第 3 章

线性代数

本章要点

(1) 行列式的概念、性质和计算,解方程组的克莱姆法则。

(2) 矩阵、逆矩阵、矩阵的秩等概念,矩阵的运算及其性质、矩阵的初等行变换、逆矩阵的求法。

(3) 线性方程组的解。

3.1 行列式

初等数学中,在求二元和三元线性方程组的解时引进了二阶和三阶行列式。为了研究一般的 n 元线性方程组,需要把二阶和三阶行列式的性质加以推广。

3.1.1 行列式的概念

1. 二阶和三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{3-1}$$

通常用消元法求解。在方程组(3-1)中消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同样,在方程组(3-1)中消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

若引用记号

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

则当 $\Delta\neq0$ 时,线性方程组(3-1)的解是

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{3-2}$$

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**。而 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是二阶行列式的**展开式**,Δ、Δ_1 等是行列式的约定记号。二阶行列式中的数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$称为行列式的**元素**,每个横排称为行列式的**行**,每个竖排称为行列式的**列**。a_{ij} 的第 1 个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行,第 2 个下标 j 表示它位于自左到右的第 j 列。

二阶行列式的展开式表明了它是 4 个元素间按上述约定运算得到的数值。

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{3-3}$$

同样可以用消元法求它的解。为了简单地表达它的解,需要引进三阶行列式的概念。三阶行列式的展开式规定为

$$\begin{aligned}\Delta=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\\ =&(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\\ =&a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

所以,三阶行列式也是一个数值,它可以通过转化为二阶行列式的计算得到。

三阶行列式可以用来解三元一次方程组。若分别记

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当 $\Delta\neq0$ 时,线性方程组(3-3)的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{3-4}$$

引进行列式的记号,可以简洁地表达二元或三元线性方程组的解。更重要的是:引进行列式的概念可以对 n 元线性方程组进行本质的研究。

二阶和三阶行列式的计算规则如图 3-1 所示,即用实线上的数相乘之和减去虚线上

的数相乘之和。

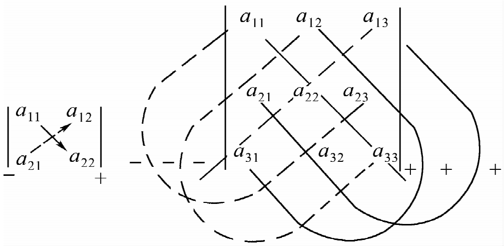

图 3-1

例 3-1 计算以下行列式的值。

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解 根据三阶行列式的展开式计算,得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2\times 3\times 5+1\times 1\times 2+2\times(-4)\times 3 \\ &\quad -2\times 1\times 3-1\times(-4)\times 5-2\times 3\times 2 \\ &= 30+2-24-6+20-12=10 \end{aligned}$$

例 3-2 解以下方程组。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$$

解 利用三阶行列式,有

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -42, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -42$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -84, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 42$$

再根据式(3-4),得到该方程组的解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-42}{-42} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-84}{-42} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{-42} = -1$$

2. *n* 阶行列式

定义 3-1 将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个有 n 行 n 列的记号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3-5}$$

称为 n 阶行列式,它代表一个由确定的运算关系所得的数。当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时,

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{3-6}$$

其中,数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的**元素**(或**元**)。

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij} 的**代数余子式**。M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称 M_{ij} 为 a_{ij} 的**余子式**。在行列式 D_n 中,从 a_{11} 经 a_{22},a_{33},$\cdots$,直到 a_{nn} 称为行列式的**主对角线**,元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$称为行列式的**主对角线元素**。

实例 3-1 对于行列式

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

而言,按定义 3-1 有

$$M_{12}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix},\qquad M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

并且有

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix},\quad A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

n 阶行列式的展开式(3-6)表明,n 阶行列式展开成 n 个 $n-1$ 阶行列式的代数和,而每个 $n-1$ 阶行列式又展开成 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式的代数和。根据归纳法可知,n 阶行列式全部展开应该有 $n!$ 项。

例 3-3 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

解 按定义 3-1,有

$$D=(-1)^{1+2}\times 2\times\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\times(-1)\times\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-2\times\left[(-1)^{1+1}\times 1\times\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times 2\times\begin{vmatrix}0&0\\2&3\end{vmatrix}\right]$$

$$+1\times\left[(-1)^{1+1}\times 1\times\begin{vmatrix}-2&2\\3&0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times 2\times\begin{vmatrix}0&-2\\2&3\end{vmatrix}\right]$$

$$=-2\times(6-0)+1\times(-6+8)=-10$$

通过本题的求解可以看到，正是因为该行列式中有许多元素是 0，实际的计算量并不太大。对于 4 阶以上的行列式，如果绝大多数元素不为 0，直接按行列式的定义计算就非常麻烦了。3.1.2 小节将介绍行列式的简便的计算方法。

3. 几种特殊的行列式

下面利用行列式的定义计算几种特殊的 n 阶行列式。

主对角线外所有元素都是 0 的行列式称为**主对角行列式**。

例 3-4　证明主对角行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_{n-1}&0\\0&0&\cdots&0&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{3-7}$$

证明　对行列式(3-7)，根据 n 阶行列式的定义逐步降低其阶数，得

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_{n-1}&0\\0&0&\cdots&0&\lambda_n\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\lambda_1\begin{vmatrix}\lambda_2&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_{n-1}&0\\0&0&\cdots&0&\lambda_n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\begin{vmatrix}\lambda_3&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_4&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_{n-1}&0\\0&0&\cdots&0&\lambda_n\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证毕.

主对角线以上(下)的元素都为 0 的行列式称为**下(上)三角形行列式**。

例 3-5　证明下三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{3-8}$$

证明　对行列式(3-8)，根据 n 阶行列式的定义逐步降低其阶数，得

$$D_n=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{1+1}a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证毕.

3.1.2 行列式的性质与计算

1. 行列式的性质

为了能够比较简便地计算行列式,下面介绍行列式的几个基本性质。

将行列式 D_n 的行、列互换得到的新的行列式 D_n^{T} 称为 D_n 的**转置行列式**。对于行列式(3-5),其转置行列式为

$$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

实例 3-2 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

性质 3-1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D_n^{\mathrm{T}}=D_n$。

对于二阶行列式,性质 3-1 可由定义 3-1 直接验证,即

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D_2^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=D_2$$

性质 3-1 表明:行列式中行和列的地位是对称的,凡是对行成立的性质对列也成立。

例 3-6 证明以下上三角形行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明 由性质 3-1 得

$$D_n=D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{3-9}$$

证毕。

式(3-8)和式(3-9)表明,上、下三角形行列式都等于主对角线元素的乘积。

性质 3-2　互换行列式的任意两行,行列式仅改变符号。

对于二阶行列式,性质 3-2 可以直接验证,下面是交换两行的情形,即

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

推论　如果行列式有两行(或两列)的对应元素相等,则这个行列式等于 0。

性质 3-3　将行列式某一行(列)所有元素都乘以相同的数 k,其结果就等于用 k 乘这个行列式。换句话说,可以将行列式的某一行(列)中所有各元素的公因数 k 提到行列式符号前面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1　行列式中如果有一行(列)的所有元素都是 0,则这个行列式等于 0。

由性质 3-2 的推论和性质 3-3 可以得到如下的推论 2。

推论 2　行列式中如果有两行(或两列)的对应元素成比例,则这个行列式等于 0。

性质 3-4　如果行列式的某行(列),如第 i 行中各元素都可以写成两数之和,即

$$a_{ij} = b_j + c_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

那么这个行列式等于两个行列式之和,这两个行列式的第 i 行,一个是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,另一个是 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,其他各行都和原来的行列式一样,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3-5　将行列式某一行(列)所有元素都乘以相同的数 k,再加到另一行(列)的对应元素上,得到的新行列式与原行列式相等,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3-6　n 阶行列式等于任意一行(列)所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

性质 3-6 表明:行列式可按任意一行(列)展开。

性质 3-7 n 阶行列式中任意一行(列)的元素与另一行(列)的相应元素的代数余子式的乘积之和等于 0,即

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$$

证明 在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

中将第 i 行的元素都换成第 $j(i\neq j)$行的元素,得到另一个行列式

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

显然,D_0 的第 i 行的代数余子式与 D 的第 i 行的代数余子式是完全一样的。将 D_0 按第 i 行展开,得

$$D_0 = a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in}$$

因为 D_0 中有两行元素相同,所以 $D_0=0$。因此

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$$

由性质 3-6 和性质 3-7 可以得到如下结论

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = \begin{cases} D_n & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{3-10}$$

证毕。

2. 行列式的计算

行列式的计算方法有多种,本教材主要介绍如何利用行列式的各项性质计算行列式。由于三角形行列式等于主对角线元素的乘积,所以对行列式进行恒等变换是将其化为三角形行列式是一个可行的方法,一般都是变换为上三角行列式。

例 3-7　计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3,使 a_{11}=1} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1, r_3-2r_1, r_4-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3,使 a_{22}=1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2, r_4+r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-3) \times 3 = -9$$

行列式的计算步骤没有一定之规。将行列式化为三角形行列式通常不是最好的方法。对于不同的行列式，要仔细观察它有什么特点，然后决定选用恰当的步骤。一般来说，尽快将行列式降阶是比较好的方法。下面是计算行列式的一些比较常用的技巧。

(1) 如果某行(列)有公因数，应提取公因数；如果行列式中有分数，可通过提取公因数消除。这样做可以使以后的计算比较简单。

(2) 选择数字比较简单的行或列，设法仅保留该行(列)有一个元素不为 0，将其他元素都变为 0，再利用性质 3-6 将行列式降阶。如果某行(列)有多个 0，选该行(列)更为简捷。

(3) 主对角线元素最好是1,因为1可以使以后的计算中把该元素下面的各个元素化为0时的步骤最为简便,并且不出现分数。

(4) 如果行列式的各行(列)的和相同,就将各列(行)加到第1列(行),然后提取公因数(式)是最简便的方法。参见例3-9和例3-10。

因此,例3-7的解答采用的将行列式化为三角形行列式通常不是最好的方法。大多数情况下,尽快将行列式降阶比较简捷,下面的例3-8就是用这种方法解答的。

例 3-8 计算以下行列式的值。

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

解 因这个行列式最后一行有两个0,所以还可以进行适当变换使最后一行只保留一个元素不为0,将其他非0元素化为0,然后再降阶,即

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 + c_2}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(按第 4 行展开)}}$$

$$(-1)^{4+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(第 1 行提取 }-2\text{)}}$$

$$-2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(逐步化为三角行列式)}}$$

$$-2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 1 \times 3 = 6$$

例 3-9 计算以下行列式的值。

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是所有列的元素之和都是 $a+3b$,所以有下面的简单计算过程,即