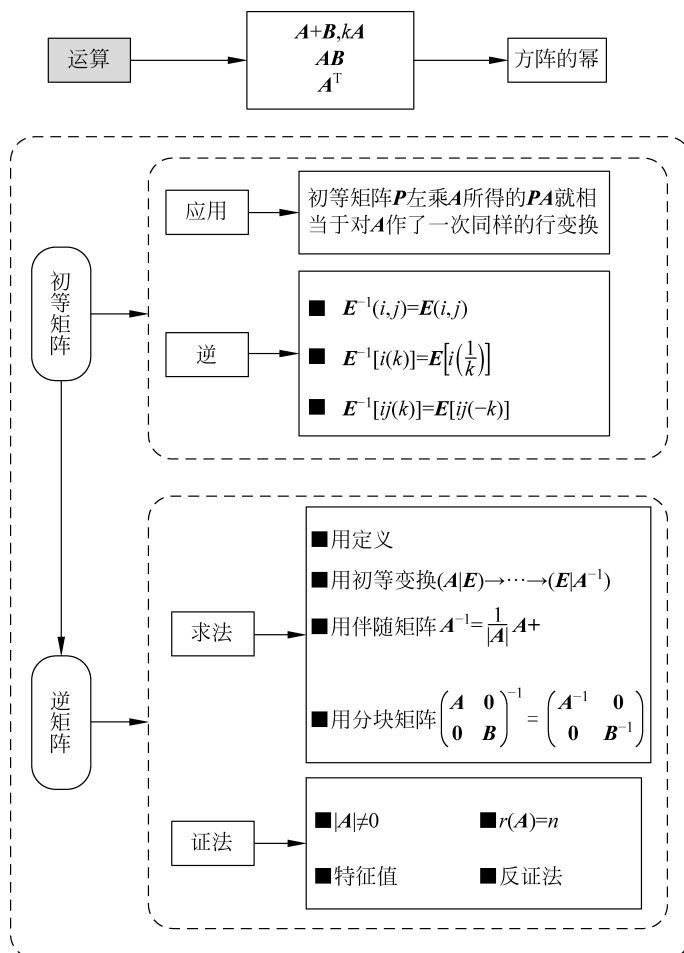


第3章

矩阵的运算

3.1 知识网络图



3.2 精品课堂



引言

引例1 设下列矩阵 A 是在三家不同商店购买三种不同糖果的价格（以美分计）：

糖果类型 A B C

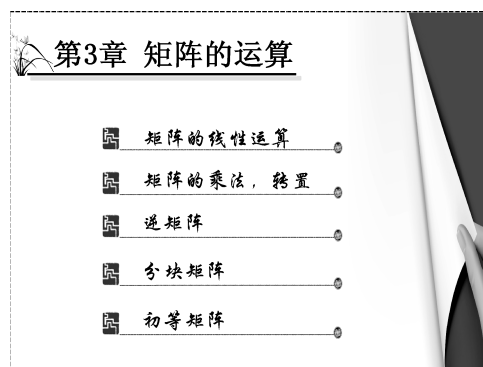
价格

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 \\ 25 & 30 & 20 \\ 30 & 40 & 35 \end{pmatrix}$$

线性运算

问题a 若糖果的价格加倍，糖果的价格矩阵是什么？答案： $2A$ 。

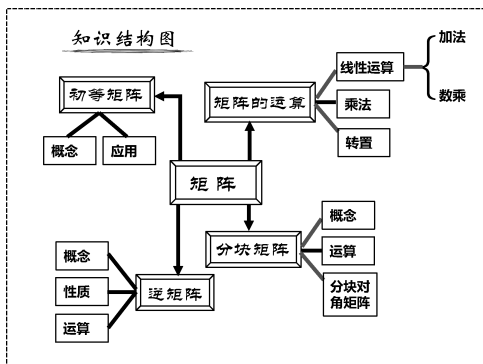
问题b 若糖果价格上涨50%，每块糖果的税为5美分，那么糖果的价格矩阵是什么？答案： $1.5A - 5D$ 。
(其中 D 为各个元素值为1的三阶矩阵。)



引例2 假设矩阵 A 表示三种作业中的每一种，为了进行输入/输出（I/O），执行程序及系统总开销所需的机时；矩阵 B 表示在两种不同收费方式下，不同的计算机活动（每个单位时间）所需要的费用；求三种作业在两种收费方式下的总费用。

机时： I/O 执行 系统 计时收费： I II

$$\begin{matrix} \text{作业1} \\ \text{作业2} \\ \text{作业3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 4 & 25 & 8 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{I/O} \\ \text{执行} \\ \text{系统} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



解 作业A在方式I下的总费用为

$$5 \times 2 + 20 \times 6 + 10 \times 3 = 160$$

在方式II下的总费用为

$$5 \times 3 + 20 \times 5 + 10 \times 4 = 155$$

同理可算出作业B、作业C在两种收费方式下的总费用。

乘法运算

矩阵的线性运算

矩阵的加法

定义3.1 给定两个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

把矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$, 规定为

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘的运算规律

设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 为常数, 则

- (1) 数对矩阵的分配律: $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- (2) 矩阵对数的分配律: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- (3) 数与矩阵的结合律: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
- (4) 数 0, 1 与矩阵满足: $0A = 0, 1A = A$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 3+(-3) \\ -1+2 & 5+1 & 3+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

注意 只有同型矩阵方可相加!

观察与思考?

两个行列式如何相加? 有何要求?

矩阵的减法

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 的差, 记作 $A-B$

规定为

$$A-B = A + (-1)B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

矩阵加法的运算规律

设 A, B, C 都是 $m \times n$ 矩阵, 0 是同型的零矩阵, 则

- (1) 加法交换律: $A+B = B+A$
- (2) 加法结合律: $(A+B)+C = A+(B+C)$
- (3) 零矩阵满足: $A+0 = 0+A = A$
- (4) 存在矩阵 $-A$, 满足: $A-A = A+(-A) = 0$

例 3.1 已知

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $2A$ 和 $3A-2B$ 。

解

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

矩阵的数乘

定义3.2 数 λ 和矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的乘积, 简称数乘, 记作 λA , 规定为

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$3A-2B = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 12 & -3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 8 & -7 \\ 1 & 8 & 13 & 6 \\ -6 & -5 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

引例3 某彩电生产基地生产三种型号的彩电, 第一季度分别为40万台, 20万台, 30万台, 第二季度分别为30万台, 10万台, 50万台, 每万台的利润分别是400万元, 300万元, 500万元, 那么, 可列出两个季度的产量矩阵 A , 单位利润矩阵 B .

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 30 & 10 & 50 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$$

记两个季度的利润矩阵为 C , 则有

$$C = \begin{pmatrix} 40 \times 400 + 20 \times 300 + 30 \times 500 \\ 30 \times 400 + 10 \times 300 + 50 \times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix}$$

请注意

- ◆ C 中第一行的第一个元素37 000是 A 中第一行的元素与 B 中这一列的对应元素乘积之和。
- ◆ C 中第二行的第一个元素40 000是 A 中第二行的元素与 B 中这一列的对应元素乘积之和。

请注意

矩阵相乘要求左矩阵的列数与右矩阵的行数相等。

例 3.2 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 。

解 $AB = C = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

注意

乘积 BA 没有意义。

例 3.3 设 A 是一个 $1 \times n$ 行矩阵, B 是一个 $n \times 1$ 列矩阵, 即

$$A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n], \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \text{求 } AB \text{ 和 } BA.$$

解

$$AB = \left[\sum_{i=1}^n a_i \times b_i \right]_{1 \times 1}, \quad BA = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \cdots & b_n a_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

矩阵乘法运算一般不满足交换律!

定义3.3 设 A 是一个 $m \times s$ 矩阵, B 是一个 $s \times n$ 矩阵,

C 是一个 $m \times n$ 矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

其中, $c_{ij} = \underline{a_{i1}b_{1j}} + \underline{a_{i2}b_{2j}} + \cdots + \underline{a_{is}b_{sj}} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的乘积, 记为 $AB = C$ 。

零矩阵是矩阵乘法的零元, 对任意矩阵 A , 有

$$0A = A0 = 0$$

$$AB = 0 \Rightarrow A, B \text{ 中有一个是零矩阵}$$

例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{但 } A, B \text{ 都不是零矩阵.}$$

例 3.4

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 AB 和 AC 。

解

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}, \quad AC = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$$

即 $AB = AC$, 但 $B \neq C$ 。

矩阵乘法不满足消去律!



设 A 与 B 为 n 阶方阵,问等式

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

成立的充要条件是什么?

解 $\because (A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$

故 $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ 成立的充要条件为

$$AB = BA$$

例 3.6 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} 。

解

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E$$

$$A^{100} = (A^2)^{50} = (4E)^{50} = 4^{50}E$$

矩阵乘法的运算规则

- (1) 乘法结合律: $(AB)C = A(BC)$
- (2) 左乘分配律: $A(B+C) = AB+AC$
右乘分配律: $(A+B)C = AC+BC$
- (3) 数乘结合律: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

矩阵的转置

定义 3.4 把矩阵 A 的行与列按顺序互换所得新矩阵,叫做 A 的转置矩阵,记作 A^T ,即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

方阵的乘幂

若 A 是 n 阶方阵,则 A^m 是 A 的 m 次幂,即 m 个 A 相乘,对矩阵的乘幂,有

$$A^p A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}$$



一般地有 $(AB)^m \neq A^m B^m$

转置矩阵的运算性质

- (1) $(A^T)^T = A$
 - (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
 - (3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
 - (4) $(AB)^T = B^T A^T$; $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
- 对于多个矩阵,有
- $$(A_1 A_2 \cdots A_m)^T = A_m^T \cdots A_2^T A_1^T$$

例 3.5 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $(AB)^3$ 。

解 因 $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (AB)^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 3.7 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 $(AB)^T$ 。

解1 因为

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{于是 } (AB)^T = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

解2

$$\text{由于 } B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

所以

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

逆矩阵的概念

定义3.5 对于 n 阶矩阵 A , 如果有一个 n 阶矩阵 B , 使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 是可逆的, 并把矩阵 B 称为 A 的逆矩阵。 A 的逆矩阵记作 A^{-1} , 即 $A^{-1} = B$ 。

注意

- (1) 可逆矩阵也称为非奇异阵;
- (2) 若 A 是可逆矩阵, 则其逆矩阵是唯一的;
- (3) 只有方阵才有可逆矩阵。

收藏夹

设 A 是 n 阶方阵

- ◆ 对称矩阵: $A^T = A \quad (a_{ij} = a_{ji})$
- ◆ 反对称矩阵: $A^T = -A \quad (a_{ij} = -a_{ji}, a_{ii} = 0)$

例如 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB = BA = E$$

 $\therefore B$ 是 A 的一个逆矩阵。

例如 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

是对称矩阵。而矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 9 \\ -4 & 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

都是反对称矩阵。

例 3.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

分析矩阵 A 和矩阵 B 、矩阵 C 和矩阵 D 的关系。

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的逆

数中

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为 a 的倒数(或称 a 的逆)。

矩阵中

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

则矩阵 A^{-1} 称为 A 的可逆矩阵或逆阵。所以矩阵 A 和矩阵 B 互为逆矩阵。

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵 C 和矩阵 D 也互为逆矩阵。



- 对角线元素全不为零的 n 阶对角阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n)$$

可逆吗?

- 零矩阵有可逆矩阵吗?

- 答案是: 可逆的, 并且逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

- 零矩阵没有可逆矩阵。

逆矩阵的求解

伴随矩阵法

定义3.6 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 令 A_{ij} 是行列式 $|A|$

中元素 a_{ij} 的代数余子式, 将这 n^2 个数 A_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots, n$)

排成一个 n 阶方阵, 记作 A^* 。

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称矩阵 A^* 为 A 的伴随矩阵。

由矩阵乘法不难得知

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E \end{aligned}$$

同理可得 $A^*A = |A|E$, 从而 $AA^* = A^*A = |A|E$ 。

逆矩阵的性质

收藏夹

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$
- (2) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ (k 为非零常数)
- (3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 $(A_1A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1}A_{s-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

定理3.1 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 可逆的

充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 且当 A 可逆时, 有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵。

逆矩阵的性质

收藏夹

- (4) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- (5) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- (6) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

伴随矩阵的运算规律

- (1) $A^*A = AA^* = |A|E$
- (2) $|A^*| = |A|^{n-1}$ ($n \geq 2$)
- (3) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
- (4) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$; $(A^*)^T = (A^T)^*$
- (5) 若 A 可逆,
 $\Rightarrow (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, A^* = |A|A^{-1}$

例 3.9 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \therefore A^{-1} \text{ 存在}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{由于 } |B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -11 \end{vmatrix} = 0, \text{ 故 } B \text{ 不可逆。}$$

$$\text{同理可得 } A_{13} = 2, A_{21} = 6, A_{22} = -6, A_{23} = 2, \\ A_{31} = -4, A_{32} = 5, A_{33} = -2$$

$$\text{得 } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 3.11 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

求矩阵 X 使满足 $AXB = C$ 。

解

$$\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1}, B^{-1} \text{ 都存在。}$$

例 3.10 下列矩阵 A, B 是否可逆? 若可逆, 求出其逆矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ 所以 } A \text{ 可逆。}$$

$$\therefore A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\text{同理可求得 } A_{21} = 3, A_{22} = 0, A_{23} = -1, A_{31} = 1 \\ A_{32} = 4, A_{33} = -3$$

$$\text{且 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{又由 } AXB = C \Rightarrow \underbrace{A^{-1}AXB}_{E} B^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \\ \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

于是

$$X = A^{-1}CB^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

提醒注意 伴随矩阵法适用于 $n \leq 3$ 阶阵求逆!

逆矩阵的求解

定义法

定义 $AB = E \Rightarrow A^{-1} = B$

提示

定义法适用于抽象方程!

例3.12 设方阵 A 满足方程 $A^2 - A - 2E = 0$, 证明: $A, A + 2E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵。

证

由 $A^2 - A - 2E = 0$,

$$\text{得 } A(A - E) = 2E \Rightarrow A \cdot \frac{A - E}{2} = E$$

$$\Rightarrow |A| \left| \frac{A - E}{2} \right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆.}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$$

又由 $A^2 - A - 2E = 0$

$$\Rightarrow (A + 2E)(A - 3E) + 4E = 0$$

$$\Rightarrow (A + 2E) \left(-\frac{1}{4}(A - 3E) \right) = E$$

$$\Rightarrow |A + 2E| \left| -\frac{1}{4}(A - 3E) \right| = 1$$

故 $A + 2E$ 可逆,

$$\text{且 } (A + 2E)^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 3E) = \frac{3E - A}{4}.$$

例3.13 设方阵 B 为幂等矩阵, $A = E + B$

(即 $B^2 = B$, 从而对正整数 $k, B^k = B$).证明: A 是可逆矩阵, 且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(3E - A)$.

证

$$A \cdot \frac{1}{2}(3E - A) = \frac{1}{2}(E + B)(3E - A)$$

$$= \frac{1}{2}(E + B)(3E - E - B) = \frac{1}{2}(E + B)(2E - B)$$

$$= \frac{1}{2}(2E - B + 2B - B^2) = \frac{1}{2}(2E - B + 2B - B) = E$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}(3E - A)$$

逆矩阵的求解

初等变换法

$$(A|E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1}) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

例3.14 用初等变换法求逆矩阵 A^{-1} .

解

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1 - 3r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1 + r_2 + \frac{1}{2}r_3 \\ r_2 + \frac{1}{2}r_3 \\ r_3 \times (-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

例3.15 求下述矩阵的逆矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

解

作分块矩阵 $(A|E)$, 进行初等行变换。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 + (-2)r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$r_1 + (-1) \times r_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

提醒注意



用初等行变换求逆矩阵时,必须始终用行变换,其间不能作任何列变换!

对于分块矩阵,可把子块当作数量元素处理,如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix}$$

分块矩阵运算须遵循以下规则:

- (1) 矩阵的分块方式要与运算相配套;
- (2) 子块的乘积要分清左、右顺序,不能随意交换;
- (3) 分块矩阵转置时,除子块的位置转置外,子块本身也要转置。

分块矩阵

用贯穿整个矩阵的横线或竖线将其划分成若干子块(或称子矩阵),即构成了分块矩阵。

同一矩阵有多种分块方式,如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可列举出以下三种不同的分块方式。

分块矩阵的运算

加法

设矩阵 A 与 B 的行数相同,列数相同,采用相同的分块法,有

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同,列数相同,那么

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的运算

数乘

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \lambda \text{ 为数, 那么}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

(1) 为 E_2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记为 A_1
为 0 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记为 E_2

则 $A = \begin{bmatrix} E_2 & A_1 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$ 。

(2) 为 E_3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记为 A_2
为 0 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记为 E_1

$$\text{则 } A = \begin{bmatrix} E_3 & A_2 \\ 0 & E_1 \end{bmatrix}$$

(3) 记为 e_1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记为 u
记为 e_2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记为 e_3

则 $A = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ u]$

分块矩阵的运算

乘法

设 A 为 $m \times l$ 矩阵, B 为 $l \times n$ 矩阵, 分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sl} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & \cdots & B_{ln} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1l}$ 的列数分别等于 $B_{11}, B_{21}, \dots, B_{l1}$ 的行数, 那么

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } C_{ij} = \sum_{k=1}^l A_{ik} B_{kj} \\ (i=1, \cdots, s; j=1, \cdots, r)$$

分块对角阵的性质

$$\bullet \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \text{ 则有}$$

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|$$



假设 A 、 B 可以相乘, 那么

- 分块矩阵的乘法即将 A 、 B 的每个子块当作矩阵的元素, 按矩阵乘法的运算规则计算;
- 为了使乘法可行, 要求 A 的列的划分与 B 的行的划分完全一致, 以保证分块矩阵可乘, 且各子块间的乘法也可行;
- A 的行的划分与 B 的列的划分没有限制。

$$\bullet \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \text{ 若 } A \text{ 可逆, 则}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & A_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

提示

准对角 A 可逆

$$\Leftrightarrow |A_i| \neq 0 \ (i=1, 2, \cdots, s)$$

分块矩阵的运算

转置

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s B_s \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵

设 A 为 n 阶矩阵, 若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且非零子块都是方阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i \ (i=1, 2, \cdots, s)$ 都是方阵, 就称 A 为分块对角矩阵。

分块矩阵的运算法则汇总

收藏夹

$$(1) \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

分块矩阵的运算法则汇总

收藏夹

$$(4) \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } AB &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_1 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

分块矩阵的运算法则汇总

收藏夹

◆ 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, 其中 B, D 均为可逆方阵,

则 A^{-1} 存在, 且 $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } A_1 B_{11} + B_{21} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1 + B_{22} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

分块矩阵的运算法则汇总

收藏夹

◆ 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 B, D 均为可逆方阵,

则 A^{-1} 存在, 且 $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

$$\text{于是 } AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

例3.16 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{求 } AB.$$

解 把 A, B 分成

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_1 & E \end{pmatrix}$$

例3.17

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & E \end{pmatrix} \text{ 求 } A^T.$$

解

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } A^T = \begin{pmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T \\ 0^T & E \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } B_{11}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{21}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^T = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } A^T = \begin{pmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T \\ 0^T & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

又

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

逆矩阵的求解

分块矩阵法

例3.18 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (5), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

定义3.7 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。对应于三类初等行(列)变换, 初等矩阵有三种:

- (1) 交换矩阵 E 第 i, j 两行(或交换第 i, j 两列)。
- (2) 以数 $k \neq 0$ 乘以矩阵 E 第 i 行。
- (3) 把矩阵 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行。

$$A_1^{-1} = \left(\frac{1}{5} \right), \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. 对调两行或两列对调 E 中第 i, j 两行, 即 $r_i \leftrightarrow r_j$, 得初等方阵

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

例3.19 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

其中数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均不为零, 试求 A^{-1} .**解** 利用分块矩阵求逆。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_1^{-1} \\ a_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i, j)$ 左乘 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 得

$$E_m(i, j)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

相当于对矩阵 A 进行第一种初等行变换:
把 A 的第 i 行与第 j 行对调 ($r_i \leftrightarrow r_j$)。

类似地, 以 n 阶初等矩阵 $E_n(i, j)$ 右乘矩阵 A ,

$$AE_n(i, j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

相当于对矩阵 A 进行第一种初等列变换:
把 A 的第 i 列与第 j 列对调 ($c_i \leftrightarrow c_j$)。

以 $E_m[ij(k)]$ 左乘矩阵 A ,

$$E_m[ij(k)]A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上 ($r_i + kr_j$)。

2. 以数 $k \neq 0$ 乘以某行或某列

以数 $k \neq 0$ 乘以单位矩阵的第 i 行 ($r_i \times k$), 得初等矩阵 $E[i(k)]$ 。

$$E[i(k)] = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & k \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

类似地, 以 $E_n[ij(k)]$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于把 A 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列上 ($c_j + kc_i$)。

$AE_n[ij(k)]$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + ka_{ij} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} + ka_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

以 $E_m[i(k)]$ 左乘矩阵 A ,

$$E_m[i(k)]A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

相当于以数 k 乘以 A 的第 i 行 ($r_i \times k$);

类似地, 以 $E_n[ij(k)]$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于以数 k 乘以 A 的第 i 列 ($c_i \times k$)。

例3.20 下列矩阵都是初等矩阵。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 以数 $k \neq 0$ 乘以某行(列)加到另一行(列)上

以 k 乘以 E 的第 j 行加到第 i 行上 ($r_i + kr_j$)
(或以 k 乘以 E 的第 i 列加到第 j 列上 ($c_j + kc_i$))。

$$E[ij(k)] = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

$$\leftarrow \text{第 } j \text{ 行}$$

且有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例3.21

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + kc_1 & a_2 + kc_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & ka_2 \\ c_1 & kc_2 \\ b_1 & kb_2 \end{pmatrix}, k \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & ka_1 + a_2 \\ b_1 & kb_1 + b_2 \\ c_1 & kc_1 + c_2 \end{pmatrix}$$



- (1) 初等矩阵的行列式都不等于零, 因此初等矩阵都可逆;
- (2) 初等矩阵的转置矩阵仍为初等矩阵;
- (3) 初等矩阵的逆矩阵仍是同类初等矩阵。

$$E^{-1}(i, j) = E(i, j)$$

$$E^{-1}[i(k)] = E\left[i\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$E^{-1}[i, j(k)] = E[i, j(-k)]$$

例3.22

$$\text{计算} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2009} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2010}.$$

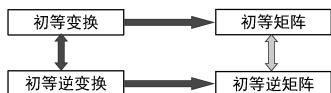
解

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{是初等矩阵, 左乘} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{所得} E_{12}A$$

是 A 作初等行变换(第一、第二两行对换), 而 $E_{12}^{2009}A$ 表示 A 作了奇数次第一、第二两行对换, 相当于矩阵 A 作了一次第一、第二两行对换, 故

初等矩阵与初等变换的关系

定理3.2 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 对 A 进行一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 进行一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。



$$E_{12}^{2009}A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

而右乘 E_{13} 是作第一、第三两列对换, 由于是偶数次对换,

因而结果不变, 即 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 为所求。

定理3.3 可逆矩阵经过初等变换后仍为可逆矩阵。

定理3.4 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是它可以通过初等变换化为单位矩阵。

推论 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是它可以表示为有限个初等矩阵的乘积。



为逆矩阵的初等变换法提供了理论依据!

例7 下列说法正确的是(C)。

- A. 任何矩阵经过初等行变换都可化为单位矩阵
- B. 设方阵 A 是非奇异性的, A 经过初等行变换得到阶梯矩阵 B ,则方阵 B 为奇异的
- C. 初等矩阵都是可逆的
- D. 矩阵经过初等行变换后,其秩会发生改变

例8 已知 A 为三阶矩阵,且 $|A|=2$,那么 $|(2A)^{-1}-A^*|=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 由于 $(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$,又 $A^*=|A|A^{-1}$,则

$$|(2A)^{-1}-A^*|=\left|\frac{1}{2}A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|-\frac{3}{2}A^{-1}\right|=\left(-\frac{3}{2}\right)^3|A^{-1}|=-\frac{27}{16}$$

典型例题欣赏

例1 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 中,元素 a_{22} 的代数余子式是(A)。

- A. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ C. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ D. $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

例2 设 A, B 为三阶矩阵, $|A|=2, |B|=\frac{1}{4}$,则 $|2(BA)^{-1}|=(C)$ 。

A. 4 B. 1 C. 16 D. $\frac{1}{2}$

【详解】 $|2(BA)^{-1}|=2^3|A|^{-1}\cdot|B|^{-1}=16$

例9 下列命题中,不正确的是(C)。

- A. 如 A 是 n 阶矩阵,则 $(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$
- B. 如 A, B 均是 $n\times 1$ 矩阵,则 $A^TB=B^TA$
- C. 如 A, B 均是 n 阶矩阵,且 $AB=0$,则 $(A+B)^2=A^2+B^2$
- D. 如 A 是 n 阶矩阵,则 $A^m A^k=A^k A^m$

【分析】 A 中,由乘法分配律,两个乘积都是 A^2-E ,

而D是因乘法有结合律,两乘积都是 A^{m+k} ,故A, D都正确。

关于B, 由于 A^TB, B^TA 都是 1×1 矩阵,而一阶矩阵的转置仍是其自身,故 $A^TB=(A^TB)^T=B^TA$,亦正确。

唯C中,从 $AB=0$ 不能保证必有 $BA=0$ 。

例3 下列命题正确的是(B)。

- A. 若矩阵 A, B 满足 $AB=0$,则有 $A=0$ 或 $B=0$
- B. 若矩阵 A, B 满足 $AB=E$,则有 A, B 都可逆
- C. 若矩阵 A' 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵,则 $|A'|=|A|^n$
- D. 若矩阵 $A\neq 0$,则 $|A|\neq 0$

例4 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵,则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是(C)。

- A. $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

例10 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价,则必有(D)。

- A. 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时, $|B|=a$
- B. 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时, $|B|=-a$
- C. 当 $|A|\geq 0$ 时, $|B|\geq 0$
- D. 当 $|A|=0$ 时, $|B|=0$

【分析】 矩阵 A 与 B 等价,即 A 经过初等变换可得到矩阵 B ,亦即有可逆矩阵 P 和 Q ,使 $PAQ=B$ 。由于经初等变换矩阵的秩不变,所以当 $|A|=0$ 时,即秩 $r(A)<n$ 时必有秩 $r(B)<n$,即 $|B|=0$ 。

若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则可知A, B, C均不正确。

例5 设 A 是可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵,则(C)。

- A. $A^{-1}=|A|A^*$ B. $A^{-1}=A^*$
- C. $A^{-1}=|A|^{-1}A^*$ D. $A^{-1}=(A^*)^{-1}$

【详解】 $AA^*=A^*A=|A|E\Rightarrow A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=E$

例6 设 A 为 n 阶方阵,且 $|A|=a\neq 0$,则 $|A^*|=(B)$ 。

- A. a^n B. a^{n-1} C. a^{n-2} D. a

例11 设 A, B 是 n 阶矩阵,则 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是(D)。

- A. $\begin{bmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{bmatrix}$
- C. $\begin{bmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$

【分析】 由于 $CC^*=|C|E=|A||B|E$,于是

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|AA^* & 0 \\ 0 & |A|BB^* \end{bmatrix} = |A||B|E$$

另外,作为选择题不妨附加条件 A, B 可逆,那么

$$C^* = |C|C^{-1} = |A||B|\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$$

例12 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____。

【解】 设 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

所以 $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

例16 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为2, 则 $a =$ _____。

【解】 $\because r(A) = 2 \therefore |A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a^3 - 3a^2 = (a-1)(2a^2 - a - 1) = 0$$

所以 $a = 1$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ 而 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$, 舍掉。

$\therefore a = -\frac{1}{2}$

例13 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____。

【解】 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

例17 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$,

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____。

【解】 由于 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$, 又 $AA^* = A^*A = |A|E$

则对矩阵方程右乘 A 得

$$3AB - 6B = A, \text{ 即 } 3(A - 2E)B = A$$

两端取行列式有 $|3(A - 2E)| \cdot |B| = |A|$

因为 $|A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$, 所以 $|B| = \frac{1}{9}$ 。

例14 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ 的秩是 2。

【解】 对矩阵 A 进行初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例18 A 是三阶矩阵, 且 $A - E$, $A - 2E$, $2A + E$ 均不可逆, 则 $|A| =$ _____。

【解】 因为 $A - E$, $A - 2E$, $2A + E$ 不可逆, 则有

$$|A - E| = |A - 2E| = |2A + E| = 0$$

由 $|A - \lambda E| = 0$ 知 λ 是矩阵 A 的特征值, 所以

$$1, 2, -\frac{1}{2} \text{ 是 } A \text{ 的三个特征值。}$$

$$|A| = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

例15 若方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = b \end{cases}$ 没有解,

则系数 a, b 取值为 $a = 7, b \neq -1$ 。

【解】 对增广矩阵进行初等行变换。

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ -1 & 2 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & b+1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & b+1 \\ 0 & 0 & a-7 & -b-1 \end{pmatrix}$$

例19 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^n 。

【解】 先求 A 的特征值与特征向量, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 9 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda = 0$$

得到 A 的特征值 $\lambda = 0, \lambda = 6$ 。

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A)\alpha_1 = 0$, 解出 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

对 $\lambda = 6$, 由 $(6E - A)\alpha_2 = 0$, 解出 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 。

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

而 $A = P\Lambda P^{-1}$, 于是

$$\begin{aligned} A^n &= P\Lambda^n P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 6^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 6^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

例20 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】由 $AA^* = |A|E$, 有 $\frac{A}{|A|}A^* = E$, 故 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}A$ 。

例23 设三阶矩阵方程 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$,

且 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】在题设关系式两端右乘 A^{-1} 有 $A^{-1}B = 6E + B$, 在该式两端左乘 A , 得 $B = 6A + AB$ 。移项得 $(E - A)B = 6A$, 则 $B = 6(E - A)^{-1}A$ 。

例21 设 A, B 均为三阶矩阵, E 是三阶单位矩阵。

已知 $AB = A - 2B$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $(A + 2E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】由 $AB = A - 2B$ 有 $AB + 2B = A + 2E - 2E$, 得知

$$(A + 2E)(E - B) = 2E$$

$$\text{即 } (A + 2E) \cdot \frac{1}{2}(E - B) = E$$

$$\text{故 } (A + 2E)^{-1} = \frac{1}{2}(E - B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{于是由 } (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & \frac{3}{4} & \\ & & \frac{6}{7} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } B = 6 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

例22 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

【解】用初等行变换的方法

$$\begin{aligned} (A, E) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-r_2]{r_2 \times \frac{1}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例24 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且

$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E, \text{ 求矩阵 } B.$$

【解】由 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 有 $|A|^3 = 8$, 得 $|A| = 2$ 。

又因 $(A - E)BA^{-1} = 3E$, 有 $(A - E)B = 3A$, 左乘 A^* , 得

$$(|A|E - A^*)B = 3|A|E, \text{ 即 } (2E - A^*)B = 6E,$$

$$\text{故 } B = 6(2E - A^*)^{-1}.$$



$$\text{由 } 2E - A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \text{ 求出}$$

$$(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

内容小结

- 矩阵的运算;
- 逆矩阵;
- 分块矩阵;
- 初等矩阵。



结束!

3.3 达标实训

基础教程中本章给出了矩阵运算的相关概念及性质,逆矩阵、伴随矩阵的概念,重点介绍了如何求矩阵的逆及逆矩阵的性质。通过完成本节达标实训,可使读者达到以下要求。

一级达标要求。熟练掌握矩阵加法、数乘、乘法,熟练应用 Mathematica 软件进行矩阵的运算。

二级达标要求。熟练掌握利用矩阵逆的定义、定理及初等变换来求矩阵的逆。

三级达标要求。熟练掌握各种矩阵运算规律并灵活运用。

达标实训 I

(1) 设某厂生产甲,乙,丙,丁 4 种产品,上个月的销售收入及生产成本(单位:万元)可分别用矩阵 A 和矩阵 B 来表示,分别为 $A = \begin{pmatrix} 35 & 24 & 30 & 18 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 30 & 19 & 24 & 13 \end{pmatrix}$,那么,该厂上个月生产这 4 种产品的利润(单位:万元)应是多少?

【解】 利润 = 收入 - 成本

$\Rightarrow$ 利润矩阵 $C=A-B=(5 \ 5 \ 6 \ 5)$

(2) 计算。

$$\textcircled{1} \ 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 10 & 20 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

【解】

$$3 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 10 & 20 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \ 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

【解】

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -6 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 问:

① $AB=BA$ 吗? ② $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗? ③ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

【解】 ① $AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{显然 } AB \neq BA.$$

② $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$$

显然 $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ 。

③ $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$

$$\text{可知 } A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

显然 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ 。

(4) 举反例说明下列命题是错误的。

① 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 。

【解】 取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, 但 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 。

② 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ 。

【解】 取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, 但 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}$ 。

③ 若 $\mathbf{AX} = \mathbf{AY}$, 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ 。

【解】 取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{AX} = \mathbf{AY}$ 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 但 $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$ 。

(5) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 用 Mathematica 计算下列各题。

① $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$; ② $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$; ③ $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$; ④ $\mathbf{A}^{-1}$ 。

【解】

① $\mathbf{A} = \{\{3, 1, 0\}, \{-1, 2, 1\}, \{3, 4, 2\}\}$

$\mathbf{B} = \{\{1, -1, 0\}, \{2, -2, 5\}, \{3, 4, 1\}\}$

MatrixForm[$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$]

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -17 & -17 & 3 \\ 9 & -18 & 16 \end{pmatrix}$$

② MatrixForm[$\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$]

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

③ MatrixForm[Transpose[$\mathbf{B}$]Transpose[$\mathbf{A}$]]

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 9 \\ -1 & -4 & 16 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

④ Inverse[$\mathbf{A}$]

$$\left\{ \left\{ 0, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\}, \left\{ 1, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5} \right\}, \left\{ -2, -\frac{9}{5}, \frac{7}{5} \right\} \right\}$$

达标实训 II

(1) 计算下列乘积。

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{【解】} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{【解】} (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10)$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2).$$

$$\textbf{【解】} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1 \ 2) = \begin{pmatrix} -2 \times 1 & 2 \times 2 \\ -1 \times 1 & 2 \times 1 \\ -3 \times 1 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \textbf{【解】} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 & -2 \times 2 - 3 \times 1 & -2 \times 3 + 0 \\ 1 - 2 \times 2 & -2 \times 1 + 2 \times 1 & -3 \times 1 + 0 \\ 3 \times 1 + 2 \times 1 & -3 \times 2 - 1 & -9 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

【解】 由矩阵乘法法则得

$$\begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \cdots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \cdots & d_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) k 取什么值时, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 并求其逆。

【解】 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |k|$

$|\mathbf{A}| = 0$ 则 $\mathbf{A}$ 不可逆, 即 $k \neq 0$ 时 $\mathbf{A}$ 可逆。

$$\text{伴随矩阵 } \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ -1 & 1/k & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 已知

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{试用初等行变换求 } \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}.$$

【解】 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 构造 3×6 矩阵 $(\mathbf{A} : \mathbf{E})$ 并求解得

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} : \mathbf{E}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_2 \\ r_3 + 5r_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_1 + r_3 \\ r_2 + r_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{则 } \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) 求解矩阵方程。

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{【解】} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

即 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 。

因为 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, 所以 $\mathbf{A}$ 可逆。

$$\text{有 } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \text{ 可求得 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 6 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{【解】} \text{ 令 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

则方程可转换为 $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ 。

$$\text{因为可计算得 } |\mathbf{A}| = 3 \neq 0, \text{ 所以 } \mathbf{A} \text{ 可逆, 即 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & 3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{【解】} \text{ 令 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

因为可计算得 $|\mathbf{A}| = 6 \neq 0, |\mathbf{B}| = 2 \neq 0$ 。

$$\text{所以 } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ 可逆, 即 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

因为 $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$, 所以 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$ 。

$$\text{则 } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}。$$

(5) 利用逆矩阵解下列线性方程组。

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{【解】 令 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

将方程组转换为矩阵形式, 即 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 。

$$\text{因为 } |\mathbf{A}|=15 \neq 0, \text{ 所以 } \mathbf{A} \text{ 可逆, 即 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{15} & \frac{13}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{13}{15} & -\frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{15} & \frac{13}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{13}{15} & -\frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以 $x_1=1, x_2=x_3=0$ 。

$$\textcircled{2} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{【解】 令 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

将方程组转换为矩阵形式, 即 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 。

$$\text{因为 } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ 所以 } \mathbf{A} \text{ 可逆, 即 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以 $x_1=5, x_2=0, x_3=0$ 。

(6) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E}$, 求 $\mathbf{B}^{-1}$ 。

【解】 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

$$\text{则 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(7) 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 3\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{A}^{-1}$ 。

【解】 已知

$$\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 3\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

可得 $\mathbf{A}(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}) = -3\mathbf{E}$, 等式两边取行列式得

$|\mathbf{A}| |\mathbf{A} + 2\mathbf{E}| = |-3\mathbf{E}| = -3 \neq 0$, 可推出 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 即 $\mathbf{A}$ 可逆。

式(3.1)两边同时左乘 $\mathbf{A}^{-1}$, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} + 3\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{EA} + 2\mathbf{E} + 3\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} &= -\frac{(2\mathbf{E} + \mathbf{A})}{3} \end{aligned}$$

$$(8) \text{ 已知 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 计算 } (\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1} (\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{E}).$$

【解】 由题意得

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 - 9\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, (\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ 则有 } (\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1} (\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(9) 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 ① $\mathbf{A}^{-1}$; ② $(\mathbf{A}^*)^{-1}$; ③ $[(-2\mathbf{A})^*]^{-1}$.

【解】 ① $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 则 $\mathbf{A}$ 可逆,

可计算得 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$.

② $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

③ 已知 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{A}^* \Rightarrow \frac{\mathbf{A}}{-2|\mathbf{A}|} (-2\mathbf{A}^*) = (-2\mathbf{A}^*)^{-1} (-2\mathbf{A})^* \Rightarrow$

$$[(-2\mathbf{A})^*]^{-1} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}$$

即 $[(-2\mathbf{A})^*]^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

(10) 设矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足关系式 $\mathbf{AB} = 2\mathbf{B} + \mathbf{A}$, 且 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{B}$.

【解】

由 $\mathbf{AB} = 2\mathbf{B} + \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{B} = \mathbf{A}$

因为 $|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

所以 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})$ 可逆, 则 $\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}$.

$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 可求得 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

则 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(11) 用分块法求 AB 。

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

【解】

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ A_{21} & E \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ A_{21} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_{21}B_{11} + B_{21} & A_{21}B_{12} + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + B_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_{12} + B_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

【解】 把 A, B 分块成

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ A_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } AB = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ A_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, A_{21}B_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{于是 } \mathbf{AB} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -1 & 2 & 3 & \\ 5 & 0 & 9 & 1 & \\ \hline -2 & -5 & 0 & 0 & \\ 0 & -4 & 0 & 0 & \end{array} \right)。$$

$$(12) \text{ 设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ 求 } \mathbf{A}^n。$$

$$\text{【解】 } \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } \mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 & 0 \\ C_m^1 \lambda^{m-1} & \lambda^m & 0 \\ C_m^2 \lambda^{m-2} & C_m^1 \lambda^{m-1} & \lambda^m \end{pmatrix}$$

假设 $m = n-1$ 时成立,

$$\text{则当 } m = n \text{ 时, 有 } \mathbf{A}^{m+1} = \mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda^{m+1} & 0 & 0 \\ C_{m+1}^1 \lambda^m & \lambda^{m+1} & 0 \\ C_{m+1}^2 \lambda^{m-1} & C_{m+1}^1 \lambda^m & \lambda^{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{由归纳法得 } \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ C_n^1 \lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ C_n^2 \lambda^{n-2} & C_n^1 \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}。$$

$$(13) \text{ 设矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

① 证明: $n \geq 3$ 时, $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-2} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ 为三阶单位矩阵)。

② 求 $\mathbf{A}^{100}$ 。

$$\text{① 【证明】当 } n=3 \text{ 时, } \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因此, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$ 。

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-2} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \text{则当 } n=k+1 \text{ 时, } \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A}^{k-2} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^{k-1} + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A} \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$, 所以 $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$, 从而

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^{k-1} + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A} = \mathbf{A}^{k-1} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$$

因此,结论成立。

$$\textcircled{2} \text{ 【解】 } A^{100} = A^{98} + A^2 - E = A^{96} + 2(A^2 - E) = \cdots = A^2 + 49(A^2 - E)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 49 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(14) 利用初等变换求下列矩阵的逆矩阵。

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_1 + 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_3 - \frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{r_3 \times \frac{2}{5} \\ r_2 \times \frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{r_2 + \frac{1}{2}r_3 \\ r_1 - 4r_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{【解】} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -11 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \times \left(-\frac{1}{11}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[r_3 + 4r_1]{r_2 - 6r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{8}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_3 + 8r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \times 11} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\therefore \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{【解】} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ r_3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ r_4 \times \frac{1}{4} \end{array} \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} r_1 \leftarrow r_2 \\ r_2 \leftarrow r_4 \\ r_3 \leftarrow r_4 \end{array} \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\therefore \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

达标实训 III

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \ 3 \ 4)$, 且 $r(A+AB)=2$, 求 t 。

【分析】 本题用到的知识点是矩阵的运算及矩阵秩的相关知识, 先写出矩阵 $A+AB$, 由 $r(A+AB)=2$, 可知道 $|A+AB|=0$, 从而求得 t 值。

【解】 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \ 3 \ 4) = \begin{pmatrix} 22 & 33 & 44 \\ 6t+12 & 9t+18 & 12t+24 \\ 44 & 66 & 88 \end{pmatrix}$

$$A+AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 33 & 44 \\ 6t+12 & 9t+18 & 12t+24 \\ 44 & 66 & 88 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 36 & 48 \\ 6t+18 & 10t+18 & 12t+26 \\ 48 & 72 & 91 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{\begin{matrix} r_1 \times \frac{1}{12} \\ r_2 \times \frac{1}{2} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3t+9 & 5t+9 & 6t+13 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\because r(A+AB)=2 \quad \therefore |A+AB|=0$$

可推出 $2(5t+9)-3(3t+9)=0$, 解得 $t=9$ 。

(2) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$ (幂等阵), 证明: $r(A)+r(A-E)=n$ 。

【分析】 本题用到的知识点是矩阵的运算及秩的相关知识, 由矩阵特征值的性质及秩的性质可推得。

【证明】 设 $r(A)=r$, $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, λ 是 A 的任一特征值, 由 $A^2=A$, 得 $A^2\vec{\alpha}=A\vec{\alpha}$, 即 $\lambda^2\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$, 则 $(\lambda^2-\lambda)\vec{\alpha}=\vec{0}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1$

由 A 为 n 阶方阵得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0, \lambda_{n-r+1}=\cdots=\lambda_n=1$, 故 $A-E$ 的特征值为 $\underbrace{-1, -1, \cdots, -1}_{n-r \text{ 个}}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{r \text{ 个}}$ 。

故 $r(A-E)=n-r$, 于是 $r(A)+r(A-E)=r+n-r=n$ 。

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}$, $|A|=2$, 求 $|A^*B|$ 。

【分析】 本题所用到的知识是矩阵逆的充要条件及矩阵与行列式的相关知识, 由已知可判断出 A 可逆, 由 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 得出 $|A^*| = |A|^3|A^{-1}| = |A|^2$, 则可计算得 $|A^*B| = |A^*||B|$ 。

【解】 因为 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 所以 $|A^*| = |A|^3|A^{-1}| = |A|^2$,

$$|A^*B| = |A^*||B| = |A|^2|B| = |A|^2|B|$$

因 B 为 A 第三列加上三倍的第一列得到, 由行列式性质知, $|B| = |A|$,

$$\text{故 } |A^*B| = |A|^2|A| = |A|^3 = 2^3 = 8.$$

(4) 设 A 为 5 阶方阵, 求 $r(A^{**})$ 。

【分析】 本题用到的知识点是方阵秩的性质及公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 的灵活运用, 讨论 A 是否可逆, 若可逆, 则 $A^* = A^{-1}|A|$, 可推出 A^* 可逆, 可推出 A^{**} 也可逆, 则 $r(A^{**}) = 5$; 若 A 不可逆, 则可推出 A^* 不可逆, 可推出 A^{**} 也不可逆, 并且 $A^{**} = 0$, 则 $r(A^{**}) = 0$ 。

$$\text{【解】 } r[(A_5^*)^*] = \begin{cases} 5, & r(A^*) = 5 \Leftrightarrow r(A) = 5 \\ 1, & r(A^*) = 4 \text{ (不可能)} \\ 0, & r(A^*) < 4 \text{ (只能是 1, 0)} \end{cases} = \begin{cases} 5, & r(A) = 5 \\ 0, & r(A) < 5 \end{cases}$$

(5) 已知方阵 A 满足 $AA^T = E$, $|A| < 0$, 求行列式 $|A+E|$ 。

【分析】 本题所用到的知识点是行列式等于转置行列式的性质, 由 $|A| = |A^T|$ 可推出 $|A^2| = 1$, 再将 $|A+E|$ 变形即可。

【解】 由 $|A| = |A^T| \Rightarrow |A^2| = 1$

$\because AA^T = E$, 由 $|A| = |A^T| \Rightarrow |A^2| = 1$, 又 $\because |A| < 0, \therefore |A| = -1$

$$|A+E| = |A+AA^T| = |A(E+A^T)| = |A||E+A^T| = |A|(E+A)^T = |A||E+A|$$

$$= -|E+A|$$

$$\therefore |E+A| = 0$$

(6) 设 A 为 n 阶非奇异矩阵(可逆阵, 满秩阵), $\vec{\alpha}$ 为 n 维列向量, b 为常数, 记分块阵

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\vec{\alpha}^T A^* & |A| \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & \vec{\alpha} \\ \vec{\alpha}^T & b \end{pmatrix} \text{ (画条块示意图)}$$

其中 A^* 是 A 的伴随阵, E 是 n 阶单位阵, ①计算并化简 PQ ; ②证明矩阵 Q 可逆的充要条件是 $\vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha} \neq b$ 。

【分析】 本题第①问所用到的知识点是两个矩阵相乘及当 A 可逆时可得 $A^* = A^{-1}|A|$, 从而可将两个相乘矩阵化简; 第②问所用到的知识点是矩阵可逆的充要条件, 即 Q 可逆的充要条件是 $|Q| \neq 0$, 从而可得出。

$$\text{①【解】 } PQ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\vec{\alpha}^T A^* & |A| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \vec{\alpha} \\ \vec{\alpha}^T & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{\alpha} \\ -\vec{\alpha}^T A^* A + |A| \vec{\alpha}^T & -\vec{\alpha}^T A^* \vec{\alpha} + b|A| \end{pmatrix}$$

$$\because A^* = A^{-1}|A| \quad \therefore -\vec{\alpha}^T A^* A + |A| \vec{\alpha}^T = -\vec{\alpha}^T |A| + |A| \vec{\alpha}^T = 0$$

$$\text{又 } \because -\vec{\alpha}^T A^* \vec{\alpha} + |A| b = -\vec{\alpha}^T \cdot |A| \cdot A^{-1} \vec{\alpha} + |A| b = |A| (b - \vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha})$$

$$\therefore PQ = \begin{pmatrix} A & \vec{\alpha} \\ 0 & |A| (b - \vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

② **【证明】** Q 可逆的充要条件是 $|Q| \neq 0$, 即 $|A|b - \vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha} \neq 0$ 。

因为 A 可逆, 所以 $b \neq A^{-1} \vec{\alpha}^T \vec{\alpha}$ 。

(7) 设 A 的伴随阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 求矩阵 B 。

【分析】 本题所用到的知识点是矩阵逆的相关性质及矩阵逆与伴随矩阵的关系, 先由 $A^* = A^{-1}|A|$ 可推出 A 可逆, 从而可求得 A^{-1} , 整理公式 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 可得 $(A-E)BA^{-1} = 3E$, 再将该式进行相应变形即可求得。

【解】 由条件知 $ABA^{-1} - BA^{-1} = 3E, (A-E)BA^{-1} = 3E$

右乘矩阵 A , 得 $(A-E)B = 3A$

左乘 $(A-E)^{-1}$ 得 $B = 3(A-E)^{-1} \cdot A$

因为 $A = (A^{-1})^{-1}$, 于是 $B = 3(A-E)^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = 3(A^{-1}A - A^{-1}E)^{-1} = 3(E - A^{-1})^{-1}$

$$\because |A^*| = |A|^{4-1} = 8 \quad \therefore |A| = 2, A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

于是,

$$\begin{aligned} B &= 3\left(E - \frac{1}{2}A^*\right)^{-1} = 6(2E - A^*)^{-1} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(8) ① 若 $A^3 + 2A^2 + A - E = 0$, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1} 。

【分析】 本题所用到的知识点是矩阵的运算及逆矩阵的相关性质, 先由 $A^3 + 2A^2 + A - E = 0$, 可变形得到公式 $A(A^2 + 2A + E) = E$, 可推出 A 可逆, 从而求得 A^{-1} 。

【解】 $\because A^3 + 2A^2 + A - E = 0$

$\therefore A^3 + 2A^2 + A = E$, 即 $A(A^2 + 2A + E) = E$

因为 $|A| |A^2 + 2A + E| = |E| = 1 \neq 0$

所以 $|A| \neq 0$ 。

故 A 可逆, 且 $A^{-1} = A^2 + 2A + E$ 。

② 若 $A^2 - A - 4E = 0$, 证明 $A + E$ 可逆, 并求 $(A + E)^{-1}$ 。

【分析】 本题所用到的知识点是矩阵的运算及逆矩阵的相关性质, 先将等式 $A^2 - A - 4E = 0$ 变形, 可推出 $A + E$ 可逆, 进而求得 $(A + E)^{-1}$ 。

【解】 $\because A^2 - A - 4E = 0 \quad \therefore A^2 - A - 2E = 2E, (A - 2E)(A + E) = 2E$

因为 $|A - 2E| |A + E| = |2E| = 2 \neq 0$

所以 $|A + E| \neq 0$ 。

故 $A + E$ 可逆, 且 $(A + E)^{-1} = \frac{1}{2}(A - 2E)$

(9) 设 B 为可逆矩阵, A 与 B 是同阶方阵, 且满足 $A^2 + AB + B^2 = 0, A^2 + AB + B^2 = 0$, 证明 A 和 $A+B$ 都是可逆矩阵。

【分析】 本题所用到的知识点是矩阵相乘及可逆矩阵的性质, 先将等式 $A^2 + AB + B^2 = 0$ 进行变形可推出 A 可逆, 再由等式进行类似变形可得 $A+B$ 也是可逆矩阵。

【证明】 由 $A^2 + AB + B^2 = 0$ 得 $-A(A+B) = B^2$, 因为 $|-A| |A+B| = |B^2| \neq 0$, 所以 $|A| \neq 0$, 因此 A 是可逆矩阵;

由 $A^2 + AB + B^2 = 0$ 得 $-(A+B)B = A^2$, 因为 $|A+B| |-B| = |A^2| \neq 0$, 所以 $|A+B| \neq 0$, 因此 $A+B$ 也是可逆矩阵。

(10) 用分块法求下列矩阵的逆矩阵。

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

【分析】 本题所用到的知识点是分块矩阵的相关性质及矩阵相乘, 通过已知题目行列数将其划分为 4 部分, 由分块矩阵逆矩阵的性质可得出结果。

【解】 令 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, 因为 $|A| = 1, |B| = -18$, 所以 A, B 均可逆。

$$\text{将矩阵分块为} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{可求得 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\text{则原矩阵的逆矩阵为} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

【分析】 本题所用到的知识点是分块矩阵的性质, 通过所给矩阵的行列数及两个矩阵相乘的前提条件将其划分为 4 块, 由分块矩阵逆矩阵的性质即可求得结果。

【解】 将矩阵分块为
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

因为 $|\mathbf{A}|=1, |\mathbf{B}|=1$, 所以 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均可逆。

可计算得到 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

所以原矩阵的逆矩阵为
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & a^2-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

③
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}。$$

【分析】 本题所用到的知识点是分块矩阵的性质, 将所给矩阵划分为 4 块, 然后再利用分块矩阵逆矩阵的性质, 即可求得结果。

【解】 令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

因为 $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|=1 \neq 0$,

所以 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均可逆。

将矩阵分块为
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$$

∴ 原矩阵的逆矩阵为
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 19 & -30 & 3 & -5 \\ -7 & 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}。$$

达标自测题

(1) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $(AB)^T = (\quad)$ 。

A. $\begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -3 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$

(2) 设 A 为三阶矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|2A| - 5|A^*|$ 为 $(\quad)$ 。

A. -16

B. 16

C. 4

D. -4

(3) 设 $A_{m \times n}$, $B_{n \times m}$ ($m \neq n$), 则下列运算结果不为 n 阶方阵的是 $(\quad)$ 。

A. BA

B. AB

C. $(BA)^T$

D. $A^T B^T$

(4) 矩阵方程 $AX - E = A + X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $X = (\quad)$ 。

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, 则行列式 $|A^{-1} A^{-1}|$ 的值为 $(\quad)$ 。

A. 81

B. $\frac{1}{81}$

C. $\frac{1}{9}$

D. 9

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, B 是三阶矩阵, 且 $A + E = AB - 2A - B$, 则 $B = (\quad)$ 。

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$



(7) 矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, 则方程的解 $\mathbf{X} = (\quad)$ 。

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(8) 若 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}$ (k 是正整数), 则下列说法正确的是()。

A. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

B. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$

C. $\mathbf{A}^k = \mathbf{0} (k \geq 1)$

D. $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$

(9) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^{-1} = (\quad)$ 。

A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(10) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^n = (\quad)$ 。

A. $\mathbf{A}^n = \begin{cases} \mathbf{A} & n=2k-1 \\ \mathbf{E} & n=2k \end{cases}$

B. $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{E}$

C. $-\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{E}$

D. $\mathbf{A}^n = \begin{cases} \mathbf{E} & n=2k-1 \\ \mathbf{A} & n=2k \end{cases}$

(11) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为阶可逆矩阵, 则下列结论成立的是()。

A. $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$

B. $(k\mathbf{A})^{-1} = k\mathbf{A}^{-1} (k \neq 0)$

C. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$

D. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

(12) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* = (\quad)$ 。

A. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(13) 下列命题成立的是()。

A. 若 $AB=AC$, 则 $B=C$

B. 若 $AB=0$, 则 $A=0$ 或 $B=0$

C. 若 $A \neq 0$, 则 $|A| \neq 0$

D. 若 $|A| \neq 0$, 则 $A \neq 0$

(14) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} = (\quad)$ 。

A. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(15) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 + 9B^2 - 3AB - 3BA = (\quad)$ 。

A. $9E$

B. 0

C. $2E$

D. $3E$

(16) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda \neq 3$, 则矩阵 A 的秩为()。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

(17) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $A = (\quad)$ 。

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(18) 已知三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B 是秩为 2 的三阶方阵, 且 $r(AB) = 1$ 则

$\lambda = (\quad)$ 。



A. 2

B. 1

C. 3

D. 0

(19) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 的秩为()。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

(20) 在下列命题中, 正确的是()。

A. $(AB)^T = A^T B^T$

B. 若 $A \neq B$, 则 $|A| \neq |B|$

C. 设 A, B 是三角矩阵, 则 $A+B$ 也是三角矩阵

D. $A^2 - E^2 = (A+E)(A-E)$

(21) 有矩阵 $A_{3 \times 2}, B_{2 \times 3}, C_{3 \times 3}$, 则下列运算正确的是()。

A. AC

B. ABC

C. $AB-BC$

D. $AC+BC$

(22) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C =$

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ ()。

A. $\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

3.4 拓展实训

矩阵是线性代数中最基本的内容, 线性代数中绝大多数运算都是通过矩阵进行的, 其相关的概念和运算贯穿整个学科。线性代数中基本上没有题目不涉及矩阵以及矩阵的运算的。在考研数学中, 这部分考点较多, 重点考点有逆矩阵、伴随矩阵及矩阵方程。涉及伴随矩阵的定义、性质、行列式、逆矩阵、秩及包含伴随矩阵的矩阵方程是矩阵试题中的一类常见试题。近几年还经常出现有关初等变换与初等矩阵的命题, 常见题型有以下几种:

- (1) 计算方阵的幂;
- (2) 与伴随矩阵相关联的命题;
- (3) 有关初等变换的命题;
- (4) 有关逆矩阵的计算与证明;
- (5) 解矩阵方程。

那么通过本部分的拓展实训练习, 可以使读者提升到考研水准。

(1) 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵的秩为 1, 则必有()。

【2003 数三】

A. $a=b$ 或 $a+2b=0$

B. $a=b$ 或 $a+2b \neq 0$

C. $a \neq b$ 且 $a+2b=0$

D. $a \neq b$ 且 $a+2b \neq 0$

【分析】

A 的伴随矩阵的秩为 1, 说明 A 的秩为 2, 由此可确定 a, b 应满足的条件。

【详解】 根据 A 与其伴随矩阵 A^* 秩之间的关系, 可知 $r(A)=2$, 故有

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0, \text{ 即有 } a+2b=0 \text{ 或 } a=b.$$

但当 $a=b$ 时, 显然 $r(A) \neq 2$, 故必有 $a \neq b$ 且 $a+2b=0$, 应选 C。

(2) 设 A 是三阶方阵, 将 A 的第一列与第二列交换得 B , 再把 B 的第二列加到第三列得 C , 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为()。 **【2004 数一】**

A. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

【分析】

本题考查初等矩阵的概念与性质, 对 A 作两次初等列变换, 相当于右乘两个相应的初等矩阵, 而 Q 即为这两个初等矩阵的乘积。

【详解】

由题设, 有 $A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$, 于是

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

可见, 应选 D。

(3) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有()。 **【2004 数三】**

A. 当 $|A|=a(a \neq 0)$ 时, $|B|=a$

B. 当 $|A|=a(a \neq 0)$ 时, $|B|=-a$

C. 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B|=0$

D. 当 $|A|=0$ 时, $|B|=0$

【分析】

利用矩阵 A 与 B 等价的充要条件: $r(A)=r(B)$ 立即可得。

【详解】

因为当 $|A|=0$ 时, $r(A) < n$, 又 A 与 B 等价, 故 $r(B) < n$, 即 $|B|=0$, 故选 D。

(4) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第一行与第二行得矩阵 B, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则()。 **【2005 数一】**

A. 交换 A^* 的第一列与第二列得 B^*

B. 交换 A^* 的第一行与第二行得 B^*

C. 交换 A^* 的第一列与第二列得 $-B^*$

D. 交换 A^* 的第一行与第二行得 $-B^*$

【分析】

本题考查初等变换的概念与初等矩阵的性质,只需利用初等变换与初等矩阵的关系以及伴随矩阵的性质进行分析即可。

【详解】

由题设,存在初等矩阵 E_{12} (交换 n 阶单位矩阵的第一行与第二行所得),使得 $E_{12}A=B$,于是 $B^*=(E_{12}A)^*=A^*E_{12}^*=A^*|E_{12}| \cdot E_{12}^{-1}=-A^*E_{12}$,即 $A^*E_{12}=-B^*$,可见应选 C。

(5) 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^*=A^T$,其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵。若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数,则 a_{11} 为()。 【2005 数三】

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 3

C. $\frac{1}{3}$

D. $\sqrt{3}$

【分析】

题设与 A 的伴随矩阵有关,一般联想到用行列展开定理和相应公式,即

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

【详解】

由 $A^*=A^T$ 及 $AA^*=A^*A=|A|E$,有 $a_{ij}=A_{ij}, i, j=1, 2, 3$,其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,且 $AA^T=|A|E \Rightarrow |A|^2=|A|^3 \Rightarrow |A|=0$ 或 $|A|=1$,而

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=3a_{11}^2 \neq 0$$

于是 $|A|=1$,且 $a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故正确选项为 A。

(6) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵,若 $B=E+AB, C=A+CA$,则 $B-C$ 为()。 【2005 数四】

A. E

B. $-E$

C. A

D. $-A$

【分析】

利用矩阵运算进行分析即可。

【详解】

由 $B=E+AB, C=A+CA$,知 $(E-A)B=E, C(E-A)=A$,可见 $E-A$ 与 B 互为逆矩阵,于是有 $B(E-A)=E$ 。从而有 $(B-C)(E-A)=E-A$,而 $E-A$ 可逆,故 $B-C=E$,应选 A。

(7) 设 A 为三阶矩阵,将 A 的第二行加到第一行得 B ,再将 B 的第一列的 -1 倍加到第二列得 C ,记 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则()。 【2006 数一】

A. $C=P^{-1}AP$

B. $C=PAP^{-1}$

C. $C=P^TAP$

D. $C=PAP^T$

【分析】

利用矩阵的初等变换与初等矩阵的关系以及初等矩阵的性质可得。

【详解】

由题设可得

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有 $C = PAP^{-1}$, 故应选 B。

(8) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵。若 $A^3 = 0$, 则()。 【2008 数一】

- A. $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆 B. $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆
C. $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆 D. $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆

【分析】

本题考查的是矩阵的逆。

【详解】

$(E-A)(E+A+A^2) = E-A^3 = E$, $(E+A)(E-A+A^2) = E+A^3 = E$, 故 $E-A, E+A$ 均可逆。

(9) 设 A, B 均为二阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为()。 【2009 数一】

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

【分析】

本题考查的知识点有伴随矩阵和逆矩阵的关系、分块矩阵的行列式、分块矩阵的逆矩阵等。

【详解】

由于分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 2 \times 3 = 6$, 即分块矩阵可逆, 根据公式 $C^* = |C|C^{-1}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|} B^* \\ \frac{1}{|A|} A^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} B^* \\ \frac{1}{2} A^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}, \text{故答案为 B.} \end{aligned}$$

(10) 设 A, P 均为三阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若 $P =$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为()。

【2009 数二】

A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【分析】

本题考查的是矩阵的乘法。

【详解】

$$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) E_{12}(1), \text{即}$$

$$Q = P E_{12}(1)$$

$$Q^T A Q = [P E_{12}(1)]^T A [P E_{12}(1)] = E_{12}^T(1) (P^T A P) E_{12}(1)$$

$$= E_{12}^T(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} E_{12}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

故选 A。

(11) 设 A 为三阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, A 的行列式 $|A| = 2$, 则 $|-2A^*| = ()$ 。

【2009 数四】

A. -2^5

B. -2^3

C. 2^3

D. 2^5

【分析】

本题考查的是行列式的计算。

【详解】

$|A| = 2$, 又 $|A^*| = |A|^{n-1} = |A|^{3-1} = |A|^2 = 2^2$, 所以 $|-2A^*| = (-2)^3 |A^*| = -2^5$, 故选 A。

(12) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第

一行得单位矩阵记为 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = ()$ 。 【2011 数三】

A. $P_1 P_2$

B. $P_1^{-1} P_2$

C. $P_2 P_1$

D. $P_2^{-1} P_1$

【分析】

本题考查的是矩阵的逆和初等矩阵。

【详解】

显然 $P_2 A P_1 = E$, $A = P_2^{-1} P_1^{-1}$, 因为 $P_2^{-1} = P_2$, 所以 $A = P_2 P_1^{-1}$, 故选 D。

(13) 设 A 为三阶矩阵, P 为三阶可逆矩阵, 且 $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q=(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=(\quad)$ 。

【2012 数一】

A. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

【分析】

本题考查的是矩阵的逆和乘法。

【详解】

$$Q=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故选 B。

(14) 设 α 为三维列向量, α^T 是 α 的转置。若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$

【2003 数二】

【分析】

本题的关键是矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的秩为 1, 必可分解为一列乘一行的形式, 而行向量一般可选第一行(或任一非零行), 列向量的元素则由各行与选定行的倍数构成。

【详解】

$$\text{由 } \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -1 \quad 1], \text{ 知 } \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 于是}$$

$$\alpha^T\alpha = [1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3.$$

(15) 设 n 维向量 $\alpha = (a, 0, \dots, 0, a)^T, a < 0$; E 为 n 阶单位矩阵, 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$, $B = E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T$, 其中 A 的逆矩阵为 B , 则 $a =$ _____。

【2003 数三】

【分析】

这里 $\alpha\alpha^T$ 为 n 阶矩阵, 而 $\alpha^T\alpha = 2a^2$ 为数, 直接通过 $AB = E$ 进行计算并注意利用乘法的结合律即可。

【详解】

由题设,有

$$\begin{aligned}
 AB &= (E - \alpha\alpha^T) \left(E + \frac{1}{a} \alpha\alpha^T \right) \\
 &= E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a} \alpha\alpha^T - \frac{1}{a} \alpha\alpha^T \cdot \alpha\alpha^T \\
 &= E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a} \alpha\alpha^T - \frac{1}{a} \alpha (\alpha^T \alpha) \alpha^T \\
 &= E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a} \alpha\alpha^T - 2a\alpha\alpha^T \\
 &= E + \left(-1 - 2a + \frac{1}{a} \right) \alpha\alpha^T = E
 \end{aligned}$$

于是有 $-1 - 2a + \frac{1}{a} = 0$, 即 $2a^2 + a - 1 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}, a = -1$ 。由于 $a < 0$, 故 $a = -1$ 。

(16) 设 A, B 均为三阶矩阵, E 是三阶单位矩阵。已知 $AB = 2A + B, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【2003 数四】

【分析】

应先化简, 从 $AB = 2A + B$ 中确定 $(A - E)^{-1}$ 。

【详解】

由 $AB = 2A + B$, 知 $AB - B = 2A - 2E + 2E$, 即有

$$(A - E)B - 2(A - E) = 2E, (A - E)(B - 2E) = 2E, (A - E) \cdot \frac{1}{2}(B - 2E) = E,$$

$$\text{可见 } (A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(B - 2E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(17) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶可逆矩阵, 则 $B^{2004} - 2A^2 =$

_____。

【2004 数四】

【分析】

将 B 的幂次转化为 A 的幂次, 并注意到 A^2 为对角矩阵即得答案。

【详解】

因为 $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{2004} = P^{-1}A^{2004}P$ 。故

$$B^{2004} = P^{-1}(A^2)^{1002}P = P^{-1}EP = E$$

$$B^{2004} - 2A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(18) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为二阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $B =$ _____。

【2006 数四】

【分析】

将矩阵方程改写为 $AX=B$ 或 $XA=B$ 或 $AXB=C$ 的形式, 其中 X 是待求矩阵, 再通过左乘或右乘可逆矩阵, 解出待求矩阵即可。

【详解】

由题设, 有 $B(A-E)=2E$ 。于是有

$$B = 2(A-E)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(19) 设 A 为三阶矩阵, $|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____。

【2012 数二】

【分析】

本题考查的是行列式的计算。

【详解】

$|BA^*| = |B||A^*|$, 其中 $|B| = -|A| = -3$, $|A^*| = |A|^{3-1} = 9$, 可知 $|BA^*| = -27$ 。

3.5 应用实训

在数学上, 矩阵是指纵横排列的二维数据表格, 最早来自于方程组的系数及常数所构成的方阵。这一概念由 19 世纪英国数学家凯利首先提出。矩阵概念在生产实践中也有许多应用, 例如成本计算、逻辑判断、坐标变换、人口迁移、电路设计、政党选举、色彩转换、投入产出等。

1. 成本计算问题

某厂生产甲、乙、丙三种成品, 每件成品需要由三种零件构成, 每件产品的成本(单位: 万元)及每季度生产件数如表 3.1, 表 3.2 所示。试提供该厂每季度在每种产品上的成本表。

表 3.1 产品成本表

成品 零件	甲	乙	丙
零件 1	0.10	0.30	0.15
零件 2	0.30	0.40	0.25
零件 3	0.10	0.20	0.15

表 3.2 季度生产数量表

季度 产量/件	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
产量甲	4000	4500	4500	4000
产量乙	2000	2800	2400	2200
产量丙	5800	6200	6000	6000

其中,用 $M = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.30 & 0.15 \\ 0.30 & 0.40 & 0.25 \\ 0.10 & 0.20 & 0.15 \end{bmatrix}$ 表示成本矩阵,

用 $P = \begin{bmatrix} 4000 & 4500 & 4500 & 4000 \\ 2000 & 2800 & 2400 & 2200 \\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000 \end{bmatrix}$ 表示季度产量矩阵,将成本矩阵与季度产量矩阵

相乘所得的矩阵即为所求。

$$\text{【解】 } Q = MP = \begin{bmatrix} 1870 & 2220 & 2070 & 1960 \\ 3450 & 4020 & 3810 & 3580 \\ 1670 & 1940 & 1830 & 1740 \end{bmatrix}$$

2. 逻辑判断问题

甲、乙、丙、丁 4 人各从图书馆借来一本小说,他们约定读完后互相交换,这 4 本书的厚度以及他们 4 人的阅读速度差不多,因此,4 人总是同时交换书,经三次交换后,他们 4 人读完了这 4 本书,现已知:

- (1) 乙读的最后一本书是甲读的第二本书;
- (2) 丙读的第一本书是丁读的最后一本书。

问 4 人的阅读顺序是怎样的?

【解】 设甲、乙、丙、丁最后读的书的代号依次为 A, B, C, D, 则根据题设条件可以列出初始矩阵

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} & & D & \\ B & & & \\ & & & \\ A & B & C & D \end{array} \right) \end{matrix}$$

下面我们来分析矩阵中各位置的书名代号。已知每个人都读完了所有的书,所以丙第二次读的书不可能是 C, D。又因为甲第二次读的书是 B, 所以丙第二次读的书也不可能是 B, 从而丙第二次读的书是 A, 同理可依次推出丙第三次读的书是 B, 丁第二次读的书是 C, 丁第三次读的书是 A, 丁第一次读的书是 B, 乙第二次读的书是 D, 甲第一次读的

书是 C, 乙第一次读的书是 A, 乙第三次读的书是 C, 甲第三次读的书是 D。故 4 人阅读的顺序可用矩阵表示如下。

$$\begin{pmatrix} C & A & D & B \\ B & D & A & C \\ D & C & B & A \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

3. 变换问题

图形的几何变换, 包括图形的平移、旋转、放缩等, 是计算机图形学中经常遇到的问题。这里暂时只讨论平面图形的几何变换。平面图形的旋转和放缩都很容易用矩阵乘法实现, 但是图形的平移并不是线性运算, 不能直接用矩阵乘法表示。现在要求用一种方法使平移、旋转、放缩能统一用矩阵乘法来实现。

【分析】 设平移变换为

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$$

旋转变换(绕原点逆时针旋转 θ 角度)为

$$(x, y) \rightarrow (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

放缩变换(沿 x 轴方向放大 s 倍, 沿 y 轴方向放大 t 倍)为

$$(x, y) \rightarrow (sx, ty)$$

【解】 $\mathbf{R}^2$ 中的每个点 (x, y) 可以对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的 $(x, y, 1)$, 它在 xOy 平面上方 1 单位的平面上。我们称 $(x, y, 1)$ 是 (x, y) 的齐次坐标。在齐次坐标下, 平移变换

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \rightarrow (x + a, y + b, 1)$$

于是可以用矩阵乘积 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$ 实现。

旋转变换

$$(x, y) \rightarrow (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \rightarrow (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, 1)$$

于是可以用矩阵乘积 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ 1 \end{pmatrix}$ 实现。

放缩变换

$$(x, y) \rightarrow (sx, ty)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \rightarrow (sx, ty, 1)$$

4. 人口迁移问题

设在一个大城市中的总人口是固定的,人口的分布则因居民在市区和郊区之间迁徙而变化。每年有 6% 的市区居民搬到郊区去住,而有 2% 的郊区居民搬到市区。假如开始时有 30% 的居民住在市区,70% 的居民住在郊区,问 10 年后市区和郊区的居民人口比例是多少? 30 年、50 年后又如何?

【解】 这个问题可以用矩阵乘法来描述。把人口变量用市区和郊区两个分量表示,即 $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{ck} \\ x_{sk} \end{bmatrix}$, 其中 x_c 为市区人口所占比例, x_s 为郊区人口所占比例, k 表示年份的次序。

在 $k=0$ 的初始状态为 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{s0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$ 。

一年以后,市区人口为 $x_{c1} = (1-0.02)x_{c0} + 0.06x_{s0}$,

郊区人口 $x_{s1} = 0.02x_{c0} + (1-0.06)x_{s0}$, 用矩阵乘法来描述,可写成

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.02 \\ 0.06 & 0.98 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.2960 \\ 0.7040 \end{bmatrix}$$

此关系可以从初始时间到 k 年,扩展为 $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_{k-2} = \cdots = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$, 解得

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.2960 \\ 0.7040 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.2717 \\ 0.7283 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{30} = \begin{bmatrix} 0.2541 \\ 0.7459 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{50} = \begin{bmatrix} 0.2508 \\ 0.7492 \end{bmatrix}$$

无限增加时间 k , 市区和郊区人口之比将趋向一组常数 0.25/0.75。

5. 电路设计问题

在电路设计中,经常要把复杂的电路分割为局部电路,每一个电路都用一个网络“黑盒子”来表示。黑盒子的输入为 u_1, i_1 , 输出为 u_2, i_2 , 其输入输出关系用一个矩阵 $\mathbf{A}$ 来表示(如图 3.1 所示)。

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 是 2×2 矩阵,称为该局部电路的传输矩阵。

把复杂的电路分成许多串接局部电路,分别求出它们的传输矩阵,再相乘起来,得到总的传输矩阵,可以使分析电路的工作简化。

以图 3.2 为例,把两个电阻组成的分压电路分成两个串接的子网络。第一个子网络只包含电阻 R_1 ,第二个子网络只包含电阻 R_2 ,列出第一个子网络的电路方程为

$$i_2 = i_1, \quad u_2 = u_1 - i_1 R_1$$

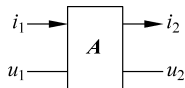


图 3.1 单个子网络模型

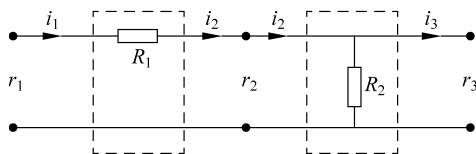


图 3.2 两个子网络串联模型

写成矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

同样可列出第二个子网络的电路方程为

$$i_3 = i_2 - u_2/R_2, \quad u_3 = u_2$$

写成矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

从上分别得到两个子网络的传输矩阵

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix}$$

整个电路的传输矩阵为两者的乘积

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + R_1/R_2 & -R_1 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 政党选举问题

在英国的政党选举中,分别用 A,B,C 代表保守党、工党、社会自由民主党三个政党参加每次的选举,每次参加投票的选民人数保持不变。通常情况下,由于社会、经济、各党的政治主张等多种因素的影响,原来投某党票的选民可能改投其他政党。

【分析】 (1) 参与投票的选民不变,而且没有弃权票。

(2) 每次投 A 党票的选民,下次投票时,分别有 r_1, r_2, r_3 比例的选民投 A,B,C 政党的票;每次投 B 党票的选民,下次投票时,分别有 s_1, s_2, s_3 比例的选民投 A,B,C 各政党的票;每次投 C 党票的选民,下次投票时,分别有 t_1, t_2, t_3 比例的选民投 A,B,C 各政党的票。

(3) x_k, y_k, z_k 表示第 k 次选举时分别投 A,B,C 各党的选民人数。

【解】 根据假设可得

$$\begin{cases} x_{k+1} = r_1 x_k + s_1 y_k + t_1 z_k \\ y_{k+1} = r_2 x_k + s_2 y_k + t_2 z_k \\ z_{k+1} = r_3 x_k + s_3 y_k + t_3 z_k \end{cases}$$

其中 $r_1 + r_2 + r_3 = 1, s_1 + s_2 + s_3 = 1, t_1 + t_2 + t_3 = 1$ 。

令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

上式可以表示为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_k$$

如果给出问题的初始值,就可以求出任一次选举时选民的投票情况。

7. 色彩转换问题

彩色显示器使用红(R)、绿(G)和蓝(B)光的叠成效应生成颜色,如图 3.3 所示。显

显示器屏幕的内表面由微粒像素组成,每个微粒包括三个荧光点:红、绿、蓝。电子枪位于屏幕的后方,向屏幕上每个点发射电子束。计算机从图形应用程序或扫描仪发出数字信号到电子枪,这些信号控制电子枪设置的电压强度。不同 RGB 的强度组合将产生不同的颜色。电子枪由电磁石帮助瞄准以确保快速精确的屏幕刷新。颜色模型规定一些属性或原色,将颜色分解成不同属性的数字化组合。这就色彩制式的转换问题。

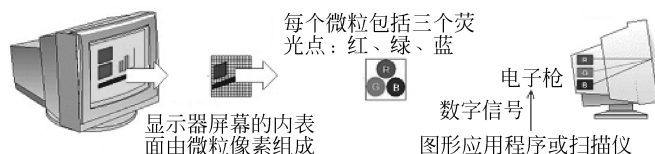


图 3.3 彩色显示器的工作原理

【分析】 观察者在屏幕上实际看到的色彩要受色彩制式和屏幕上荧光点数量的影响。因此每家计算机屏幕制造商都必须在 (R, G, B) 数据和国际通行的 CIE 色彩标准之间进行转换, CIE 标准使用三原色, 分别称为 X, Y, Z 。针对短余辉荧光点的一类典型转换是

$$\begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

计算机程序把用 CIE 数据 (X, Y, Z) 表示的色彩信息流发送到屏幕, 由屏幕上的电子枪将这些数据转换成 (R, G, B) 数据的方程。

【解】 令 $A = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, 则 $A\alpha = \beta$ 。现在要根据

CIE 数据 (X, Y, Z) 计算对应的 (R, G, B) 数据, 就是等式 $A\alpha = \beta$ 中 A 和 β 已知, 求 α 。如果 A 是可逆矩阵, 则由 $A\alpha = \beta$ 可得 $\alpha = A^{-1}\beta$ 。

于是 $\alpha = \begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix} \beta$ 。这就是说, 屏幕上的电子枪将 CIE

数据 (X, Y, Z) 转换成 (R, G, B) 数据的方程为

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

8. 投入产出问题

一个城镇有三个主要生产企业——煤矿、电厂和地方铁路作为它的经济系统, 如图 3.4 所示。已知生产价值 1 万元的煤, 需要消耗 0.25 万元的电和 0.35 万元的运输费; 生产价值 1 万元的电, 需要消耗 0.40 万元的煤、0.05 万元的电和 0.1 万元的运输费; 而提供价值 1 万元的铁路运输服务, 则需要消耗 0.45 万元的煤、0.1 万元的电和 0.1 万元的铁路运输服务费。假设在某个两天内, 除了这三个企业间的彼此需求, 煤矿得到 50 000 万元的订单, 电厂得到 25 000 万元的电量供应需求, 而地方铁路得到价值 30 000 万元的

运输需求。试问这三个企业在这两天各生产多少产值才能满足内外需求？除了外部需求，试求这两天各企业之间的消耗需求，同时求出各企业的新创造价值（即产值中各企业的消耗所剩部分）。



图 3.4 三个主要生产企业——煤矿、电厂和地方铁路

【分析】三个企业之间的投入产出表如表 3.3 所示。

表 3.3 三个企业之间的投入产出表

产出 投入	消耗系数			最终产品	总产值
	煤矿	电厂	铁路		
煤矿	0	0.40	0.45	50 000	x_1
电厂	0.25	0.05	0.10	25 000	x_2
铁路	0.35	0.10	0.10	30 000	x_3
新创造价值	x_1	x_2	x_3		
总产值	x_1	x_2	x_3		

所以，三个企业之间的直接消耗系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.40 & 0.45 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.35 & 0.10 & 0.10 \end{pmatrix}$$

由产品分配平衡方程组 $x = Ax + y$ 。

【解】已知 $y = (50\ 000, 25\ 000, 30\ 000)^T$ ，由 $x = Ax + y$ ，故

$$\begin{aligned} x &= (E - A)^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & -0.40 & -0.45 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.35 & -0.10 & 0.90 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 50\ 000 \\ 25\ 000 \\ 30\ 000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.4566 & 0.6981 & 0.8059 \\ 0.4482 & 1.2799 & 0.3663 \\ 0.6162 & 0.4137 & 1.4652 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50\ 000 \\ 25\ 000 \\ 30\ 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114\ 458 \\ 65\ 395 \\ 85\ 111 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即这两天的煤矿总产值是 114 458 万元，电厂总产值是 65 395 万元，铁路服务总产值是 85 111 万元。

x 求出以后，则三个企业为煤矿提供的消耗列向量为

$$\mathbf{x}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.35 \end{pmatrix} = 114\,458 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 28\,614 \\ 40\,060 \end{pmatrix}$$

三个企业为电厂提供的消耗列向量为

$$\mathbf{x}_2 \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.05 \\ 0.10 \end{pmatrix} = 65\,395 \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.05 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26\,158 \\ 3270 \\ 6540 \end{pmatrix}$$

三个企业为铁路提供的消耗列向量为

$$\mathbf{x}_3 \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} = 85\,111 \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38\,300 \\ 8511 \\ 8511 \end{pmatrix}$$

最后再由产值构成平衡方程组 $\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{z}$, 则

$$\mathbf{z} = (\mathbf{E} - \mathbf{D})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.40 & & \\ & 0.45 & \\ & & 0.35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 114\,458 \\ 65\,395 \\ 85\,111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45\,783 \\ 29\,427 \\ 29\,789 \end{pmatrix}$$

即各企业的新创造价值分别为煤矿 45 783 万元, 电厂 29 427 万元, 铁路 29 789 万元。

【思考题】

(1) 某企业某年出口到三个国家的两种货物的数量及两种货物的单位价格、重量、体积如表 3.4 所示。

表 3.4 出口到三个国家的货物数量及单位价格、重量、体积

数量 货	国家	美 国	德 国	日 本
A_1		3000	1500	2000
A_2		1400	1300	800
		单位价格/万元	单位重量/t	单位体积/ m^3
A_1		0.5	0.04	0.2
A_2		0.4	0.06	0.4

利用矩阵乘法计算该企业出口到三个国家的货物总价值、总重量、总体积各为多少。

(2) 设某个电器厂向三个商店(甲商店, 乙商店, 丙商店)发出 4 种产品(空调, 冰箱, 洗衣机, 彩电)的数量为

	空调	冰箱	洗衣机	彩电
甲商店	30	20	50	20
乙商店	0	7	10	0
丙商店	50	40	50	50

这 4 种产品的售价(百元)和重量(kg)的数表为

	售价	重量
空调	30	40
冰箱	16	30
洗衣机	22	30
彩电	18	20

求这个电器公司向每个商店出售的产品的总价格和总重量。

(3) 某合资公司生产甲、乙两种产品,每生产 1 美元价值的产品甲,公司需消耗 0.45 美元材料,0.25 美元劳动,0.15 美元管理费用;每生产 1 美元价值的产品乙,公司需消耗 0.40 美元材料,0.30 美元劳动,0.15 美元管理费用,设

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.15 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.30 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

则 α, β 称为甲乙两种产品的“单位美元产出成本”。

(1) 向量 100α 的经济解释是什么?

(2) 设公司希望生产 a 美元产品甲和 b 美元产品乙,给出描述该公司花费的各部门成本的(材料,劳动,管理费用)向量。

(3) 设有 A,B,C 三个政党参加每次的选举。每次投 A 党票的选民,下次投票时,分别有 80%,10%,10% 比例的选民投 A,B,C 政党的票;每次投 B 党票的选民,下次投票时,分别有 10%,75%,15% 比例的选民投 A,B,C 各政党的票;每次投 C 党票的选民,下次投票时,分别有 5%,10%,85% 比例的选民投 A,B,C 各政党的票。第一次 A,B,C 三个政党获得的票数分别为 1800 万,2000 万,1600 万。求出第 10 次选举时的选民投票情况。

(4) 在某区域中,每年大约有 7% 的城市人口迁移至郊区而 3% 的郊区居民迁往城市,在 2000 年,城市有 800 000 居民,郊区有 500 000 居民,列出方程描述这些情况,估计 20 年后居住在城市和郊区的人口。

(5) 民用电视信号发送使用向量 (Y, I, Q) 来描述每种颜色。如果屏幕是黑白的,则只用到了 Y (这比 CIE 数据能提供更好的单色图像)。 YIQ 与“标准”RGB 色彩之间的对应如下所示。

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.528 & 0.311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

(屏幕制造商需要调整矩阵元素以适应其 RGB 屏幕。)求将电视台发送的数据转换成电视机屏幕所要求数据的方程。

3.6 数学实验三

【实验目的】

1. 方阵的逆阵

(1) 定义: 设 A 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E$$

则称方阵 A 是可逆的, 并称矩阵 B 为 A 的逆矩阵, 简称 A 的逆, 记作 A^{-1} 。

(2) 求法: 若当 $|A| \neq 0$ 时, A^{-1} 存在, 且有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 。 A^* 为 A 的伴随矩阵, 或对 $(A|E)_{n \times 2n}$ 作初等行变换为 $(E|A^{-1})$, 即可求 A^{-1} 。

2. 矩阵的运算

它主要包括转置、加法、减法、数乘、乘法、方阵的乘法、方阵的逆、方阵的行列式等。

【基本语句】

1. $A \pm B$

功能: 将两个同型矩阵相加(减)。

2. kA

功能: 其中 k 是一个数, A 是一个矩阵, 将数与矩阵作乘法。

3. $A \cdot B$

功能: 其中乘号“ $\cdot$ ”使用键盘上的小数点将两个矩阵进行矩阵相乘。

4. Inverse[A]

功能: 求方阵的逆, A 必须为方阵。

5. Transpose[A]

功能: 求矩阵的转置, A 可以是任意矩阵。

6. MatrixPower[A, n],

功能: 计算方阵 A 的 n 次幂。

【实验内容】

3-1 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -3 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$, $2A-B$ 。

Mathematica 语句如下:

```
a = {{1, 3, 7}, {-3, 9, -1}};
b = {{2, 3, -2}, {-1, 6, -7}};
MatrixForm[a + b]
MatrixForm[2a - b]
```

运行结果如下:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -4 & 15 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 16 \\ -5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

3-2 求矩阵 (a, b, c) 与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的乘积。

Mathematica 语句如下：

```
A = {a, b, c};
B = {{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}};
MatrixForm[A.B]
```

运行结果如下：

$$\begin{pmatrix} a + 3b + 5c \\ 2a + 4b + 6c \end{pmatrix}$$

3-3 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 与 (a, b) 的乘积。

Mathematica 语句如下：

```
{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}}.{a, b}
```

运行结果如下：

$$\{a + 2b, 3a + 4b, 5a + 6b\}$$

【注】 Mathematica 中不区分行向量和列向量,而是尽可能给出结果。

3-4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的乘积及 B^T 。

Mathematica 语句如下：

```
A = {{1, 3, 0}, {-2, -1, 1}};
B = {{1, 3, -1, 0}, {0, -1, 2, 1}, {2, 4, 0, 1}};
MatrixForm[A.B]
MatrixForm[Transpose[B]]
```

运行结果如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3-5 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 的逆。



Mathematica 语句如下:

```
A = {{1, 2, 3, 4}, {2, 3, 1, 2}, {1, 1, 1, -1}, {1, 0, -2, -6}};
Inverse[A];
MatrixForm[%]
```

运行结果如下:

$$\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

3-6 求矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆。

Mathematica 语句如下:

```
Inverse[{{a, b}, {c, d}}]
```

运行结果如下:

$$\left\{ \left\{ \frac{d}{-bc+ad}, -\frac{b}{-bc+ad} \right\}, \left\{ -\frac{c}{-bc+ad}, \frac{a}{-bc+ad} \right\} \right\}$$

3-7 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的二次幂及对应的行列式的值。

Mathematica 语句如下:

```
MatrixPower[{{1, 2}, {3, 4}}, 2]
Det[{{1, 2}, {3, 4}}]
```

运行结果如下:

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \\ -2$$

【练习】

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$ 和 $4A+3B$ 。

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求 AB 。

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA 。

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求其转置矩阵 A^T 。

(5) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$, 并验证: $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 。

(6) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求其逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$, 并验证 $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ (单位矩阵)。