } X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right]^* = X^*((-k))_N R_N(k)$$

$$(2) X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N R_N(n) W_N^{nk} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N R_N(n) W_N^{-nk} \right]^* = X^*(k)$$

$$\begin{aligned} (3) X_3(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re}[x(n)] W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)] W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{2} [X(k) + X^*((-k))_N R_N(k)] = X_{\text{ep}}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) X_4(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{jIm}[x(n)] W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} [x(n) - x^*(n)] W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{2} [X(k) - X^*((-k))_N R_N(k)] = X_{\text{op}}(k) \end{aligned}$$

3-6 证明若 $x(n)$ 实偶对称, 即 $x(n) = x(N-n)$, 则 $X(k)$ 也实偶对称; 若 $x(n)$ 实奇对称, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k)$ 为纯虚函数并奇对称。(注: $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$)

证明:

$$(1) x(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(N-n)] = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)]$$

$$X(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(k)] = \operatorname{Re}[X(k)], \quad \text{实函数}$$

又

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{kn} R_N(k) \\ &= \sum_{m=1}^N x(m) W_N^{-km} R_N(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-km} R_N(k) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(N-k)m} R_N(k) = X(N-k), \text{偶对称} \end{aligned}$$

$$(2) x(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(N-n)] = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)]$$

$$X(k) = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(k)] = \operatorname{jIm}[X(k)], \quad \text{纯虚数}$$

因为

$$x(-n) \leftrightarrow X(-k)$$

$$x(N-n) \leftrightarrow W_N^{-kN} X(-k) = X(-k) = X(N-k)$$

又

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} R_N(k) = - \sum_{m=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{kn} \\ &= -X(N-k), \text{奇对称} \end{aligned}$$

3-7 已知长为 N 的有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的关系为 $x_2(n) = x_1(N-1-n)$ 。设 $\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$, 试证明 $\text{DFT}[x_2(n)] = W_N^{-k} X_1(-k)$ 。

证明: $\text{DFT}[x_2(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(N-1-n)W_N^{kn}$

将 $N-1-n=m$ 代入,得

$$\text{DFT}[x_2(n)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)W_N^{k(N-1-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)W_N^{k(N-1)}W_N^{-km} = W_N^{-k}X_1(-k)$$

3-8 已知序列 $x(n)=a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 对 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上等间隔采样 N 点, 采样值为

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

求有限长序列 $\text{IDFT}[X(k)]$ 。

解: 方法 1:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a^m z^{-m} \\ X(k) &= X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{m=0}^{\infty} a^m W_N^{km} \\ \text{IDFT}[X(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\infty} a^m \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n+rN \\ \sum_{r=0}^{\infty} a^m R_N(n), & m = n+rN \end{cases} = \frac{a^n}{1-a^N} R_N(n) \end{aligned}$$

方法 2:

因为

$$\text{DFT}[a^n R_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$$

所以

$$\frac{a^n R_N(n)}{1-a^N} = \text{IDFT}\left[\frac{1}{1-aW_N^k}\right] = \text{IDFT}[X(k)]$$

方法 3: 因为频域的抽样对应着时域的周期延拓, 所以

$$\begin{aligned} \text{IDFT}[X(k)] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} a^{n+rN} u(n+rN), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

式中, 当 $n+rN \geq 0$ 时, 有 $u(n+rN) \neq 0$ 。

又因为 $0 \leq n \leq N-1$, 所以

$$\begin{cases} n+rN \geq 0 \\ 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \rightarrow r \geq 0, \text{ 即 } r \text{ 只能取正值。所以}$$

$$\text{IDFT}[X(k)] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a^{n+rN} = a^n \sum_{r=0}^{\infty} (a^N)^r = \frac{a^n}{1-a^N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

3-9 已知两个序列 $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 0, 0\}$, $y(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$, 试求

(1) 它们的周期卷积(周期长度为 $N=7$);

(2) 它们的圆周卷积(序列长度为 $N=7$);

(3) 用圆周卷积定理求这两个序列的线性卷积,它与上述两结果又有何不同(请用 $N_1=5$ 和 $N_2=4$ 来做)。

解: (1) $\tilde{\omega}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m)$

周期卷积(周期为 $N=7$)的运算过程如表 3-5 所示。

表 3-5 题 3-9 周期卷积运算过程($N=7$)

m	$\cdots -4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	$\tilde{\omega}(m)$
$\tilde{x}(m)$	$\cdots 4$	5	0	0	1	2	3	4	5	0	0	1	2	3	4	$\cdots$	
$\tilde{y}(m)$	$\cdots 1$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	$\cdots$	
$\tilde{y}(-m)$	$\cdots 0$	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	$\cdots$	$\tilde{\omega}(0)=6$
$\tilde{y}(1-m)$	$\cdots 0$	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	$\cdots$	$\tilde{\omega}(1)=3$
$\tilde{y}(2-m)$	$\cdots 0$	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	$\cdots$	$\tilde{\omega}(2)=6$
$\tilde{y}(3-m)$	$\cdots 1$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	$\cdots$	$\tilde{\omega}(3)=10$
$\tilde{y}(4-m)$	$\cdots 1$	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	$\cdots$	$\tilde{\omega}(4)=14$
$\tilde{y}(5-m)$	$\cdots 1$	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	$\cdots$	$\tilde{\omega}(5)=12$
$\tilde{y}(6-m)$	$\cdots 1$	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	$\cdots$	$\tilde{\omega}(6)=9$

$\tilde{\omega}(n) = \{\cdots 6, 3, 6, 10, 14, 12, 9, \cdots\}$ 是周期序列。

(2) $\omega(n) = x(n) \circledast y(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m) \right] \cdot R_N(n)$

7 点($N=7$)的圆周卷积运算过程如表 3-6 所示。

表 3-6 题 3-9 圆周卷积运算过程($N=7$)

m	0	1	2	3	4	5	6	$\omega(m)$
$x(m)$	1	2	3	4	5	0	0	
$y(m)$	1	1	1	1	0	0	0	
$y((-m))R_N(m)$	1	0	0	0	1	1	1	$\omega(0)=6$
$y((1-m))R_N(m)$	1	1	0	0	0	1	1	$\omega(1)=3$
$y((2-m))R_N(m)$	1	1	1	0	0	0	1	$\omega(2)=6$
$y((3-m))R_N(m)$	1	1	1	1	0	0	0	$\omega(3)=10$
$y((4-m))R_N(m)$	0	1	1	1	1	0	0	$\omega(4)=14$
$y((5-m))R_N(m)$	0	0	1	1	1	1	0	$\omega(5)=12$
$y((6-m))R_N(m)$	0	0	0	1	1	1	1	$\omega(6)=9$

$\omega(n) = \{6, 3, 6, 10, 14, 12, 9\}$ 是有限长序列,对 $\tilde{\omega}(n)$ 截取主值而得。

(3) $N \geq N_1 + N_2 - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$

8 点($N=8$)的圆周卷积运算过程如表 3-7 所示。

表 3-7 题 3-9 圆周卷积运算过程(N=8)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	$\omega(m)$
$x(m)$	1	2	3	4	5	0	0	0	
$y(m)$	1	1	1	1	0	0	0	0	
$y((-m))R_N(m)$	1	0	0	0	0	1	1	1	$\omega(0)=1$
$y((1-m))R_N(m)$	1	1	0	0	0	0	1	1	$\omega(1)=3$
$y((2-m))R_N(m)$	1	1	1	0	0	0	0	1	$\omega(2)=6$
$y((3-m))R_N(m)$	1	1	1	1	0	0	0	0	$\omega(3)=10$
$y((4-m))R_N(m)$	0	1	1	1	1	0	0	0	$\omega(4)=14$
$y((5-m))R_N(m)$	0	0	1	1	1	1	0	0	$\omega(5)=12$
$y((6-m))R_N(m)$	0	0	0	1	1	1	1	0	$\omega(6)=9$
$y((7-m))R_N(m)$	0	0	0	0	1	1	1	1	$\omega(7)=5$

$$\omega(n)=\{1,3,6,10,14,12,9,5\}$$

与上述两个结果比较：

① 当 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,圆周卷积与线性卷积结果一样。

② 当 $N < N_1 + N_2 - 1$ 时,圆周卷积与线性卷积结果不同。这种差异是由于对线性卷积真正结果周期延拓而产生的叠加失真引起的。

线性卷积结果：1 3 6 10 14 12 9 : 5

N=7 圆周卷积 : 1 3 6 10 14 12 9 : 5

(周期 7 延拓) : 1 3 6 10 14

叠加结果：+

$$\cdots 14 \quad 12 \quad 9 : 6 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 14 \quad 12 \quad 9 : 6 \quad 3 \quad 6 \cdots$$

结论：用大于等于 $(N_1 + N_2 - 1)$ 点的圆周卷积结果可以代替线性卷积。

3-10 已知两个序列 $x(n)=n+1, 0 \leq n \leq 3, y(n)=(-1)^n, 0 \leq n \leq 3$, 用圆周卷积法求这两个序列的线性卷积。

解：因为 $x(n)$ 的长度 $N_1=4, y(n)$ 的长度 $N_2=4$, 当 $L \geq N_1 + N_2 - 1 = 7$ 时, 圆周卷积与线性卷积结果一样, 所以计算 $L=7$ 的圆周卷积即可得到两个序列的线性卷积 $g(n) = x(n) * y(n)$ 。

采用列表法, 运算过程如表 3-8 所示。

表 3-8 题 3-10 圆周卷积运算过程(L=7)

m	0	1	2	3	4	5	6	$g(n)$
$x(m)$	1	2	3	4	0	0	0	
$y(m)$	1	-1	1	-1	0	0	0	
$y((-m))R_L(m)$	1	0	0	0	-1	1	-1	$g(0)=1$
$y((1-m))R_L(m)$	-1	1	0	0	0	-1	1	$g(1)=1$
$y((2-m))R_L(m)$	1	-1	1	0	0	0	-1	$g(2)=2$
$y((3-m))R_L(m)$	-1	1	-1	1	0	0	0	$g(3)=2$
$y((4-m))R_L(m)$	0	-1	1	-1	1	0	0	$g(4)=-3$
$y((5-m))R_L(m)$	0	0	-1	1	-1	1	0	$g(5)=1$
$y((6-m))R_L(m)$	0	0	0	-1	1	-1	1	$g(6)=-4$

$$g(n) = \{1, 1, 2, 2, -3, 1, -4\}, \quad 0 \leq n \leq 6$$

3-11 已知两个序列 $x_1(n) = (0.5)^n R_4(n)$, $x_2(n) = R_4(n)$, 求它们的线性卷积, 以及 4 点、6 点和 8 点的圆周卷积。

解: (1) 线性卷积。采用列表法, 运算过程如表 3-9 所示。

表 3-9 题 3-11 线性卷积运算过程

m	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...	$y(n)$
$x_1(m)$				1	0.5	0.25	0.125				
$x_2(m)$				1	1	1	1				
$x_2(-m)$	1	1	1	1							$y(0) = 1$
$x_2(1-m)$		1	1	1	1						$y(1) = 1.5$
$x_2(2-m)$			1	1	1	1					$y(2) = 1.75$
$x_2(3-m)$				1	1	1	1				$y(3) = 1.875$
$x_2(4-m)$					1	1	1	1			$y(4) = 0.875$
$x_2(5-m)$						1	1	1	1		$y(5) = 0.375$
$x_2(6-m)$							1	1	1	1	$y(6) = 0.125$

由此可得

$$y_l(n) = \{1, 1.5, 1.75, 1.875, 0.875, 0.375, 0.125\}, \quad 0 \leq n \leq 6$$

(2) 4 点圆周卷积(列表法), 运算过程如表 3-10 所示。

表 3-10 题 3-11 圆周卷积运算过程($L=4$)

m	0	1	2	3	$y(n)$
$x_1(m)$	1	0.5	0.25	0.125	
$x_2(m)$	1	1	1	1	
$x_2((-m))R_L(m)$	1	1	1	1	$y(0) = 1.875$
$x_2((1-m))R_L(m)$	1	1	1	1	$y(1) = 1.875$
$x_2((2-m))R_L(m)$	1	1	1	1	$y(2) = 1.875$
$x_2((3-m))R_L(m)$	1	1	1	1	$y(3) = 1.875$

$$y_c(n) = \{1.875, 1.875, 1.875, 1.875\}, \quad 0 \leq n \leq 3$$

或者利用线性卷积与圆周卷积的关系

$$\begin{aligned}
 L=4 \text{ 时, } y_c(n) &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+4r) \right] R_4(n) \\
 &= \{0.875, 0.375, 0.125, 0\} + \{1, 1.5, 1.75, 1.875\} \\
 &= \{1.875, 1.875, 1.875, 1.875\}, \quad 0 \leq n \leq 3
 \end{aligned}$$

(3) 6 点圆周卷积(列表法),运算过程如表 3-11 所示。

表 3-11 题 3-11 圆周卷积运算过程($L=6$)

m	0	1	2	3	4	5	$y(n)$
$x_1(m)$	1	0.5	0.25	0.125	0	0	
$x_2(m)$	1	1	1	1	0	0	
$x_2((-m))R_L(m)$	1	0	0	1	1	1	$y(0)=1.125$
$x_2((1-m))R_L(m)$	1	1	0	0	1	1	$y(1)=1.5$
$x_2((2-m))R_L(m)$	1	1	1	0	0	1	$y(2)=1.75$
$x_2((3-m))R_L(m)$	1	1	1	1	0	0	$y(3)=1.875$
$x_2((4-m))R_L(m)$	0	1	1	1	1	0	$y(4)=0.875$
$x_2((5-m))R_L(m)$	0	0	1	1	1	1	$y(5)=0.375$

$$y_c(n) = \{1.125, 1.5, 1.75, 1.875, 0.875, 0.375\}, \quad 0 \leq n \leq 5$$

或者利用线性卷积与圆周卷积的关系

$$\begin{aligned}
 L=6 \text{ 时, } y_c(n) &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+6r) \right] R_6(n) \\
 &= \{0.125, 0, 0, 0, 0, 0\} + \{1, 1.5, 1.75, 1.875, 0.875, 0.375\} \\
 &= \{1.125, 1.5, 1.75, 1.875, 0.875, 0.375\}, \quad 0 \leq n \leq 5
 \end{aligned}$$

(4) 8 点圆周卷积(列表法),运算过程如表 3-12 所示。

表 3-12 题 3-11 圆周卷积运算过程($L=8$)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	$y(n)$
$x_1(m)$	1	0.5	0.25	0.125	0	0	0	0	
$x_2(m)$	1	1	1	1	0	0	0	0	
$x_2((-m))R_L(m)$	1	0	0	0	0	1	1	1	$y(0)=1$
$x_2((1-m))R_L(m)$	1	1	0	0	0	0	1	1	$y(1)=1.5$
$x_2((2-m))R_L(m)$	1	1	1	0	0	0	0	1	$y(2)=1.75$
$x_2((3-m))R_L(m)$	1	1	1	1	0	0	0	0	$y(3)=1.875$
$x_2((4-m))R_L(m)$	0	1	1	1	1	0	0	0	$y(4)=0.875$
$x_2((5-m))R_L(m)$	0	0	1	1	1	1	0	0	$y(5)=0.375$
$x_2((6-m))R_L(m)$	0	0	0	1	1	1	1	0	$y(6)=0.125$
$x_2((7-m))R_L(m)$	0	0	0	0	1	1	1	1	$y(7)=0$

$$y_c(n) = \{1, 1.5, 1.75, 1.875, 0.875, 0.375, 0.125, 0\}, \quad 0 \leq n \leq 7$$

可见,当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,圆周卷积与线性卷积结果一样。

或者利用线性卷积与圆周卷积的关系

$$\begin{aligned}
 L=8 \text{ 时, } y_c(n) &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+8r) \right] R_8(n) \\
 &= y_l(n) = \{1, 1.5, 1.75, 1.875, 0.875, 0.375, 0.125, 0\}, \quad 0 \leq n \leq 7
 \end{aligned}$$

3-12 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将长度扩大 r 倍, 得长度为 rN 的有限长序列 $y(n)$ 为

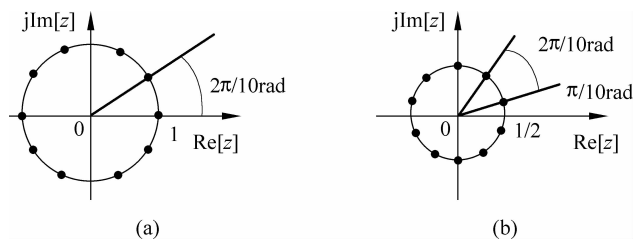
$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

求 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

$$\text{解: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{\frac{k}{r}n} = X\left(\frac{k}{r}\right)$$

3-13 有限宽序列的离散傅里叶变换相当于其 Z 变换在单位圆上的取样。例如 10 点序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换相当于 $X(z)$ 在单位圆 10 个均分点上的取样,如图题 3-13(a)所示,我们希望求出图题 3-13(b)所示圆周上 $X(z)$ 的等间隔取样,即 $X(z)|_{z=0.5e^{j[(2k\pi/10)+(\pi/10)]}}$,如何修改 $x(n)$,才能得到序列 $x_1(n)$,使其离散傅里叶变换相当于上述的 $X(z)$ 取样。



图题 3-13

$$\begin{aligned} \text{解: } X_1(k) &= \sum_{n=0}^9 x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{10}nk} = X(z) \big|_{z=0.5e^{j[(2k\pi/10)+(\pi/10)]}} = \sum_{n=0}^9 x(n) z^{-n} \big|_{z=0.5e^{j[(2k\pi/10)+(\pi/10)]}} \\ &= \sum_{n=0}^9 x(n) (0.5)^{-n} e^{-j\frac{\pi}{10}n} e^{-j\frac{2\pi}{10}nk} \end{aligned}$$

由此可得

$$x_1(n) = (0.5)^{-n} e^{-j\frac{\pi}{10}n} x(n)$$

3-14 (1) 模拟数据以 10.24kHz 速率采样,且计算了 1024 个采样的离散傅里叶变换。求频谱采样之间的频率间隔。

(2) 以上数字数据经处理以后又进行了离散傅里叶反变换,求离散傅里叶反变换后采样点的间隔是多少? 整个 1024 点的时宽为多少?

$$\text{解: (1) 频率间隔 } F = \frac{f_s}{N} = \frac{10.24}{1024} = 0.01 \text{ kHz}$$

$$(2) \text{ 采样点的间隔 } T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{10.24 \text{ kHz}} = 97.66 \mu\text{s}$$

整个 1024 点的时宽即为记录长度 $NT = \frac{1}{F} = 100 \text{ ms}$ 。

3-15 若 $x(n)$ 表示长度为 $N_1=8$ 点的有限长序列, $y(n)$ 表示长度为 $N_2=20$ 点的有限长序列, $R(k)$ 为两个序列 20 点的离散傅里叶变换相乘,求 $r(n)$,并指出 $r(n)$ 的哪些点与 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的线性卷积相等。

解: $x(n)$ 的长度为 8 点,序列 $y(n)$ 的长度为 20 点,故 $x(n) * y(n)$ 的长度为

$$N = N_1 + N_2 - 1 = 27$$

因为计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 20 点圆周卷积, 即 $L=20$, 所以混淆的长度为 $N-L=27-20=7$, 当线性卷积以 $L=20$ 为周期延拓形成圆周卷积序列时, 一个周期内在 $n=0$ 到 $n=N-L-1=27-20-1=6$ 这些点处发生混叠, 则 20 点圆周卷积 $r(n)$ 中等于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是 7~19。

其分析示意图如图 3-10 所示。

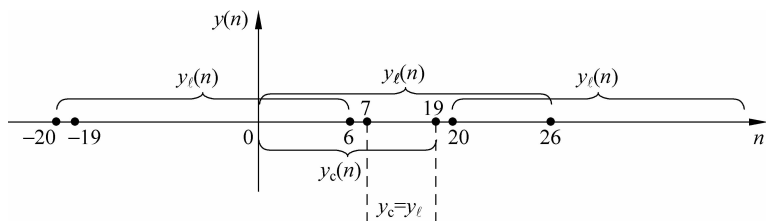


图 3-10 题 3-15 分析示意图

3-16 两个有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的零值区间为

$$x(n) = 0, \quad n < 0, 8 \leq n$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0, 20 \leq n$$

对每个序列作 20 点 DFT, 即

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

如果

$$F(k) = X(k) \cdot Y(k), \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$f(n) = \text{IDFT}[F(k)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

试问在哪些点上 $f(n) = x(n) * y(n)$? 为什么?

解: 由题意可得: $x(n)$ 的长度为 8 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 20 点, 故 $x(n) * y(n)$ 的长度为

$$N = N_1 + N_2 - 1 = 27$$

因为计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 20 点圆周卷积, 即 $L=20$, 所以混淆的长度为 $N-L=27-20=7$, 当线性卷积以 $L=20$ 为周期延拓形成圆周卷积序列时, 一个周期内在 $n=0$ 到 $n=N-L-1=27-20-1=6$ 这些点处发生混叠, 则 20 点圆周卷积 $r(n)$ 中等于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是 7~19。

实际上, 本题和上一题结果一样, 只是题目的叙述方式变化了。

3-17 已知序列 $x(n)$ 的长度为 120 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 185 点, 若计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 试分析结果中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是多少?

解: 详见典型例题分析例 3-4。

3-18 已知一个有限长序列为 $x(n) = \delta(n-2) + 3\delta(n-4)$

(1) 求它的 8 点离散傅里叶变换 $X(k)$;

(2) 已知序列 $y(n)$ 的 8 点离散傅里叶变换为 $Y(k) = W_8^{4k} X(k)$, 求序列 $y(n)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^7 [\delta(n-2) + 3\delta(n-4)] W_8^{nk} \\ &= W_8^{2k} + 3W_8^{4k} = e^{-j\frac{2\pi}{8}2k} + 3e^{-j\frac{2\pi}{8}4k} \\ &= (-j)^k + 3(-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

(2) 由 $Y(k) = W_8^{4k} X(k)$ 可知, $y(n)$ 是 $x(n)$ 向右循环移位 4 的结果, 则

$$y(n) = x((n-4))_8 R_8(n) = \delta(n-6) + 3\delta(n)$$

或者由

$$Y(k) = W_8^{4k} X(k) = W_8^{4k} (W_8^{2k} + 3W_8^{4k}) = W_8^{6k} + 3W_8^{8k} = W_8^{6k} + 3$$

所以

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = \delta(n-6) + 3\delta(n)$$

3-19 用微处理机对实数序列作谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 50\text{Hz}$, 信号最高频率为 1kHz , 试确定以下各参数:

- (1) 最小记录时间 T_{pmin} ;
- (2) 最大取样间隔 T_{max} ;
- (3) 最少采样点数 N_{min} ;
- (4) 在频带宽度不变的情况下, 将频谱分辨率提高一倍的 N 值。

解: (1)

$$T_{\text{p}} \geq \frac{1}{F} = \frac{1}{50} = 0.02\text{s}, \quad \text{因此 } T_{\text{pmin}} = 0.02\text{s}$$

(2) 因为要求 $f_s \geq 2f_c$, 所以

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2000} = 5 \times 10^{-4}\text{s}$$

$$(3) N_{\text{min}} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 1000}{50} = 40 \quad \text{或} \quad N_{\text{min}} = \frac{T_{\text{p}}}{T} = \frac{0.02}{5 \times 10^{-4}} = 40$$

(4) 频带宽度不变, 即信号最高频率 f_c 不变。为使频率分辨率提高一倍 (F 为原来的一半), $F = 25\text{Hz}$, 即记录时间扩大一倍为 0.04s , 则

$$N_{\text{min}} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 1000}{25} = 80 \quad \text{或} \quad N_{\text{min}} = \frac{T_{\text{p}}}{T} = \frac{0.04}{5 \times 10^{-4}} = 80$$

3-20 已知调幅信号的载波频率 $f_c = 1\text{kHz}$, 调制信号频率 $f_m = 100\text{Hz}$, 用 FFT 对其进行谱分析, 试求:

- (1) 最小记录时间 T_{p} ;
- (2) 最低采样频率 f_s ;
- (3) 最少采样点 N 。

解: 由题意得, 调幅信号的最高频率 $f_{\text{max}} = 1.1\text{kHz}$, 用 FFT 对单音调幅信号进行谱分析, 应满足 $100/F = \text{整数}$, 即频率分辨率 $F \leq 100\text{Hz}$, 所以

$$(1) T_{\text{pmin}} = \frac{1}{F} = \frac{1}{100} = 0.01\text{s}$$

$$(2) f_{\text{smin}} = 2f_{\text{max}} = 2.2\text{kHz}$$

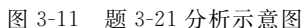
$$(3) N_{\text{min}} = \frac{T_{\text{p}}}{T_{\text{max}}} = T_{\text{p}} \cdot f_{\text{smin}} = 0.01 \times 2.2 \times 10^3 = 22$$

3-21 若 $x_1(n)$ 是长度为 50 点的有限长序列, 非零区间为 $0 \leq n \leq 49$, $x_2(n)$ 是长度为 15 点的有限长序列, 非零区间为 $5 \leq n \leq 19$, 两序列做 50 点的圆周卷积, 即

$$y(n) = \sum_{m=0}^{49} x_1(m) x_2((n-m))_{50} R_{50}(n)$$

解: $x_1(n)$ 的长度为 50 点, 序列 $x_2(n)$ 的长度为 15 点, 故 $x_1(n) * x_2(n)$ 的长度为 $N_1 + N_2 - 1 = 64$, 且非零区间为 $5 \leq n \leq 68$, 将 $n=0 \sim 4$ 这 5 个零值加上, 则 $x_1(n) * x_2(n)$ 的长度范围为 $n=0 \sim 68, N=69$ 。

其分析示意图如图 3-11 所示。


$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad N = 1000$$

- (1) $k=150$ 对应的模拟频率是多少? $k=800$ 时又是多少?
- (2) 频谱采样点之间的间隔是多少?

由 $\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{f_s} = 2\pi \frac{f}{f_s}$, 得 $f = \frac{\omega}{2\pi} f_s$

对于 $k=800$, 注意 $X(e^{j\omega})$ 具有周期性, 即

$$f_k = \frac{f_s}{N}k = \frac{f_s}{N}(k - N) = \frac{20}{1000}(800 - 1000)\text{kHz} = -4\text{kHz}$$

$$(2) F = \frac{f_s}{N} = \frac{20}{1000} = 0.02 \text{ kHz}$$

3-23 假设以 8kHz 速率对一段长为 10s 的语音信号采样,现用一个长度为 $L=64$ 的 FIR 滤波器 $h(n)$ 对其进行滤波,若采用 DFT 为 1024 点的重叠保留法,那么共需要多少次 DFT 变换和多少次 IDFT 变换来进行卷积。

解: 对一段长为 10s 的语音信号以 8kHz 速率采样, $x(n)$ 共有 $N=10 \times 8000=8 \times 10^4$ 个采样点。如果将 $x(n)$ 分成长度为 1024 点的段,然后将这些段与长度为 64 的 $h(n)$ 圆周卷积,卷积结果的前 $64-1=63$ 个值将会叠加,后 $1024-63=961$ 个值等于线性卷积。所以,每一个圆周卷积产生 961 个有效的数据点。滤波后的信号 $y(n)=h(n)*x(n)$ 的长度为 $8 \times 10^4 + 63 = 80\,063$, $x(n)$ 被分段成 $L = \frac{80\,063}{961} = 83.3$ 或 84 个重叠部分。所以为了计算卷积,共需要 85 次 DFT 变换和 84 次 IDFT 变换来进行。

其中: 1 次 DFT 用于计算 $H(k)$, 84 次用于计算 $X_i(k)$;

84 次用于计算 $Y_i(k) = X_i(k)H(k)$ DFT 反变换。

3-24 对一个连续时间信号 $x(t)$ 进行采样,采样频率为 8192Hz,共采样 500 点,得到一个有限长序列 $x(n)$,试分析:

(1) 通过 DFT 方法来分析该序列在 800Hz 频率处的频率特性,应如何做?

(2) 如果只能一次进行 256 点数值的 FFT 运算,用什么办法能实现信号 $x(n)$ 的谱分析?

解: (1) 由于 $f=kF$, $F=\frac{f_s}{N}$ (频谱分辨率),得

$$k = f \frac{N}{f_s} = 800 \times \frac{500}{8192} \approx 49$$

(2) 首先将 $x(n)$ 补零到 512 点,即 $x(n)$ 为 $N=512$ 点的实序列,将 $x(n)$ 分解为两个 $N/2=256$ 点的实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$,其中 $x_1(n)$ 为 $x(n)$ 的偶数点序列, $x_2(n)$ 为 $x(n)$ 的奇数点序列。它们分别作为新构造序列 $y(n)$ 的实部和虚部,即

$$x_1(n) = x(2n), x_2(n) = x(2n+1), n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

$$y(n) = x_1(n) + jx_2(n), n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

对 $y(n)$ 进行 $N/2$ 点 FFT,即 $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$,则

$$\left. \begin{aligned} X_1(k) &= \text{DFT}[x_1(n)] = Y_{\text{ep}}(k) \\ &= \frac{1}{2} \left[Y(k) + Y^* \left(\frac{N}{2} - k \right) \right] \\ X_2(k) &= \text{DFT}[x_2(n)] = -jY_{\text{op}}(k) \\ &= \frac{1}{2j} \left[Y(k) - Y^* \left(\frac{N}{2} - k \right) \right] \end{aligned} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

根据 DIT-FFT 的思想及蝶形公式,可得

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

由于 $x(n)$ 为实序列,所以 $X(k)$ 的另外 $N/2$ 点的值可由共轭对称性求得

$$X(N-k) = X^*(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

这样,仅仅做了一次 $N/2$ 点 FFT,却得到了一个 N 点实序列 $x(n)$ 的 FFT 结果,实现了信号 $x(n)$ 的谱分析。

3.6 自测题及参考答案

1. 自测题

- (1) 表达式 $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ 的物理意义是_____。
- (2) 设实序列 $x(n)$ 的 10 点 DFT 为 $X(k)$ ($0 \leq k \leq 9$), 已知 $X(1) = 3 + j$, 则 $X(9)$ 为_____。
- (3) 设实连续信号 $x(t)$ 中含有频率 40Hz 的余弦信号, 现用 $f_s = 120\text{Hz}$ 的采样频率对其进行采样, 并利用 $N=1024$ 点 DFT 分析信号的频谱, 计算频谱的峰值出现在第_____条谱线附近。
- (4) 已知序列 $x(n)$ 的长度为 130 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 170 点, 若计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 试分析结果中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是_____。
- (5) DFT 与 DFS 有密切关系, 因为有限长序列可以看成周期序列的_____, 而周期序列可以看成有限长序列的_____。
- (6) 频域 N 点采样造成时域的周期延拓, 其周期是_____。
- (7) 某序列的 DFT 表达式为 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_M^{nk}$ 。由此可看出, 该序列的时域长度是_____, 变换后数字域上相邻两个频率样点之间间隔是_____。
- (8) 补零是改善_____效应的一个方法, 通过补零运算可得到高密度谱。
- (9) 对信号进行频谱分析时, 截断信号引起的截断效应表现为_____和_____两方面。
- (10) _____序列, 存在序列的傅里叶变换(DTFT), 不存在 DFT 变换。

2. 参考答案

- (1) $X(k)$ 是序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 其采样间隔为 $\omega = \frac{2\pi}{N}$
- (2) $X(1) = 3 - j$
- (3) $f = kF = k \frac{f_s}{N}$, 所以 $k = \frac{fN}{f_s} \approx 341$
- (4) $43 \leq n \leq 255$
- (5) 主值区间, 周期延拓
- (6) N
- (7) $N, 2\pi/M$
- (8) 栅栏
- (9) 频谱展宽, 频谱拖尾
- (10) 无限长