

# 静 电 场

**作**为电磁学的开始,本章讲解静止电荷相互作用的规律。在简要地说明了电荷的性质之后,就介绍了库仑定律。由于静止电荷是通过它的电场对其他电荷产生作用的,所以关于电场的概念及其规律就具有基础性的意义。本章除介绍用库仑定律求静电场的方法之外,特别介绍了更具普遍意义的高斯定律及应用它求静电场的方法。对称性分析已成为现代物理学的一种基本的分析方法,本章在适当地方多次说明了对称性的意义及利用对称性分析问题的方法。无论是概念的引入,或是定律的表述,或是分析方法的介绍,本章所涉及的内容,就思维方法来讲,对整个电磁学(甚至整个物理学)都具有典型的意义,希望读者细心地、认真地学习体会。

## 15.1 电荷

物体能产生电磁现象,现在都归因于物体带上了**电荷**以及这些电荷的运动。通过对电荷(包括静止的和运动的电荷)的各种相互作用和效应的研究,人们现在认识到电荷的基本性质有以下几方面。

### 1. 电荷的种类

电荷有两种,同种电荷相斥,异种电荷相吸。美国物理学家富兰克林(Benjamin Franklin, 1706—1790年)首先以正电荷、负电荷的名称来区分两种电荷,这种命名法一直延续到现在。宏观带电体所带电荷种类的不同根源于组成它们的微观粒子所带电荷种类的不同:电子带负电荷,质子带正电荷,中子不带电荷。现代物理实验证实,电子的电荷集中在半径小于 $10^{-18}$  m的小体积内。因此,电子被当成是一个无内部结构而有有限质量和电荷的“点”。通过高能电子束散射实验测出的质子和中子内部的电荷分布分别如图 15.1(a),(b)所示。质子中只有正电荷,都集中在半径约为 $10^{-15}$  m的体积内。中子内部也有电荷,靠近中心为正电荷,靠外为负电荷;正负电荷电量相等,所以对外不显带电。

带电体所带电荷的多少叫电量。谈到电量,就涉及如何测量它的问题。一个电荷的量值大小只能通过该电荷所产生的效应来测量,现在我们先假定电量的计量方法已有了。电量常用 $Q$ 或 $q$ 表示,在国际单位制中,它的单位名称为库[仑],符号为C。正电荷电量

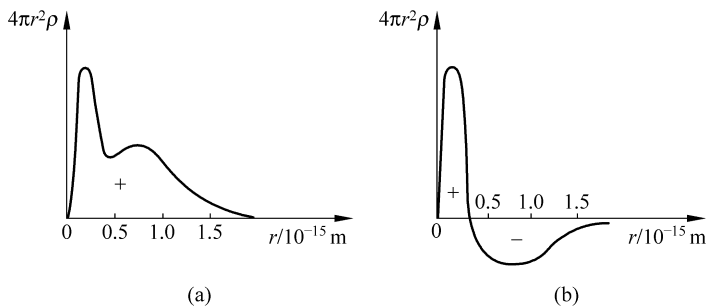


图 15.1 质子内(a)与中子内(b)电荷分布图

取正值,负电荷电量取负值。一个带电体所带总电量为其所带正负电量的代数和。

## 2. 电荷的量子性

实验证明,在自然界中,电荷总是以一个**基本单元**的整数倍出现,电荷的这个特性叫做**电荷的量子性**。电荷的基本单元就是一个电子所带电量的绝对值,常以  $e$  表示。经测定

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

电荷具有基本单元的概念最初是根据电解现象中通过溶液的电量和析出物质的质量之间的关系提出的。法拉第(Michael Faraday, 1791—1867年)、阿累尼乌斯(Arrhenius, 1859—1927年)等都为此做出过重要贡献。他们的结论是:一个离子的电量只能是一个基本电荷的电量的整数倍。直到1890年斯通尼(John Stone Stoney, 1826—1911年)才引入“**电子**”(electron)这一名称来表示带有负的基元电荷的粒子。其后,1913年密立根(Robert Anolvews Millikan, 1868—1953年)设计了有名的油滴试验,直接测定了此基元电荷的量值。现在已经知道许多基本粒子都带有正的或负的基元电荷。例如,一个正电子,一个质子都各带有一个正的基元电荷。一个反质子,一个负介子则带有一个负的基元电荷。微观粒子所带的基元电荷数常叫做它们各自的**电荷数**,都是正整数或负整数。近代物理从理论上预言基本粒子由若干种**夸克**或**反夸克**组成,每一个夸克或反夸克可能带有  $\pm \frac{1}{3}e$  或  $\pm \frac{2}{3}e$  的电量。然而至今单独存在的夸克尚未在实验中发现(即使发现了,也不过把基元电荷的大小缩小到目前的  $1/3$ ,电荷的量子性依然不变)。

本章大部分内容讨论电磁现象的宏观规律,所涉及的电荷常常是基元电荷的许多倍。在这种情况下,我们将只从平均效果上考虑,认为电荷**连续地**分布在带电体上,而忽略电荷的量子性所引起的微观起伏。尽管如此,在阐明某些宏观现象的微观本质时,还是要从电荷的量子性出发。

在以后的讨论中经常用到点电荷这一概念。当一个带电体本身的线度比所研究的问题中所涉及的距离小很多时,该带电体的形状与电荷在其上的分布状况均无关紧要,该带电体就可看作一个带电的点,叫**点电荷**。由此可见,点电荷是个相对的概念。至于带电体的线度比问题所涉及的距离小多少时,它才能被当作点电荷,这要依问题所要求的精度而定。当在宏观意义上谈论电子、质子等带电粒子时,完全可以把它们视为点电荷。

### 3. 电荷守恒

实验指出,对于一个系统,如果没有净电荷出入其边界,则该系统的正、负电荷的电量的代数和将保持不变,这就是**电荷守恒定律**。宏观物体的带电、电中和以及物体内的电流等现象实质上是由于微观带电粒子在物体内部运动的结果。因此,电荷守恒实际上也就是在各种变化中,系统内粒子的总电荷数守恒。

现代物理研究已表明,在粒子的相互作用过程中,电荷是可以产生和消失的。然而电荷守恒并未因此而遭到破坏。例如,一个高能光子与一个重原子核作用时,该光子可以转化为一个正电子和一个负电子(这叫**电子对的“产生”**);而一个正电子和一个负电子在一定条件下相遇,又会同时消失而产生两个或三个光子(这叫**电子对的“湮灭”**)。在已观察到的各种过程中,正、负电荷总是成对出现或成对消失。由于光子不带电,正、负电子又各带有等量异号电荷,所以这种电荷的产生和消失并不改变系统中的电荷数的代数和,因而电荷守恒定律仍然保持有效<sup>①</sup>。

### 4. 电荷的相对论不变性

实验证明,一个电荷的电量与它的运动状态无关。较为直接的实验例子是比较氢分子和氦原子的电中性。氢分子和氦原子都有两个电子作为核外电子,这些电子的运动状态相差不大。氢分子还有两个质子,它们是作为两个原子核在保持相对距离约为 0.07 nm 的情况下转动的(图 15.2(a))。氦原子中也有两个质子,但它们组成一个原子核,两个质子紧密地束缚在一起运动(图 15.2(b))。氦原子中两个质子的能量比氢分子中两个质子的能量大得多(一百万倍的数量级),因而两者的运动状态有显著的差别。如果电荷的电量与运动状态有关,氢分子中质子的电量就应该和氦原子中质子的电量不同,但两者的电子的电量是相同的,因此,两者就不可能都是电中性的。但是实验证实,氢分子和氦原子都精确地是电中性的,它们内部正、负电荷在数量上的相对差异都小于  $1/10^{20}$ 。这就说明,质子的电量是与其运动状态无关的。

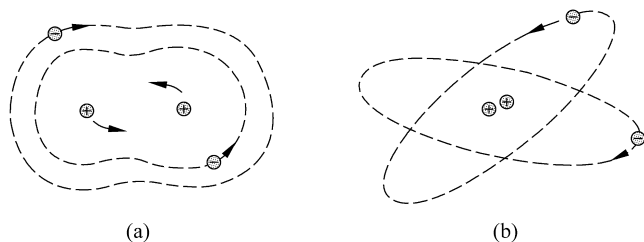


图 15.2 氢分子(a)与氦原子(b)结构示意图

还有其他实验,也证明电荷的电量与其运动状态无关。另外,根据这一结论导出的大

<sup>①</sup> 近年来不断有电荷不守恒的实验报道。电子衰变时只能产生中微子,所以电子的衰变就意味着电荷不守恒。有人做实验测知电子的平均寿命要大于  $10^{23}$  年,这已大大超过宇宙年龄( $10^{10}$  年),所以实际上电子还是不衰变。在  $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr} + \text{中性粒子的过程中有中子衰变的过程}$ 。有人分析此实验结果时得出中子的电荷不守恒,但这种电荷不守恒的衰变概率与电荷守恒的衰变概率之比为  $7.9 \times 10^{-21}$ 。这说明在这一过程中即使电荷守恒破坏了,也只是很微小的破坏。

量结果都与实验结果相符合,这也反过来证明了这一结论的正确性。

由于在不同的参考系中观察,同一个电荷的运动状态不同,所以电荷的电量与其运动状态无关,也可以说成是,在不同的参考系内观察,同一带电粒子的电量不变。电荷的这一性质叫电荷的相对论不变性。

## 15.2 库仑定律与叠加原理

在发现电现象后的 2000 多年的长时期内,人们对电的认识一直停留在定性阶段。从 18 世纪中叶开始,不少人着手研究电荷之间作用力的定量规律,最先是研究静止电荷之间的作用力。研究静止电荷之间的相互作用的理论叫静电学。它是以 1785 年法国科学家库仑(Charles Augustin de Coulomb, 1736—1806 年)通过实验总结出的规律——库仑定律——为基础的。这一定律的表述如下:相对于惯性系观察,自由空间(或真空)中两个静止的点电荷之间的作用力(斥力或吸力,统称库仑力)与这两个电荷所带电量的乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比,作用力的方向沿着这两个点电荷的连线。这一规律用矢量公式表示为

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \mathbf{e}_{r_{21}} \quad (15.1)$$

式中,  $q_1$  和  $q_2$  分别表示两个点电荷的电量(带有正、负号),  $r_{21}$  表示两个点电荷之间的距离,  $\mathbf{e}_{r_{21}}$  表示从电荷  $q_1$  指向电荷  $q_2$  的单位矢量(图 15.3);  $k$  为比例常量,依公式中各量所选取的单位而定。  $\mathbf{F}_{21}$  表示电荷  $q_2$  受电荷  $q_1$  的作用力。当两个点电荷  $q_1$  与  $q_2$  同号时,  $\mathbf{F}_{21}$  与  $\mathbf{e}_{r_{21}}$  同方向,表明电荷  $q_2$  受  $q_1$  的斥力;当  $q_1$  与  $q_2$  反号时,  $\mathbf{F}_{21}$  与  $\mathbf{e}_{r_{21}}$  的方向相反,表示  $q_2$  受  $q_1$  的引力。由此式还可以看出,两个静止的点电荷之间的作用力符合牛顿第三定律,即

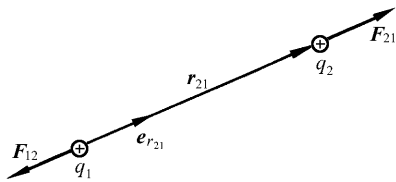


图 15.3 库仑定律

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (15.2)$$

式(15.1)中的单位矢量  $\mathbf{e}_{r_{21}}$  表示两个静止的点电荷之间的作用力沿着它们的连线的方向。对于本身没有任何方向特征的静止的点电荷来说,也只可能是这样。因为自由空间是各向同性的(我们也只能这样认为或假定),对于两个静止的点电荷来说,只有它们的连线才具有唯一确定的方向。由此可知,库仑定律反映了自由空间的各向同性,也就是空间对于转动的对称性。

在国际单位制中,距离  $r$  用 m 作单位,力  $F$  用 N 作单位,实验测定比例常量  $k$  的数值和单位为

$$k = 8.9880 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

通常还引入另一常量  $\epsilon_0$  来代替  $k$ ,使

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

于是,真空中库仑定律的形式就可写成

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \mathbf{e}_{r,21} \quad (15.3)$$

这里引入的  $\epsilon_0$  叫真空介电常量(或真空电容率),在国际单位制中它的数值和单位是

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2) \textcircled{1}$$

在库仑定律表示式中引入“ $4\pi$ ”因子的作法,称为单位制的有理化。这样做的结果虽然使库仑定律的形式变得复杂些,但却使以后经常用到的电磁学规律的表示式因不出现“ $4\pi$ ”因子而变得简单些。这种作法的优越性,在今后的学习中读者是会逐步体会到的。

实验证实,点电荷放在空气中时,其相互作用的电力和在真空中的相差极小,故式(15.3)的库仑定律对空气中的点电荷亦成立。

库仑定律是关于一种基本力的定律,它的正确性不断经历着实验的考验。设定律分母中  $r$  的指数为  $2+\alpha$ ,人们曾设计了各种实验来确定(一般是间接地) $\alpha$  的上限。1773年,卡文迪许的静电实验给出  $|\alpha| \leq 0.02$ 。约百年后麦克斯韦的类似实验给出  $|\alpha| \leq 5 \times 10^{-5}$ 。1971年威廉斯等人改进该实验得出  $|\alpha| \leq |2.7 \pm 3.1| \times 10^{-16}$ 。这些都是在实验室范围( $10^{-3} \sim 10^{-1}$  m)内得出的结果。对于很小的范围,卢瑟福的  $\alpha$  粒子散射实验(1910年)已证实小到  $10^{-15}$  m 的范围,现代高能电子散射实验进一步证实小到  $10^{-17}$  m 的范围,库仑定律仍然精确地成立。大范围的结果是通过人造地球卫星研究地球磁场时得到的。它给出库仑定律精确地适用于大到  $10^7$  m 的范围,因此一般就认为在更大的范围内库仑定律仍然有效。

令人感兴趣的是,现代量子电动力学理论指出,库仑定律中分母  $r$  的指数与光子的静质量有关:如果光子的静质量为零,则该指数严格地为 2。现在的实验给出光子的静质量上限为  $10^{-48}$  kg,这差不多相当于  $|\alpha| \leq 10^{-16}$ 。

### 例 15.1

氢原子中电子和质子的距离为  $5.3 \times 10^{-11}$  m。求此二粒子间的静电力和万有引力各为多大?

**解** 由于电子的电荷是  $-e$ ,质子的电荷为  $+e$ ,而电子的质量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg,质子的质量  $m_p = 1.7 \times 10^{-27}$  kg,所以由库仑定律,求得两粒子间的静电力大小为

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9.0 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8.1 \times 10^{-8} \text{ (N)}$$

由万有引力定律,求得两粒子间的万有引力

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.7 \times 10^{-11} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.7 \times 10^{-27}}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 3.7 \times 10^{-47} \text{ (N)}$$

由计算结果可以看出,氢原子中电子与质子的相互作用的静电力远较万有引力为大,前者约为后者的  $10^{39}$  倍。

① 单位  $\text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$  就是  $\text{F/m}$ ,F(法)是电容的单位,见第 18 章。

## 例 15.2

卢瑟福(E. Rutherford, 1871—1937 年)在他的  $\alpha$  粒子散射实验中发现,  $\alpha$  粒子具有足够高的能量, 使它能达到与金原子核的距离为  $2 \times 10^{-14}$  m 的地方。试计算在这一距离时,  $\alpha$  粒子所受金原子核的斥力的大小。

**解**  $\alpha$  粒子所带电量为  $2e$ , 金原子核所带电量为  $79e$ , 由库仑定律可得此斥力为

$$F = \frac{2e \times 79e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9.0 \times 10^9 \times 2 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(2 \times 20^{-14})^2} = 91 \text{ (N)}$$

此力约相当于 10 kg 物体所受的重力。此例说明, 在原子尺度内电力是非常强的。

库仑定律只讨论两个静止的点电荷间的作用力, 当考虑两个以上的静止的点电荷之间的作用时, 就必须补充另一个实验事实: 两个点电荷之间的作用力并不因第三个点电荷的存在而有所改变。因此, 两个以上的点电荷对一个点电荷的作用力等于各个点电荷单独存在时对该点电荷的作用力的矢量和。这个结论叫**电力的叠加原理**。

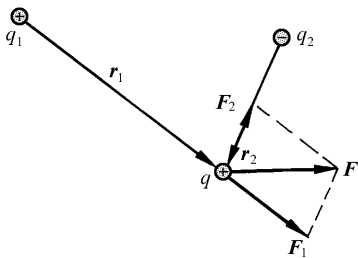


图 15.4 静电力叠加原理

图 15.4 画出了两个点电荷  $q_1$  和  $q_2$  对第三个点电荷  $q$  的作用力的叠加情况。电荷  $q_1$  和  $q_2$  单独作用在电荷  $q$  上的力分别为  $F_1$  和  $F_2$ , 它们共同作用在  $q$  上的力  $F$  就是这两个力的合力, 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

对于由  $n$  个点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  组成的电荷系, 若以  $F_1, F_2, \dots, F_n$  分别表示它们单独存在时对另一点电荷  $q$  上的电力, 则由电力的叠加原理可知,  $q$  受到的总电力应为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (15.4)$$

在  $q_1, q_2, \dots, q_n$  和  $q$  都静止的情况下,  $F_i$  都可以用库仑定律式(15.3)计算, 因而可得

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{r_i} \quad (15.5)$$

式中,  $r_i$  为  $q$  与  $q_i$  之间的距离,  $\mathbf{e}_{r_i}$  为从点电荷  $q_i$  指向  $q$  的单位矢量。

### 15.3 电场和电场强度

设相对于惯性参考系, 在真空中有一固定不动的点电荷系  $q_1, q_2, \dots, q_n$ 。将另一点电荷  $q$  移至该电荷系周围的  $P(x, y, z)$  点(称场点)处, 现在求  $q$  受该电荷系的作用力。这力应该由式(15.5)给出。由于电荷系作用于电荷  $q$  上的合力与电荷  $q$  的电量成正比, 所以比值  $F/q$  只取决于点电荷系的结构(包括每个点电荷的电量以及各点电荷之间的相对位置)和电荷  $q$  所在的位置  $(x, y, z)$ , 而与电荷  $q$  的量值无关。因此, 可以认为比值  $F/q$  反映了电荷系周围空间各点的一种特殊性质, 它能给出该电荷系对静止于各点的其他电荷

$q$  的作用力。这时就说该点电荷系周围空间存在着由它所产生的**电场**。电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  叫**场源电荷**，而比值  $\mathbf{F}/q$  就表示电场中各点的强度，叫**电场强度**（简称**场强**）。通常用  $\mathbf{E}$  表示电场强度，于是就有定义

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (15.6)$$

此式表明，电场中任意点的电场强度等于位于该点的单位正电荷所受的电力。在电场中各点的  $\mathbf{E}$  可以各不相同，因此一般地说， $\mathbf{E}$  是空间坐标的矢量函数。在考察电场时，式(15.6)中的  $q$  起到检验电场的作用，叫**检验电荷**。

在国际单位制中，电场强度的单位名称为牛每库，符号为 N/C。以后将证明，这个单位和 V/m 是等价的，即

$$1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$$

将式(15.4)代入式(15.6)，可得

$$\mathbf{E} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i}{q} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i}{q}$$

式中， $\mathbf{F}_i/q$  是电荷  $q_i$  单独存在时在  $P$  点产生的电场强度  $\mathbf{E}_i$ 。因此，上式可写成

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (15.7)$$

此式表示：在  $n$  个点电荷产生的电场中某点的电场强度等于每个点电荷单独存在时在该点所产生的电场强度的矢量和。这个结论叫**电场叠加原理**。

在场源电荷是静止的参考系中观察到的电场叫**静电场**，静电场对电荷的作用力叫**静电力**。在已知静电场中各点电场强度  $\mathbf{E}$  的条件下，可由式(15.6)直接求得置于其中的任意点处的点电荷  $q$  受的力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (15.8)$$

这里，可以提出这样的问题：当用式(15.8)求电荷  $q$  受的力时，必须先求出  $\mathbf{E}$  来，而  $\mathbf{E}$  是由式(15.6)和式(15.5)求出的。再将这样求出的  $\mathbf{E}$  代入式(15.8)求  $\mathbf{F}$ ，我们又回到了式(15.5)。既然如此，为什么要引入电场这一概念呢？

这涉及人们如何理解电荷间的相互作用。在法拉第之前，人们认为两个电荷之间的相互作用力和两个质点之间的万有引力一样，都是一种超距作用。即一个电荷对另一个电荷的作用力是隔着一定空间直接给予的，不需要什么中间媒质传递，也不需要时间，这种作用方式可表示为

$$\text{电荷} \longleftrightarrow \text{电荷}$$

在 19 世纪 30 年代，法拉第提出另一种观点，认为一个电荷周围存在着由它所产生的电场，另外的电荷受这一电荷的作用力就是通过这电场给予的。这种作用方式可以表示为

$$\text{电荷} \longleftrightarrow \text{电场} \longleftrightarrow \text{电荷}$$

这样引入的电场对电荷周围空间各点赋予一种**局域性**，即：如果知道了某一小区域的  $\mathbf{E}$ ，无需更多的要求，我们就可以知道任意电荷在此区域内的受力情况，从而可以进一

步知道它的运动。这时,也不需要知道是些什么电荷产生了这个电场。如果知道在空间各点的电场,我们就有了对这整个系统的完整的描述,并可由它揭示出所有电荷的位置和大小。这种局域性场的引入是物理概念上的重要发展。

近代物理学的理论和实验完全证实了场的观点的正确性。电场以及磁场已被证明是一种客观实在,它们运动(或传播)的速度是有限的,这个速度就是光速。电磁场还具有能量、质量和动量。

尽管如此,在研究静止电荷的相互作用时,电场的引入可以认为只是描述电荷相互作用的一种方便方法。而在研究有关运动电荷,特别是其运动迅速改变的电荷的现象时,电磁场的实在性就突出地显示出来了。

表 15.1 给出了一些典型的电场强度的数值。

表 15.1 一些电场强度的数值

N/C

铀核表面	$2 \times 10^{21}$
中子星表面	约 $10^{14}$
氢原子电子内轨道处	$6 \times 10^{11}$
X 射线管内	$5 \times 10^6$
空气的电击穿强度	$3 \times 10^6$
范德格拉夫静电加速器内	$2 \times 10^6$
电视机的电子枪内	$10^5$
电闪内	$10^4$
雷达发射器近旁	$7 \times 10^3$
太阳光内(平均)	$1 \times 10^3$
晴天大气中(地表面附近)	$1 \times 10^2$
小型激光器发射的激光束内(平均)	$1 \times 10^2$
日光灯内	10
无线电波内	约 $10^{-1}$
家用电路线内	约 $3 \times 10^{-2}$
宇宙背景辐射内(平均)	$3 \times 10^{-6}$

## 15.4 静止的点电荷的电场及其叠加

现在讨论在场源电荷都是静止的参考系中电场强度的分布,先讨论一个静止的点电荷的电场强度分布。现计算距静止的场源电荷  $q$  的距离为  $r$  的  $P$  点处的场强。设想把一个检验电荷  $q_0$  放在  $P$  点,根据库仑定律, $q_0$  受到的电场力为

$$\mathbf{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

式中, $\mathbf{e}_r$  是从场源电荷  $q$  指向点  $P$  的单位矢量。由场强定义式(15.6), $P$  点场强为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (15.9)$$

这就是点电荷场强分布公式。式中,若  $q > 0$ ,则  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{r}$  同向,即在正电荷周围的电场中,任意点的场强沿该点径矢方向(见图 15.5(a));若  $q < 0$ ,则  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{r}$  反向,即在负电荷周围的电场

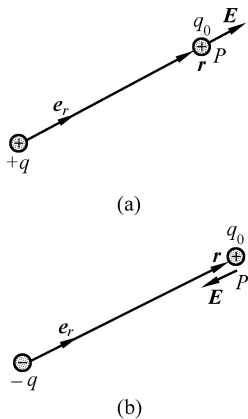


图 15.5 静止的点电荷的电场

中,任意点的场强沿该点径矢的反方向(见图 15.5(b))。此式还说明静止的点电荷的电场具有球对称性。在各向同性的自由空间内,一个本身无任何方向特征的点电荷的电场分布必然具有这种对称性。因为对任一场点来说,只有从点电荷指向它的径矢方向具有唯一确定的意义,而且距点电荷等远的各场点,场强大小应该相等。

将点电荷场强公式(15.9)代入式(15.7)可得点电荷系  $q_1, q_2, \dots, q_n$  的电场中任一点的场强为

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{ri} \quad (15.10)$$

式中,  $r_i$  为  $q_i$  到场点的距离,  $\mathbf{e}_{ri}$  为从  $q_i$  指向场点的单位矢量。

若带电体的电荷是连续分布的,可认为该带电体的电荷是由许多无限小的电荷元  $dq$  组成的,而每个电荷元都可以当作点电荷处理。设其中任一个电荷元  $dq$  在  $P$  点产生的场强为  $d\mathbf{E}$ ,按式(15.9)有

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

式中,  $r$  是从电荷元  $dq$  到场点  $P$  的距离,而  $\mathbf{e}_r$  是这一方向上的单位矢量。整个带电体在  $P$  点所产生的总场强可用积分计算为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (15.11)$$

由上述可知,对于由许多电荷组成的电荷系来说,在它们都静止的参考系中,如果电荷分布为已知,那么根据场强叠加原理,并利用点电荷场强公式(15.9),就可求出该参考系中任意点的场强,也就是求出静电场的空间分布。下面举几个例子。

### 例 15.3

求电偶极子中垂线上任一点的电场强度。

**解** 相隔一定距离的等量异号点电荷,当点电荷  $+q$  和  $-q$  的距离  $l$  比从它们到所讨论的场点的距离小得多时,此电荷系统称电偶极子。如图 15.6 所示,用  $l$  表示从负电荷到正电荷的矢量线段。

设  $+q$  和  $-q$  到偶极子中垂线上任一点  $P$  处的位置矢量分别为  $\mathbf{r}_+$  和  $\mathbf{r}_-$ ,而  $r_+ = r_-$ 。由式(15.9),  $+q, -q$  在  $P$  点处的场强  $\mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-$  分别为

$$\mathbf{E}_+ = \frac{q\mathbf{r}_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^3}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{-q\mathbf{r}_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^3}$$

以  $r$  表示电偶极子中心到  $P$  点的距离,则

$$r_+ = r_- = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} = r\sqrt{1 + \frac{l^2}{4r^2}} = r\left(1 + \frac{l^2}{8r^2} + \dots\right)$$

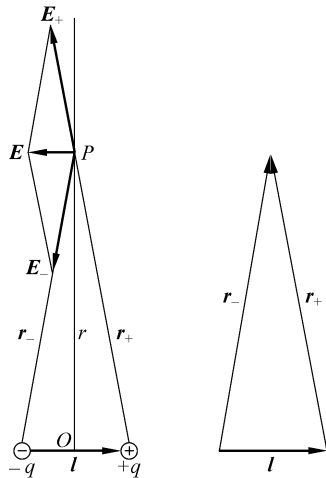


图 15.6 电偶极子的电场

在距电偶极子甚远时,即当  $r \gg l$  时,取一级近似,有  $r_+ = r_- = r$ ,而  $P$  点的总场强为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$$

由于  $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = -l$ ,所以上式化为

$$\mathbf{E} = \frac{-ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

式中,  $ql$  反映电偶极子本身的特征,叫做电偶极子的电矩(或电偶极矩)。以  $\mathbf{p}$  表示电矩,则  $\mathbf{p} = ql$ 。这样上述结果又可写成

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (15.12)$$

此结果表明,电偶极子中垂线上距离电偶极子中心较远处,各点的电场强度与电偶极子的电矩成正比,与该点离电偶极子中心的距离的三次方成反比,方向与电矩的方向相反。

#### 例 15.4

一根带电直棒,如果我们限于考虑离棒的距离比棒的截面尺寸大得多的地方的电场,则该带电直棒就可以看作一条带电直线。今设一均匀带电直线,长为  $L$ (图 15.7),线电荷密度(即单位长度上的电荷)为  $\lambda$ (设  $\lambda > 0$ ),求直线中垂线上一点的场强。

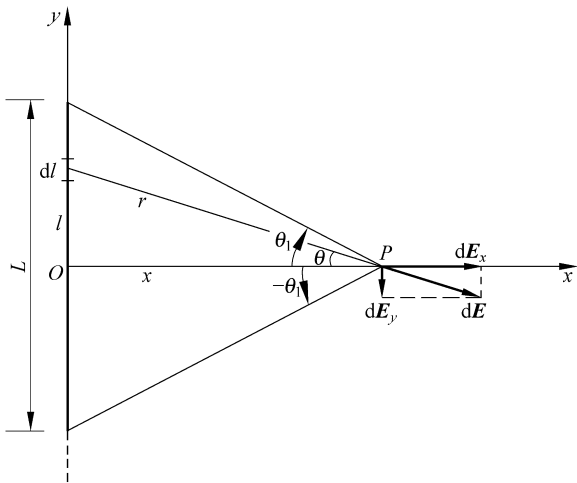


图 15.7 带电直线中垂线上的电场

**解** 在带电直线上任取一长为  $dl$  的电荷元,其电量  $dq = \lambda dl$ 。以带电直线中点  $O$  为原点,取坐标轴  $Ox, Oy$  如图 15.7 所示。电荷元  $dq$  在  $P$  点的场强为  $d\mathbf{E}$ ,  $d\mathbf{E}$  沿两个轴方向的分量分别为  $dE_x$  和  $dE_y$ 。由于电荷分布对于  $OP$  直线的对称性,所以全部电荷在  $P$  点的场强沿  $y$  轴方向的分量之和为零,因而  $P$  点的总场强  $\mathbf{E}$  应沿  $x$  轴方向,并且

$$\mathbf{E} = \int dE_x$$

而

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{\lambda dl x}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

由于  $l = x \tan \theta$ ,从而  $dl = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta$ 。由图 15.7 知  $r = \frac{x}{\cos \theta}$ ,所以

$$dE_x = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 x} d\theta$$

由于对整个带电直线来说,  $\theta$  的变化范围是从  $-\theta_1$  到  $+\theta_1$ , 所以

$$E = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 x} d\theta = \frac{\lambda \sin \theta_1}{2\pi\epsilon_0 x}$$

将  $\sin \theta_1 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + x^2}}$  代入, 可得

$$E = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x(x^2 + L^2/4)^{1/2}}$$

此电场的方向垂直于带电直线而指向远离直线的一方。

上式中当  $x \ll L$  时, 即在带电直线中部近旁区域内,

$$E \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \quad (15.13)$$

此时相对于距离  $x$ , 可将该带电直线看作“无限长”。因此, 可以说, 在一无限长带电直线周围任意点的场强与该点到带电直线的距离成反比。

当  $x \gg L$  时, 即在远离带电直线的区域内,

$$E \approx \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

其中  $q = \lambda L$  为带电直线所带的总电量。此结果显示, 离带电直线很远处, 该带电直线的电场相当于一个点电荷  $q$  的电场。

### 例 15.5

一均匀带电细圆环, 半径为  $R$ , 所带总电量为  $q$  (设  $q > 0$ ), 求圆环轴线上任一点的场强。

**解** 如图 15.8 所示, 把圆环分割成许多小段, 任取一小段  $dl$ , 其上带电量为  $dq$ 。设此电荷元  $dq$  在  $P$  点的场强为  $d\mathbf{E}$ , 并设  $P$  点与  $dq$  的距离为  $r$ , 而  $OP = x$ ,  $d\mathbf{E}$  沿平行和垂直于轴线的两个方向的分量分别为  $d\mathbf{E}_{//}$  和  $d\mathbf{E}_{\perp}$ 。由于圆环电荷分布对于轴线对称, 所以圆环上全部电荷的  $d\mathbf{E}_{\perp}$  分量的矢量和为零, 因而  $P$  点的场强沿轴线方向, 且

$$E = \int_q dE_{//}$$

式中积分为对环上全部电荷  $q$  积分。

由于

$$dE_{//} = dE \cos \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

其中  $\theta$  为  $d\mathbf{E}$  与  $x$  轴的夹角, 所以

$$E = \int_q dE_{//} = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_q dq$$

此式中的积分值即为整个环上的电荷  $q$ , 所以

$$E = \frac{q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

考虑到  $\cos \theta = x/r$ , 而  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ , 可将上式改写成

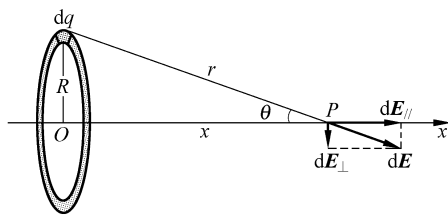


图 15.8 均匀带电细圆环轴上的电场

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$E$  的方向为沿着轴线指向远方。

当  $x \gg R$  时,  $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx x^3$ , 则  $E$  的大小为

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

此结果说明, 远离环心处的电场也相当于一个点电荷  $q$  所产生的电场。

### 例 15.6

一带电平板, 如果我们限于考虑离板的距离比板的厚度大得多的地方的电场, 则该带电板就可以看作一个带电平面。今设一均匀带电圆面, 半径为  $R$  (图 15.9), 面电荷密度 (即单位面积上的电荷) 为  $\sigma$  (设  $\sigma > 0$ ), 求圆面轴线上任一点的场强。

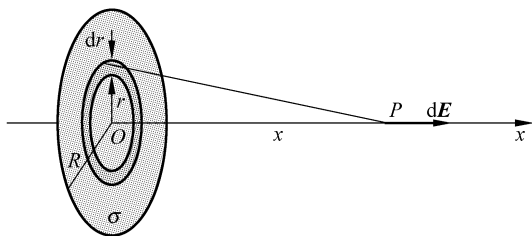


图 15.9 均匀带电圆面轴线上的电场

**解** 带电圆面可看成由许多同心的带电细圆环组成。取一半径为  $r$ , 宽度为  $dr$  的细圆环, 由于此环带有电荷  $\sigma \cdot 2\pi r dr$ , 所以由例 15.5 可知, 此圆环电荷在  $P$  点的场强大小为

$$dE = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr \cdot x}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

方向沿着轴线指向远方。由于组成圆面的各圆环的电场  $dE$  的方向都相同, 所以  $P$  点的场强为

$$E = \int dE = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

其方向也垂直于圆面指向远方。

当  $x \ll R$  时,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (15.14)$$

此时相对于  $x$ , 可将该带电圆面看作“无限大”带电平面。因此, 可以说, 在一无限大均匀带电平面附近, 电场是一个均匀场, 其大小由式(15.14)给出。

当  $x \gg R$  时,

$$(R^2 + x^2)^{-1/2} = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{R^2}{2x^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{R^2}{2x^2} \right)$$

于是

$$E \approx \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

式中  $q = \sigma\pi R^2$  为圆面所带的总电量。这一结果也说明, 在远离带电圆面处的电场也相当于一个点电荷的电场。

## 例 15.7

计算电偶极子在均匀电场中所受的力矩。

**解** 一个电偶极子在外电场中要受到力矩的作用。以  $E$  表示均匀电场的场强,  $l$  表示从  $-q$  到  $+q$  的矢量线段, 偶极子中点  $O$  到  $+q$  与  $-q$  的径矢分别为  $r_+$  和  $r_-$ , 如图 15.10 所示。正、负电荷所受力分别为  $F_+ = qE_+$ ,  $F_- = -qE_-$ , 它们对于偶极子中点  $O$  的力矩之和为

$$\begin{aligned} M &= r_+ \times F_+ + r_- \times F_- = qr_+ \times E + (-q)r_- \times E \\ &= q(r_+ - r_-) \times E = ql \times E \end{aligned}$$

即

$$M = p \times E \quad (15.15)$$

力矩  $M$  的作用总是使电偶极子转向电场  $E$  的方向。当  $p$  平行于  $E$  时, 力矩  $M=0$ 。

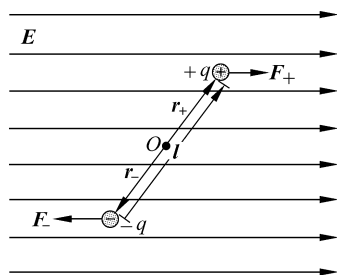


图 15.10 电偶极子在外电场中受力情况

## 15.5 电场线和电通量

为了形象地描绘电场在空间的分布, 可以画电场线图。电场线是按下述规定在电场中画出的一系列假想的曲线: 曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向, 曲线的疏密表示场强的大小。定量地说, 为了表示电场中某点场强的大小, 设想通过该点画一个垂直于电场方向的面元  $dS_{\perp}$ , 如图 15.11 所示, 通过此面元画  $d\Phi_e$  条电场线, 使得

$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_{\perp}} \quad (15.16)$$

这就是说, 电场中某点电场强度的大小等于该点处的电场线数密度, 即该点附近垂直于电场方向的单位面积所通过的电场线条数。

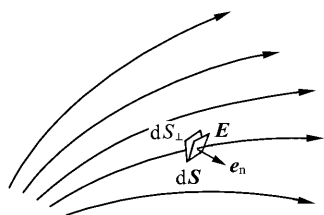


图 15.11 电场线数密度与场强大小的关系

图 15.12 画出了几种不同分布的电荷所产生的电场

的电场线。

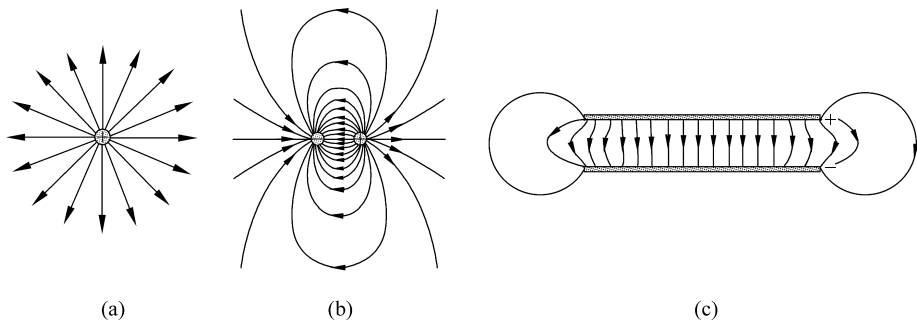


图 15.12 几种静止的电荷的电场线图

(a) 点电荷; (b) 电偶极子; (c) 带电平行板

电场线图形也可以通过实验显示出来。将一些针状晶体碎屑撒到绝缘油中使之悬浮起来,加以外电场后,这些小晶体会因感应而成为小的电偶极子。它们在电场力的作用下就会转到电场方向排列起来,于是就显示出了电场线的图形(图 15.13)。

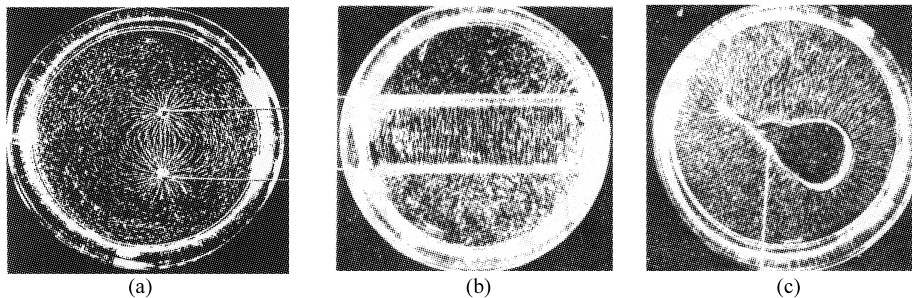


图 15.13 电场线的显示

(a) 两个等量的正负电荷; (b) 两个带等量异号电荷的平行金属板; (c) 有尖的异形带电导体

式(15.10)或式(15.11)给出了场源电荷和它们的电场分布的关系。利用电场线概念,可以用另一种形式——高斯定律——把这一关系表示出来。这后一种形式还有更普遍的理论意义,为了导出这一形式,我们引入电通量的概念。

如图 15.14 所示,以  $dS$  表示电场中某一个设想的面元。通过此面元的电场线条数就定义为通过这一面元的电通量。为了求出这一电通量,我们考虑此面元在垂直于场强方向的投影  $dS_{\perp}$ 。很明显,通过  $dS$  和  $dS_{\perp}$  的电场线条数是一样的。由图可知,  $dS_{\perp} = dS \cos \theta$ 。将此关系代入式(15.16),可得通过  $dS$  的电场线的条数或电通量应为

$$d\Phi_e = E dS_{\perp} = E dS \cos \theta \quad (15.17)$$

为了同时表示出面元的方位,我们利用面元的法向单位矢量  $e_n$ ,这时面元就用矢量面元  $d\mathbf{S} = dS e_n$  表示。由图 15.14 可以看出,  $dS$  和  $dS_{\perp}$  两面积之间的夹角也等于电场  $\mathbf{E}$  和  $e_n$  之间的夹角。由矢量标积的定义,可得

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot e_n dS = E dS \cos \theta$$

将此式与式(15.17)对比,可得用矢量标积表示的通过面元  $dS$  的电通量的公式

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.18)$$

注意,由此式决定的电通量  $d\Phi_e$  有正、负之别。当  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  时,  $d\Phi_e$  为正;当  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  时,  $d\Phi_e$  为负。

为了求出通过任意曲面  $S$  的电通量(图 15.15),可将曲面  $S$  分割成许多小面元  $dS$ 。先计算通过每一小面元的电通量,然后对整个  $S$  面上所有面元的电通量相加。用数学式表示就有

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.19)$$

这样的积分在数学上叫面积分,积分号下标  $S$  表示此积分遍及整个曲面。

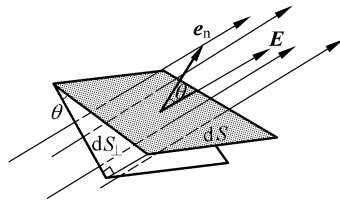


图 15.14 通过  $dS$  的电通量

通过一个封闭曲面  $S$  (图 15.16) 的电通量可表示为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.20)$$

积分符号“ $\oint$ ”表示对整个封闭曲面进行面积分。

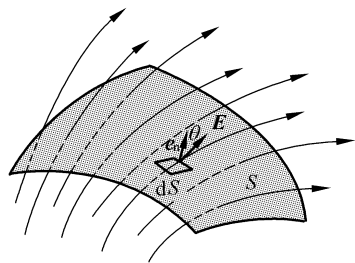


图 15.15 通过任意曲面的电通量

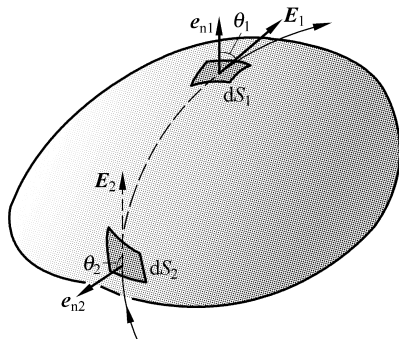


图 15.16 通过封闭曲面的电通量

对于不闭合的曲面,面上各处法向单位矢量的正向可以任意取这一侧或那一侧。对于闭合曲面,由于它使整个空间划分成内、外两部分,所以一般规定自内向外的方向为各处面元法向的正方向。因此,当电场线从内部穿出时(如在图 15.16 中面元  $dS_1$  处),  $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ,  $d\Phi_e$  为正。当电场线由外面穿入时(如图 15.16 中面元  $dS_2$  处),  $\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi$ ,  $d\Phi_e$  为负。式(15.20)中表示的通过整个封闭曲面的电通量  $\Phi_e$  就等于穿出与穿入封闭曲面的电场线的条数之差,也就是净穿出封闭面的电场线的总条数。

## 15.6 高斯定律

高斯(K. F. Gauss, 1777—1855 年)是德国物理学家和数学家,他在实验物理和理论物理以及数学方面都作出了很多贡献,他导出的高斯定律是电磁学的一条重要规律。

高斯定律是用电通量表示的电场和场源电荷关系的定律,它给出了通过任一封闭面的电通量与封闭面内部所包围的电荷的关系。下面我们利用电通量的概念根据库仑定律和场强叠加原理来导出这个关系。

我们先讨论一个静止的点电荷  $q$  的电场。以  $q$  所在点为中心,取任意长度  $r$  为半径作一球面  $S$  包围这个点电荷  $q$  (图 15.17(a))。我们知道,球面上任一点的电场强度  $\mathbf{E}$  的大小都是  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , 方向都沿着径矢  $\mathbf{r}$  的方向,而处处与球面垂直。根据式(15.20),可得通过这球面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

此结果与球面半径  $r$  无关,只与它所包围的电荷的电量有关。这意味着,对以点电荷  $q$  为中心的任意球面来说,通过它们的电通量都一样,都等于  $q/\epsilon_0$ 。用电场线的图像来说,这表示通过各球面的电场线总条数相等,或者说,从点电荷  $q$  发出的电场线连续地延伸到无

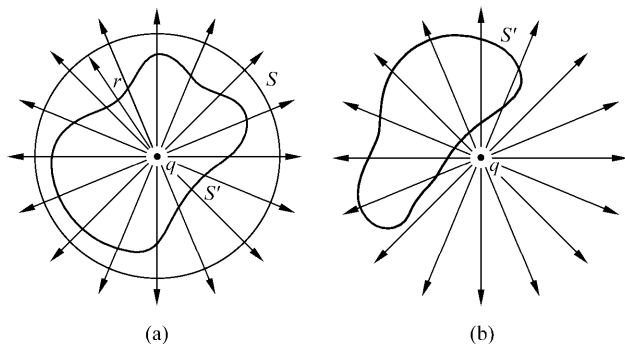


图 15.17 说明高斯定律用图

限远处。这实际上是 15.5 节开始时指出的可以用连续的线描绘电场分布的根据。

现在设想另一个任意的闭合面  $S'$ ,  $S'$  与球面  $S$  包围同一个点电荷  $q$  (图 15.17(a)), 由于电场线的连续性, 可以得出通过闭合面  $S$  和  $S'$  的电力线条数是一样的。因此通过任意形状的包围点电荷  $q$  的闭合面的电通量都等于  $q/\epsilon_0$ 。

如果闭合面  $S'$  不包围点电荷  $q$  (图 15.17(b)), 则由电场线的连续性可得出, 由这一侧进入  $S'$  的电场线条数一定等于从另一侧穿出  $S'$  的电场线条数, 所以净穿出闭合面  $S'$  的电场线的总条数为零, 亦即通过  $S'$  面的电通量为零。用公式表示, 就是

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

以上是关于单个点电荷的电场的结论。对于一个由点电荷  $q_1, q_2, \dots, q_n$  等组成的电荷系来说, 在它们的电场中的任意一点, 由场强叠加原理可得

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$$

其中  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$  为单个点电荷产生的电场,  $\mathbf{E}$  为总电场。这时通过任意封闭曲面  $S$  的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \dots + \oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} \\ &= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \dots + \Phi_{en} \end{aligned}$$

其中  $\Phi_{e1}, \Phi_{e2}, \dots, \Phi_{en}$  为单个点电荷的电场通过封闭曲面的电通量。由上述关于单个点电荷的结论可知, 当  $q_i$  在封闭曲面内时,  $\Phi_{ei} = q_i/\epsilon_0$ ; 当  $q_i$  在封闭曲面外时,  $\Phi_{ei} = 0$ , 所以上式可以写成

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{in} \quad (15.21)$$

式中,  $\sum q_{in}$  表示在封闭曲面内的电量的代数和。式(15.21)就是高斯定律的数学表达式, 它表明: 在真空中的静电场内, 通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭面所包围的电荷的电量的代数和的  $1/\epsilon_0$  倍。

对高斯定律的理解应注意以下几点: ①高斯定律表达式左方的场强  $\mathbf{E}$  是曲面上各点的场强, 它是由全部电荷(既包括封闭曲面内又包括封闭曲面外的电荷)共同产生的合场强, 并非只由封闭曲面内的电荷  $\sum q_{in}$  所产生。②通过封闭曲面的总电通量只决定于它

所包围的电荷,即只有封闭曲面内部的电荷才对这一总电通量有贡献,封闭曲面外部电荷对这一总电通量无贡献。

上面利用库仑定律(已暗含了自由空间的各向同性)和叠加原理导出了高斯定律。在电场强度定义之后,也可以把高斯定律作为基本定律结合自由空间的各向同性而导出库仑定律来(见例 15.8)。这说明,对静电场来说,库仑定律和高斯定律并不是互相独立的定律,而是用不同形式表示的电场与场源电荷关系的同一客观规律。二者具有“相逆”的意义:库仑定律使我们在电荷分布已知的情况下,能求出场强的分布;而高斯定律使我们在电场强度分布已知时,能求出任意区域内的电荷。尽管如此,当电荷分布具有某种对称性时,也可用高斯定律求出该种电荷系统的电场分布,而且,这种方法在数学上比用库仑定律简便得多。

可以附带指出的是,如上所述,对于静止电荷的电场,可以说库仑定律与高斯定律二者等价。但在研究运动电荷的电场或一般地随时间变化的电场时,人们发现,库仑定律不再成立,而高斯定律却仍然有效。所以说,高斯定律是关于电场的普遍的基本规律。

## 15.7 利用高斯定律求静电场的分布

在一个参考系内,当静止的电荷分布具有某种对称性时,可以应用高斯定律求场强分布。这种方法一般包含两步:首先,根据电荷分布的对称性分析电场分布的对称性;然后,再应用高斯定律计算场强数值。这一方法的决定性的技巧是选取合适的封闭积分曲面(常叫高斯面)以便使积分 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 中的 $\mathbf{E}$ 能以标量形式从积分号内提出来。下面举几个例子,它们都要求求出在场源电荷静止的参考系内自由空间中的电场分布。

### 例 15.8

试由高斯定律求在点电荷 $q$ 静止的参考系中自由空间内的电场分布。

**解** 由于自由空间是均匀而且各向同性的,因此,点电荷的电场应具有以该电荷为中心的球对称性,即各点的场强方向应沿从点电荷引向各点的径矢方向,并且在距点电荷等远的所有各点上,场强的数值应该相等。据此,可以选择一个以点电荷所在点为球心,半径为 $r$ 的球面为高斯面 $S$ 。通过 $S$ 面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS$$

最后的积分就是球面的总面积 $4\pi r^2$ ,所以

$$\Phi_e = E \cdot 4\pi r^2$$

$S$ 面包围的电荷为 $q$ 。高斯定律给出

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

由此得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由于 $\mathbf{E}$ 的方向沿径向,所以此结果又可以用下一矢量式表示:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

这就是点电荷的场强公式。

若将另一电荷  $q_0$  放在距电荷  $q$  为  $r$  的一点上,则由场强定义可求出  $q_0$  受的力为

$$\mathbf{F} = E q_0 = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

此式正是库仑定律。这样,我们就由高斯定律导出了库仑定律。

### 例 15.9

求均匀带电球面的电场分布。已知球面半径为  $R$ ,所带总电量为  $q$ (设  $q > 0$ )。

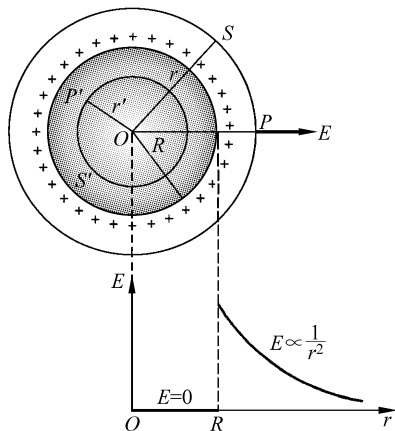


图 15.18 均匀带电球面的电场分析

**解** 先求球面外任一点  $P$  处的场强。设  $P$  距球心为  $r$  (图 15.18),并连接  $OP$  直线。由于自由空间的各向同性和电荷分布对于  $O$  点的球对称性,在  $P$  点唯一可能的确定方向是径矢  $OP$  的方向,因而此处场强  $\mathbf{E}$  的方向只可能是沿此径向(反过来说,设  $\mathbf{E}$  的方向在图中偏离  $OP$ ,例如,向下  $30^\circ$ ,那么将带电球面连同它的电场以  $OP$  为轴转动  $180^\circ$ 后,电场  $\mathbf{E}$  的方向就将应偏离  $OP$  向上  $30^\circ$ 。由于电荷分布并未因此转动而发生变化,所以电场方向的这种改变是不应该有的。带电球面转动时, $P$  点的电场方向只有在该方向沿  $OP$  径向时才能不变)。其他各点的电场方向也都沿各自的径矢方向。又由于电荷分布的球对称性,在以  $O$  为心的同一球面上各点的电场强度的大小都应该相等,因此可选球面  $S$  为高斯面,通过它的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

此球面包围的电荷为  $\sum q_{in} = q$ 。高斯定律给出

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由此得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

考虑  $\mathbf{E}$  的方向,可得电场强度的矢量式为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R) \quad (15.22)$$

此结果说明,均匀带电球面外的场强分布正像球面上的电荷都集中在球心时所形成的一个点电荷在该区的场强分布一样。

对球面内部任一点  $P'$ ,上述关于场强的大小和方向的分析仍然适用。过  $P'$  点作半径为  $r'$  的同心球面为高斯面  $S'$ 。通过它的电通量仍可表示为  $4\pi r'^2 E$ ,但由于此  $S'$  面内没有电荷,根据高斯定律,应该有

$$E \cdot 4\pi r'^2 = 0$$

即

$$E = 0 \quad (r < R) \quad (15.23)$$

这表明:均匀带电球面内部的场强处处为零。

根据上述结果,可画出场强随距离的变化曲线—— $E-r$  曲线(图 15.18)。从  $E-r$  曲线中可看出,场强值在球面( $r=R$ )上是不连续的。

## 例 15.10

求均匀带电球体的电场分布。已知球半径为  $R$ , 所带总电量为  $q$ 。

铀核可视为带有  $92e$  的均匀带电球体, 半径为  $7.4 \times 10^{-15} \text{ m}$ , 求其表面的电场强度。

**解** 设想均匀带电球体是由一层层同心均匀带电球面组成。这样例 15.9 中关于场强方向和大小的分析在本例中也适用。因此, 可以直接得出: 在球体外部的场强分布和所有电荷都集中到球心时产生的电场一样, 即

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r \geq R) \quad (15.24)$$

为了求出球体内任一点的场强, 可以通过球内  $P$  点做一个半径为  $r$  ( $r < R$ ) 的同心球面  $S$  作为高斯面 (图 15.19), 通过此面的电通量仍为  $E \cdot 4\pi r^2$ 。此球面包围的电荷为

$$\sum q_{in} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

由此利用高斯定律可得

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r} \quad (r \leq R)$$

这表明, 在均匀带电球体内部各点场强的大小与径矢大小成正比。考虑到  $\mathbf{E}$  的方向, 球内电场强度也可以用矢量式表示为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r} \quad (r \leq R) \quad (15.25)$$

以  $\rho$  表示体电荷密度, 则式(15.25)又可写成

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} \quad (15.26)$$

均匀带电球体的  $E-r$  曲线绘于图 15.19 中。注意, 在球体表面上, 场强的大小是连续的。

由式(15.24)或式(15.25), 可得铀核表面的电场强度为

$$E = \frac{92e}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{92 \times 1.6 \times 10^{-19}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times (7.4 \times 10^{-15})^2} = 2.4 \times 10^{21} \text{ (N/C)}$$

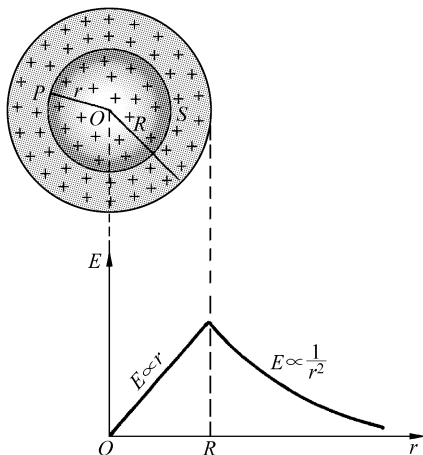


图 15.19 均匀带电球体的电场分析

## 例 15.11

求无限长均匀带电直线的电场分布。已知线上线电荷密度为  $\lambda$ 。

输电线上均匀带电, 线电荷密度为  $4.2 \text{ nC/m}$ , 求距电线  $0.50 \text{ m}$  处的电场强度。

**解** 带电直线的电场分布应具有轴对称性, 考虑离直线距离为  $r$  的一点  $P$  处的场强  $\mathbf{E}$  (图 15.20)。由于空间各向同性而带电直线为无限长, 且均匀带电, 所以电场分布具有轴对称性, 因而  $P$  点的电场方向唯一的可能是垂直于带电直线而沿径向, 并且和  $P$  点在同一圆柱面 (以带电直线为轴) 上的各点的场强大小也都相等, 而且方向都沿径向。

作一个通过  $P$  点, 以带电直线为轴, 高为  $l$  的圆筒形封闭面为高斯面  $S$ , 通过  $S$  面的电通量为

$$\Phi_c = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

在  $S$  面的上、下底面 ( $S_1$  和  $S_3$ ) 上, 场强方向与底面平行, 因此, 上式等号右侧后面两项等于零。而在侧

面( $S_1$ )上各点  $\mathbf{E}$  的方向与各该点的法线方向相同, 所以有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} E dS = E \int_{S_1} dS = E \cdot 2\pi r l$$

此封闭面内包围的电荷  $\sum q_{in} = \lambda l$ 。由高斯定律得

$$E \cdot 2\pi r l = \lambda l / \epsilon_0$$

由此得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (15.27)$$

这一结果与式(15.13)相同。由此可见, 当条件允许时, 利用高斯定律计算场强分布要简便得多。

题中所述输电线周围 0.50 m 处的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{4.2 \times 10^{-9}}{2\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.50} = 1.5 \times 10^2 \text{ (N/C)}$$

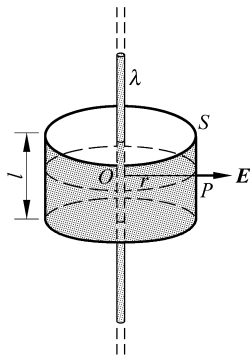


图 15.20 无限长均匀带电直线的场强分析

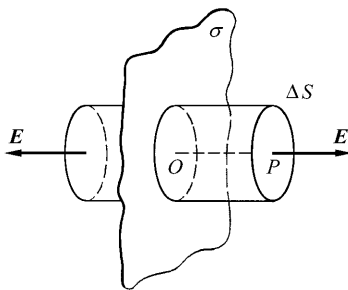


图 15.21 无限大均匀带电平面的电场分析

### 例 15.12

求无限大均匀带电平面的电场分布。已知带电平面上面电荷密度为  $\sigma$ 。

**解** 考虑距离带电平面为  $r$  的  $P$  点的场强  $\mathbf{E}$  (图 15.21)。由于电荷分布对于垂线  $OP$  是对称的, 所以  $P$  点的场强必然垂直于该带电平面。又由于电荷均匀分布在一个无限大平面上, 所以电场分布必然对该平面对称, 而且离平面等远处 (两侧一样) 的场强大小都相等, 方向都垂直指离平面 (当  $\sigma > 0$  时)。

我们选一个其轴垂直于带电平面的圆筒式的封闭面作为高斯面  $S$ , 带电平面平分此圆筒, 而  $P$  点位于它的一个底上。

由于圆筒的侧面上各点的  $\mathbf{E}$  与侧面平行, 所以通过侧面的电通量为零。因而只需要计算通过两底面 ( $S_{tb}$ ) 的电通量。以  $\Delta S$  表示一个底的面积, 则

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{tb}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S$$

由于

$$\sum q_{in} = \sigma\Delta S$$

高斯定律给出

$$2E\Delta S = \sigma\Delta S / \epsilon_0$$

从而