第一单元

微　积　分

数学方法渗透并支配着一切自然科学的理论分支,它越来越成为衡量科学成就的主要标志了.

冯·诺依曼

(1903—1957,美国)

第 1 章

极限及其经济应用

函数是经济数学最重要的基本概念之一，连续函数是微积分学研究的主要对象. 极限思想是微积分学的基本思想，经济数学中的一系列重要概念，如函数的连续性、导数以及定积分等都是借助极限来定义的. 函数、极限和连续是整个经济数学的基础知识.

学习目标

【基本要求】

(1) 理解函数、极限、连续的概念，知道相关的基本定理与性质；

(2) 熟练掌握将复合函数分解成基本初等函数的方法，掌握常用经济函数；

(3) 掌握求极限的基本方法，熟练掌握极限的四则运算和两个重要极限；

(4) 理解无穷小量与无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质，会进行无穷小量阶的比较；

(5) 了解连续函数的性质，掌握判断函数在某一点连续或间断的方法；

(6) 会利用极限分析复利与贴现经济问题.

【学习重点】

(1) 基本初等函数的基本特征和简单性质，复合函数的复合过程；

(2) 求极限的基本方法.

1.1 函数与常用经济函数

问题导入

学习函数之前，我们先来讨论两个生活中的实际问题.

引例 1.1 某幼儿园每月收取每名幼儿的固定费用包括托费和餐费两项，托费每月 1 200 元，餐费每天 12 元，不出勤不收取餐费，分析该园一个月收取一名幼儿的固定费用与该幼儿该月出勤天数之间的函数关系.

分析 设某幼儿某月出勤 x 天，则该幼儿该月餐费为 $12x$ 元，所以幼儿园收取该幼儿该月的固定费用为 $y=1\,200+12x$.

引例 1.2 某家用电器公司生产一种型号的空调，当价格为每台 2 000 元时，需求量为 5 000 台，价格每降低 1 元，可多卖出 5 台，分析需求量与价格之间的关系.

分析 设每台空调价格为 x 元，则可多卖出空调 $5(2\,000-x)$台，所以空调的实际需

求量为 $y=5\,000+5(2\,000-x)$，即 $y=15\,000-5x$.

上述两个案例，都是要确定变量间对应关系的问题，类似的问题还有很多，如银行利息计算、工资扣税计算等. 变量间的对应关系就是本节要介绍的函数.

1.1.1 函数概念

知识梳理

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集合，如果对 D 中的每个变量 x，按照对应规则 f，变量 y 都有唯一确定的实数值与之对应，则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数，D 称为函数的定义域，所有函数值组成的集合 Z 称为函数的值域. 函数定义有两个基本要素：定义域和对应规则. 给定一个函数，必须给定一个定义域及一个对应规则.

常用的函数表示方法有解析法、图像法、表格法三种.

解析法是用数学解析式描述函数关系的方法，常见的形式如下.

1. 显函数

显函数是用 $y=f(x)$ 形式表示的函数. 如 $y=\sqrt{x^2-3}$.

2. 隐函数

隐函数是用方程 $F(x,y)=0$ 形式表示的函数. 如 $x-y-e^y=0$.

3. 分段函数

有些函数关系不能用一个统一的表达式来表示，而是需要把定义域分成若干个区间段，在不同的区间段内用不同的解析式表示，这类函数称为分段函数. 例如，

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x+1, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

就是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的分段函数.

典型例解

例 1.1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\lg(x+2)}$.

解 (1) 由 $\begin{cases} x+2\neq 0 \\ 4-x^2\geqslant 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x\neq -2 \\ -2\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$，所以函数的定义域为 $(-2,2]$.

(2) 由 $\begin{cases} \lg(x+2)\neq 0 \\ x+2>0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x\neq -1 \\ x>-2 \end{cases}$，所以函数的定义域为 $(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

例 1.2 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+4}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-x)$，$f(x+1)$.

解　$f(0)=\frac{0-1}{0+4}=-\frac{1}{4}$；　$f(1)=\frac{1-1}{1+4}=0$；

$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+4}=\frac{x+1}{x-4}$；　$f(x+1)=\frac{x+1-1}{x+1+4}=\frac{x}{x+5}$.

案例 1.1　2012 年个人所得税起征点为 3 500 元/月，税率按月收入（扣除三险一金）分为 7 级，如表 1-1 所示，分析个人所得税 y（元）与月收入 x（元）之间的函数关系.

表 1-1　个人所得税税率

级　　数	月收入/元	税率/%	速算扣除数/元
1	3 500～5 000	3	0
2	5 000～8 000	10	105
3	8 000～12 500	20	555
4	12 500～38 500	25	1 005
5	38 500～58 500	30	2 755
6	58 500～83 500	35	5 505
7	83 500 以上	45	13 505

解　设扣除三险一金后的月收入为 x 元，应缴个人所得税为 y 元，则

月收入 5 000 元，个人所得税（5 000－3 500）×0.03 元，即 45 元；

月收入 8 000 元，个人所得税 45＋（8 000－5 000）×0.1 元，即 345 元；

月收入 12 500 元，个人所得税 345＋（12 500－8 000）×0.2 元，即 1 245 元；

月收入 38 500 元，个人所得税 1 245＋（38 500－12 500）×0.25 元，即 7 745 元；

月收入 58 500 元，个人所得税 7 745＋（58 500－38 500）×0.3 元，即 13 745 元；

月收入 83 500 元，个人所得税 13 745＋（83 500－58 500）×0.35 元，即 22 495 元.

因此，所求函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3\,500\\(x-3\,500)\times 0.03, & 3\,500<x\leqslant 5\,000\\(x-5\,000)\times 0.1+45, & 5\,000<x\leqslant 8\,000\\(x-8\,000)\times 0.2+345, & 8\,000<x\leqslant 12\,500\\(x-12\,500)\times 0.25+1\,245, & 12\,500<x\leqslant 38\,500\\(x-38\,500)\times 0.3+7\,745, & 38\,500<x\leqslant 58\,500\\(x-58\,500)\times 0.35+13\,745, & 58\,500<x\leqslant 83\,500\\(x-83\,500)\times 0.45+22\,495, & x>83\,500\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3\,500\\0.03x-105, & 3\,500<x\leqslant 5\,000\\0.1x-455, & 5\,000<x\leqslant 8\,000\\0.2x-1\,255, & 8\,000<x\leqslant 12\,500\\0.25x-1\,880, & 12\,500<x\leqslant 38\,500\\0.3x-3\,805, & 38\,500<x\leqslant 58\,500\\0.35x-6\,730, & 58\,500<x\leqslant 83\,500\\0.45x-15\,080, & x>83\,500\end{cases}$$

小贴士

一般来说，税率表中会提供一列速算扣除数，如表 1-1 所示，个人所得税也可由税率和速算扣除数计算得出. 按照这种方法计算，案例 1.1 所求函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3\,500\\(x-3\,500)\times 0.03, & 3\,500< x\leqslant 5\,000\\(x-3\,500)\times 0.1-105, & 5\,000< x\leqslant 8\,000\\(x-3\,500)\times 0.2-555, & 8\,000< x\leqslant 12\,500\\(x-3\,500)\times 0.25-1\,005, & 12\,500< x\leqslant 38\,500\\(x-3\,500)\times 0.3-2\,755, & 38\,500< x\leqslant 58\,500\\(x-3\,500)\times 0.35-5\,505, & 58\,500< x\leqslant 83\,500\\(x-3\,500)\times 0.45-13\,505, & x> 83\,500\end{cases}$$

化简即可得到相同的计算结果.

1.1.2 函数的基本性质

知识梳理

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于定义域内的任一 x，恒有 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若恒有 $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

如函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，函数 $f(x)=x$ 是奇函数.

两个偶函数的和、差、积与商仍是偶函数；两个奇函数的和、差仍是奇函数，积、商是偶函数；奇函数与偶函数的积、商是奇函数.

2. 单调性

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任何两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加（单调减少），区间 (a,b) 为单调增加（单调减少）区间.

单调增加函数的图像沿 x 轴的正方向上升，单调减少函数的图像则下降.

如函数 $y=x^2$ 是在区间 $(-\infty,0)$ 上为单调减少函数，在区间 $(0,+\infty)$ 为单调增加函数.

3. 有界性

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，如果存在常数 $M>0$，使对于 (a,b) 内任一 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界，否则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上无界.

如函数 $y=\sin x$ 是有界函数，而函数 $y=x$ 则是无界函数.

4. 周期性

如果存在常数 $T>0$，函数 $y=f(x)$ 对于定义域内的任一 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数. 使上述条件成立的最小正数称为 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期.

如函数 $y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数，$y=\tan x$ 是周期为 π 的周期函数.

典型例解

例 1.3　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$；　　(2) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

解　(1) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{(e^{-x}-1)\cdot e^x}{(e^{-x}+1)\cdot e^x}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$，故此函数为奇函数.

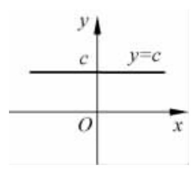
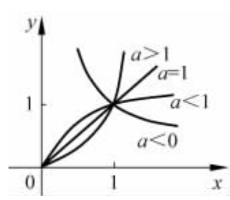
(2) $f(-x)=\ln\dfrac{-x+1}{-x-1}=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{x+1}{x-1}=-f(x)$，故此函数为奇函数.

1.1.3　基本初等函数

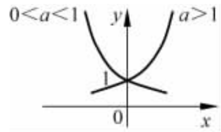
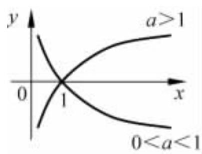
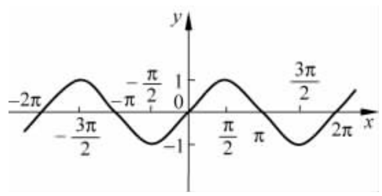
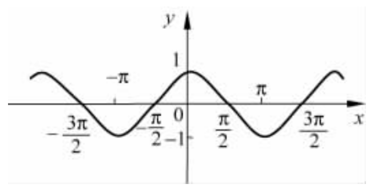
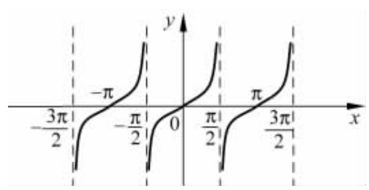
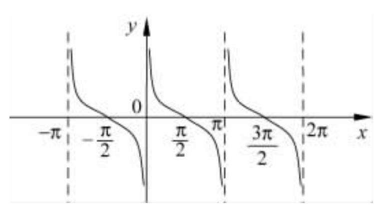
知识梳理

基本初等函数是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数的定义式、性质及图像如表 1-2 所示.

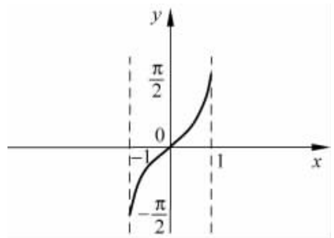
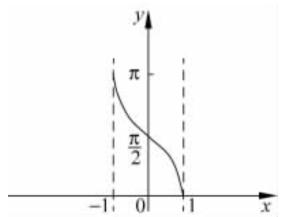
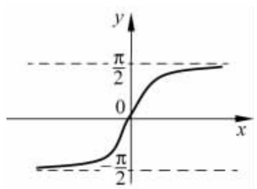
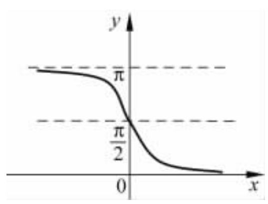
表 1-2　基本初等函数

名称	定义式与性质	图　　像
常数函数	$y=c$（c 为常数），偶函数，图像关于 y 轴对称，是与 x 轴平行，过点 $(0,c)$ 的直线，定义域为 $(-\infty,+\infty)$	
幂函数	$y=x^a$（$a\in\mathbf{R}$）， 定义域随 a 不同而异，公共定义域为 $(0,+\infty)$ 当 $a>0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加 当 $a<0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少	

续表

名称	定义式与性质	图　　像
指数函数	$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$， 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$ 当 $a>1$ 时，单调增加；当 $0<a<1$ 时，单调减少	
对数函数	$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$， 定义域为$(0+\infty)$ 当 $a>1$ 时，单调增加；当 $0<a<1$ 时，单调减少	
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$， 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$ 是周期为 2π 的奇函数	
	余弦函数 $y=\cos x$， 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$ 是周期为 2π 的偶函数	
	正切函数 $y=\tan x$， 定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，值域为$(-\infty,+\infty)$ 是周期为 π 的奇函数	
	余切函数 $y=\cot x$， 定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$，值域为$(-\infty,+\infty)$ 是周期为 π 的奇函数	

续表

<table>
<tr><th>名称</th><th>定义式与性质</th><th>图　　像</th></tr>
<tr><td rowspan="4">反三角函数</td><td>反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，主值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$</td><td></td></tr>
<tr><td>反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，主值域为$[0,\pi]$</td><td></td></tr>
<tr><td>反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，主值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$</td><td></td></tr>
<tr><td>反余切函数 $y=\text{arccot} x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，主值域为$(0,\pi)$</td><td></td></tr>
</table>

1.1.4　复合函数

知识梳理

定义 1.2　设函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$，若 $u=g(x)$的值域的全部或部分能使 $y=f(u)$有意义，则称 y 是通过中间变量 u 构成的 x 的函数，即 y 是 x 的复合函数. 记作 $y=f[g(x)]$. 其中 x 是自变量，u 是中间变量.

如函数 $y=\mathrm{e}^{x^2}$ 是由函数 $y=\mathrm{e}^u$，$u=x^2$ 两个函数复合得到的，其中 u 为中间变量.

1.1.5 初等函数

知识梳理

基本初等函数经过有限次四则运算或复合构成的函数称为初等函数.

如函数 $y=(2^x+\lg x)^2$，$y=\ln(2+\sqrt{x^2-1})$ 均为初等函数.

小贴士

(1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 如 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为任意实数 x 均使 $u\geqslant 2$，不在函数 y 的定义域内，即不能使 $y=\arccos u$ 有意义.

(2) 分析初等函数是如何由基本初等函数经过四则运算或复合构成的，在微积分的学习中非常重要.

1.1.6 常用经济函数

知识梳理

1. 需求函数

需求函数是用来描述消费者对某种商品的需求量和影响该需求量的各种因素之间相互关系的函数. 影响因素有该商品的质量与价格、消费者的收入与偏好、相关商品的质量与价格等. 通常，为方便研究，只研究需求量与该商品价格的关系，即把需求量 Q_d 只看作该商品价格 p 的函数，记作

$$Q_d=f(p)$$

一般来说，需求函数是价格的单调减少函数，即需求量随着价格的上涨而减少.

需求函数的常见形式有：$Q_d=a-bp$，$Q_d=a-bp^2$，$Q_d=a-b\sqrt{p}$，$Q_d=a-\mathrm{e}^{-bp}(a,b>0)$.

2. 供给函数

供给量是指在某时期内，生产者在一定条件下愿意生产并可供出售的商品量. 供给量受多种因素影响，如该商品的价格、成本等. 在此，忽略其他因素，商品的供给量 Q_s 只看作该商品价格 p 的函数，记作

$$Q_s=g(p)$$

一般来说，供给函数是价格的单调增加函数，即供给量随着价格的上涨而增加.

常见的供给函数是一个线性供给函数

$$Q_s=-c+dp,\quad c,d>0$$

假定其他因素不变，那么一种商品的价格只取决于它本身的供求情况，当需求量等于