



第 3 章

元效应方法

3.1 导 言

本节将回答如下问题：

是否有一种方法可以与计算代价大的模型相匹配，并且以较少量的模型计算量来得出敏感性分析的结果？

在之前的章节中讲到通过敏感性分析展现出来的信息量非常依赖于计算模型所采用的样本点的数量以及这些样本点的位置。

在这章中我们将论述一种针对这个问题的敏感性分析的方法，这种方法在分辨包含很多因素的模型中只有少量重要因素时是非常有效的，这个过程中用到的是合适分布的小规模样本点。

这种方法在概念上较为简单并且易于实施。它属于第 2 章中所述的 OAT 设计中的一种，但是在某种程度上克服了 OAT 方法的主要限制。在秉承了基准点周围的局部变化概念后，这种方法通过引入更宽范围的输入变动与平均局部测量，克服了基于导数的方法带来的限制，这使得我们可以免除对单个样本点位置的依赖性。



这种方法在输入因素太多而无法使用运算代价大的基于方差的技术时是非常理想的选择,但是与此同时,因为输入因素不够充分会导致无法使用第 2 章最后提出的那些整体分组的方法。基于组的方法在检查每个单独因素的时候是有优势的,这以便于避免消去效应带来的问题(如两个因素、独立影响、可能属于相同的组并且有二者之间的效应相互抵消的情况)。

3.2 元效应方法

本节将回答如下问题:

什么是元效应? 该如何定义一个元效应方法的敏感性分析? 该如何解释这样的敏感性结果? 什么时候可以用这种方法?

对于从模型包含的许多因素中找出对输出有重要影响的输入因素而言,元效应(EE)方法是一个简单但是有效的方式。这种方法基本的思想是 Morris 提出的,他在 1991 年引入了元效应的概念。Morris 提出了构建两种敏感性测量的方法,以决定哪个因素是有影响的。这些因素包含:①可忽略的;②线性或可加的;③非线性及与其他因素之间相互关联。一个元效应定义如下:考虑有 k 个独立输入 $X_i, i=1, \dots, k$ 的模型,这些输入在 k 维单位立方体中通过 p 个选定的方格进行变化。换句话说,输入空间被离散化为 p 级的格子 Ω ,对于一个给定值的 X ,第 i 个输入因素的元效应定义为

$$EE_i = \frac{Y(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i + \Delta, \dots, X_k) - Y(X_1, X_2, \dots, X_k)}{\Delta} \quad (3.1)$$

其中 p 是层的个数; Δ 是在 $\{1/(p-1), \dots, 1-1/(p-1)\}$ 中的一个值, $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ 是在 Ω 中任意选取使得变化的点 $(X + e_i \Delta)$ 仍然在 Ω 中的值, $i=1, \dots, k$, 其中 e_i 是在 i 处为 1 其他位置为 0 的向量。

关联到第 i 个输入因素的元效应的分布是通过从 Ω 中随机取样 X 得到的,该分布定义为 F_i , 如 $EE_i \sim F_i$ 。这里的 F_i 分布是有限的,若 p 是偶数且 Δ 取定为等于 $p/[2(p-1)]$, F_i 的元素的数量是 $p^{k-1}[p-\Delta(p-1)]$ 。假设 $k=2, p=4$ 以及 $\Delta=2/3$, 每个 F_i 对应 8 个元素。该输入空间有 4 层格子,如图 3.1 所示。通过简

单记住每个与元素 i 相关的元效应,从而所有的元效应可以从这个格子中被数出,而这个与 i 相关的元效应通过用两个在坐标 X_i 处的相对距离为 Δ 的点计算得到,0 在其他任何坐标中。

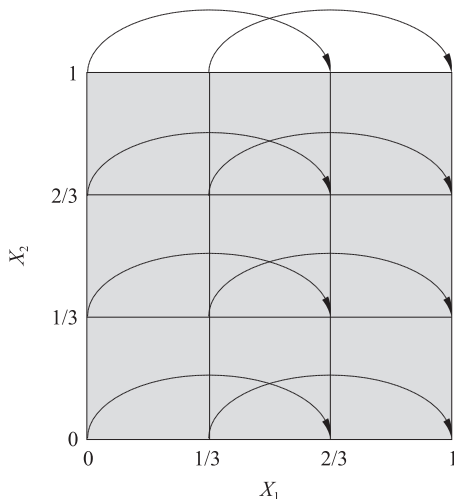


图 3.1 4 层格子 ($p=4$) 在两维输入空间 ($k=2$) 下的表示。 Δ 的值为 $2/3$ 。

箭头识别出了估计与因子 X 相关的元效应所需要的 8 个点

敏感性度量 μ 和 σ , 是由 Morris 提出的, 它们分别是分布 F_i 的均值与标准差的估计。平均值 μ 估测了因素对输出变量的整体影响。标准差 σ 则是估计因素影响的综合情况, 包括非线性, 以及因为与其他因素之间的相互作用所产生的影响。 σ 的意义直观解释如下: 假设对因素 X_i 我们得到了较大值的 σ , 那么关于这个因素的元效应与其他的因素相比就是明显不同的, 这表明元效应是被计算所需样本点位置的选取所强烈影响的。例如: 其他因素值的选取对其也有影响, 相反的, 较小的 σ 值表明了元效应中有着很相似的值, 这表明 X_i 的效应几乎独立于由其他因素。Campolongo 等提出了用 μ^* 代替 μ , 定义为元效应绝对值分布的均值的估计, 这个元效应我们定义为 G_i , 如 $|EE_i| \sim G_i$ 。

μ^* 的使用是十分便利的, 由于它解决了第二类错误 (无法通过模型中的显著效应来分辨一个因素) 带来的问题, 从这点而言, 初始度量 μ 是较为弱勢的。第二类错误可能发生在当分布 F_i 包含正负元素的情况, 如当模型不单调时或者有相互作用的影响时。在这样的情况下, 一些效应可能在计算 μ 时相互抵消, 因此对一个较为重要的因素而言只得到较低的平均值。为了避免第二类错误, Morris (1991)



推荐同时考察 μ 和 σ 的值, 由于一个带有用不同极号(如相互抵消)元效应的因素将有较低的 μ 值与较为可观的 σ 值。一个 (μ, σ) 在平面上的图示允许更好地对结果通过采用两个敏感性度量进行解释。Morris 的方法大体上是很有用的, 但是它可能在当有多元输出的模型时带来问题(Campolongo 等, 2007)。另外, 特别是有多元输出的时候, μ^* 是一个片面而且简化的度量。更主要的是, 与 μ 相比, μ^* 可以调整到可以与一组因素配合使用, 如为了得到关于一组(3.5 节)全局的敏感性度量。Campolongo 等(2007)同样表示了 μ^* 是整体敏感性指数 ST(第 4 章)的一个很好的近似。全局敏感性指数是一个因素对输出(广泛的相互作用)的整体影响, 与之对应的是当除 X_i 之外的因素固定时得到的剩余期望方差。如 $E_{X_{\sim i}}(V_{X_i}(Y | X_{\sim i}))$ 以及

$$S_{T_i} = \frac{E_{X_{\sim i}}(V_{X_i}(Y | X_{\sim i}))}{V(Y)}$$

当目标是分辨模型中非影响性因素(不只是将最重要的因素优先考虑)时会使用 S_{T_i} 。当 S_T 的计算代价太大而难以承受时, μ^* 是一个有效的对全局指数 S_T 的代替。

大体上, 由于 μ 的估计几乎没有带来额外的计算花费(需要的是相同数量的模型执行步骤), 我们推荐计算所有的 3 个统计量, μ, σ 与 μ^* , 以便得到最大限度的敏感性信息。例如, μ 与 μ^* 之间的比较提供了因素对输出的影响的表征信息。如果 μ 与 μ^* 都很高, 这表明不仅是这个因素对输出有很大的影响, 而且这个影响的表征是相同的。反之, μ 较低但是 μ^* 较高, 表明这个被检查的因素依赖于计算效应所在的这个空间里不同的取点, 从而有不同表征。估计 3 个统计量的取样策略将在接下来的部分进行讨论。

3.3 抽样策略与策略优化

本节将回答如下问题:

该如何建立有效的样本来估计元效应?

为了估计敏感性度量(如 F_i 与 G_i 分布的统计量), 设计应当着重于从每个 F_i 分布中取样 r 个元效应的问题。由于每个元效应的计算要求两个样本点, 最简单的设计对每个输入需要 $2r$ 个样本点, 因此总共是 $2rk$ 个样本点, 其中 k 是输入因

子的个数。Morris(1991)建议了一个更有效的方案,即在输入空间中建立 $(k+1)$ 个点构成的 r 个轨道,每个轨道提供一个输入因子对应的 k 个元效应,因此需要总共 $r(k+1)$ 个样本点。

轨道通过如下的方式得到。 X 的一个基本值 x^* 是从 p 层的 Ω 格子中通过随机选取得到的。 x^* 不是轨道的一部分,但是它用于得到所有的轨道点,这些轨道点通过 Δ 来增加一个或多个 k 成分来获得。第一个轨道点 $x^{(1)}$,它是由增加一个或多个成分 Δ 获得的,通过这样的方式 $x^{(1)}$ 仍然在 Ω 中。第二个样本 $x^{(2)}$ 通过 x^* 得到,但是对 x^* 的要求与 $x^{(1)}$ 的第 i 个成分不同, $x^{(2)}$ 的第 i 个成分要么增加、要么减小 Δ ,如 $x^{(2)} = x^{(1)} + e_i\Delta$ 或者 $x^{(2)} = x^{(1)} - e_i\Delta$ 。指标 i 是在集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 中随机选取的。第三个样本点 $x^{(3)}$ 从 x^* 得到,而 $x^{(3)}$ 与 $x^{(2)}$ 只在 $j \neq i$ 时的唯一一个 j 处的成分不同。它可以是 $x^{(3)} = x^{(2)} + e_j\Delta$,也可以是 $x^{(3)} = x^{(2)} - e_j\Delta$ 。如此这样一直到 $x^{(k+1)}$,此时轨道闭合。这个设计得到了一个有 $(k+1)$ 个样本点 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}$ 的轨道,这个轨道的核心性质为两个连续点仅在一个成分处不同且任何基准向量 x^* 的值已经被选定至少增加了 Δ 。一个 $k=3$ 时轨道的例子如图3.2所示。

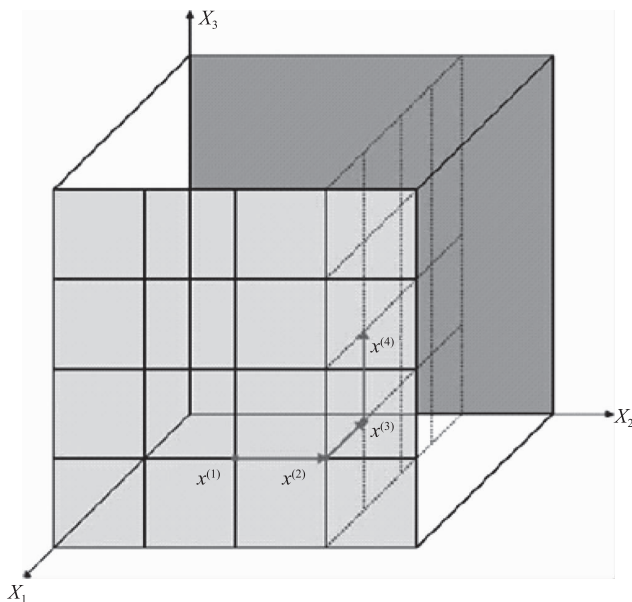


图 3.2 当 $k=3$ 时轨道在输入空间里的例子



得到具有所需性质轨道的方案如下。轨道可以被看作有矩阵 $\mathbf{B}^*$ 的形式,且其维数为 $(k+1) \times k$, 行向量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}$ 。为了建立 $\mathbf{B}^*$, 第一步是选取一个矩阵 $\mathbf{B}$, 其维度为 $(k+1) \times k$, 元素均为 0 与 1, 主要性质为对每个列坐标 $j, j=1, \dots, k, \mathbf{B}$ 的两行只在 j 处不同。一个便利的选择如下式 $\mathbf{B}$, 即严格的下三角阵:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

矩阵 $\mathbf{B}'$ 由下式给定

$$\mathbf{B}' = \mathbf{J}_{k+1,k} \mathbf{X}^* + \Delta \mathbf{B}$$

其中 $\mathbf{J}_{k+1,k}$ 是 $(k+1) \times k$ 的元素为 1 的矩阵, $\mathbf{X}^*$ 是随机选取的 $\mathbf{X}$ 的基准值, $\mathbf{B}'$ 是所需设计矩阵的可能候选, 但是它在第 k 个元效应处是有限制的, 这个值不可以随机选取。

取样矩阵的随机版本可由下式给定

$$\mathbf{B}^* = \{\mathbf{J}_{k+1,1} \mathbf{X}^* + (\Delta/2)[(2\mathbf{B} - \mathbf{J}_{k+1,k})\mathbf{D}^* + \mathbf{J}_{k+1,k}]\} \mathbf{P}^* \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{D}^*$ 是一个 k 维的对角矩阵, 其中每个元素要么是 +1, 要么是 -1, 出现的概率相同。并且 $\mathbf{P}^*$ 是一个 k -by- k 的置换矩阵, 这个置换矩阵中的每行都包含一个等于 1 的元素, 所有其他的元素都是 0, 没有两行的相同位置处都是 1。一行一行地来看, $\mathbf{P}^*$ 给出的顺序中因子都被移动过了; $\mathbf{D}^*$ 则说明的是因素的值增加或者减少都是沿着轨道进行的。 $\mathbf{B}^*$ 对每个输入都提供了一个元效应, 这个元效应是随机选择的。

例 3.1

考虑一个模型, 其有两个输入因子, 且在 $[0, 1]$ 上均匀分布。有如下的层 $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$ 。在 $k=2, p=4$ 的情况下我们选择 $\Delta=2/3$ 。考虑随机得到如下的 $\mathbf{X}^*, \mathbf{D}^*$ 与 $\mathbf{P}^*$:

$$\mathbf{X}^* = \{1/3, 1/3\}, \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^* = \mathbf{I}$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 由下式给定

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

且可以得到

$$(\Delta/2)[(2\mathbf{B} - \mathbf{J}_{k+1,k})\mathbf{D}^* + \mathbf{J}_{k+1,k}] = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & \Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

与

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

因此 $\mathbf{X}^{(1)} = (1/3, 1)$, $\mathbf{X}^{(2)} = (1, 1)$, $\mathbf{X}^{(3)} = (1, 1/3)$ (图 3.3)。这个过程重复了多次是为了建立 F_i 与 G_i 对每个因素的分布情况。

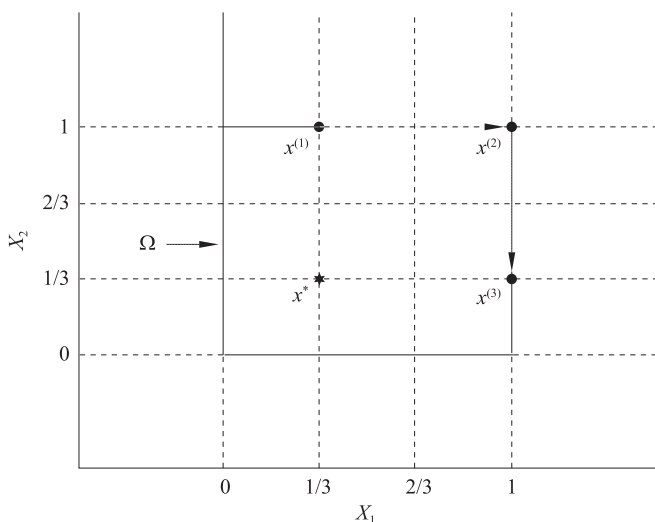


图 3.3 例 3.1 中得到的轨道

Campolongo 等(2007)提出了对取样策略的一种改进,这促成了在不增加模型所需的操作次数时对输入域的一个更好的排查。这个想法是通过这样的方法选取 r 个轨道以此来将轨道在输入空间中的分布最大化。这个设计是以得到大规模的不同轨道开始的,如 $M \sim 500-1\,000$,接下来选取 r (如 $r=10, 20$) 个有最大扩展性的自己,其中扩展性是基于如下定义的距离的, d_{ml} 是一对轨道 m 与 l 的距离:

$$d_{ml} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \sqrt{\sum_{z=1}^k [X_z^{(i)}(m) - X_z^{(j)}(l)]^2} & m \neq l \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3.3)$$



其中 k 是输入因子的数量, $X_z^{(i)}(m)$ 表明第 m 个轨道的第 i 个点的第 z 个坐标。换句话说, d_{ml} 是所有两个轨道点对的几何距离之和。来自 M 的最好的 r 个轨道是通过最大化 d_{ml} 来选择的。首先我们考虑每个可能的 M 的 r 个轨道的组合, 以 D^2 代表, 这是所有属于组合中的可能轨道对的平方距离之和。例如, 对于组合 4, 6, 7 与 9 (如 $r=4$) 来自可能的 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 我们定义 $D_{4,6,7,9}$ 为

$$D_{4,6,7,9} = \sqrt{d_{4,6}^2 + d_{4,7}^2 + d_{4,9}^2 + d_{6,7}^2 + d_{6,9}^2 + d_{7,9}^2}$$

考虑有最高 D 值的组合, 为 $\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。

可能的选择是从 $M=10$ 中取 $r=4$, 这个取样策略优化了输入空间的检查并且易于操作。

3.4 敏感性系数的计算

本节将回答如下问题:

该如何通过使用元效应定义一个敏感性度量? 该选择多少层? 该如何解决非均匀的分布? Δ 在这里面的角色如何?

以上所述的取样策略导致了在 Ω 空间中 r 个轨道的构造。每个轨道对应 $(k+1)$ 次模型执行且允许对每个因素 i 计算一个元效应, $i=1, \dots, k$ 。如果 $x^{(l)}$ 与 $x^{(l+1)}$, l 属于 $\{1, \dots, k\}$, 是第 j 个轨道上的在第 i 处不同的两个取样点, 元效应关联与元素 i 是

$$EE_i^j(x^{(l)}) = \frac{[y(x^{(l+1)}) - y(x^{(l)})]}{\Delta}$$

如果 $x^{(l)}$ 的第 i 个成分增加 Δ , 且

$$EE_i^j[x^{(l+1)}] = \frac{[y(x^{(l)}) - y(x^{(l+1)})]}{\Delta}$$

如果 $x^{(l)}$ 的第 i 个成分减少 Δ 。一旦每次输入 r 个元效应都是有效的 EE_i^j , $i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, r$ 与 F_i, G_i 有关的统计量 μ_i, μ_i^* 与 σ_i^2 可以通过相同的估计

用来计算每个因素,这些估计将被用于独立的随机样本,如 r 个元效应属于不同的轨道且因此独立:

$$\mu_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r EE_i^j \quad (3.4)$$

$$\mu_i^* = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r |EE_i^j| \quad (3.5)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^r (EE_i^j - \mu)^2 \quad (3.6)$$

其中 EE_i^j 表明有关于因素 i 的元效应是沿着轨道 j 计算得到的。

这个方法的应用关键是对参数 p 和 Δ 的选择。对 p 的选择与 r 的选择紧密相连。在考虑一个较大值的 p 来得到大规模的可能被探索的层时,这似乎只是增强了取样的准确性。如果这个效果并没有因为选择较大 r 值而有所增加,这个效果将会被浪费,由于许多可能的层未被探索。大体上,当样本 r 较小时,似乎并不是所有可能的因素层在这个实验中会被探索。例如,在以上的例子中,如果 $r=1$ 时两个因素从未取过值 0 与 $2/3$ 。如果可能的话,选择一个偶数值是较为便利的,是因为这个偶数值的选择会影响 Δ 的选择。实际上,假设 p 是偶数值,对 Δ 的便利选择为 $\Delta = p/[2(p-1)]$ 。这个选择是有优势的,设计的取样策略保证从每个 F_i 中都有相同概率的取样(详情见 Morris,1991)。

图 3.4 的顶部(箭头)表明当 $p=4$ 时,选择 $\Delta = p/[2(p-1)] = 2/3$ (左边点)保证了 4 个层有相同的概率被选择。另外,选择 $\Delta = 1/3$ (右侧点)将表明层 $1/3$ 与 $2/3$ 会被经常取样,这是由于两个箭头指向那儿。箭头下方的两个直方图画出了当 $r=20$ 时个轨道有 $p=4$ 层,且 $\Delta=2/3$ (左侧点)与 $\Delta=1/3$ (右侧点)时的经验分布。图的底部表明在这样的情况下奇数层是可以被考虑的(如 $p=5$)。在这样的条件下,无论 Δ 的值是如何被选择的,它都不可能得到相同概率的元效应。在一些情况下,如对 $p=5$ 或者是 $\Delta=3/4$ 时,元效应是永远都无法被取样得到的。之前的实验(Campolongo and Saltelli,1997;Campolongo et al., 1999b;Saltelli et al.,2000)已经表明选取 $p=4$ 与 $r=10$ 得到了很有价值的结果。

如果一个因子服从均匀分布,层是简单地对每个因素的变化区间通过分割相同大小的区间得到的。如果一个因子服从非均匀的分布,那么输入值是无法直接取样得到的;甚至取样是从分布的分位数组成的空间中得到的,这里的空间为 k 维的超立方体(每个分位数在 $[0,1]$ 变化)。实际的因子值接下来会从已知的统计分

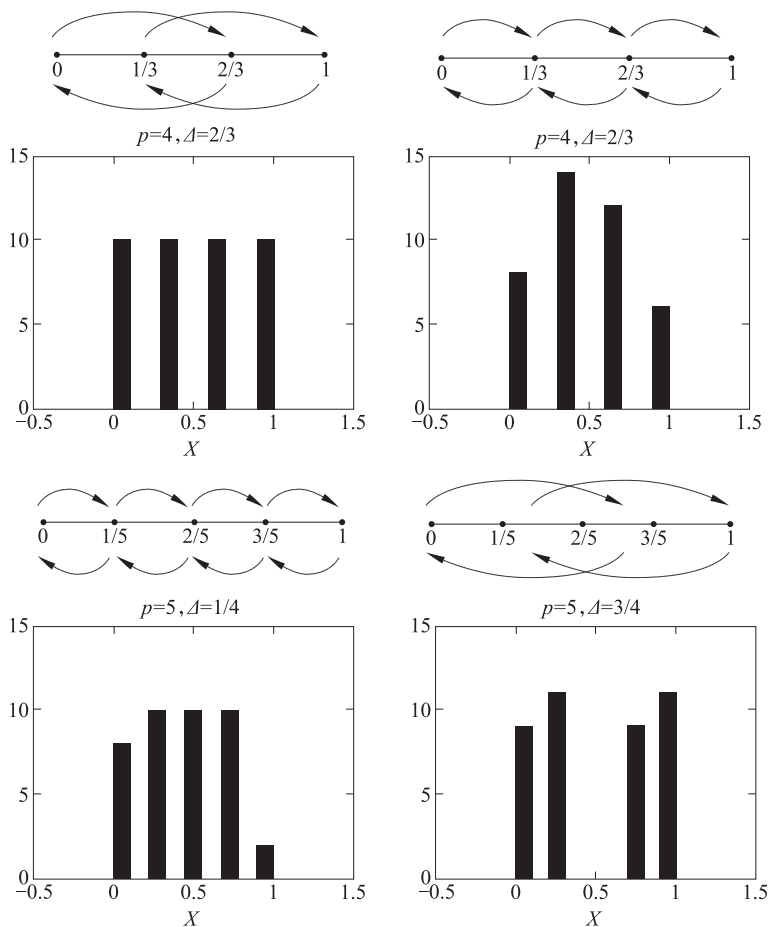


图 3.4 通过选择不同的 p 值与 Δ 以及取样 $r=20$ 个轨道时得到的经验分布

布中得到(Campolongo et al., 1999b)。图 3.5 表明了这样的一个情况, 其中因素 X 有标准正态分布且分位数空间是通过 6 个分位点($q_1, q_2, \dots, q_6$)组成的空间。用逆正态累计分布方程(曲线), 对应于 X 的层是($L_1, L_2, \dots, L_6$)。如果取样的分布有无限支撑的情况, 被使用的分位点可以选择用于截尾的分布。一个好的替用方法是为了分割整个的支撑位($r+1$)个区间并用来作为整个截取区间的中心(2.3.2 节)。

在这一点上, 非常值得简单地思考一下 Δ 的价值。如果 Δ 被选为等于所有输入的因子数, 它在元效应的定义中相对于敏感性分析是不相关的。 Δ^{-1} 单纯是一个

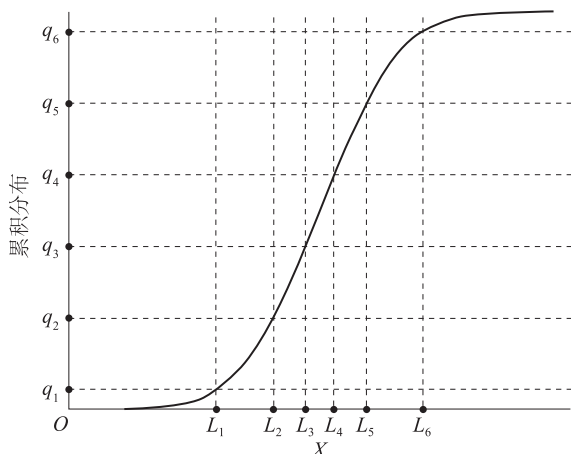


图 3.5 因子为标准正态分布时的抽样过程

常数乘以每个元效应,它不会影响敏感性分析的结果。在这样的情况下可能产生的问题是输入因素需要重新调整,这是因为它的初始分布不是在 $0 \sim 1$ 的均匀分布: Δ 是否应该重新调整以使得它在因子变化范围内表现确切的取样步骤,还是说它应该保持现状来对每个因素同等表征在 $[0,1]$ 的取样步骤? 下面的例子说明了这个问题。

假设输出 Y 是这样简单的方程 $Y = X_1 + X_2$, 其中 X_1 与 X_2 分别是在 $[0,1]$ 和 $[0,10]$ 的均匀分布。在敏感性分析的结果中期望输入因素 X_2 比 X_1 远远重要,由于 X_2 值的变动对 Y 的影响远比 X_1 值变动带来的影响大,如 X_2 比 X_1 更加的不确定。这里考虑 $p=4$ 层, $\Delta=1/3$ 且 $r=1$ 的轨道,如计算仅仅对每个输入一个元效应,并且将其视作最终的敏感性测量。假设对 X_1 与 X_2 随机得到如下的分位点的轨道: $(0,1/3), (0,2/3), (1/3,2/3)$ 。熟悉方法的读者可以简单地验证一下这是一个典型的样本。应用逆累积分布函数对该两个因素可以得到这个样本: $(0,10/3), (0,20/3), (1/3,20/3)$ 。最后,关于每个输入的元效应估计为

$$EE_1(X) = \frac{y(1/3,20/3) - y(0,20/3)}{\Delta} = \frac{1/3}{\Delta}$$

$$EE_2(X) = \frac{y(0,20/3) - y(0,10/3)}{\Delta} = \frac{10/3}{\Delta}$$

如果在计算 $EE_2(X)$ 的过程中取样步骤 Δ 被重新调整了且设定为 $10/3$, 那么两个元效应都将是 1, 且这说明该两个因素在对 Y 值的影响程度上有相同的效果。



如果 Δ 对两个因素都是左等于 $1/3$, 独立于实际的因素 X_2 的变动, 我们得到的对 X_2 的一个敏感性测量要比 X_1 高出 10 倍。第二个结果是正确的结果。在这样的方式下我们考虑要求敏感性测量不仅可以顾及模型方程的特异性, 而且可以顾及假设的输入的统计分布效果。大体上, 无论分布的形式是如何被考虑的, Δ 必须一直是在 $[0, 1]$ 范围内表示取样步骤的, 如在非均匀分布时, 它应当表征因素分位点附近的变动。

3.5 组参数的计算

本节将回答如下问题:

如何才能扩展 EE 方法用来解决一组因素分析的问题? 取样策略是否会变化?

之前所讲述的 EE 方法同样可以通过扩展 μ^* 测度来解决一组因素的问题。考虑一组因素问题时, 主要思想是同时移动同组中的所有因素。在 Morris 最初给出的定义中, 元效应是通过从式(3.1)所示的方程中递增一个因素后的评估作用中减去在 X 处评估的作用。这个定义无法直接拓展到多个因素同时变动的情况, 因为两个因素可能以相反的方式变化, 如一个增大 Δ 一个减少 Δ 。相反的, 用 μ^* 可以克服这个问题, 是由于 μ^* 的关注点不在元效应本身而是在其绝对值上, 如元效应始终是正值, 则不考虑因子的替换。由于一个二元因子组 $u = (X_{i_1}, X_{i_2})$, 在点 X 处的绝对元效应为

$$|EE_u(X)| = \left| \frac{y(\tilde{X}) - y(X)}{\Delta} \right| \quad (3.7)$$

其中 X 是任何在 Ω 中选中的值, 这样改造点 $X \sim$ 仍然在 Ω 中, 且每个元素 $(\tilde{X}_{i_1}, \tilde{X}_{i_2})$ 基于 (X_{i_1}, X_{i_2}) 要么增加 Δ 要么减少 Δ 。

为了考虑一组因素, 在第 3.3 节中的取样策略需要稍作修改。这首先需要考
考虑一个矩阵 $\mathbf{G}$ 来描述因子是如何以组分布的。这个矩阵定义如下: 当 i 属于组 j 时它的元素 $\mathbf{G}(i, j)$ 等于 1, 否则 $\mathbf{G}(i, j) = 0$ 。如果 g 是在实验中的组数, $\mathbf{G}$ 的大小为 $k \times g$ 。在这个情况下轨道 $\mathbf{B}^*$ 的矩阵的维度是 $(g+1) \times k$, 由于所有的因子在一

个组中一起移动。 $\mathbf{B}^*$ 可以用一个下三角矩阵 $\mathbf{B}$ 来构建, 这个 $\mathbf{B}$ 矩阵的维度为 $(g+1) \times g$ 且设定

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{J}_{g+1,1} \mathbf{x}^* + (\Delta/2) [(2\mathbf{B}(\mathbf{G}\mathbf{P}^*)^T - \mathbf{J}_{g+1,k})\mathbf{D}^* + \mathbf{J}_{g+1,k}]$$

其中, 类似于单因子实验的情形, $\mathbf{J}_{i,j}$ 是一个大小为 $(i \times j)$ 元素为 1 的矩阵; $\mathbf{D}^*$ 是一个 $(k \times k)$ 的对角阵用来描述因子是增加还是减少了; 且 $\mathbf{P}^*$ 是一个 $(g \times g)$ 的矩阵, 用来描述组移动的次序。下面的例子表明如何处理一组因子分析的情形。

例 3.2

考虑 3 个因子 X_1, X_2 与 X_3 , 其都在 $[0,1]$ 均匀分布上, 且分配到 $g=2$ 的两个组中。第一个组(G_1)只包含因子 X_1 ; 第二个(G_2)包含其他两个因子。矩阵 $\mathbf{G}$ 因此定义为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑 $p=4$ 层且 $\Delta=2/3$ 的一个实验。假设得到如下关于 $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{D}^*$ 与 $\mathbf{P}^*$ 的矩阵

$$\mathbf{x}^* = (1/3, 1/3, 0), \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在该情况下有

$$\begin{aligned} & (\Delta/2) [(2\mathbf{B}(\mathbf{G}\mathbf{P}^*)^T - \mathbf{J}_{g+1,k})\mathbf{D}^* + \mathbf{J}_{g+1,k}] \\ &= \Delta/2 \left[\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \Delta & 0 \\ \Delta & \Delta & 0 \\ \Delta & 0 & \Delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这里清楚地显示了 X_1 (如 G_1) 是首先移动的, 且如上所示的增加了值, 接下来 G_2 中的因素以相反的方向改变了它们的值 (X_2 减少, X_3 增加)。最后的矩阵为

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

注意: 同组中的两个因素在不同的层上也可取不同的值。



3.6 元效应(EE)方法步骤

在这个小节中我们阐述如何将 EE 方法应用到实际中。这要归功于 Sobol (1990), 这个方法在解析 g -方程上进行测试:

$$Y = \prod_{i=1}^k g_i(X_i), g_i(X_i) = \frac{|4X_i - 2| + a_i}{1 + a_i}$$

其中 a_i 是参数, 使得 $a_i \geq 0$ 。这个函数被广泛应用于在敏感性分析中的测试函数, 因为它是非常困难的一个: 它有着强烈的非线性和非单调性, 且由于定义, 它所有的相互作用项都是非零的。更重要的是它能以解析的计算方式算出方差分解, 因此也可以计算基于方差的敏感性指数 S_i 与 S_{T_i} 。 a_i 的值决定了 X_i 的相对重要性是因为这些值决定改了每个 $g_i(X_i)$ 的方差范围:

$$1 - \frac{1}{1 + a_i} \leq g_i(X_i) \leq 1 + \frac{1}{1 + a_i}$$

因此, a_i 的值越高, X_i 变量的重要性越低。这也在图 3.6 中表示出来了, 同时表示了 $g_i(X_i)$ 作为 X_i 的一个函数的行为, $a_i = 0.9, a_i = 9$ 与 $a_i = 99$ 。

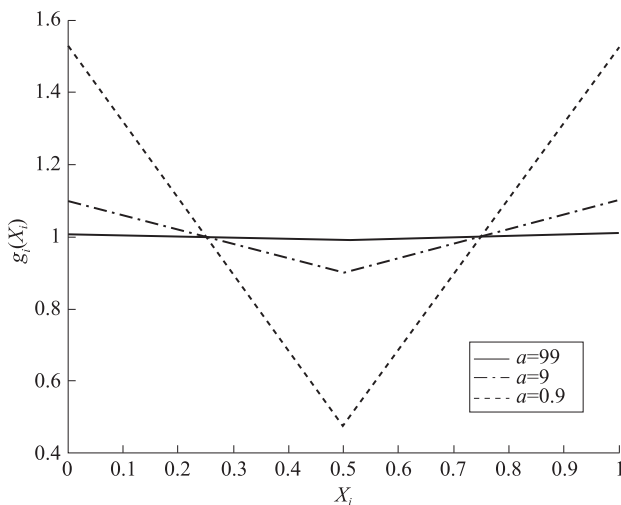


图 3.6 当 $a_i=0.9, a_i=9$ 和 $a_i=99$ 时 $g_i(X_i)$ 函数曲线

图 3.6 中,当 $a_i=0.9, a_i=9$ 与 $a_i=99$ 时, $g_i(X_i)$ 作为 X_i 函数的情形第一阶的偏方差由下式给定

$$V_i = V(E(Y | X_i)) = \frac{1}{3(1+a_i)^2}$$

同时更高阶的偏方差,只是简单地通过更低阶的偏方差乘积就可以得到,如 $V_{12}=V_1V_2$,最后总方差可以只写成一阶项的方程:

$$V(Y) = -1 + \prod_{i=1}^k (1 + V_i)$$

这允许我们针对 g -函数以解析方式计算第一阶与总阶的敏感性指数。在这个例子中,假设了 $k=6$ 并且设 a_i 的参数值为表 3.1 所示。

表 3.1 在每个输入情况下 g -函数对应的参数值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
78	12	0.5	2	97	33

现在利用本章介绍的 EE 方法来展示敏感性分析。输入变量的不确定性是通过假设所有的 X_i 均匀分布在 6 维的单位正方体中(如 $X_i \sim U[0,1], \forall i$)进行建模的。3.3 节中所述的优化策略用于估计敏感性测度 μ, μ^* 以及 σ 。 $p=4$ 层与 $\Delta=2/3$ 是选定的; $r=4$ 个轨道从有 100 个轨道的组中选出。取样的输入矩阵在表 3.2 中列 2—7 中列出了。最后的列标高的是对应于 g -函数的值。图 3.7 中的图展现了作为每个输入的方程的输出散点图。在这个例子中,输入的数目不是很大,散点的应用已经展现了其中因素(X_3)是在函数中占主要角色的。对更为复杂的例子,其中的变量数会更多,散点图的应用会显得比较笨。

表 3.2 取样的轨道以及对应的 g -函数值

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	g
t_1	0	2/3	1	0	0	1/3	2.193
	0	2/3	1	0	0	1	2.280
	0	0	1	0	0	1	2.520
	2/3	0	1	0	0	1	2.478
	2/3	0	1	2/3	0	1	1.652
	2/3	0	1/3	2/3	0	1	0.771
	2/3	0	1/3	2/3	2/3	1	0.761



续表

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	g
t_2	0	1/3	1/3	1	1	2/3	1.024
	0	1	1/3	1	1	2/3	1.131
	0	1	1	1	1	2/3	2.424
	2/3	1	1	1	1	2/3	2.384
	2/3	1	1	1	1	0	2.478
	2/3	1	1	1	1/3	0	2.445
	2/3	1	1	1/3	1/3	0	1.630
t_3	1	2/3	0	2/3	1	0	1.520
	1	2/3	0	0	1	0	2.280
	1/3	2/3	0	0	1	0	2.242
	1/3	2/3	0	0	1/3	0	2.212
	1/3	0	0	0	1/3	0	2.445
	1/3	0	2/3	0	1/3	0	1.141
	1/3	0	2/3	0	1/3	2/3	1.097
t_4	1	1/3	2/3	1	0	1/3	1.024
	1	1/3	2/3	1	0	1	1.064
	1	1/3	0	1	0	1	2.280
	1	1/3	0	1/3	0	1	1.520
	1	1/3	0	1/3	2/3	1	1.500
	1	1	0	1/3	2/3	1	1.657
	1/3	1	0	1/3	2/3	1	1.630

作为一个例子,表 3.3 表示了如何对因素 X_4 估计敏感性测量。 μ, μ^* 与 σ 的值在表 3.4 中被列出了。结果表明 X_3 与 X_4 是重要因素,同时 X_1, X_5 与 X_6 可以被视作非影响性的(注意 μ^* 的第一列的值)。对一些因素而言,高的 σ 值同样表明其相互作用在模型中占了很重要的地位。更重要的是 μ 的低值与 μ^* 的高值表明了这样的因素振荡迹象。图 3.8 的条形图所示的是 μ^* 的值呈现增加的趋势。在这个例子中很清楚, μ^* 单独被用作估计模型中每个因子的重要性。这些结果被用于固定在模型中不重要的因子(因子固定设定,见第 1、4 章)。对 X_1 与 X_5 而言极端的较低 μ^* 值表明这些因素被固定住且对 g 的方差没有较大的影响。另外, X_3 与 X_4 因子无法被固定也被清楚地显示了出来。剩余的因子(X_2 与 X_6)夹在其中。固定它们的决定或者是不考虑其重要性都会导致第二类错误。

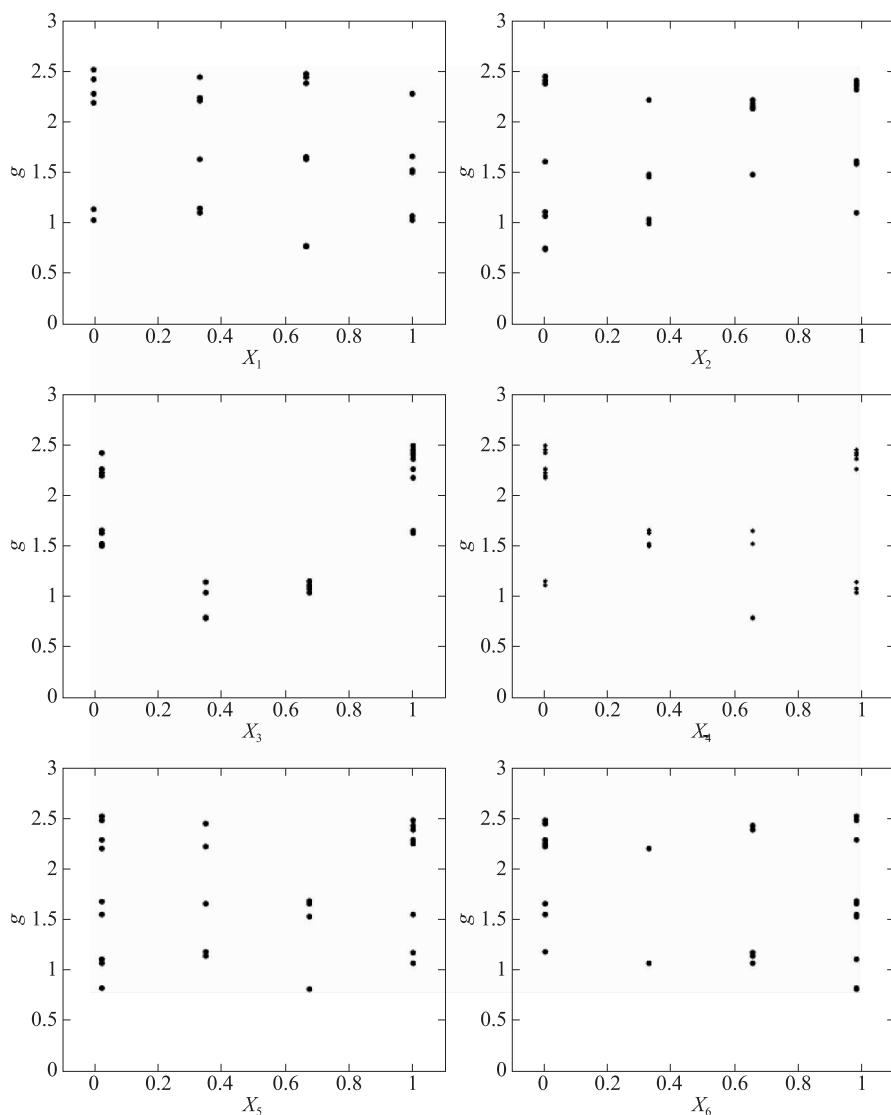


图 3.7 $g = \prod_{i=1}^k g_i(X_i)$ 在每个输入情况下作为一个函数的散点图

表 3.3 对因子 X_4 元效应分布的估计(与它们的绝对值)

	$g(X_1, \dots, X_4 + \Delta, \dots, X_6)$	$g(X_1, \dots, X_4, \dots, X_6)$	$EE_4(X)$	$ EE_4(X) $
t_1	1.652	2.478	-1.239	1.239
t_2	2.445	1.630	1.222	1.222

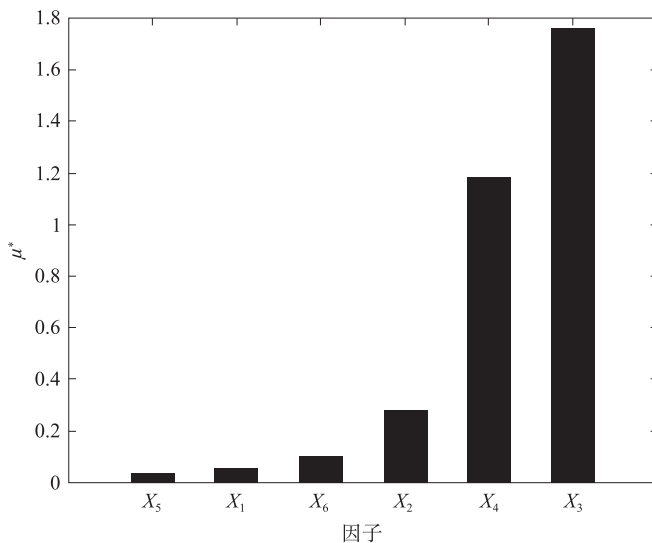


续表

	$g(X_1, \dots, X_4 + \Delta, \dots, X_6)$	$g(X_1, \dots, X_4, \dots, X_6)$	$EE_4(X)$	$ EE_4(X) $
t_3	1.520	2.280	-1.140	1.140
t_4	2.280	1.520	1.140	1.140

表 3.4 估计敏感性测度。测度在这里用 $r=4$ 个轨道进行估计

	μ^*	μ	σ
X_1	0.056	-0.006	0.064
X_2	0.277	-0.078	0.321
X_3	1.760	-0.130	2.049
X_4	1.185	-0.004	1.370
X_5	0.035	0.012	0.041
X_6	0.099	-0.004	0.122

图 3.8 μ^* 关于 g -函数的柱状图

3.7 结 论

对包含很多因子且具有小执行规模的模型而言,这章所述的 EE 方法表明了

在分辨极少重要因子方面的有效性。当因子很多且/或者模型执行时间很长,使得必须使用更复杂技术的计算代价的时候,这个方法是便利的,但是不足够大的时候,建模者会使用这里的组技术。

基于组分析,EE 方法在单独检查每个因子时是有优势的,这以便于阻止相互抵消效应并提供一个较好定义的策略来估计每个单独因子的重要性。这种方法在概念上较为简单。它可以被认为是基于导数方法的一个拓展:当考虑单个的轨道时,输入因子的变动是很小的,它减少了增长比估计。无论如何,它都克服了局部的导数方法的限制,这使得它可以尝试探索整个输入空间。这种方法计算简单且有典型的 OAT 方法在控制不平稳模型上的灵活性。当一个模型不稳时,若在与用于校准的标称值远远不同的输入值集合上进行操作时,它会有崩溃的危险。当模型失败时,OAT 设计允许替换一个样本点并不改变整个设计,类似于 OAT 设计的这个特点,EE 方法是基于彼此独立的轨道的,当模型执行失败时它允许替代一个轨道,使得模型可以用另外的一个值更好地处理。最后的但是是最重要的,当有必要的时候,这种方法可以被用于组因素分析中,因此增加了设计的有效性。

3.8 习 题

1. 给定 3 个输入因子 X_1, X_2 与 X_3 , 3 个因子都服从 $[0, 1]$ 的均匀分布, 对 $p=4, p=6$ 与 $p=8$ 的情况构造一些轨道的例子。

2. 给定 3 个输入因子 X_1, X_2 与 X_3 , 三者都是均值为 0 方差为 1 的正态分布。构造一个 $p=6$ 层的轨道的例子(考虑在 0.5 与 99.5% 的地方截尾, 或者是用 2.4.3 节中所述的截断中心)。

3. 考虑两个输入因子 X_1 与 X_2 , 二者在 $[0, 1]$ 中均匀分布且层数 $p=4$ 。

(1) 根据修正的取样策略, 随机构造 $M=6$ 的轨道, 并通过 3.3 节中所述的方法选择 6 个中最好的 4 个。

(2) 通过图形来表明就输入空间的扫描而言, 新策略优于旧的。

4. 作为练习 3 的补充, 给定模型

$$y = \sin(\pi X_1) + \cos(\pi X_2/4) + \sqrt{X_1 X_2}$$



利用所有 $M=6$ 个轨道的集合并计算输入因子 X_1 与 X_2 敏感性测度 μ, μ^* 与 σ 。

5. 考虑一个有 15 个输入因子, 每个因子均为标准正态分布 $X_i \sim N(0, 1)$ 的模型。考虑函数(Oakley 与 O'Hagan, 2004)

$$y = \mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_2^T \cos(\mathbf{X}) + \mathbf{a}_3^T \sin(\mathbf{X}) + \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}$$

其中 $\mathbf{a}_j (j = 1, 2, 3)$ 与 $\mathbf{M}$ 分别是 3 个向量与一个参数矩阵, 其值在表 3.5 与表 3.6 中已经列出。考虑在 0.5 与 99.5% 处截尾的正态分布。对这个模型估计敏感性测度 μ^*, μ 。

6. 正如练习 5 中所述, 将 15 个因子分为两个由下面的矩阵 $\mathbf{G}$ 刻画的一组, 并在 $r=10$ 个轨道时对所有因子计算敏感性测度

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. 考虑有 Morris(1991)介绍的函数:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{20} \beta_i \omega_i + \sum_{i < j}^{20} \beta_{i,j} \omega_i \omega_j + \sum_{i < j < l}^{20} \beta_{i,j,l} \omega_i \omega_j \omega_l + \sum_{i < j < l < s}^{20} \beta_{i,j,l,s} \omega_i \omega_j \omega_l \omega_s$$

其中 $\omega_i = 2(X_i - 1/2)$, 当 $i = 3, 5, 7$ 时

$$\omega_i = 2(1.1X_i / (X_i + 0.1) - 1/2)$$

其参数向量和参数矩阵见表 3.5 和表 3.6。

表 3.5 Oakley-O'Hagan 函数的参数向量

参 数	a_1	a_2	a_3
X_1	0.01	0.43	0.10
X_2	0.05	0.09	0.21
X_3	0.23	0.05	0.08
X_4	0.04	0.32	0.27
X_5	0.12	0.15	0.13
X_6	0.39	1.04	0.75
X_7	0.39	0.99	0.86
X_8	0.61	0.97	1.03
X_9	0.62	0.90	0.84
X_{10}	0.40	0.81	0.80
X_{11}	1.07	1.84	2.21
X_{12}	1.15	2.47	2.04
X_{13}	0.79	2.39	2.40
X_{14}	1.12	2.00	2.05
X_{15}	1.20	2.26	1.98

表 3.6 Oakley-O'Hagan 函数的参数矩阵

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
X_1	-0.02	-0.19	0.13	0.37	0.17	0.14	-0.44	-0.08	0.71	-0.44	0.5	-0.02	-0.05	0.22	0.06
X_2	0.26	0.05	0.26	0.24	-0.59	-0.08	-0.29	0.42	0.5	0.08	-0.11	0.03	-0.14	-0.03	-0.22
X_3	-0.06	0.2	0.1	-0.29	-0.14	0.22	0.15	0.29	0.23	-0.32	-0.29	-0.21	0.43	0.02	0.04
X_4	0.66	0.43	0.3	-0.16	-0.31	-0.39	0.18	0.06	0.17	0.13	-0.35	0.25	-0.02	0.36	-0.33
X_5	-0.12	0.12	0.11	0.05	-0.22	0.19	-0.07	0.02	-0.1	0.19	0.33	0.31	-0.08	-0.25	0.37
X_6	-0.28	-0.33	-0.1	-0.22	-0.14	-0.14	-0.12	0.22	-0.03	-0.52	0.02	0.04	0.36	0.31	0.05
X_7	-0.08	0.004	0.89	-0.27	-0.08	-0.04	-0.19	-0.36	-0.17	0.09	0.4	-0.06	0.14	0.21	-0.01
X_8	-0.09	0.59	0.03	-0.03	-0.24	-0.1	0.03	0.1	-0.36	0.01	-0.61	0.08	0.89	0.14	0.15
X_9	-0.13	0.53	0.13	0.05	0.58	0.37	0.11	-0.27	-0.57	0.46	-0.09	0.14	-0.39	-0.45	-0.15
X_{10}	0.06	-0.32	0.09	0.07	-0.57	0.53	0.24	-0.01	0.07	0.08	-0.13	0.23	0.14	-0.45	-0.56
X_{11}	0.66	0.35	0.14	0.52	-0.28	-0.16	-0.07	-0.2	0.07	0.23	-0.04	-0.16	0.22	0	-0.09
X_{12}	0.32	-0.03	0.13	0.13	0.05	-0.17	0.18	0.06	-0.18	-0.31	-0.25	0.03	-0.43	-0.62	-0.03
X_{13}	-0.29	0.03	0.03	-0.12	0.03	-0.34	-0.41	0.05	-0.27	-0.03	0.41	0.27	0.16	-0.19	0.02
X_{14}	-0.24	-0.44	0.01	0.25	0.07	0.25	0.17	0.01	0.25	-0.15	-0.08	0.37	-0.3	0.11	-0.76
X_{15}	0.04	-0.26	0.46	-0.36	-0.95	-0.17	0.003	0.05	0.23	0.38	0.46	-0.19	0.01	0.17	0.16

每个输入因子 X_i 均匀分布在 $[0, 1]$ 上。相对大的值的系数为: $\beta_i = 20$, $i=1, \dots, 10$; $\beta_{i,j} = -15$, $i, j=1, \dots, 6$; $\beta_{i,j,l} = -10$, $i, j, l=1, \dots, 5$; $\beta_{i,j,l,s=5,i,j,l,s=1, \dots, 4}$ 。剩下的第一、第二阶的系数在构造时是独立地从一个均值为 0 单位标准偏差的正态分布产生得到的。剩下的第三、第四阶的系数都设为 0。对这个测试情况,在 $r=10$ 时用最优化取样策略估计敏感性分析测度 μ^* , μ , σ , 并讨论结果, 考虑函数 y 的结构。

8. 作为练习 7 的补充,将 20 个参数分组到如下由矩阵 $\mathbf{G}$ 刻画的 $g=4$ 个组中,并在 $r=10$ 个轨道时对这些组计算敏感性测度。利用练习 7 中的敏感性信息讨论结果。

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.9 习题解答

1. 我们单独地对待 $p=4, 6, 8$ 的这三种情形。



(1) 层数 $p=4$

层为 $\{0, 1/3, 2/3\}$ 。考虑 Δ 的最优值, 其中 $\Delta=2/3$, 并设随机产生的 x^* , D^* 与 P^* 为

$$x^* = [0, 1/3, 1/3], D^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对这些值

$$(\Delta/2)[(2B - J_{k+1,k})D^* + J_{k+1,k}] = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & \Delta \end{bmatrix}$$

并且

$$B^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

得到的轨道为 $x^{(1)} = (1/3, 1/3, 2/3)$, $x^{(2)} = (1/3, 1/3, 0)$, $x^{(3)} = (1, 1/3, 0)$, $x^{(4)} = (1, 1, 0)$ 。

(2) 层数 $p=6$

层为 $\{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$, 考虑 $\Delta=3/5$, 且设随机产生的 x^* , D^* 与 P^* 为 $x^* = [0, 1/5, 2/5]$,

$$D^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对这些值

$$(\Delta/2)[(2B - J_{k+1,k})D^* + J_{k+1,k}] = \begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \Delta \\ 0 & \Delta & \Delta \\ 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并且

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 1/5 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

得到的轨道为 $x^{(1)} = (1, 3/5, 4/5)$, $x^{(2)} = (1, 0, 4/5)$, $x^{(3)} = (1, 0, 1/5)$, $x^{(4)} = (2/5, 0, 1/5)$ 。

(3) 层数 $p=8$

这些层为 $\{0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7, 1\}$, 考虑 $\Delta = 3/7$, 且设随机产生的 $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{D}^*$ 与 $\mathbf{P}^*$ 为

$$\mathbf{x}^* = [1/7, 3/7, 2/7],$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对这些值

$$(\Delta/2)[(2\mathbf{B} - \mathbf{J}_{k+1,k})\mathbf{D}^* + \mathbf{J}_{k+1,k}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta \\ \Delta & 0 & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

并且

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1/7 & 5/7 & 3/7 \\ 4/7 & 5/7 & 3/7 \\ 4/7 & 5/7 & 6/7 \\ 4/7 & 2/7 & 6/7 \end{bmatrix}$$

得到的轨道为 $x^{(1)} = (1/7, 5/7, 3/7)$, $x^{(2)} = (4/7, 5/7, 3/7)$, $x^{(3)} = (4/7, 5/7, 6/7)$, $x^{(4)} = (4/7, 2/7, 6/7)$ 。

2. ● 截尾。由于因子不是均匀分布的, 分位数首先被取样得到, 然后根据因子得到分位数对应的值。在这个练习中我们在每个尾上截取分布的 0.5%。首先取样分位点

$$\{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$$

考虑 $\Delta = 0.6$ 并且随机取样得到的 $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{D}^*$ 与 $\mathbf{P}^*$ 为



$$\mathbf{x}^* = [0.2, 0.4, 0.4], \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对这些值

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.2 \\ 1.0 & 1.0 & 0.8 \\ 0.4 & 1.0 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

截尾之后,重新调整值的范围是 $[0.000\ 5, 0.995]$,因此得到

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.995 & 0.203 \\ 0.995 & 0.995 & 0.797 \\ 0.401 & 0.995 & 0.797 \\ 0.401 & 0.401 & 0.797 \end{bmatrix}$$

最后通过应用逆正态累积函数 Φ^{-1} ,最后得到因子的值为

$$\Phi^{-1} \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 2.576 & 2.576 & -0.831 \\ 2.576 & 2.576 & 0.831 \\ -0.251 & 2.576 & 0.831 \\ -0.251 & -0.251 & 0.831 \end{bmatrix}$$

● 截取中心。在这个情形下我们将区间 $[0, 1]$ 分为 6 个子区间并且考虑箱中心为如下层:

$$\{0.083, 0.250, 0.417, 0.583, 0.750, 0.917\}$$

考虑 $\Delta=0.5$, $\mathbf{x}^* = [0.083, 0.417, 0.250]$, 并且得到的 $\mathbf{D}^*$ 与 $\mathbf{P}^*$ 和上面一样, 那么得到

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0.917 & 0.750 & 0.083 \\ 0.917 & 0.750 & 0.583 \\ 0.417 & 0.750 & 0.583 \\ 0.417 & 0.250 & 0.583 \end{bmatrix}$$

通过应用逆正态累积函数 Φ^{-1} ,最后得到因子的值为

$$\Phi^{-1}\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1.383 & 0.675 & -1.383 \\ 1.383 & 0.675 & 0.210 \\ -0.210 & 0.675 & 0.210 \\ -0.210 & -0.675 & 0.210 \end{bmatrix}$$

3. (1) 考虑得到如下的 6 个轨道:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1^* &= \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3^* = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_4^* &= \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据 3.3 节中的定义, 定义 $X_{z(m)}^{(i)}$ 为第 m 个轨道 ($m=1, 2, \dots, 6$) 上第 i ($i=1, 2, 3$) 个点的 z -成分 ($z=1, 2$)。例如, 如下展示了如何计算轨道 $\mathbf{B}_1^*$ 与 $\mathbf{B}_3^*$ 之间的距离

$$\begin{aligned} \text{EE}_{13} &= \sqrt{[X_1^{(1)}(1) - X_1^{(1)}(3)]^2 + [X_2^{(1)}(1) - X_2^{(1)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(1)}(1) - X_1^{(2)}(3)]^2 + [X_2^{(1)}(1) - X_2^{(2)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(1)}(1) - X_1^{(3)}(3)]^2 + [X_2^{(1)}(1) - X_2^{(3)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(2)}(1) - X_1^{(1)}(3)]^2 + [X_2^{(2)}(1) - X_2^{(1)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(2)}(1) - X_1^{(2)}(3)]^2 + [X_2^{(2)}(1) - X_2^{(2)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(2)}(1) - X_1^{(3)}(3)]^2 + [X_2^{(2)}(1) - X_2^{(3)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(3)}(1) - X_1^{(1)}(3)]^2 + [X_2^{(3)}(1) - X_2^{(1)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(3)}(1) - X_1^{(2)}(3)]^2 + [X_2^{(3)}(1) - X_2^{(2)}(3)]^2} \\ &\quad + \sqrt{[X_1^{(3)}(1) - X_1^{(3)}(3)]^2 + [X_2^{(3)}(1) - X_2^{(3)}(3)]^2} \\ &= \sqrt{(2/3)^2 + (1/3)^2} + \sqrt{(2/3)^2 + (1/3)^2} + \sqrt{(1/3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(2/3)^2} + \sqrt{(2/3)^2 + (1)^2} + \sqrt{(2/3)^2 + (1/3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(1/3)^2} + \sqrt{(1)^2} + \sqrt{(1/3)^2} + \sqrt{(2/3)^2 + (1/3)^2} \\ &= 6.18 \end{aligned}$$

完整的距离矩阵通过在每对取样的轨道之间应用距离定义得到 [见 (式 3.3)]。



$$d_{ml} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 5.50 & 0.00 \\ 6.18 & 5.31 & 0.00 \\ 6.89 & 6.18 & 6.57 & 0.00 \\ 6.18 & 5.31 & 5.41 & 5.50 & 0.00 \\ 7.52 & 5.99 & 5.52 & 7.31 & 5.77 & 0.00 \end{bmatrix}$$

为了选择轨道的最优集,有必要考虑所有在 6 个轨道中 4 个轨道可能的组合,然后估计它们距离平方和的平方根 D 。表 3.7 表明了此练习中可能的组合。最优集是 $B_1^*, B_3^*, B_4^*, B_6^*$ 。

表 3.7 6 个轨道中 4 个轨道的可能组合与对应的用最优集识别得到的值

轨道 (i, j, l, m)	D	轨道 (i, j, l, m)	D
1—2—3—4	15.022	1—3—5—6	15.685
1—2—3—5	13.871	1—4—5—6	16.098
1—2—3—6	14.815	2—3—4—5	14.049
1—2—4—5	14.582	2—3—4—6	15.146
1—2—4—6	16.178	2—3—5—6	14.333
1—2—5—6	14.912	2—4—5—6	14.807
1—3—4—5	15.055	3—4—5—6	14.825
1—3—4—6	16.410		

(2) 图 3.9 表明了用最优轨道方案(底部图)与原始轨道方案(顶部图)时 X_1 与 X_2 样本值的直方图,这里假设原始方案将前 4 个构造的结果(如 $B_1^*, B_3^*, B_4^*, B_6^*$)。图 3.10 表示了初始轨道(顶图)与优化轨道(底图)的路径。从探索的层(取样的分布与理论分布相匹配)与轨道的分布情况看,最优策略得到了更好的样本。

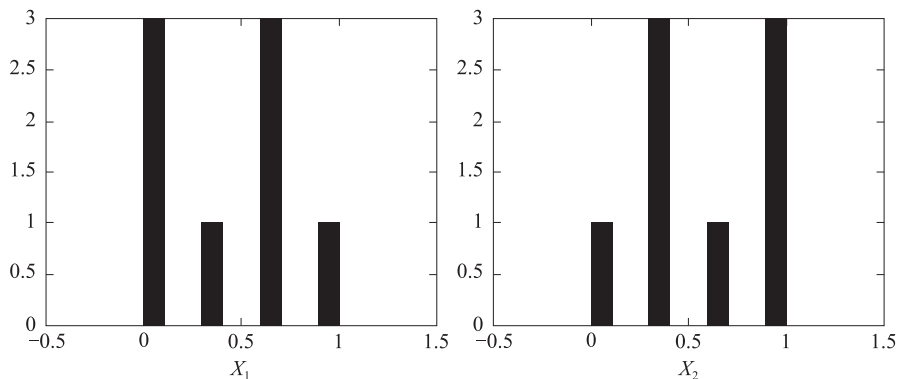


图 3.9 练习 3 得到的初始取样分布(顶图)与最优化取样分布(底图)

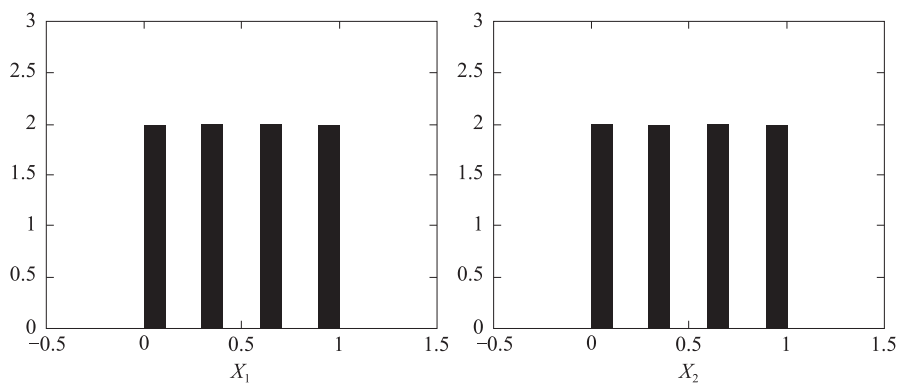


图 3.9 (续)

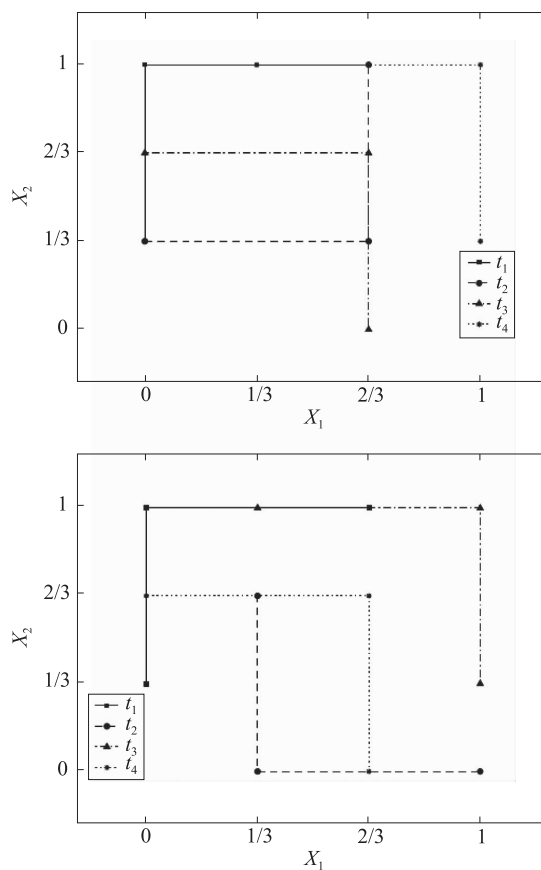


图 3.10 练习 3 中取样的初始轨道路径(顶图)与最优化轨道路径(底图)



4. 给定取样输入的值,对应的输出值在表 3.8 中列出。在图 3.11 种画出的图表明了作为 X_1 (顶图)与 X_2 (底图)的函数的输出。

表 3.8 练习 4 中在 $r=6$ 个轨道时的样本值与输出值

	X_1	X_2	Y
t_1	0	1/3	0.97
	0	1	0.71
	2/3	1	2.39
t_2	0	1/3	0.97
	2/3	1/3	2.30
	2/3	1	2.39
t_3	2/3	0	1.87
	2/3	2/3	2.40
	0	2/3	0.87
t_4	1/3	1	2.15
	1	1	1.71
	1	1/3	1.54
t_5	1/3	1	2.15
	1/3	1/3	2.17
	1	1/3	1.54
t_6	1/3	2/3	2.20
	1/3	0	1.87
	1	0	1.00

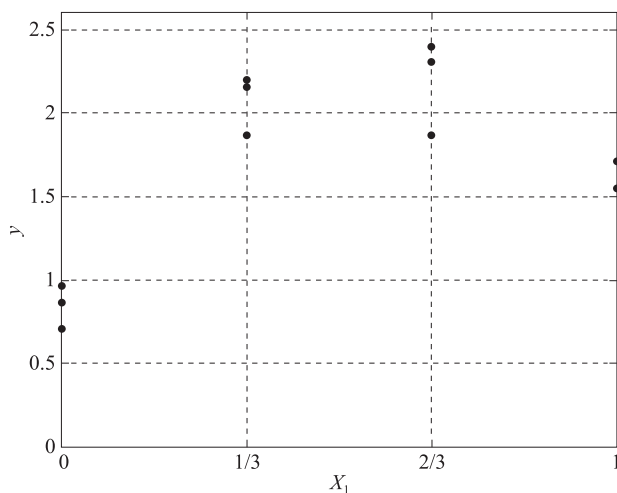


图 3.11 $y = \sin(\pi X_1) + \cos(\pi X_2/4) + \sqrt{X_1 X_2}$ 作为 X_1 (顶图)与 X_2 (底图)函数的散点图

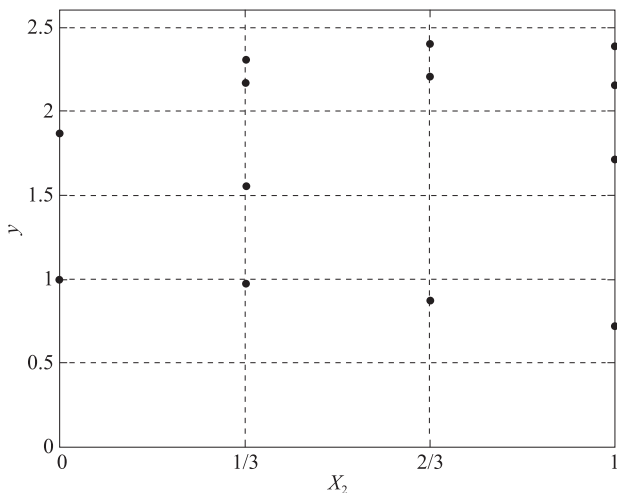


图 3.11 (续)

为了计算敏感性测度 μ, μ^*, σ , 我们估计的 X_1 与 X_2 的元效应与其在每个轨道上的绝对值在表 3.9 中列出了。测度 μ 与 σ 是这些元效应的均值与标准差:

$$\mu(X_1) = \frac{2.52 + 2.01 + 2.30 - 0.66 - 0.93 - 1.30}{6} = 0.66$$

$$\sigma(X_1) = \sqrt{\frac{(2.52 - 0.66)^2 + 1.35^2 + 1.64^2 + (-1.32)^2 + (-1.59)^2 + (-1.96)^2}{5}}$$

$$= 1.79$$

$$\mu(X_2) = \frac{-0.39 + 0.13 + 0.80 + 0.25 - 0.02 + 0.51}{6} = 0.21$$

$$\sigma(X_2) = \sqrt{\frac{(-0.6)^2 + (-0.08)^2 + 0.59^2 + 0.03^2 + (-0.23)^2 + 0.30^2}{5}} = 0.41$$

表 3.9 练习 4 中的元效应与其绝对值的计算结果

		$y(X_i + \Delta, X_j)$	$y(X_i, X_j)$	$EE_i(X)$	$ EE_i(X) $
X_1	t_1	2.39	0.71	2.52	2.52
	t_2	2.30	0.97	2.01	2.01
	t_3	2.40	0.87	2.30	2.30
	t_4	1.71	2.15	-0.66	0.66
	t_5	1.54	2.17	-0.93	0.93
	t_6	1.00	1.87	-1.30	1.3



续表

		$y(X_i + \Delta, X_j)$	$y(X_i, X_j)$	$EE_i(X)$	$ EE_i(X) $
X_2	t_1	0.71	0.97	-0.39	0.39
	t_2	2.39	2.30	0.13	0.13
	t_3	2.40	1.87	0.80	0.80
	t_4	1.71	1.54	0.25	0.25
	t_5	2.15	2.17	-0.02	0.02
	t_6	2.20	1.87	0.51	0.51

μ^* 代替了这些元效应均值的绝对值:

$$\mu^*(X_1) = \frac{2.52 + 2.01 + 2.30 + 0.66 + 0.93 + 1.30}{6} = 1.62$$

$$\mu^*(X_2) = \frac{0.39 + 0.13 + 0.80 + 0.25 + 0.02 + 0.51}{6} = 0.35$$

μ^* 与 σ 的值表明 X_1 明显比 X_2 重要。

5. 由于因子是正态分布的,正如 3.4 节中所述,需要对分位点取样,然后用逆正态累积分布函数来得到这些分位点对应的值。在这个练习中,分位点通过对正态分布在分位点 0.5% 与 99.5% 处截尾,然后将得到的新区间分为 3 个区间。不截尾情况的练习留给读者进行,并且类似练习 2,读者可以将整个空间分为 4 个区间截断箱。

表 3.10 给出了 $r=4$ 个轨道组成的一个样本。最后一列是对应的输出值。轨道用 $t_i, i=1, 2, 3, 4$ 进行标记。

考虑因子 X_1 , 它的元效应见表 3.11。注意估计 $EE_i(X)$ 与它的绝对值,重新调整的因子是 $\Delta=2/3$ (如因子在这个空间的分位点 $[0, 1]$ 上的变动), 表 3.12 表明了每个因素每个轨道的元效应。

表 3.10 Oakley-O'Hagan 函数的取样轨道(标记为 t_1, t_2, t_3, t_4)与对应的值

t_1															
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	Y
1.64	-1.64	-1.64	0.39	-0.39	0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-0.39	1.64	1.64	-0.39	0.39	1.64	24.90
1.64	-1.64	-1.64	0.39	-0.39	-1.64	-1.64	-1.64	-0.39	-0.39	1.64	1.64	-0.39	0.39	1.64	22.72
1.64	-1.64	-1.64	0.39	-0.39	-1.64	-1.64	-1.64	1.64	-0.39	1.64	1.64	-0.39	0.39	1.64	21.04
1.64	-1.64	-1.64	0.39	-0.39	-1.64	-1.64	0.39	1.64	-0.39	1.64	1.64	-0.39	0.39	1.64	16.01
1.64	-1.64	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	0.39	1.64	-0.39	1.64	1.64	-0.39	0.39	1.64	10.40
1.64	-1.64	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	0.39	1.64	-0.39	1.64	-0.39	-0.39	0.39	1.64	10.04
1.64	-1.64	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	0.39	1.64	-0.39	1.64	-0.39	-0.39	-1.64	1.64	8.60
1.64	0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-0.64	-0.64	0.39	1.64	-0.39	1.64	0.39	-0.39	-1.64	1.64	13.39

续表

t_1															
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	Y
1.64	0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	0.39	1.64	-0.39	1.64	-0.39	-0.39	-1.64	-0.39	4.69
1.64	0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-1.64	-0.39	8.02
1.64	0.39	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-1.64	-0.39	9.98
1.64	0.39	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-0.39	-1.64	-0.39	3.75
1.64	0.39	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-0.39	-1.64	-0.39	1.33
1.64	0.39	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-0.39	-1.64	0.39	2.59
-0.39	0.39	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-0.39	-1.64	-0.39	6.37
-0.39	0.39	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	1.64	1.64	-0.39	-0.39	1.64	-1.64	-0.39	9.99
t_2															
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	Y
-0.39	-0.39	0.39	0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-0.39	-0.39	1.64	1.64	14.04
-0.39	-0.39	0.39	0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	12.86
-0.39	-0.39	0.39	0.39	-0.39	-0.39	1.64	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	15.42
-0.39	-0.39	0.39	0.39	-0.39	-0.39	1.64	-1.64	-1.64	-0.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	14.56
-0.39	1.64	0.39	0.39	-0.39	-0.39	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	6.17
-0.39	1.64	0.39	0.39	1.64	-0.39	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	0.96
-0.39	1.64	0.39	0.39	1.64	-0.39	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	1.64	2.91
-0.39	1.64	-1.64	0.39	1.64	-0.39	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	1.64	-3.65
-0.39	1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	1.64	-6.31
-0.39	1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.70
-0.39	1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	-1.64	1.64	1.64	1.64	-0.39	-11.79
-0.39	1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	-1.64	1.64	1.64	1.64	-0.39	-16.95
-0.39	1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-15.54
-0.39	1.64	-1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.65	1.65	-0.39	-0.39	-3.01
-0.39	1.64	-1.64	-1.64	1.64	1.64	1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-2.12
1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	1.64	1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-14.36
t_3															
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	Y
0.39	0.39	-0.39	-0.39	0.39	0.39	-1.64	0.39	-0.39	1.64	-0.39	0.39	-1.64	1.64	-1.64	3.96
0.39	0.39	-0.39	-0.39	0.39	0.39	-1.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	2.92
0.39	0.39	-0.39	1.64	0.39	0.39	-1.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	9.78
0.39	0.39	-0.39	1.64	0.39	0.39	-1.64	0.39	-0.39	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	1.96
-1.64	0.39	-0.39	1.64	0.39	0.39	0.39	0.39	-0.39	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	-5.53
-1.64	0.39	-0.39	1.64	0.39	0.39	0.39	0.39	-0.39	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	1.87
-1.64	0.39	1.64	1.64	0.39	0.39	0.39	0.39	-0.39	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	-0.45
-1.64	-1.64	1.64	1.64	0.39	0.39	0.39	0.39	-0.39	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	-3.81
-1.64	-1.64	1.64	1.64	0.39	0.39	0.39	-1.64	-0.39	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	0.78
-1.64	-1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	-1.64	-0.39	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	1.64	0.27
-1.64	-1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	0.17
-1.64	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	-5.89
-1.64	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	1.64	-1.64	-0.63
-1.64	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	1.64	0.39	8.37
-1.64	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-0.39	0.39	5.65
-1.64	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-0.39	1.64	-1.64	0.39	-0.39	0.39	-1.91



续表

t_4															
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	Y
1.64	-0.39	1.64	-0.39	0.39	0.39	-1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	0.39	-1.64	0.39	0.39	5.05
1.64	-0.39	1.64	-0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	0.39	-1.64	0.39	0.39	3.91
1.64	-0.39	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	0.39	-1.64	0.39	0.39	6.81
1.64	-0.39	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	0.39	-1.64	0.39	0.39	5.58
1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	0.39	-1.64	0.39	0.39	11.79
1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	0.39	0.39	-1.64	0.39	-1.64	5.00
1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	0.77
-0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.38
-0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	-1.64	-1.64	-10.16
-0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	0.39	-1.64	0.39	0.39	-1.64	-1.64	3.51
-0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	0.39	0.39	-1.64	0.39	0.39	-1.64	-1.64	10.29
-0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	-0.39	0.39	0.39	-1.64	0.39	0.39	-1.64	-1.64	-0.14
-0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	-0.39	0.39	0.39	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	-1.64	-9.34
-0.39	1.64	-0.39	1.64	-1.64	0.39	-1.64	-0.39	0.39	0.39	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	-1.64	-7.57
-0.39	1.64	-0.39	1.64	-1.64	0.39	0.39	-0.39	0.39	0.39	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	-1.64	-7.90
-0.39	1.64	-0.39	1.64	-1.64	-1.64	0.39	-0.39	0.39	0.39	-1.64	-1.64	0.39	-1.64	-1.64	-7.06

表 3.11 练习 5 种因子 X_i 的元效应的估计

	$y(X_1 + \Delta, X_{-1})$	$y(X_1, X_{-1})$	$EE_1(X)$	$ EE_1(X) $
t_1	2.59	6.37	-5.67	5.67
t_2	-14.36	-2.12	-18.36	18.36
t_3	1.96	-5.53	11.24	11.24
t_4	0.77	1.38	-0.92	0.92

表 3.12 练习 5 种用 $r=4$ 个轨道时(表 3.10)的所有因子的元效应

	t_1	t_2	t_3	t_4
X_1	-5.67	-18.36	11.24	-0.92
X_2	7.18	-12.58	5.04	9.31
X_3	1.89	9.84	-3.47	-2.66
X_4	8.42	-1.33	10.29	4.34
X_5	2.93	-7.82	1.57	1.71
X_6	3.28	-3.99	9.10	-1.25
X_7	-3.62	3.85	11.1	-0.5
X_8	-7.55	18.8	-6.89	15.65
X_9	-2.51	1.30	0.66	10.18
X_{10}	5.00	2.11	11.33	-1.83
X_{11}	9.34	16.64	-1.56	6.35
X_{12}	0.54	2.93	11.72	13.81
X_{13}	5.43	-1.78	7.90	20.5

续表

	t_1	t_2	t_3	t_4
X_{14}	2.15	7.74	4.08	17.31
X_{15}	13.05	-8.41	13.49	10.19

例如, X_1 的 3 个敏感性测度如下得到

$$\mu(X_1) = \frac{-5.67 - 18.36 + 11.24 - 0.92}{4} = -3.42$$

$$\mu^*(X_1) = \frac{5.67 + 18.36 + 11.24 + 0.92}{4} = 9.05$$

$$\sigma(X_1) = \sqrt{\frac{(-2.24)^2 + (-14.93)^2 + (14.67)^2 + (2.51)^2}{3}} = 12.24$$

表 3.13 的 2~4 列表明了 Oakley-O'Hagan 函数在 $r=4$ 时敏感性分析的结果, $r=10$ 的结果同样在表中列出了。从比较的角度而言, 最后的两列表明了因子的所有阶与第一阶敏感性指数的分析值。

表 3.13 Oakley-O'Hagan 函数在 $r=4$ 时敏感性分析的结果, $r=10$ 的结果同样在表中列出了。
从比较的角度而言, 最后的两列表明了因子的所有阶与第一阶敏感性指数的分析值

	$r=4$			$r=10$			Analytics	Analytics
	μ^*	μ	σ	μ^*	μ	σ	S_T	S
X_1	9.05	-3.42	12.24	6.21	0.98	6.77	0.059	0.002
X_2	8.53	2.24	10.03	3.35	1.28	4.46	0.063	0.000
X_3	4.46	1.40	6.10	6.54	0.77	7.59	0.036	0.001
X_4	6.09	5.43	5.14	4.54	0.63	5.49	0.055	0.003
X_5	3.51	-0.4	4.98	3.13	-0.67	4.51	0.024	0.003
X_6	4.40	1.78	5.72	5.93	3.58	7.76	0.041	0.023
X_7	4.77	2.71	6.38	7.18	4.72	8.36	0.058	0.024
X_8	12.22	5.00	14.17	5.26	2.38	6.30	0.082	0.027
X_9	3.66	2.41	5.44	8.25	7.10	7.87	0.097	0.046
X_{10}	5.07	4.15	5.54	2.79	1.04	3.91	0.036	0.015
X_{11}	8.47	7.69	7.53	8.82	8.82	5.82	0.151	0.102
X_{12}	7.25	7.25	6.50	8.33	8.33	4.12	0.148	0.136
X_{13}	8.91	8.02	9.28	10.65	7.95	9.64	0.142	0.102
X_{14}	7.82	7.82	6.74	7.120	5.32	6.71	0.141	0.105
X_{15}	11.29	7.08	10.43	7.83	7.83	4.01	0.155	0.123

在实验中, $r=4$ 个轨道的使用无法帮助辨别因子的相对重要性。例如, 最重



要的因子通过 μ^* 可以得到是 X_8 , 同时通过 ST 的分析值它仅仅只是第 7 重要的因子。这些 Oakley-O'Hagan 函数的问题主要是由于所有因子对间的相互作用扮演了与模型相关的角色。增加轨道数到 $r=10$ 允许我们更好地理解模型的敏感性分析。图 3.12 表明在关于 Oakley-O'Hagan 函数输入的 μ^* 的柱状图。这个图突出了在这个模型中分辨因子的子集但不影响输出是不可能的。较大的 σ 证明了这与无法忽略的相互作用的出现有关, 甚至是存在于较低主要效应的因子 ($X_1, \dots, X_{10}$) 之间的相互作用。

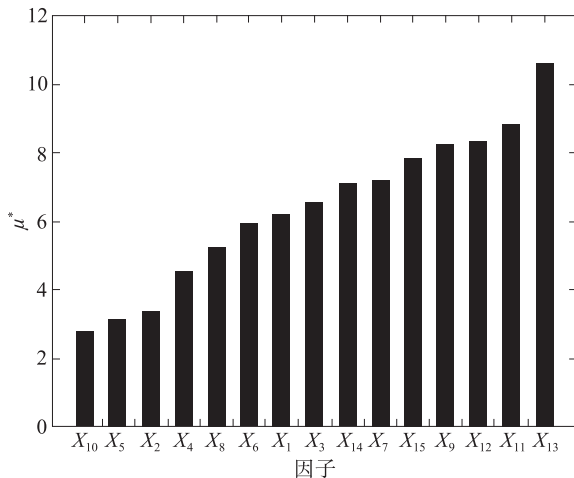


图 3.12 练习 5 中 μ^* 关于 Oakley-O'Hagan 函数的柱状图, 其中用了 $r=10$ 个轨道

6. 通过矩阵 G 与对前一个练习的思考, 因子被分组使得所有有高主要效应的输入在第一组中。表 3.14 表明的是通过矩阵 G 分组的 15 个因子的轨道。正如在练习 5 中, 由于因子是正态分布的, 分位点是首先被取样得到, 然后层是用逆累计分布函数得到的。

表 3.14 练习 6 中根据被矩阵 G 刻画的两个分组得到的轨道 (Oakley-O'Hagan 函数, $r=10$)

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	Y
0.39	-0.39	-1.64	0.39	-0.39	-0.39	0.39	0.39	-1.64	-0.39	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	13.85
-1.64	1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	-10.11
-1.64	1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	0.39	1.64	-1.64	0.39	-0.39	-0.39	-0.39	1.12
-0.39	-0.39	0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	0.39	-1.64	0.39	-0.39	0.39	0.39	0.39	13.37
-0.39	-0.39	0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	-13.33
1.64	1.64	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-0.39	-0.39	-1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	-1.64	-1.64	-12.68
1.64	-1.64	1.64	1.64	1.64	-0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-0.39	1.64	1.64	-1.64	1.64	0.39	15.65
1.64	-1.64	1.64	1.64	1.64	-0.39	-1.64	-1.64	1.64	-0.39	-0.39	-0.39	0.39	-0.39	-1.64	1.59

续表

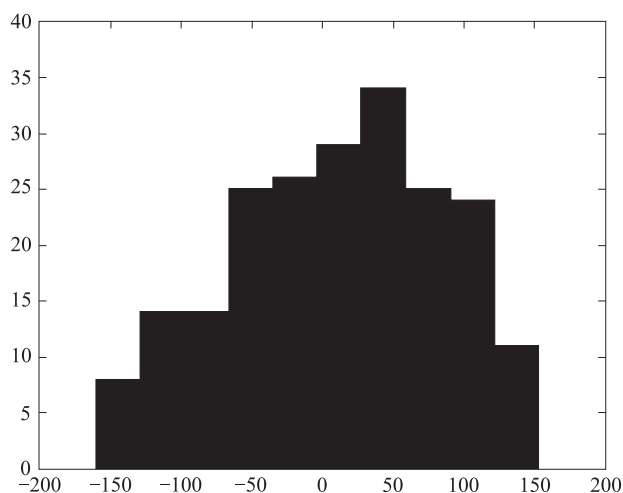
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	Y
-0.39	0.39	-0.39	-0.39	-0.39	1.64	0.39	0.39	1.64	1.64	-0.39	-0.39	0.39	-0.39	-1.64	10.99
-0.39	-1.64	-1.64	0.39	0.39	-0.39	0.39	-0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	1.64	22.92
1.64	0.39	0.39	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	1.64	-0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	-1.64	1.64	22.62
1.64	0.39	0.39	-1.64	-1.64	1.64	-1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	0.39	-0.39	6.42
1.64	1.64	-1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	1.64	0.39	1.64	0.39	-0.39	0.39	-0.39	1.64	18.01
1.64	1.64	-1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	1.64	-1.64	1.64	-1.64	1.64	-1.64	1.64	-0.39	3.82
-0.39	-0.39	0.39	-0.39	-0.39	1.64	1.64	-0.39	-1.64	-0.39	-1.64	1.64	-1.64	1.64	-0.39	9.27
0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-0.39	-0.39	-0.39	-1.64	0.39	-1.64	0.39	-0.71
0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	-0.39	-1.64	1.64	-0.39	1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	0.62
-1.64	0.39	0.39	1.64	0.39	0.39	1.64	0.39	1.64	1.64	1.64	0.39	-1.64	0.39	-1.64	10.63
-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	1.64	1.64	-1.64	-0.39	0.39	-1.64	1.64	0.39	16.47
-1.64	-1.64	0.39	-1.64	1.64	1.64	1.64	1.64	-0.39	-1.64	1.64	-1.64	0.39	-0.39	-1.64	2.33
0.39	0.39	-1.64	0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	0.39	1.64	-1.64	0.39	-0.39	-1.64	7.41
-1.64	1.64	1.64	0.39	-0.39	1.64	-1.64	1.64	1.64	1.64	1.64	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	9.8
-1.64	1.64	1.64	0.39	-0.39	1.64	-1.64	1.64	-0.39	1.64	-0.39	1.64	1.64	1.64	1.64	20.97
0.39	-0.39	-0.39	-1.64	1.64	-0.39	0.39	-0.39	-0.39	-0.39	-0.39	1.64	1.64	1.64	1.64	12.8
-1.64	-0.39	-0.39	1.64	-0.39	0.39	1.64	0.39	-1.64	1.64	0.39	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-0.45
0.39	1.64	1.64	-0.39	1.64	-1.64	-0.39	-1.64	-1.64	-0.39	0.39	1.64	-1.64	-1.64	1.64	-5.59
0.39	1.64	1.64	-0.39	1.64	-1.64	-0.39	-1.64	0.39	-0.39	-1.64	-0.39	0.39	0.39	-0.39	-2.07
-1.64	0.39	0.39	0.39	0.39	-0.39	-1.64	0.39	-0.39	0.39	-0.39	-1.64	1.64	-0.39	-1.64	2.29
0.39	-1.64	-1.64	-1.64	-1.64	1.64	0.39	-1.64	-0.39	-1.64	-0.39	-1.64	1.64	-0.39	-1.64	-6.87
0.39	-1.64	-1.64	-1.64	-1.64	1.64	0.39	-1.64	1.64	-1.64	1.64	0.39	-0.39	1.64	0.39	17.23

表 3.15 表明了每个组在使用 10 个轨道是元效应的估计的绝对值。组(最后一列)的 μ^* 值是超过 10 次估计的平均值。这显然可以得到第一列比第二列更重要。但是,这同样也确认了 G_2 中的因子实际上在输出中(同样可以看到在表 3.13 中的 S_T 的值)扮演了一定的角色,因此这些因子无法被忽视。

表 3.15 练习 6 中为两个分组得到的元效应绝对值, μ^* 是超过 10 个估计的平均值

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	μ^*
G_1	16.86	40.06	21.09	24.3	21.29	1.99	21.2	16.75	5.28	36.16	20.5
G_2	35.95	0.97	14.1	0.45	8.18	15.01	7.62	12.26	7.70	13.75	11.6

7. 由于因子的数量非常多,我们将无法用于敏感性分析的完整样本表示出来。但是图 3.13 展示了 $p=4$ 层, $r=10$ 个轨道下(如 $N=210$ 次模型评估) y 的直方图。表 3.16 表明了敏感性分析的结果。图 3.14 通过展示 $\{\mu^*, \sigma\}$ 的散点图来帮助理解这些结果。这是 Morris (1991)所建议的。

图 3.13 练习 7 中 $r=10$ 个轨道时得到的 Morris 函数的经验密度表 3.16 练习 7 中 $r=10$ 个轨道时 Morris 函数的敏感性分析

	μ^*	μ	σ
X_1	71.644	55.256	54.648
X_2	64.290	64.29	37.737
X_3	88.207	55.572	94.737
X_4	73.038	9.310	91.918
X_5	44.777	32.874	55.793
X_6	45.280	35.187	44.940
X_7	27.039	27.039	23.594
X_8	40.716	40.716	5.789
X_9	40.385	40.385	6.101
X_{10}	39.706	39.706	6.400
X_{11}	5.252	1.232	6.608
X_{12}	4.324	1.494	4.990
X_{13}	6.268	0.922	7.892
X_{14}	5.183	0.192	6.845
X_{15}	8.842	3.797	9.773
X_{16}	6.201	2.183	7.511
X_{17}	3.389	-1.335	4.291
X_{18}	4.903	-1.540	5.338
X_{19}	4.989	-0.766	5.686
X_{20}	3.854	-2.407	5.087

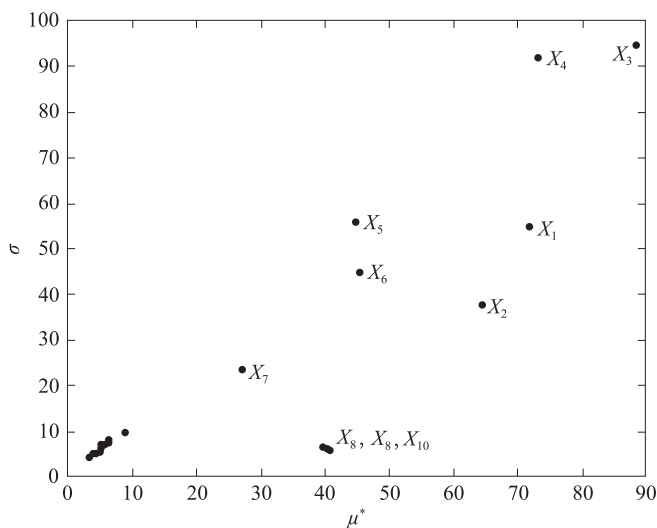


图 3.14 练习 7 中 $r=10$ 个轨道时 Morris 函数的敏感性分析的结果

图 3.15 展示了函数 y 的输入的 μ^* 值的水平柱状图。因子 $X_{11}, \dots, X_{20}$ 的不可忽视性是一目了然的。实际上,观察 y 的结构,它们的系数从来都没有变得很大。因子 X_8, X_9, X_{10} 有很强的线性效应(因此 $1 \sim 10, \beta_i = 20$)。线性效应加上 X_7 的非

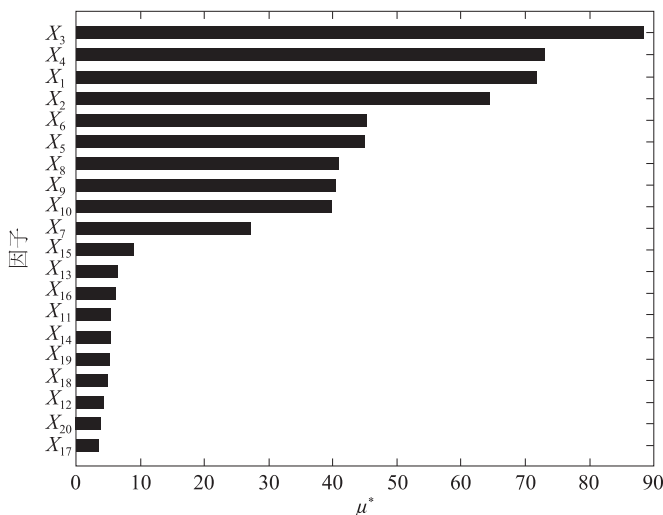


图 3.15 练习 7 中 $r=10$ 个轨道时 Morris 函数的 μ^* 值的水平柱状图



线性影响,由于改造 $\omega_i = 2[1.1X_i/(X_i + 0.1) - 1/2]$, 同样由于较大的标准差值而被捕捉。最后,因子 $X_1, \dots, X_6$ 是所有被分辨为有影响的,并具有线性、非线性与非可加的效应。

8. 表 3.17 表明了各组的样本与对应的输出值。注意所得结果上很小的不同可能是由于参数 $\beta_i, \beta_{i,j}, \beta_{i,j,k}, \beta_{i,j,k,l}$ 是全部随机生成的原因。表 3.18 展示了每个组均沿着 10 个轨道的元效应 $|EE_i(X)|$ 的绝对值。结果也证明了有 3 个相关组 (G_1, G_2 和 G_4) 并且有一个组对输出有较低的影响 (G_3)。这确实是正确的,由于在 $G_3(X_{14}, X_{15}, X_{16}$ 和 $X_{17})$ 中有较低的主要效应与较低的相互作用(同样见表 3.16)。甚至 G_1, G_2 与 G_3 的相对重要性反映了函数 y 的结构与前面练习中敏感性分析的结果。

表 3.17 练习 8 中 $r=10$ 个轨道时样本的分析

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	Y
t_1	0	0	1	1	1/3	1	1	1/3	0	0	1	0	0	1/3	2/3	1/3	1/3	1	0	0	58.28
	0	0	1	1	1/3	1	1	1/3	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	68.24
	0	0	1	1	1/3	1/3	1/3	1	2/3	0	1	0	2/3	1	0	1	1	1/3	0	0	87.75
	0	0	1	1/3	1	1/3	1/3	1	2/3	0	1	0	2/3	1	0	1	1	1/3	2/3	2/3	23.04
	2/3	2/3	1/3	1/3	1	1/3	1/3	1	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1	0	1	1	1/3	2/3	2/3	63.61
t_2	1	1/3	2/3	0	1/3	1/3	2/3	1	1/3	1/3	2/3	1/3	1/3	0	1/3	0	2/3	0	1	1/3	81.50
	1/3	1	0	0	1/3	1/3	2/3	1	1/3	1	0	1	1/3	0	1/3	0	2/3	0	1	1/3	38.17
	1/3	1	0	0	1/3	1/3	2/3	1	1/3	1	0	1	1/3	2/3	1	2/3	0	0	1	1/3	47.28
	1/3	1	0	0	1/3	1	0	1/3	1	1	0	1	1	2/3	1	2/3	0	2/3	1	1/3	43.58
	1/3	1	0	2/3	1	1	0	1/3	1	1	0	1	1	2/3	1	2/3	0	2/3	1/3	1	72.56
t_3	1	1	1/3	0	2/3	0	2/3	2/3	2/3	1	0	0	2/3	1	1/3	0	1	0	1/3	1/3	115.15
	1	1	1/3	2/3	0	0	2/3	2/3	2/3	1	0	0	2/3	1	1/3	0	1	0	1	1	116.45
	1	1	1/3	2/3	0	2/3	0	0	0	1	0	0	0	1	1/3	0	1	2/3	1	1	9.06
	1/3	1/3	1	2/3	0	2/3	0	0	0	1/3	2/3	2/3	0	1	1/3	0	1	2/3	1	1	-50.12
	1/3	1/3	1	2/3	0	2/3	0	0	0	1/3	2/3	2/3	0	1/3	1	2/3	1/3	2/3	1	1	-48.06
t_4	0	1/3	0	2/3	1/3	2/3	1	0	1	0	0	1	1/3	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1	1/3	-33.16
	0	1/3	0	0	1	2/3	1	0	1	0	0	1	1/3	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1	-67.02
	0	1/3	0	0	1	2/3	1	0	1	0	0	1	1/3	2/3	0	0	0	2/3	1/3	1	-60.14
	0	1/3	0	0	1	0	1/3	2/3	1/3	0	0	1	1	2/3	0	0	0	0	1/3	1	-132.66
	2/3	1	2/3	0	1	0	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1/3	1	2/3	0	0	0	0	1/3	1	81.88
t_5	1/3	0	2/3	0	0	1/3	2/3	1/3	1/3	0	1/3	2/3	1/3	0	2/3	1	1	1/3	1/3	2/3	-118.82
	1/3	0	2/3	0	0	1	0	1	1	0	1/3	2/3	1	0	2/3	1	1	1	1/3	2/3	-32.49
	1	2/3	0	0	0	1	0	1	1	2/3	1	0	1	0	2/3	1	1	1	1/3	2/3	30.46
	1	2/3	0	2/3	2/3	1	0	1	1	2/3	1	0	1	0	2/3	1	1	1	1	0	62.69
	1	2/3	0	2/3	2/3	1	0	1	1	2/3	1	0	1	2/3	0	1/3	1/3	1	1	0	57.40

续表

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	Y
t_6	1/3	2/3	0	1/3	1/3	0	1	0	1/3	1/3	2/3	1/3	1	2/3	1/3	2/3	1	0	2/3	2/3	-49.84
	1/3	2/3	0	1	1	0	1	0	1/3	1/3	2/3	1/3	1	2/3	1/3	2/3	1	0	0	0	36.19
	1	0	2/3	1	1	0	1	0	1/3	1	0	1	1	2/3	1/3	2/3	1	0	0	0	86.51
	1	0	2/3	1	1	2/3	1/3	2/3	1	1	0	1	1/3	2/3	1/3	2/3	1	2/3	0	0	104.25
	1	0	2/3	1	1	2/3	1/3	2/3	1	1	0	1	1/3	0	1	0	1/3	2/3	0	0	97.56
t_7	0	1	2/3	1	1	1	1/3	0	0	1/3	2/3	1/3	0	1/3	2/3	1	2/3	1	2/3	1	-13.28
	0	1	2/3	1	1	1	1/3	0	0	1/3	2/3	1/3	0	1	0	1/3	0	1	2/3	1	-17.35
	0	1	2/3	1/3	1/3	1	1/3	0	0	1/3	2/3	1/3	0	1	0	1/3	0	1	0	1/3	25.31
	2/3	1/3	0	1/3	1/3	1	1/3	0	0	1	0	1	0	1	0	1/3	0	1	0	1/3	1.93
	2/3	1/3	0	1/3	1/3	1/3	1	2/3	2/3	1	0	1	2/3	1	0	1/3	0	1/3	0	1/3	38.27
t_8	1/3	1/3	0	0	0	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	0	2/3	1/3	1	0	1/3	1/3	-103.13
	1	1	2/3	0	0	1/3	1/3	2/3	2/3	0	1	0	2/3	0	2/3	1/3	1	0	1/3	1/3	69.38
	1	1	2/3	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	2/3	1/3	1	2/3	1/3	1/3	34.50
	1	1	2/3	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	2/3	0	1	1/3	2/3	1/3	1/3	32.28
	1	1	2/3	2/3	2/3	1	1	0	0	0	1	0	0	2/3	0	1	1/3	2/3	1	1	-153.14
t_9	1/3	1	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1	1	0	1	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0	1	86.29
	1/3	1	1/3	1/3	2/3	0	0	1	1/3	1	0	1	0	1/3	2/3	2/3	2/3	0	0	1	68.73
	1/3	1	1/3	1/3	2/3	0	0	1	1/3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	60.16
	1	1/3	1	1/3	2/3	0	0	1	1/3	1/3	2/3	1/3	0	1	0	0	0	0	0	1	21.83
	1	1/3	1	1	0	0	0	1	1/3	1/3	2/3	1/3	0	1	0	0	0	0	2/3	1/3	43.05
t_{10}	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1	1	2/3	0	0	0	0	0	2/3	1	2/3	1	1/3	2/3	38.96
	1/3	1/3	1/3	1	1	1/3	1	1	2/3	0	0	0	0	0	2/3	1	2/3	1	1	0	67.35
	1/3	1/3	1/3	1	1	1	1/3	1/3	0	0	0	0	2/3	0	2/3	1	2/3	1/3	1	0	-7.34
	1	1	1	1	1	1	1/3	1/3	0	2/3	2/3	2/3	2/3	0	2/3	1	2/3	1/3	1	0	-205.31
	1	1	1	1	1	1	1/3	1/3	0	2/3	2/3	2/3	2/3	0	1/3	0	1/3	1	0	0	-212.21

表 3.18 练习 8 中每个组每个轨道的元效应的绝对值测度 u^* (最后一行)
是超 10 次运行结果的平均值

	G_1	G_2	G_3	G_4
t_1	60.87	97.07	14.94	29.27
t_2	64.99	43.47	13.67	5.55
t_3	88.76	1.95	3.09	161.09
t_4	321.81	50.79	10.31	108.78
t_5	94.42	48.35	7.94	129.50
t_6	75.48	129.04	10.04	26.60
t_7	35.07	63.99	6.11	54.51
t_8	258.76	278.13	3.33	52.32
t_9	57.49	31.83	12.86	26.34
t_{10}	296.95	42.58	10.36	112.04
μ^*	135.46	78.72	9.26	70.60