第1章 绪论

1.1 材料力学的任务与研究对象

各种机械与结构在工程实际中都有广泛应用，如图 1-1(a)所示的推土机，图 1-1(b)所示的钢结构厂房，图 1-1(c)所示的厦漳跨海大桥，以及图 1-1(d)所示的框架、框架-剪力墙结构等。组成这些机械与结构的零部件统称为**构件**。当机械与结构工作时，构件受到外力作用，同时，其尺寸与形状也发生改变。构件尺寸与形状的变化称为**变形**。构件的变形分为两类：一类为外力解除后能消失的变形称为**弹性变形**；另一类为外力解除后不能消失的变形，称为**塑性变形**或**残余变形**。

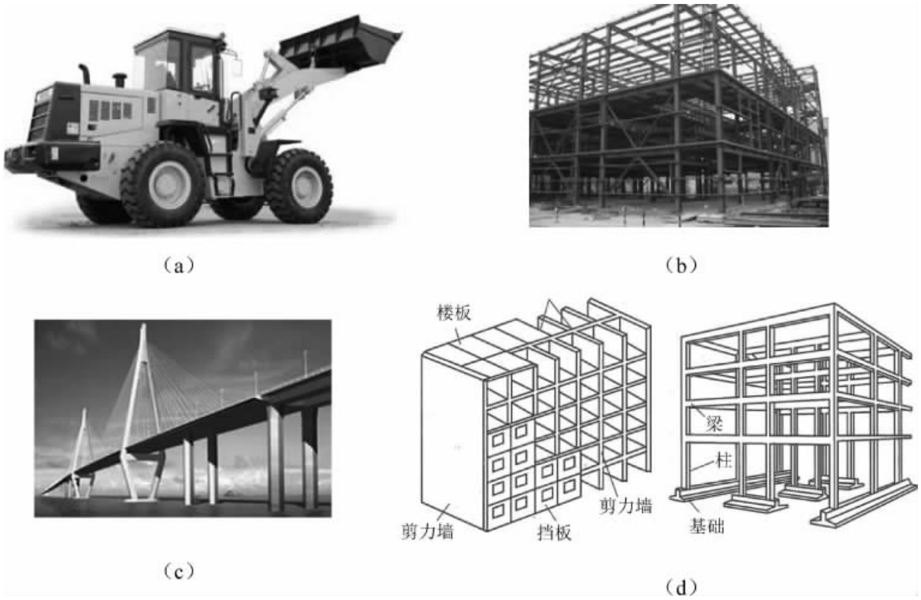

图 1-1　各类机械或结构

(a) 推土机；(b) 钢结构厂房；(c) 厦漳跨海大桥；(d) 框架、框架-剪力墙结构图

1.1.1 材料力学的任务

材料力学是研究工程构件承载能力的基础性学科，也是固体力学中具有入门性质的分

支。它主要以一维构件(杆件)作为研究对象,定量地研究构件内部在各类变形形式下的力学规律,以便于选择适当的材料,确定恰当的形状尺寸,在保证构件能够承受预定荷载的前提下,为设计既安全又经济的构件提供必要的理论基础、计算方法和实验技能。

各类工程构件要能够正常工作,须满足强度、刚度和稳定性三个方面的要求。

所谓**强度**,是指构件或结构抵抗破坏的能力。在一定的外荷载作用下,某些构件可能会在局部产生裂纹。裂纹扩展可能导致构件的断裂。而有些构件虽没有产生裂纹,但可能在局部产生较大的不可恢复的变形,导致整个构件失去承载能力。这些现象都是工程构件应该避免的。显然,用钢制构件代替木制构件,就能够提高构件的强度。所以,需要对各类工程材料的力学性能加以研究、分析和比较,把各类材料应用于最适合的场合。另一方面,也可以采用更加合理的结构形式,而不替换材料,不增加材料用量,也能提高结构的强度。例如,图1-2所示的矩形截面悬臂梁,仅仅改变构件的放置方向,就能提高构件抵抗破坏的能力。因此,在材料力学中,将全面地考虑影响构件强度的各种因素,并加以定量分析,从而使人们能够采取更为合理而可靠的措施提高构件的强度。

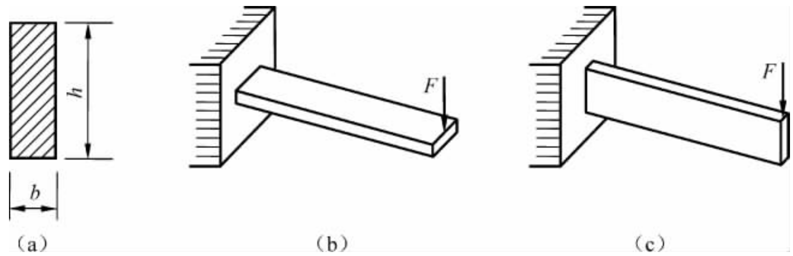

图1-2 悬臂梁的强度与刚度

(a) 横截面;(b) 横放的悬臂梁;(c) 竖放的悬臂梁

所谓**刚度**,是指构件或结构抵抗变形的能力。许多构件都应满足一定的变形要求。例如,在精密仪器的加工中,如果车床主轴变形过大,会严重影响加工精度,次品率大幅上升。如果超高层建筑在风荷载作用下产生太大的变形和晃动,会使住户产生不适感甚至恐慌感。所以工程中常常需要提高结构或构件的刚度。另外,跳水运动员往往希望跳板有足够的弹性和适当的变形量,以便能发挥出更高的水平,这就要求构件的刚度要与使用要求相适应。针对工程中的实际要求,材料力学将研究构件的变形形式和影响因素,讨论控制构件变形的相关措施。

需要注意,不能把强度和刚度混淆,认为提高构件强度的同时也必然提高其刚度是不一定正确的。的确,有些措施可同时提高构件的强度和刚度。即使如此,它们在数量关系上也不一定是相同的。在今后的章节中可以看到,对于截面宽度为 b,高度为 $h=3b$ 的矩形截面梁,若将图1-2(b)所示的梁横放形式变为图1-2(c)所示的竖放形式,则在同样的强度条件要求下,允许施加的荷载提高到 $h/b=3$ 倍;而在同样的刚度条件要求下,允许施加的荷载可以提高到 $(h/b)^2=9$ 倍。另外,在不改变其他条件的前提下,用高强度的合金钢材代替普通钢材,可以提高构件的强度,却不能提高其刚度。因此,强度和刚度是完全不同的两个概念。

由图1-2可以看出,如果荷载沿竖直方向作用,并提高构件截面的高宽比 h/b,有助于提高其强度和刚度。但是,过大的高宽比可能产生如图1-3所示的另外一类情况。当外荷载

不是很大时，悬臂梁保持着仅在竖直平面内发生弯曲的平衡状态，如图 1-3(a)所示；当荷载逐渐增大到一定数值时，原有的平衡状态变得很不稳定，极易转为图 1-3(b)所示的状态，这种情况称为**失稳**。图 1-4(a)中的压杆也存在类似的情况。工程结构或构件应该有足够的保持原有平衡状态的能力，这就是结构的**稳定性**。材料力学将以图 1-4(a)所示的一类压杆为例研究各种因素对压杆稳定性的影响。

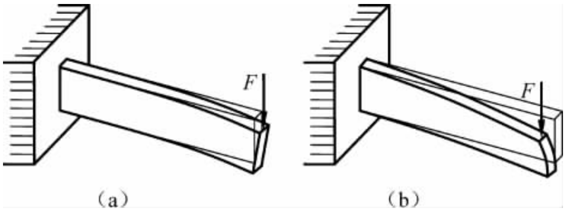

图 1-3 悬臂梁的稳定性
(a) 荷载 F 不大时的平衡；(b)荷载 F 比较大时的平衡

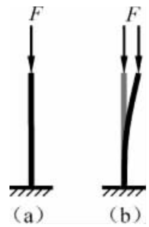

图 1-4 压杆的稳定性
(a) 荷载 F 不大时的平衡；
(b) 荷载 F 比较大时的平衡

1.1.2 材料力学的研究对象

工程实际中构件的形状多种多样，按照其几何特征，主要分为杆件与板件。如图 1-5 所示，一个方向的尺寸远大于其他两个方向的尺寸的构件，称为杆件。杆件是工程中最常见、最基本的构件。如图 1-3 所示的悬臂梁与图 1-4 所示的压杆，工程实际中其长度方向的尺寸远大于其他两个方向的尺寸，故均为杆件。

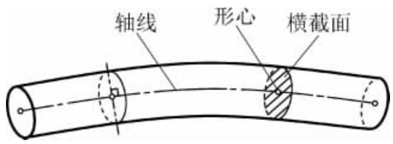

图 1-5 杆件

杆件的形状和尺寸由其轴线与横截面确定，轴线通过横截面的形心，横截面与轴线正交。根据轴线与横截面的特征，杆件可分为**等截面杆**(图 1-6(a)、(c))与**变截面杆**(图 1-6(b))，**直杆**(图 1-6(a)、(b))与**曲杆**(图 1-6(c))。在工程实际中，最常见的杆件是等截面直杆，简称为**等直杆**。等截面直杆的分析计算原理，一般可近似地用于曲率较小的曲杆和截面无显著变化的变截面杆。

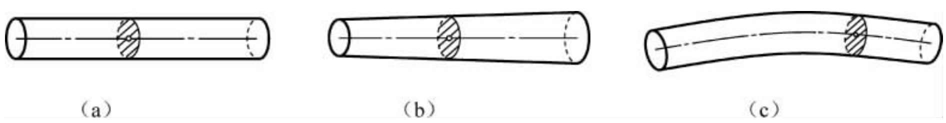

图 1-6 杆件的分类
(a) 等截面直杆；(b) 变截面直杆；(c) 曲杆

如图 1-7 所示，一个方向的尺寸远小于其他两个方向尺寸的构件，称为**板件**。平分板件厚度的几何面称为**中面**。中面为平面的板件称为**板**(图 1-7(a))；中面为曲面的板件称为**壳**(图 1-7(b))。

材料力学的主要研究对象是杆件以及由若干杆件组成的简单杆系，也研究一些形状与受力均比较简单的板与壳，如承受径向压力的中面为圆柱面的薄壁圆筒和薄壁圆管。至于

图 1-7 板件的分类
(a) 平板；(b) 壳

较复杂的杆系与板壳问题，则属于结构力学与弹性力学等课程的研究范畴。工程实际中的大部分构件属于杆件，而且，杆件问题的分析原理与方法，也是分析其他形式构件的基础。

1.2 材料力学的基本假设

实际工程中的任何构件、机械或结构都是变形体，或称为**变形固体**。变形固体在外力及其他外部因素的作用下，其本身的性质和行为可能比较复杂。材料力学不可能同时考虑各种因素的影响，而只能保留所研究问题的主要方面，略去次要因素，对变形固体作某些假设，即将复杂的实际物体抽象为具有某些主要特征的**理想固体**，以便于进行强度、刚度和稳定性的理论分析。通常，在材料力学中，对变形固体作如下假设。

1. 连续性假设

连续是指在物体或构件所占据的空间内没有空隙，处处充满了物质，即认为物体或构件是密实的；且认为物体在变形后仍保持这种连续性，即受力变形后既不产生新的空隙或孔洞，也不出现重叠现象。这样可以保证物体或构件中的一些物理量(如任意一点的位移等)是连续的，因而可以用坐标的连续函数来描述，便于利用微积分等数学工具。广泛的实验与工程实践证实，由此假定所作的力学分析是可行的。

2. 均匀性假设

材料在外力作用下所表现出来的性能，称为材料的**力学性能**。在材料力学中，假设材料的力学性能与其在构件中的位置无关，即认为材料是均匀的。按此假设，从构件内部任何部位所切取的微小单元体(简称为单元体)都具有与构件完全相同的性能。同样，通过试样所测得的力学性能，也可用于构件内的任何部位。

对于实际材料，其基本组成部分的力学性能往往存在不同程度的差异。例如，金属是由无数微小晶粒组成，而各个晶粒的力学性能不完全相同，晶粒交界处的晶界物质与晶粒本身的力学性能也不完全相同。但是，由于构件的尺寸远大于其组成部分的尺寸(例如 $1mm^3$ 的钢材中包含数万甚至数十万个晶粒)，因此，按照统计学观点，仍可将材料看成是均匀的。

3. 各向同性假设

假设材料在各个不同方向具有相同的力学性质，即认为其是各向同性的。沿各个方向具有相同力学性能的材料称为**各向同性材料**，如玻璃。金属的各个晶粒均属于各向异性体，但由于金属构件所含晶粒极多，且在构件内随机排列，宏观上仍可将金属看成是各向同性材

料。因此,在各向同性材料中,表征材料特性的力学参量(如弹性模量等)与方向无关,为常量。应指出,如果材料沿不同方向具有不同的力学性质,则称为**各向异性材料**。木材、复合材料即为典型的各向异性材料。

以上针对材料的三个假设是材料力学普遍采用的前提假设。除以上三个假设外,材料力学还常常依据小变形假设来推导有关定理或结论。所谓**小变形假设**,是指所研究的构件在外荷载作用下发生的变形都是微小的,在很多情况下需要用专门的仪器才能观察到。比如结构工程中的梁,它在荷载作用下整个跨度上产生的最大位移比梁横截面的尺寸小很多。

绝大多数工程构件在实际工作状态中所发生的变形都属于小变形。这也是采用小变形假设的合理之处。

采用小变形假设可以使分析过程得以简化,这可以从两个方面说明。

第一,原始尺寸原理。对变形体的分析和计算可以在未变形的构形(指形状和尺寸)上进行,这可用图 1-8 加以说明。图 1-8 是一个简单桁架,其中一根杆件是竖直的,另一根是倾斜的。如图 1-8(a)所示,若在结点上作用一个竖向集中力,按理论力学中静力学的分析,斜杆是所谓零杆,即内部不存在作用力。

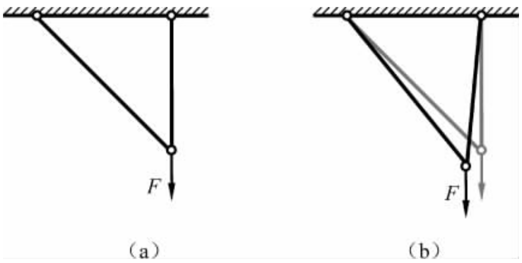

图 1-8 两种计算构形
(a) 原始构形;(b) 实际变形后的构形

当实际作用集中力并考虑到构件的变形后,平衡的形态将如图 1-8(b)所示。严格意义上说,斜杆不再是零杆,因而两杆内部的力和变形都不再如图 1-8(a)的分析那么简单。但是,由于杆件发生的变形是微量,由分析可知,按照图 1-8(b)计算的位移与图 1-8(a)的计算结果之差是比杆件产生的小变形还要高阶的微量,因此可以忽略不计,即认为斜杆是零杆。一般地,在材料力学课程中,除了少数几处特别需要并加以声明的情况,总是在未变形的原始构形上进行平衡分析。这种考虑弹性构件的内力与外力平衡时,在未变形的原始构形上进行分析的方法称为**原始尺寸原理**。

第二,**线性化原理**。在许多分析过程中,如果能够确定某些无量纲量是高阶微量,本教材都将适时地将其舍去,从而使分析的方程线性化。例如,在研究构件的位移和变形的几何关系时,构件上一点的位移常常是一条弧线(二次或更高次),为简化分析和计算,常用直线(切线或垂线)(线性)代替。又如,在已经确认 x 是无量纲量的微量的前提下,$\sin x$、$\tan x$ 均可以简化为 x,而 $\cos x$ 则可以简化为 1,诸如此类的处理可以简化分析计算过程,且由于工程中的很多问题都是小变形问题,所以可以保证工程精度的要求。

【说明】 (1)虽然材料力学中的变形是微小的,但其作用是巨大的。如何依据所观察到的现象正确地对变形提出假设,并据此寻找变形量之间的关系,是很多材料力学问题的基础。(2)材料力学主要是用线性化的手段处理非线性问题,所以材料力学的分析方法主要为

一阶分析方法。这既是材料力学的优势(计算简洁又可满足大多数工程精度要求),也是它的劣势(不能进行高阶精度的分析)。

1.3 外力、内力与截面法

在外力作用下,物体发生变形,其内部各质点产生位移,同时产生内力。下面介绍外力、内力及确定内力的截面法。

1.3.1 外力及其分类

对于所研究的对象而言,其他构件或物体作用于其上的力均为外力,包括荷载和约束反力。荷载是主动作用于物体上的外力。在实际工程中,构件或结构受到的荷载是多种多样的,如建筑物的楼板传给梁的重力、钢板对轧辊的作用力等。这些力统称为加在构件上的荷载。荷载可以根据不同特征进行分类。

(1) 荷载按其作用在结构上的时间长短可分为**恒载**和**活载**。

恒载是长期作用在构件或结构上的不变荷载,如结构的自重和土压力。

活载是指在施工和使用期间可能作用在结构上的可变荷载,它们的作用位置和范围可能是固定的(如风荷载、雪荷载、会议室的人群重力等),也可能是移动的(如吊车荷载、桥梁上行驶的车辆荷载等)。

(2) 荷载按其作用在结构上的分布情况可分为**分布荷载**和**集中荷载**。

分布荷载是连续分布在结构上的荷载。当分布荷载在结构上均匀分布时,称为均布荷载;当荷载均匀分布在一段直线或曲线上时,则称为均布线荷载,常用单位为 N/m 或 kN/m。

当作用于结构上的分布荷载面积远小于结构的尺寸时,可认为此荷载作用在结构的一点上,称为集中荷载。例如,火车车轮对钢轨的压力,屋架传给砖墙或柱子的压力等,都可认为是集中荷载,常用单位为 N 或 kN。

(3) 荷载按其作用在结构上的性质可分为**静力荷载**和**动力荷载**。

静力荷载是指从零开始缓慢、平稳地增加到终值后保持不变的荷载,在整个加载过程中,所引起构件的加速度可以忽略不计。

动力荷载是指大小、位置、方向随时间迅速变化的荷载。在动力荷载作用下,构件或结构产生显著的加速度,故必须考虑惯性力的影响,如动力机械产生的振动荷载、风荷载、地震作用产生的随机荷载等。

1.3.2 内力与截面法

实际构件是变形固体,即使不受外力作用,其各部分之间也存在相互作用力,即结合力。在外力作用下,构件产生变形,内部各质点间的相对位置发生变化。同时,构件内部相连各部分之间产生相互作用力。在材料力学中,一般将由外力作用而引起的相连部分之间相互作用力的改变量称为附加内力,简称**内力**。可见,内力是由于外力作用而产生的,且随外力的改变而改变,达到某一限度时就会引起构件或结构的破坏。因此,构件的强度、刚度和稳定性与内力的大小及其在构件内的分布情况密切相关。内力分析是解决构件强度、刚度和

稳定性问题的基础。

由理论力学、静力学可知，为了分析两物体之间的相互作用力，必须将该两物体分离，并取其中一部分作为研究对象，才能将两个物体之间的作用力作为外力进行计算。同样，要分析构件的内力，例如要分析图 1-9(a)所示杆件横截面 m—m 上的内力，也必须假想地沿该截面将杆件切开，得到切开截面的内力如图 1-9(b)所示，然后讨论切开后的两部分中的任一部分。由连续性假设可知，内力是作用在切开截面上的连续分布力，从而内力系在所切开的截面上构成空间任意力系。

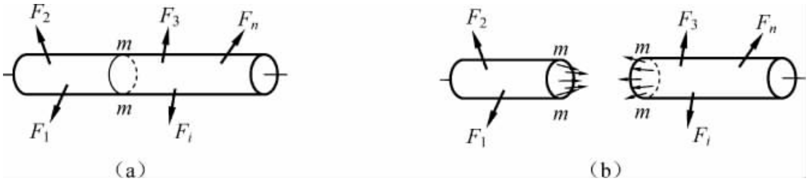

图 1-9 截面法

(a) 受外力作用的杆件；(b) 用假想截面切开后的杆件

应用静力学中空间力系的简化理论，将上述分布内力向截面的任意一点(如形心 C)简化，如图 1-10(a)所示，可得主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}$(本书在一些地方用 $\twoheadrightarrow$ 表示力偶及其力偶矩矢)。如图 1-10(b)所示，若沿横截面轴线方向建立坐标轴 x，在所切横截面内建立坐标轴 y 与 z，并将主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}$ 沿 x、y、z 轴投影，可得内力分量 F_{N}、$F_{\mathrm{S}y}$ 和 $F_{\mathrm{S}z}$，以及内力偶矩分量 M_x、M_y 和 M_z。

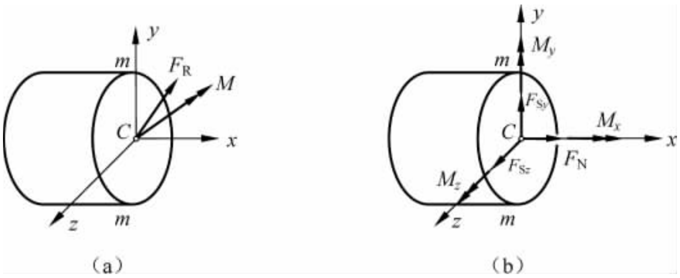

图 1-10 截面内力的简化与分解

(a) 简化后的主矢与主矩；(b) 截面的内力分量

作用线垂直于所切的横截面并通过其形心的内力分量 F_{N} 称为**轴力**；作用线位于所切横截面的内力分量 $F_{\mathrm{S}y}$ 和 $F_{\mathrm{S}z}$ 称为**剪力**；矢量方向沿轴线的内力偶矩分量 M_x 称为**扭矩**；矢量位于所切横截面的内力偶矩分量 M_y 和 M_z 称为**弯矩**。上述内力及内力偶矩分量与作用杆段上的外力保持平衡，因此，由平衡方程即可建立内力与外力间的关系，或可由外力确定内力。为便于叙述，以后将内力分量及内力偶矩分量统称为**内力分量**。这些内力分量与作用在该保留部分的外力构成平衡力系，可列出的相应平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\sum F_{ix} = 0,\quad \sum F_{iy} = 0,\quad \sum F_{iz} = 0\\ \sum M_{ix} = 0,\quad \sum M_{iy} = 0,\quad \sum M_{iz} = 0\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

将杆件假想地用截面切开以显示内力，并由平衡条件建立内力与外力间的关系，或由外

力确定内力的方法，称为**截面法**，它是分析杆件内力的一般方法。

上述关于内力分量的定义与坐标轴的选取，将在第2章进一步讨论。

用截面法求内力可归纳为如下步骤：

(1) 在求内力的截面处，用一假想的平面将构件截为两部分。

(2) 舍弃一部分，保留另一部分，并将舍弃部分对保留部分的作用代之以力。

(3) 考虑保留部分的平衡，由平衡方程来确定内力值。

因为内力总是成对出现的，故在步骤(2)中，保留哪一部分都可以。位于不同部分上的内力总是等值反向的，二者为作用力与反作用力的关系。

【说明】 (1)在研究内力与变形时，应慎重应用等效力系，如力和力偶沿其作用线和作用面的移动，不能机械地、不加分析地任意应用。一个力(或力系)用别的等效力系来代替，虽然对整体平衡没有影响，但对构件的内力与变形来说，则可能有很大差别。(2)在很多情况下，杆件横截面上仅存在一种、两种或三种内力分量。

1.4 应力、应变与胡克定律

1.4.1 应力

如上所述，内力是外力作用使构件内部相连部分之间相互作用力的改变量，并沿截面连续分布。为了描述内力的分布情况，现引入内力分布集度即应力的概念。

1. 正应力与切应力

如图1-11(a)所示，在截面 m—m 上任一点 k 的周围取一微小面积 ΔA，并设作用在该面积上的内力为 ΔF，则 ΔF 与 ΔA 的比值称为 ΔA 内的平均应力，并用 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 表示，即

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}=\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} \tag{1-2}$$

一般情况下，内力并非沿截面均匀分布，平均应力的大小及方向将随所取面积 ΔA 的大小不同而不同。为了更精确地描写内力的分布情况，应使 ΔA 趋于零，由此所得平均应力的极限值称为截面 m—m 上 k 点处的应力或全应力，并用 $\boldsymbol{p}$ 表示，即

$$\boldsymbol{p}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} \tag{1-3}$$

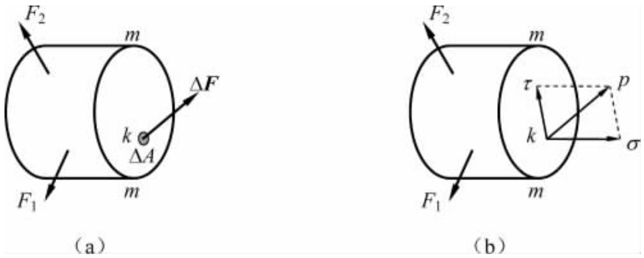

图1-11 截面上一点处的平均应力与应力的概念

(a) 截面 m—m 上 k 点处的平均应力；(b) 截面 m—m 上 k 点的应力

显然，应力 $\boldsymbol{p}$ 的方向即 $\Delta\boldsymbol{F}$ 的极限方向。为了分析方便，通常将应力 p 沿截面法向与切向分解为两个分量，如图 1-11(b)所示。沿截面法向的应力分量称为正应力，并用 σ 表示；沿截面切向的应力分量称为切应力，并用 τ 表示。显然有

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \tag{1-4}$$

【说明】 (1)在描述应力时，应明确是哪个截面上哪个点处的正应力或切应力。或者说，在构件的同一截面上，不同点处的应力一般是不同的；同时，在过同一点的不同方位截面上，应力一般也是不同的。(2)内力是截面上所有点处的应力在包含该点的微小面积上形成的微内力简化合成而得到的。

在我国法定计量单位中，力与面积的基本单位分别为 N 与 m^2，应力的单位为 Pa(帕[斯卡])，$1\mathrm{Pa}=1\mathrm{N/m}^2$。在材料力学中，应力的常用单位为 MPa(兆帕)，其值为

$$1\mathrm{MPa} = 10^6\mathrm{N/m}^2 = 1\mathrm{N/mm}^2 \tag{1-5}$$

由式(1-5)可知，如果力的单位用 N，长度的单位用 mm，则得到的应力单位就是 MPa，不必再转换单位，这为数值计算带来方便。本书在后续章节中，将根据问题的性质采用 MPa-N-mm 或 Pa-N-m 的单位系统，请注意识别。

【说明】 在大型有限元软件(如 ANSYS)中，各个物理量一般不输入单位，使用者须自己转换单位。如果力用 N，长度用 mm，则应力就是 MPa，不用再转换。

2. 单向应力、纯剪切与切应力互等定理

如前所述，受力构件中一点的应力不仅与该点的空间位置有关，而且与该点所在的截面有关。由于过一点可以截出无穷多个截面，所以一点的应力状态实际上有无穷多个。构件中一点在所有截面上应力的集合称为该点的应力状态。研究表明，只要知道一点在一些特定截面上的应力，其他任意截面上的应力都可以通过计算得到。具体计算过程，将在第 6 章进一步阐述。

如图 1-12(a)所示的直角坐标系(x, y, z)，为考察构件中任意一点 k 处的应力状态，选取过 k 点的三个特殊截面，它们的外法线分别与 x 轴、y 轴和 z 轴的标准单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的正向相同，可称为正 x 面、正 y 面和正 z 面。若三个特殊截面上的应力矢量分别为 $\boldsymbol{p}_x$、$\boldsymbol{p}_y$ 和 $\boldsymbol{p}_z$，将 $\boldsymbol{p}_x$、$\boldsymbol{p}_y$ 和 $\boldsymbol{p}_z$ 分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上分解，得到图 1-12(b)所示的 9 个应力分量：$\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$；$\sigma_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$；$\sigma_{zz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$。其中，第一个下标表示截面的法线方向，第二个下标表示该应力的方向。为了简洁，通常将 σ_{xx}、σ_{yy} 和 σ_{zz} 分别写为 σ_x、σ_y 和 σ_z。

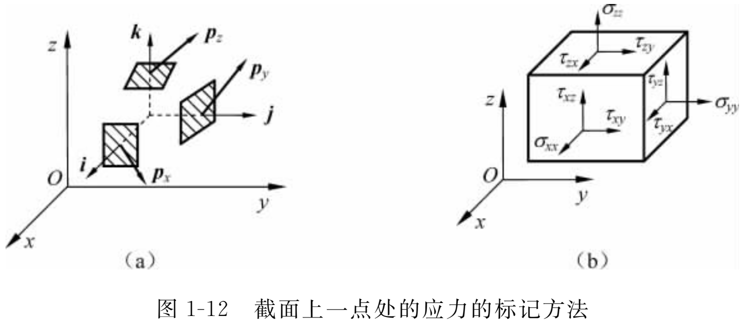

图 1-12 截面上一点处的应力的标记方法

(a) 三个特殊截面的全应力；(b) k 点的单元体

图 1-12(b)中是将三个特殊截面(即正 x 面、正 y 面和正 z 面)再加上三个负面,即负 x 面(外法线与 x 轴负向相同的面)、负 y 面(外法线与 y 轴负向相同的面)、负 z 面(外法线与 z 轴负向相同的面),围合成一个正六面体,可以理解为是从构件中截出的包含 k 点的单元体,该单元体表面上的应力就代表 k 点的应力状态。图 1-12(b)给出的是最复杂的应力情况,9 个应力分量全不为零。而在材料力学研究的问题中,往往只有 2 个应力分量不为零,其余应力分量均为零,所以要简单得多。

单元体受力最基本、最简单的状态有两种,一种是**单向受力**或**单向应力**状态,如图 1-13(a)所示;另一种是**纯剪切**状态,如图 1-13(b)所示。在单向应力状态下,单元体只在一对互相平行的截面上承受正应力,当 σ 为拉应力时,称为单向拉伸应力状态;当 σ 为压应力时,称为单向压缩应力状态。纯剪切应力状态只承受切应力的作用。

切应力具有独特的性质。图 1-14(a)中,设单元体的三个边长分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$,并假设单元体顶面和底面的切应力为 τ,左、右侧面上的切应力为 τ'。根据静力平衡关系,有

$$\sum M_z = 0, \quad \tau \mathrm{d}x\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}y - \tau' \mathrm{d}y\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}x = 0$$

解得

$$\tau = \tau' \tag{1-6}$$

式(1-6)表明,在单元体互相垂直的截面上,垂直于截面交线方向的切应力大小相等,方向均指向或离开该交线。这种关系称为**切应力互等定理**。即使截面上存在正应力(图 1-14(b)),切应力互等定理仍然成立,因为存在的正应力对 z 轴之矩的代数和为零。

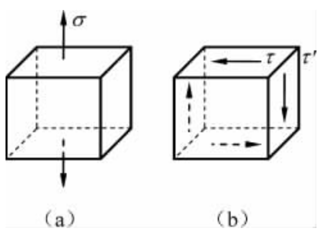

图 1-13 两种典型应力状态

(a) 单向应力状态;(b) 纯剪切状态

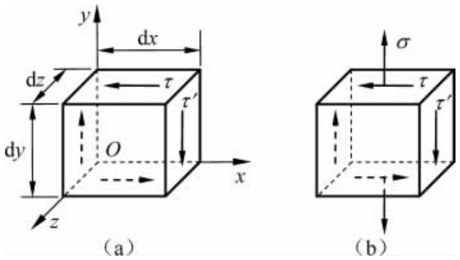

图 1-14 切应力互等的证明图

(a) 纯剪切状态;(b) 非纯剪切状态

【说明】 切应力互等定理在固体力学中普遍存在,在以后的章节中会多次用到该定理。

3. 应力与内力分量之间的关系

应力作为截面上分布内力在一点的集度,与截面的内力分量之间有着密切的关系。为了得到这种关系,依据横截面及其形心 C 建立图 1-15 坐标系 $Cxyz$,并考察作用在横截面的微元面积 $\mathrm{d}A$ 上的正应力 σ 和切应力 τ_{xy}、τ_{xz},将它们分别乘以微元面积,即可得到作用在微元面积 $\mathrm{d}A$ 上的微内力 $\sigma\mathrm{d}A$、$\tau_{xy}\mathrm{d}A$ 和 $\tau_{xz}\mathrm{d}A$。将这些微内力分别对 $Cxyz$ 坐标系中的 x、y 和 z 轴投影及取矩,再沿整个横截面积分,即可得到应力与上述 6 个内力分量之间的关系式:

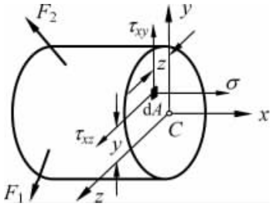

图 1-15 应力及其与内力分量之间的关系