第0章 概率论的历史简介

本章对概率论的发展历史作一个简单介绍。

1．起源

概率论这门学科可以说起源于赌博。尽管早在 15 世纪与 16 世纪意大利的一些数学家（如 Cardano, Pacioli, Tartaglia 等）已经对某些靠运气的游戏中的特定的概率进行了计算，但是概率论作为一门学科起源于 17 世纪中期.

1654 年，一个名叫 A.G.C. de Méré 的法国贵族对赌博以及赌博中的问题很感兴趣，但他对一些问题感到很困惑，为解决自己的困惑，他向著名数学家 B. Pascal (1623—1662) 求助. 为解答 de Méré 提出的问题，Pascal 与另外一位法国著名数学家 P. Fermat (1601—1655) 通信进行了讨论. 1655 年，荷兰科学家 C. Huygens (1629—1695) 首次访问巴黎，期间他学习了 Pascal 与 Fermat 关于概率论的工作. 1657 年，当他回到荷兰后，写了一本小册子，名叫《De Ratiociniis in Ludo Aleae》(可译为《关于机会游戏的计算》), 这是关于概率论的第一本书. 在这个时期，“数学期望”这一基本概念以及关于概率的可加性、可乘性已经建立.

2．18 世纪

概率论在 18 世纪得到了快速发展，这个期间的主要贡献者是 J. Bernolli (1654—1705) 与 A. de Moivre (1667—1754).

J. Bernoulli 是一位瑞士数学家，Bernoulli 家族的第一位数学家. Bernoulli 在概率论领域的代表作是《Ars Conjectandi》(可译为《猜测的艺术》)，发表于 1713 年，即他逝世后的第八年. 在此书中他严格地证明了概率论的第一个极限定理.

De Moivre 是一位法国数学家，但是大部分时间他住在英国. De Moivre 开创了概率论的现代方法：1718 年发表了《The Doctrine of Chance》. 在此书中统计独立性的定义首次出现. 该书在 1738 年与 1756 年出了扩展版，生日问题出现在 1738 年的版本中，赌徒破产问题出现在 1756 年的版本中.

1730 年 de Moivre 的另外一本专著《Miscellanea Analytica Supplementum》(可译为《解析方法》) 正式出版. 其中，关于对称 Bernoulli 试验的中心极限定理首次提出并得到证明.

3. 19 世纪

19 世纪，概率论的早期理论得到了进一步的发展与推广，这个期间的主要贡献者是 P. S. M. Laplace (1749—1827), S. D. Poisson (1781—1840), C. F. Gauss (1777—1855), P. L. Chebyshev (1821—1894), A. A. Markov (1856—1922) 与 A. M. Lyapunov (1857—1918). 这个时期的研究主要围绕极限定理展开.

1812 年 Laplace 的伟大专著《Théorie Analytique des Probabilitiìés》（可译为《概率论的解析理论》）诞生，其中，他阐述了他自己及前辈在概率论方面的结果. 特别地，他将 De Moivre 的定理推广到 Bernoulli 试验非对称情形. Laplace 最重要的工作是将概率方法应用到观测误差，在很一般的条件下证明了观测误差的分布一定是渐近正态的.

在当代概率论中，与 Poisson 相关的有 Poisson 分布、Poisson 过程. Gauss 创立了误差理论，特别地，创立了最小二乘的基本方法. Chebyshev, Markov 与 Lyapunov 在研究独立但不同分布的随机变量和的极限定理方面发展了有效的方法.

在 Chebyshev 之前，概率论的主要兴趣在于对随机事件的概率进行计算. 而 Chebyshev 是第一个清晰认识并充分利用随机变量及其数学期望概念的人. Chebyshev 思想的主要倡导者是他的忠诚的学生 Markov, 他将其老师的结果

完整清晰地展现出来. Markov 自己对概率论的重大贡献之一是创立了概率论的一个分支：研究相依随机变量的理论，称为“Markov 过程”.

为证明概率论的中心极限定理，Chebyshev 与 Markov 利用的是矩方法，而 Lyapunov 利用了特征函数方法. 极限定理的后续发展表明特征函数方法是一种强大的解析工具.

4. 20 世纪

20 世纪可称为概率论发展的现代时期，本时期开始于概率论的公理化. 在这个方向上的早期贡献者有 S. N. Berstein (1880—1968), R. von Mises (1883—1953) 与 E. Borel (1871—1956). 1933 年，俄罗斯著名数学家 A. N. Kolmogorov 出版了他的伟大专著《Foundations of the Theory of Probability》. 其中，他为概率论建立了目前广泛采纳的公理化体系.

在 20 世纪，随机过程理论（马氏过程，平稳过程，鞅，随机过程的极限定理等）得到了快速发展. 另外，还有许多分支，比如（排名不分先后）随机微分方程、随机偏微分方程、倒向随机微分方程、随机微分几何、Malliavin 变分、白噪声分析、狄氏型理论、遍历理论、数理金融、大偏差理论、交互粒子系统、测度值过程、概率不等式、泛函不等式、渗流、最优传输、SLE、随机矩阵、随机优化、随机控制、随机动力系统等众多概率论、随机分析及相关领域中的分支得到了快速发展. 作出重要贡献的科学家实在太多，不便一一列出.

第 1 章　测度空间与概率空间

随机变量是概率论的一个主要研究对象，定义为从一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到实数空间 $\mathbf{R}$ 中满足某种性质的映射. 为更好地研究这种映射，我们在这一章中介绍什么是概率空间，实际上我们介绍更一般的测度空间，概率空间为一种特殊的测度空间.

1.1　可测空间

为介绍测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$，首先介绍可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.1.1　集类

为介绍可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$，先介绍一些基本的集合论符号与概念. 假定 Ω 为一个非空集合，$\omega \in \Omega$ 表示元素 ω 属于集合 Ω，$\omega \notin \Omega$ 表示元素 ω 不属于集合 Ω. 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 假定集合 A 与 B 为 Ω 的两个子集 (我们用 $A \subset \Omega$ 与 $B \subset \Omega$ 表示)，定义

$$
\begin{aligned}
&A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 而且 } \omega \in B\},\\
&A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 或者 } \omega \in B\},\\
&A \backslash B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ 而且 } \omega \notin B\},\\
&A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A),\\
&A^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash A,
\end{aligned}
$$

分别称为 A 与 B 的交、A 与 B 的并、A 减去 B 的差、A 与 B 的对称差、A

的余集（或补集）. 根据上述定义有 $A\backslash B = A\cap B^{\mathrm{c}}$.

集合的并 $\cup$ 与交 $\cap$ 满足交换律、结合律与分配律 (请看习题 1）. 它们与取余集运算还满足 de Morgan 公式：

$$(A\cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}}\cup B^{\mathrm{c}},\ (A\cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}}\cap B^{\mathrm{c}}.$$

对于数列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$，有

$$\text{上极限 } \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} x_k,\ \text{下极限 } \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} x_k.$$

类似地，给出下述定义：

定义 1.1 假定 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 为一个集合序列，定义 **上极限**

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k,$$

下极限

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k.$$

如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = A$，称 A 是集合列 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 的极限，记为 $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

根据以上定义，容易证明

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{\omega : \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n\},\\ \liminf_{n\to\infty} A_n &= \{\omega : \omega \text{ 至多不属于有限个 } A_n\}.\end{aligned}$$

如果对任意 $n\geqslant 1$, 有 $A_n\subset A_{n+1}$，称 $\{A_n\}$ 为单调上升的. 如果记 $A = \cup_{n\geqslant 1}A_n$，则此时有 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, 简记为 $A_n\uparrow A$. 类似地，如果对任意 $n\geqslant 1$, 有 $A_n\supset A_{n+1}$，称 $\{A_n\}$ 为单调下降的. 如果记 $A = \cap_{n\geqslant 1}A_n$，则此时有 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, 简记为 $A_n\downarrow A$.

由 de Morgan 公式可知，如果 $A_n\uparrow A$，则 $A_n^{\mathrm{c}}\downarrow A^{\mathrm{c}}$.

很多时候将集合的并表示为不交并是很有用的. 假定 $A_1, A_2, \cdots$ 为 Ω 的子集. 有

(1) $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \cdots \cup (A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$.

(2) $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} (A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$.

(1) 与 (2) 中，右边的集合互不相交. 如果 $\{A_n\}$ 是单调上升的集合列，上述两公式变为

(3) $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup \cdots \cup (A_n \backslash A_{n-1})$.

(4) $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n \backslash A_{n-1})$ (取 A_0 为空集).

现在我们给出一些集类的定义，关于它们之间的一些关系，请参看下面的注记 1.1(1) 与习题 2, 3.

定义 1.2 假定 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一个集类.

(1) 称 $\mathcal{C}$ 为 **$\boldsymbol{\pi}$ 类**，如果 $\forall A, B \in \mathcal{C}$, 有 $A \cap B \in \mathcal{C}$, 即 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭；

(2) 称 $\mathcal{C}$ 为 **代数**，如果 $\varnothing \in \mathcal{C}$, 而且 $\forall A, B \in \mathcal{C}$, 有 $A \cap B \in \mathcal{C}, A^c \in \mathcal{C}$, 即 $\varnothing \in \mathcal{C}$, 而且 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭，对取余集运算封闭；

(3) 称 $\mathcal{C}$ 为 **$\boldsymbol{\sigma}$ 代数**，如果 $\varnothing \in \mathcal{C}$, 而且 $\forall A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{C}$, 有 $A_1^c \in \mathcal{C}, \cap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, 即 $\varnothing \in \mathcal{C}$, 而且 $\mathcal{C}$ 对可数交封闭，对取余集运算封闭;

(4) 称 $\mathcal{C}$ 为 **单调类**，如果 $A_n \in \mathcal{C}, A_n \uparrow A$ 或者 $A_n \downarrow A$，则 $A \in \mathcal{C}$；

(5) 称 $\mathcal{C}$ 为 **$\boldsymbol{\lambda}$ 类**，如果它满足以下三条性质：

(i) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{C}$；

(ii) 对正常差封闭，即如果 $A, B \in \mathcal{C}, A \subset B$，则 $B \backslash A \in \mathcal{C}$；

(iii) 如果 $A_n \in \mathcal{C}, A_n \uparrow A$，则 $A \in \mathcal{C}$.

注记 1.1 (1) 由上述定义容易知道 σ 代数是代数，代数是 π 类；σ 代数是单调类，也是 λ 类；λ 类是单调类.

(2) 根据 de Morgen 公式，可知代数的定义中“对有限交封闭”可以改为“对有限并封闭”；σ 代数的定义中“对可数交封闭”可以改为“对可数并封闭”；λ 类的定义中条件 (iii) 可以改为以下的条件：

(iii)$'$ 如果 $A_n \in \mathcal{C}, A_n \downarrow A$，则 $A \in \mathcal{C}$.

例 1.1 (1) 以 2^{Ω} 记 Ω 的幂集，即由 Ω 的所有子集构成的集类. 显然 2^{Ω} 是 σ 代数，而且是 Ω 上最大的 σ 代数.

(2) $\{\varnothing, \Omega\}$ 是 Ω 上最小的 σ 代数.

(3) 如果 A 是 Ω 的一个非平凡子集（即 $A \neq \varnothing, A \neq \Omega$），则包含 A 的最小 σ 代数为 $\{\varnothing, A, A^{\mathrm{c}}, \Omega\}$.

下面命题的证明是容易的，我们省略证明.

命题 1.1　假定 I 为一个指标集，$\forall i \in I$，$\mathcal{C}_i$ 为 Ω 上的一个集类. 如果 $\forall i \in I$，$\mathcal{C}_i$ 为 π 类（代数，σ 代数，单调类，λ 类），则 $\cap_{i\in I}\mathcal{C}_i$ 为 π 类（代数，σ 代数，单调类，λ 类）.

定义 1.3　假设 Ω 为一非空集合，$\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ 代数，则称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间.

1.1.2　生成集类、单调类定理

由例 1.1(1) 及命题 1.1 知，对于 Ω 上任意子集类 $\mathcal{C}$，一定存在包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ 代数、最小 λ 类和最小单调类，称它们为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数、λ 类和单调类，并分别用 $\sigma(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})$ 和 $m(\mathcal{C})$ 来表示. 实际上，可定义 $\sigma(\mathcal{C}) = \cap\{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的 σ代数$\}$. 对 $\lambda(\mathcal{C})$ 与 $m(\mathcal{C})$, 可类似定义. 由注记 1.1(1) 知 $m(\mathcal{C}) \subset \lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

定理 1.2 (单调类定理)　设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数，则 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为 π 类，则 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

证明　我们只证明 (1)，将 (2) 的证明留作习题. 由 $m(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ 知，只需要证明 $\sigma(\mathcal{C}) \subset m(\mathcal{C})$. 由于 $\mathcal{C} \subset m(\mathcal{C})$，因此由定义只需要证明 $m(\mathcal{C})$ 是一个 σ 代数. 进一步，利用本节习题 2，只需要证明 $m(\mathcal{C})$ 是一个代数. 令

$$\mathcal{G}_1 = \{A | A \in m(\mathcal{C}), A^{\mathrm{c}} \in m(\mathcal{C}), A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{C}\}.$$

因为 $\mathcal{C}$ 是一个代数，所以 $\mathcal{C} \in \mathcal{G}_1$. 容易验证 $\mathcal{G}_1$ 为单调类，因此 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$. 令

$$\mathcal{G}_2 = \{A | A \in m(\mathcal{C}), A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in m(\mathcal{C})\}.$$

由 $\mathcal{G}_1$ 的定义及 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$ 知 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_2$. 可以验证 $\mathcal{G}_2$ 为单调类，因此 $\mathcal{G}_2 = m(\mathcal{C})$. 总之，由 $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = m(\mathcal{C})$ 知 $m(\mathcal{C})$ 为代数，故证明完成. □

由定理 1.2 立即得到如下推论：

推论 1.3 设 $\mathcal{C},\mathcal{F}$ 为两个集类，且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数，且 $\mathcal{F}$ 为单调类，则 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$.

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为 π 类，且 $\mathcal{F}$ 为 λ 类，则 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$.

单调类定理及其推论是很有用的工具. 为证明某个 σ 代数 $\mathcal{F}$ 中的元素满足某种性质，利用单调类定理（或其上述推论），只需要证明：(1) 有一生成 $\mathcal{F}$ 的代数（π 类）$\mathcal{C}$ 中的元素都满足该性质；(2) 满足该性质的集合全体构成一单调类（λ 类）.

命题 1.4 (文献 [2] 第 5 页) 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一个集类，$A\subset\Omega$. 令 $A\cap\mathcal{C}=\{A\cap B|B\in\mathcal{C}\}$，则

$$\sigma_A(A\cap\mathcal{C})=A\cap\sigma(\mathcal{C}),$$

其中 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$ 表示 $A\cap\mathcal{C}$ 在 A 上生成的 σ 代数.

证明 因为 $\mathcal{C}\subset\sigma(\mathcal{C})$，所以 $A\cap\mathcal{C}\subset A\cap\sigma(\mathcal{C})$. 容易验证 $A\cap\sigma(\mathcal{C})$ 是 A 上的 σ 代数，因此 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\subset A\cap\sigma(\mathcal{C})$. 于是为证明此命题，只需要证明 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\supset A\cap\sigma(\mathcal{C})$, 即需要证明对于任意 $B\in\sigma(\mathcal{C})$，有 $A\cap B\in\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$. 为此，令 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma(\mathcal{C})$ 中的好集合的类，即

$$\mathcal{F}=\{B\in\sigma(\mathcal{C})|A\cap B\in\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\}.$$

因为 $\sigma(\mathcal{C})$ 与 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$ 都是 σ 代数，所以容易验证 $\mathcal{F}$ 也是 σ 代数. 然而 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$，因此 $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{C})$. □

命题 1.4 中的证明方法称为“**好集原理**”，在测度论中经常使用.

例 1.2（Borel σ代数） 假设 E 为一拓扑空间，用 $\mathcal{B}(E)$ 表示由全体开集（或全体闭集）生成的 σ 代数，称 $\mathcal{B}(E)$ 为 E 上的 Borel σ 代数. 这样就得到一可测空间 $(E,\mathcal{B}(E))$.

定义 1.4 假设 $\mathcal{F}$ 为集合 Ω 上的一 σ 代数，称 $\mathcal{F}$ 为 **可分的**（**或可数生成的**）如果存在一可数子集类 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{C})$.

定义 1.5 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，对任意 $\omega\in\Omega$，令

$$\mathcal{F}_\omega=\{B\in\mathcal{F}|\omega\in B\},\ A(\omega)=\bigcap_{B\in\mathcal{F}_\omega}B,$$

称 $A(\omega)$ 为含 ω 的 $\mathcal{F}$**原子**.

根据上述定义，容易证明：

(1) 设 $\omega,\omega'\in\Omega$，则或者 $A(\omega)=A(\omega')$，或者 $A(\omega)\cap A(\omega')=\varnothing$；

(2) 设 $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的代数. 对任何 $\omega\in\Omega$，令 $\mathcal{C}_\omega=\{B\in\mathcal{C}|\omega\in\mathcal{C}\}$，则有

$$A(\omega)=\bigcap_{B\in\mathcal{C}_\omega}B.$$

特别地，若 $\mathcal{F}$ 可分，则每个 $\mathcal{F}$ 原子属于 $\mathcal{F}$.

习题 1.1

1. 证明集合的并与交满足交换律、结合律与分配律，即如果 A,B,C 为三个集合，则

$$\begin{aligned}
&A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A;\\
&(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);\\
&A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).
\end{aligned}$$

2. 如果 $\mathcal{C}$ 同时是代数与单调类，则 $\mathcal{C}$ 为 σ 代数.

3. 如果 $\mathcal{C}$ 同时为 π 类与 λ 类，则 $\mathcal{C}$ 为 σ 代数.

4. 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类，且 $\varnothing,\Omega\in\mathcal{C}$，令

$$\mathcal{G}:=\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j^{\mathrm{c}}\right)|n,m\geqslant 1,A_i,B_j\in\mathcal{C},1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m\right\};$$

$$\mathcal{H}:=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i|n\geqslant 1,A_i\in\mathcal{G},1\leqslant i\leqslant n,\text{并且 }A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 互不相交}\right\}.$$

证明: $\mathcal{H}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的最小的代数.

5. 证明定理 1.2 (2).

6. 对 $\lambda(\mathcal{C})$, 证明与命题 1.4 类似的结果.

7. 假定 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 是 Ω 上的两个 σ 代数，请问 $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ 是否一定是一个 σ 代数? 若是请给出证明；若不是请举反例.

8. 假定 E, F 是两个集合，$\mathcal{F}$ 是 F 上的一个子集类，f 是从 E 到 F 的映射，定义

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{F}\},$$

其中 $f^{-1}(A) = \{\omega \in E | f(\omega) \in A\}$ 表示集合 A 在映射 f 下的原像.

试证：(i) 如果 $\mathcal{F}$ 是 F 上的 π 类（代数，σ 代数，单调类，λ 类），则 $f^{-1}(\mathcal{F})$ 为 E 上同样的集类；(ii) $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

1.2 测度与概率

在数学分析与高等数学中我们学习过长度、面积与体积的概念，它们是对欧式空间中集合“大小”的一种度量，具有非负性与可加性，可加性指的是两个不相交的集合并的“大小”等于它们各自“大小”之和. 下面介绍的“测度”是欧式空间中长度、面积与体积的抽象与推广.

1.2.1 定义及性质

设 $\mathcal{C}$ 为集合 Ω 上的一个集类，从 $\mathcal{C}$ 到 $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ 的映射称为 $(\Omega, \mathcal{C})$ 上（或 $\mathcal{C}$ 上）的 **集函数**; 从 $\mathcal{C}$ 到 $\bar{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$ 的映射称为 $(\Omega, \mathcal{C})$ 上的 **非负集函数**.

定义 1.6 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间，μ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个集函数，称 μ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 **测度**（有时简称 Ω 上的测度），如果它满足以下两个条件：

(1)（非负性）$\mu(A) \geqslant 0$;

(2)（可数可加性）如果 $A_n \in \mathcal{F}, n \geqslant 1,\ A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

如果 $\mu(\Omega) = 1$，μ 称为一个概率测度. 可数可加性又称为 σ 可加性.

如果 μ 为可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个测度，则三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 称为一个 **测度空间**；如果 μ 是概率测度，则 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 称为一个 **概率空间**.

注记 1.2 如果定义 $\mu(A) = +\infty, \forall A \in \mathcal{F}$, 则 μ 满足上述定义中的两条性质，因此它是一个测度. 尽管如此，从现在开始我们不考虑这种平凡的情况.