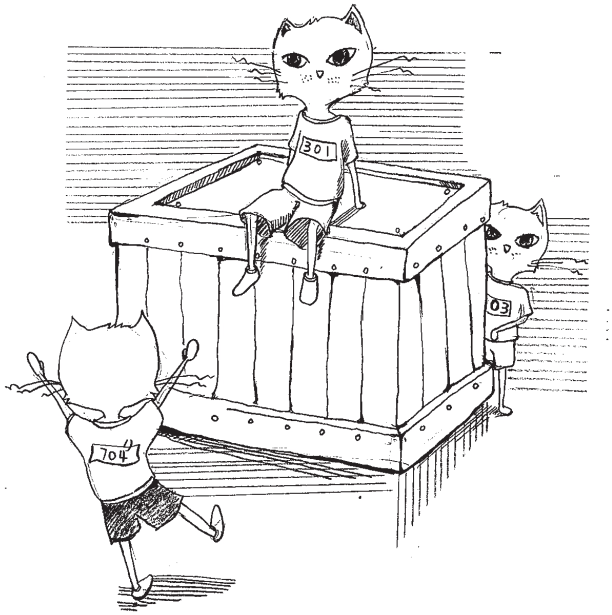


薛定谔的猫咪日记

难　　度：★★★

使用技巧：解题者须理解条件概率的意义，并灵活地使用对称性和排列顺序不影响概率的特性。

原 作 者：陈威宇、萧乐山、郑子宇

这个世界，有些事情不知道也没有关系

久违的朋友保罗 · 狄拉克[1]，

搬到都柏林后，我已经找到教职了，请您不用担心。我很怀念和您在牛津大学共事的日子。这里蛮冷的，但是不湿，所以不会太难受。

言归正传。今天散步的时候，我想起前几天做的实验，有些想法，希望给您看看。容我摘录一段最近的实验

1 Paul Dirac。

日志。

8 月 1 日：

……统一场论的研究仍然没有头绪。不过又到了每天最快乐的时刻： 和我的猫咪们一起做实验的时光。每次听到它们天真的呜呜声，就令人忘记所有烦恼。

作为一个物理学家，秉持着实验精神去确认一切是很重要的。因此，为了验证我的理论，我准备 9 个箱子，里面放置了放射性元素的毒气机关……其实第一次按下开关的时候，我也有点下不了手，可如果为了真理的话，有什么牺牲也是没办法的吧，小宝贝们?

实验设计还是比较简单的，每次在 9 个箱子中各放一只猫，它们死亡的概率分别为 0.1，0.2 ,⋯ ,一直到 0.9，我将它们排成九宫格，并编上 1~9 号，接下来几天，我要来用这些猫箱进行实验……

8 月 7 日：

实验 3……我打开了其中 5 个猫箱，发现 301、304、305 死了，302、307 活着，可以藉此计算下一个打开的猫箱还有活猫的概率……301 是我最喜欢的一只虎斑猫，它的眼睛比琥珀还漂亮。不过，过去的都过去了。让我看看下一个箱子……

8 月 12 日：

实验 7……我打开了其中 4 个猫箱，这次 704, 705 死了，701, 703 活着，让我来推算一下再打开 3 个猫箱，里面死两只活一只的概率是多少……今天是我生日，全家度过了愉快的一天，明天也要以愉快的心情继续做实验。

当做数据整理时，我忽然发现 8 月 7 日和 8 月 12 日这两天所得出的概率值虽然复杂，但两者呈现出非常漂亮的比例。可惜的是，后来数据不小心沾上了血渍，已经看不清楚了。然而，如果这个漂亮的比例不是偶然，就能再次将其推导出来。

若令8月7日所得出的概率为p，而8月12日所得出的概率为q，又猫咪的编号只是代号，和放入哪个箱子没有关系。那么就是说，现在有9个猫箱，其中猫死亡的概率分别是0.1~0.9。p为在打开5个箱子后，确认猫3死2活的情况下，打开下个猫箱看到1只活猫的概率； q为在确认猫2死2活的情况下，再打开3个猫箱，看到猫2死1活的概率，那q/p是多少呢？

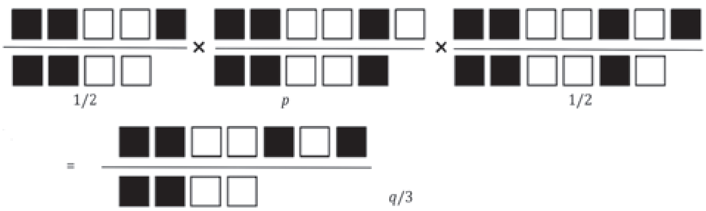
这个问题困扰我好几天。一开始我列出许多情况，作了繁复的计算，却毫无进展。一直到方才喝下一杯冰啤酒时才骤然有了灵感。我决定分几个阶段考虑这个问题，利用条件概率来找出p，q的关系，因为直接算p和q会相当复杂。这个过程也让我充分认识到，正因为大部分人光是活着就已经够累了，所以不需要特别去追根问底，这样日子才会轻松点，对吧，保罗？看来大部分人知道的少得可怜，这个世界才能在表面上和平运作呢！

为了说得更清楚，让我用数学语言再重复一次，方便起见，我以■表示死亡，□表示存活：

p = P(■■■□□后□) / P(■■■□□)

q = P(■■□□后■■□) / P(■■□□)

现在参照下图：



也就是说，令

A = P(■■□□■) / P(■■□□)

B = P(■■□□■□) / P(■■□□■)

C = P(■■□□■□■) / P(■■□□■□)

D = P(■■□□■□■)/ P(■■□□)

根据条件概率的定义，可得到

$$ABC = D$$

现在，根据 p 的定义，$B = p$。你可能会问，我怎么知道前 5 只猫打开时状态按照顺序是死死活活死呢？其实这只是示意图，前 5 只猫的死活顺序不一定如此，但所有顺序都会得出同样的条件概率，仅是为了说明方便而写出一个顺序。重复一次，p 的定义，是已经知道“死 3 活 2”后“活 1”的概率。而死 3 活 2 的顺序是任意的。

让我们来算 A，C，道理是与上述类似的。由于猫咪的死亡率是 0.1~0.9 对称，故直观上当死的猫和活的猫数目相同时，下一只猫是死是活的概率亦相同，故为 0.5。

如果这样还没有说服你，可考虑由于猫咪的生存率亦为 0.1~0.9，故将死活情况对调后，即有

$A = P($ ■■□□■ $) / P($ ■■□□ $)$

$= P($ □□■■□ $) / P($ □□■■ $)$

又由于前 4 只猫的死活顺序不影响条件概率，故有

$A' = P($ ■■□□□ $) / P($ ■■□□ $)$

$= P($ □□■■□ $) / P($ □□■■ $)$

这两者即为在 2 死 2 活的情况下，下只猫是死或活的概率，明显相加为 1，概率又相同，故皆为 0.5。C 的情况亦然，故

$$ABC = p / 4$$

D 与 q 的关系也不难得到。因为

$P($ ■■□□后■■□ $)$

包含 3 种情况：

(~ ■□■), (~ □■■), (~ ■■□)

而顺序排列并不会影响其概率，这 3 种情况的概率都是相等的，故

$$D = q / 3$$

$$q = 3p / 4$$

$$q / p = 0.75$$

说了这些，时间已经晚了，保罗，我还要准备教材呢，我们回头再联络吧。假如您有什么疑问，不管是今天这个问题，或是其他关于物理的，请和我说，不要怕打扰。我一个人在这里闲得发慌。真希望大战赶快结束，这样我就能回到苏黎世拜访昔日的同事去。

德国人真的病了，说什么为了“保持德意志精神的纯净”竟然把人送进毒气室。咱们科学家为的是“追求真理”才把猫送进了毒气箱子，这境界是纳粹政府不会懂的！真理看不着，摸不着，不能吃，可是又有什么关系？在这样的时刻，能写信给另一位伙伴，他也同样把真理看得比享乐、责任，甚至生命来得重要，想到这里我就感到欣慰！

你最诚恳的朋友，

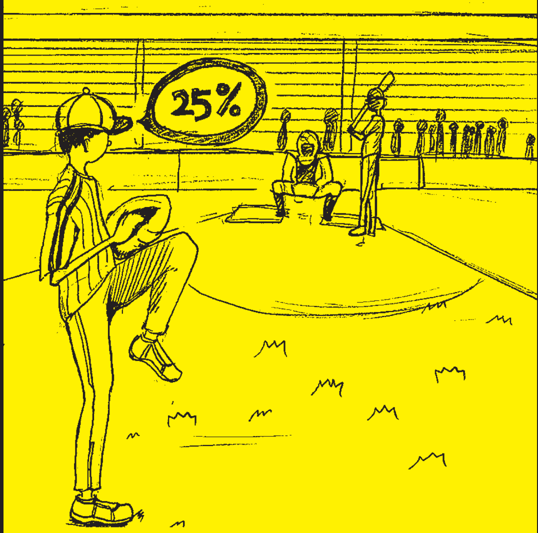
埃温 · 薛定谔[1]

---

1 Erwin Schrödinger。

实况野球

难　　度：★
使用技巧：概率乘法原理与加法原理。
原 作 者：黄胤勋、吴京达、王唯轩



“现在两好三坏满球数，满垒，还在场上投球的达比修有[1]弯下腰，专注地看着捕手的指示……”

现场的加油声在达比耳中已一片模糊，极度的疲累让他全身血液变得混浊，视线开始不稳。跟球场上其他地方相比，他所站立的投手丘上这片黄土，早被汗水浸湿，呈现出另一种更深的咖啡色。

“世界大赛第七战，关键的第九局，1∶0 的僵局是否会在这里被突破？达比修有退出投手丘，似乎要调整节奏……”

达比仰望天空，深深吸了口气。前八局这样一路投了过来，也仅仅只被敲出两支零星安打[2]，没想到这局一上来就是连保送三个。

体力真的已经到达极限了啊，他喃喃说道。

接下去，他发挥专注力，三个保送后，通过守垒员的绝妙配球，接连振掉对方两位击球手。压力仍在，但总算减轻了不少，他看着沸腾的观众席……嗯？好像不对，根本没有这回事！

达比修有甩甩头，回过神来，将视线移向走上打击区的大卫·弗里茨[3]，今天前八局被打的两记安打都是从他手中击出的！

所以这一轮达比修有改变策略，投得稍微闪躲了点，不知不觉就满球数了。

几个界外球后，双方都意识到，接下来这球将是决定胜负的关键了。

话说一个球季下来，达比修早就很清楚守垒员的配球模式了，他今年使用快速球的比例占总投球数的 6 成，剩下部分使用滑球、

1 Darvish Yu， ダルビッシュ有， 1986 年—，目前效力于日本职棒火腿斗士，担任先发投手。父亲是伊朗人，母亲是日本人。他为了代表日本参加 2008 年北京奥运会，获父亲同意放弃原本的伊朗国籍，宣誓入日本国籍。

2 安打指棒球比赛中击球手把投球手投出来的球击到界内，使自己能至少安全上到一垒的情形。不过有两种情形不计为安打： 因为对手球员的守备失误才造成安全上垒； 因为守垒员选择试图让跑垒员出局，才造成击球手安全上一垒，这种情形称作野手选择。

3 David Freese，1983 年—，美国职业棒球联盟选手。

卡特球、曲球的比例为 5∶3∶2。但是，当**面对两好三坏**的情况时，快速球、滑球、卡特球、曲球的比例将变为 6∶2∶1∶1。也就是说：现在这个情形，4 种球（快速球，滑球，卡特球，曲球）的比例为：60%，20%，10%，10%。其中若是快速球，达比修有的各种球速(94、95、96、97 英里 / 小时）出现的概率相同。

“该不该保送他呢？”

达比的心里浮现了这个问句。他知道他的守垒员搭档是标准的美国英雄主义者，在这种关键时刻一定会选择正面对决，要自己把球送进好球带。但要是被打出安打，必定至少失 2 分，那么比赛结束时，他得站在球场正中央让全世界的人都目睹自己失败。如果此时投出坏球，虽然保送弗里茨会被挤回一分，但他有把握解决下一棒，将比赛带入延长赛，仍然保留胜算。在日本的训练，让他对完投 12 局也相当有自信。达比不介意被说闪躲，只要为了最后的胜利，他愿意忍耐。

该不该违背守垒员的意志，保送算了呢？

他喊了个暂停，缓缓踏下投手丘。这时，他注意到休息区给守垒员的手语指示：“大卫 · 弗里茨历年在满垒的情况下，面对投手投出快速球、滑球、卡特球、曲球的打击率[1]分别为 3 成 50、2 成 50、2 成 80、2 成 50，但打击出色的他却有一个小罩门： 不擅打超过 96 英里 / 小时的快速球，面对如此快的快速球，其打击率将骤降至 1 成 50。”

一串数字像一把钥匙般，敲开了达比修有内心深处一段，他自己都快忘记了的回忆： 三年前，在东京巨蛋洗手间里，他遇到的一位来自中国台湾的大学教授，那教授留着一头长发，讲了一堆他听不懂的数学，最后留下一句——

“有一天你会用到的。”

---

1 打击率 = 安打 / 打数。

说完，对方就骑着滑板车扬长而去了。

“想不到竟然是用在这种时候，那人叫做叶……[1] 他到底是教授还是预言家？” 达比心中嘀咕了一下，很快回想起叶教授告诉他的，如何根据球种以及给定球种的条件打击率，来分析击球手对自己的真正打击率。

大卫・弗里茨的打击率分析	给定球种的条件打击率	球种出现概率	条件打击率 × 球种出现概率
快速球（96英里 / 小时以上）	15%	30%	4.5%
快速球（96 英里 / 小时以下）	35%	30%	10.5%
滑球	25%	20%	5%
卡特球	28%	10%	2.8%
曲球	25%	10%	2.5%
全部加总			25.3%

“只有差不多四分之一的概率！”

达比修有心头一阵惊呼，同时下了决心。

“有机会！”

瞬间，他眼神转为前所未有的犀利，他决定相信守垒员搭档，完全照着他的意愿配球。到达极限的身体仿佛重新燃烧了起来。世界大赛总冠军赛第九局，两出局满垒满球数，守垒员比了下暗号，达比修有冲他点点头，豪迈地抬起腿，右手无限地向后伸展，将球投出。

1 显然是叶氏丙成咯。

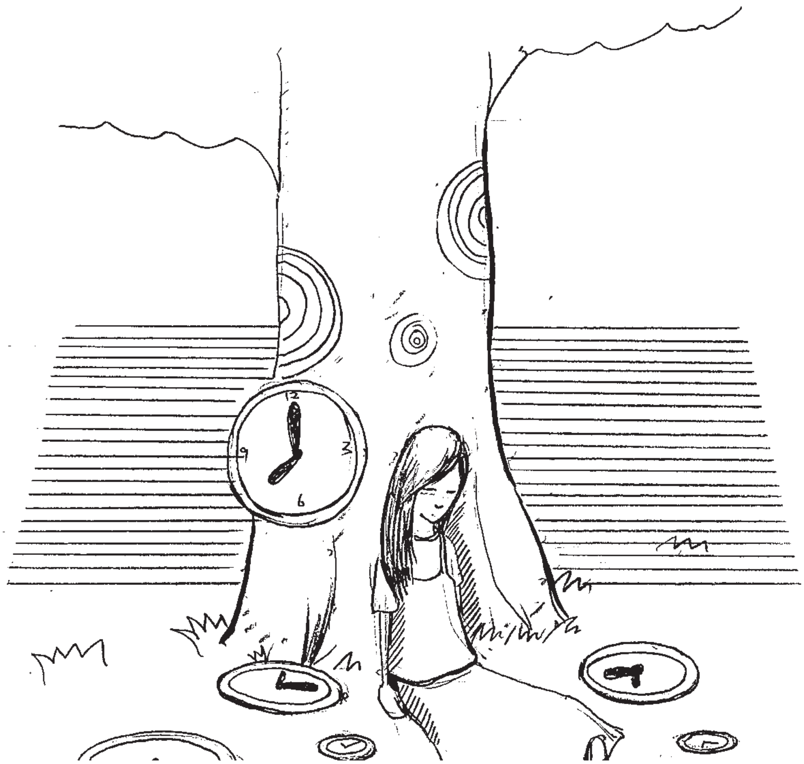
现在，很想见你

难　　度：★

使用技巧：概率乘法原理与加法原理

原 作 者：蔡秉珈、叶佳宜、陈昭廷

预先说明：本文用到的呼唤意识纯属假设，不是科学事实。



“我想，我已经活不了多久了吧。”

病床上的女性，面向窗外的细雨这样说着。

“别说这种话，澪，你一定……” 在床旁守候的男性，着急要握住病床上那双苍白而无力的手，却被轻轻地拨开了。

“没关系，我知道的，对不起，巧，佑司就拜托你了。” 她微微地转过头。

“但是，明年雨季开始的时候，我一定会回来。”

虽然，澪的语气微弱，但巧却可以感觉到，她这句话充满了信心。

巧应该不知道我在说什么吧，澪脸上闪过一丝浅浅的微笑，这一切只有她才知道，那是注定好的奇迹，即将在未来发生。

※

澪过世后已经快一年了。

我逐渐习惯和佑司两人的生活，上班工作，下班去接佑司。晚上在餐桌上听他说着学校发生的点点滴滴。放假时，我会带他去玩，我们相依为命，过着忙碌而平淡的每一天。

不，也许是故意让自己装得忙碌吧，如果闲下来的话，就会不小心想起些什么来。

弥留之际，澪曾告诉我，明年雨季时她会回来，算一算，雨季从昨天开始，她，回来了吗？

忽然晃动的衣角，打断了我的思绪。

“爸爸，你看那边？”

我顺着佑司指着的方向看过去，在朦胧的雨景中，一个女子卧倒在不远处的树下，那是每天都出现在记忆里，再清晰不过的身影。

“你真的……回来了！”

不可置信的我口中低呼着，向她奔去。我扶起了倒在地上的人，她微微睁开了双眼。

“你……是谁？”

她虚弱地问道。

※

时间跳跃——这就是奇迹的真相。

并不是死而复生，而是在还活着的时候来到死后的时间。

并不是记忆丧失，而是在尚未有过去记忆时抵达了未来。

在过去时间轴上的她，因出了车祸，使得意识到达了未来，在过去的人眼中，她只是一个昏迷不醒的人。路人们在车祸现场呼唤她，每声叫唤，都有 1/6 的可能传入到她的意识之中，累积三次后，她就会苏醒，意识将从未来被带回现在。那些没传入意识的呼喊，则有可能会停留在未来跟过去之间，阻绝了她从未来回到现在。1/2 的概率让她在未来多逗留两天，1/3 的概率，让她可以多待 4 天。

这是奇迹所授予她在未来多出来的时间。呼唤传入意识中所需要的次数，成为一个几何分布：

$$P_N(n) = p(1-p)^{n-1},\ \ p = 1/6$$

所以，平均需要呼唤 6 次，才能够将呼唤传达给她，也就是呼唤成功前，平均会有 5 次失败。再与意识擦肩而过的传唤的 5/6 概率中，其中有 $\frac{1/2}{5/6} = 3/5$ 的概率多待 2 天，2/5 的概率多待 4 天，平均来说，每次失败的呼唤，能使她多待 14/5 天。

也就是说，每次呼唤成功前，平均能使她在未来多待 $14/5 \times 5$ 天，也就是 14 天。

奇迹是公平的，仅仅提供了她一个来到未来的机会，没对她特别好，也没有对她特别坏。恰恰好，给了她跟期望值一样的结果。最终，在 3 次呼唤传入她意识之前，她在未来一共待了 6 个礼拜，正是雨季的长度。

※

“同时，雨季结束时，我就会回去。” 我这么说着。

当初刚从未来回来时，一度以为那只是个单纯的梦境，但我一直放不下在梦境中爱着我的你，哭着说失去我的一年有多难受的你。之后，我们重逢，但那时的你浑然不知情。说来也是，在时间轴上，这才是第一次见面。当你跟我告白时，我明白了这一切的意义。

对死亡这件事，我也感到恐惧，如果和你相恋，一切就如同未来的你所说，我的生命将会注定在 28 岁结束。

我曾想过就这样拒绝你。

但是，在那 6 个礼拜之间，我明白了什么是幸福。对你来说是未来才发生的事，但对我来说，那才是我们的第一次邂逅。短短 6 周，我深刻地感受到你们是如何地爱着我，如何忘不了离开的我。现在的我，也只是试着把同样深的爱，回报到你们身上。

如果我逃走了，这一切——甚至是佑司，都将不复存在。

因此，我答应了你的请求，答应我们再在一起。之后进展顺利到让你吃惊，对吧？对不起，因为我早就都知道了。

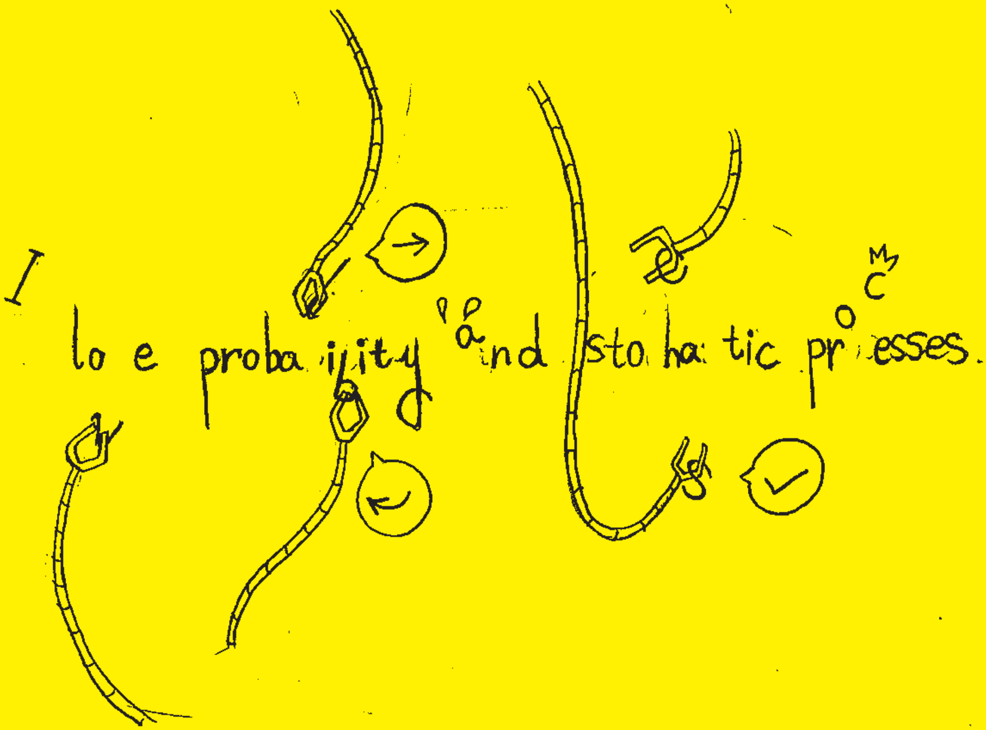
然后依然和我预先知道的一样，我得离开了。

不过我很高兴，将来的你还有 6 个礼拜的时间可以拥有我。我希望那样能够弥补太早离开的我所来不及给佑司的母爱。

在那之后，请继续努力，幸福地生活下去吧。

改编自市川拓司《现在，很想见你》[1]

1 市川拓司的纯爱小说，有同名电影。



近似完美句子

难　　度：★★

使用技巧：读者必须具备基本的排列组合能力，以及条件概率的概念。

原 作 者：施恩铭、何升达、吕其暐

“研表究明，汉顺字序并不定一影阅响读。”

Aoccdrnig to a rscheearch at CmabrigdeUinervtisy, it deosn’tmttaer in whatoredr the ltteers in a wrod are, the olnyiprmoetnttihng is taht the frist and lsatltteer be at the rghitpclae. The rset can be a totalmses and you can stillraed it wouthitporbelm. Tihs is bcuseae the humanminddeosnotraederveylteter by istlef, but the wrod as a wlohe. Amzanig huh?

“根据剑桥大学的研究显示，单字里的字母顺序并不重要，前缀跟字尾的字母被摆在正确位置才是关键所在。其他字母的位置就算一团混乱，你依然可以流畅地阅读。这是因为人类的心理在阅读时不会细读每个字母，而是将一个单字视为整体，惊讶吧？” 叶叶捧着手中的 iPad，优雅地朗诵着。

“是的，正如你们所见。”

叶叶拨开帅气的刘海儿，看着远方。

“我是台大电机系二年级的学生，一位奋发向上的好青年。”

“正值青春年华的我，拥有美好的未来，新鲜的肝。”紧闭双眼，紧握双拳，站在操场司令台上的叶叶，情绪激昂。 “秉持理想，除了认真念书，我积极参与各种活动： 电机音乐会、社团成果发表、电机之夜、烤鸡大赛、躲猫猫社，生活好不精彩。拥有正直个性的我，深受师长以及同学们的……”

“尊敬啊！” 台下仿佛传来阵阵鼓噪声。

“哎呀，大家太过捧场了，我没有那么好啦……” 叶叶说着，搔搔头，表情有些害羞。

睁开双眼，操场上空荡荡的，当然咯，这是星期天半夜，连校犬都去睡觉了。这时，天空飘起了细雨。

“哈哈哈哈哈，连天空都为我精彩的演说流下了眼泪，哈哈！”叶叶张开双臂，沉浸在对自己的敬佩之中。上大学后，他一直希望能成为风云人物，奈何学校卧虎藏龙，他查过资料，发现自己唯一的特色，就是身高、体重、成绩皆是全校学生平均值的“超平均学生”。

平均的意思就是不起眼。

不起眼的他只能趁着深夜，自己跑到司令台上，演这出主角兼观众的独角戏，自我安慰。

“光阴荏苒、时光飞逝。又到了演讲结束的时候，我知道大家都很依依不舍……”

叶叶说着，眼眶泛泪。

“但这就好像一个学期，再怎样地充实精彩，总是会走到学期末的。等等……学期末！”

叶叶想起，不如写封感谢信，对老师们的辛劳表示敬意。这么一来，他们应该就会对自己留下印象，说不定下次上课时会在全班同学面前提到他，同学由此注意到他的优秀，下课后主动来与他攀谈，璀璨的大学生活从此展开，哇咔咔！

“但是，陈腔滥调的感谢信，无法充分表现我的诚意啊……”

回到宿舍，叶叶打开了网页，想找找看有没有适合的样式。

“可恶，这个不行……这个也不行……”

搜寻许久仍找不到有趣的点子，当今时代就是如此，不缺信息，只缺有用的信息。网络上的各种模板都不适合，没什么太大的帮助。

“凄凄惨惨戚戚……冷冷清清，吾已山穷水尽。” 就这么一路找到半夜，依旧徒劳无功。正当叶叶打算放弃时，他猛然想起晚上在

司令台上念的那份稿子。

逼近绝望边缘的叶叶灵机一动，打开 E-mail，写下：

“I love probability and stochastic processes.”

接着，叶叶将句子中各个单字内的字母，依照那篇文章里的规则，随意调换，昂扬得意地将信、文章以及几句感谢的话寄给概率与统计课老师。

“总算，总算出来了，写出来了！”叶叶深吸一口气，缓和紧张情绪。

赖床了一个早上，第二天晚上，叶叶收到老师的回信。信中，老师写着：

超乎我的意料呢，叶叶，调换单字内字母的文章太有趣了，实在不像一个二年级学生会想到的点子。身为老师，当然要全力以赴回应你的感谢信。于是老师想出了一则相关的概率题目，刚好就让你试试吧。

我们将符合文章所述之规则——前缀跟字尾的字母被摆在正确位置，其他字母打乱——的句子称为“近似完美句子”。接下来，看看你打的句子中，各单字内的字母随机打乱（单字间不互相影响）。那么在一个单字内，相同字母相邻的情况下，这个句子是“近似完美句子”的概率为多少？

如果能明天在太阳出来前解出来的话，这学期就给你 A+ 咯。

不想轻易给你 A+ 的教授留 ^___<

叶叶没想到一封感谢信竟然会换来老师的一题即席测验，顿时感觉到一股巨大的压力从头压下来。还好，自诩为要成为风云人物的他还是有点实力，对于概率也算非常熟稔，他马上就知道该怎么解题了。

I love probability and stochastic processes.

好啦，先把它抄一遍，接着定义：

事件 A 是一个单字内，相同字母必相邻的概率。

事件 B 是一个单字内，首尾字母跟原单字相同的概率。在这个定义下，可以算出每个单字符合老师所要求“相同字母相邻的情况下，这个句子是近似完美句子的概率”，也就是给定 A 事件必发生的情况下，B 事件的条件概率。

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

举其中一个单字 probability 来说，里面有两个字母 b 跟 i，各出现两次，因此事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{(11-1-1)!}{11!/_{2!\,2!}}$$

事件 A 与事件 B 同时发生的概率则是

$$P(A\cap B)=\frac{(11-1-1-2)!}{11!/_{2!\,2!}}$$

把两个式子合起来，可以得到

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{(11-1-1-2)!}{(11-1-1)!}=\frac{7!}{9!}=\frac{1}{8\times 9}=\frac{1}{72}$$

从以上的讨论，马上看出，样本空间部分 (11!/2!2!) 的项是可以上下相消的，只需要将事件的组合数相除即可。因此，对于 3 个字母以上的单字，若有 n 种不同的字母出现其中，其条件概率就等于

$$\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$$

用这样的方法，叶叶很快算出了每一个单字各自的条件概率。

叶叶灵机一动，拿着纸笔冲到司令台上，这么重要的时刻，怎么能够不回到他的舞台呢？在司令台上，叶叶飞快地写下了算式：

$$\text{I} : 1,$$

$$\text{love} : \frac{1}{3\times4} = \frac{1}{12},$$

$$\text{probability}: \frac{1}{8\times9} = \frac{1}{72},$$

$$\text{and} : \frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6},$$

$$\text{stochastic} : \frac{1}{6\times7} = \frac{1}{42},$$

$$\text{processes} : \frac{1}{5\times6} = \frac{1}{30}。$$

因为每个单字之间互相独立，所以最后答案为

$$1 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{72} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{42} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{6531840}$$

“总算，赶在天亮前算出来了。” 叶叶擦干额头上的汗水，望着远方缓缓爬升的晨曦，他的眼神充满喜悦。

“像这种时候，就应该去星巴克喝杯咖啡，享受这只属于我的胜利！” 张开双臂，叶叶陶醉于自己的世界当中。

“完美的一学期，完美的人生，完美的答案，由我这个完美的男人推导出来。” 叶叶阖上眼睛，沉醉在自己的世界里。

“哈哈哈，又是个充实而美好的一天啊！哈哈哈哈哈。”

不理会早起运动民众的目光，叶叶迈开步伐，用爽朗笑声证明自己的胜利和荣耀。

拿着星巴克咖啡，叶叶回到电机系馆，迎面而来的正是概率老师。他对老师露出微笑，期待老师给他赞美。老师看见叶叶，他笑吟吟地主动对叶叶点了点头：

“老师等你的答案等到最后一刻都还没等到，刚刚才把成绩送出去。真可惜，题目果然太难了吗？”

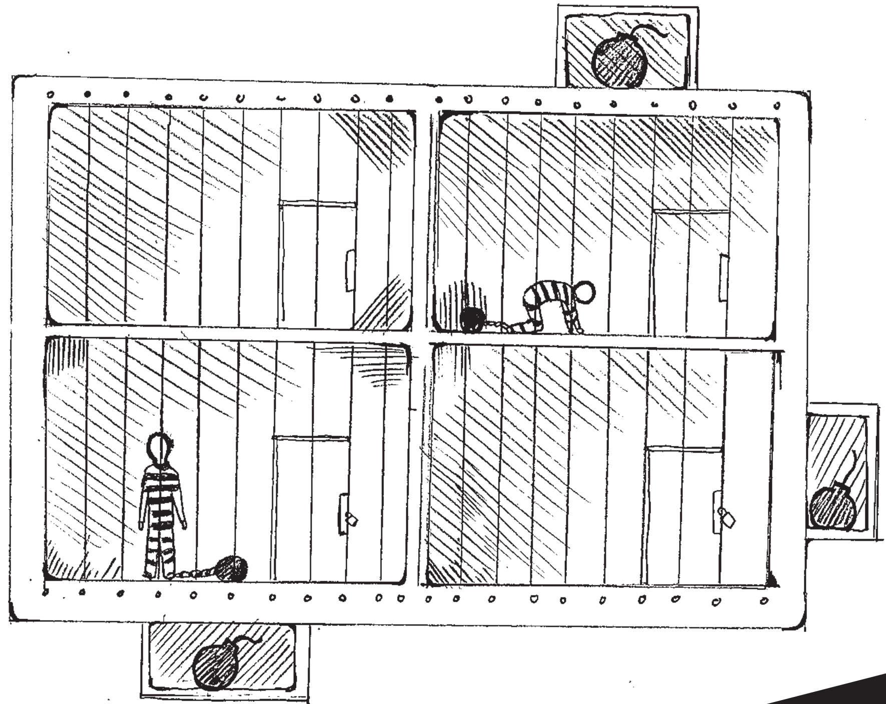
叶叶想起包包里的计算纸，他忘记整理成 E-mail 寄出去了。

生死一线间

难　　度：★★★★

使用技巧：本题需要熟练地使用排列组合，同时要能够观察出其中的对称性，并从中得出所求的概率。

原 作 者：林奕丞、陈韵竹、朱柏宪



亲爱的日记，今天真是倒霉透了。因为“精神监察部” 征召我参与一个研究计划，要以马尔可夫链[1]精准掌控人类的心理，这使得我的博士后研究延宕了不少。今天早上我打算到中心广场旁边的一家咖啡店，思考一些疑点，到了以后才发现忘带了重要的参考书，只能边喝饮料边发呆。

你问我为什么不回宿舍拿，唉，我也忘了今天是国庆节，广场上一片黑压压的人，从总统府那里蔓延过来，根本不可能穿越。

不久，几个小号手踏步向前。一辆坦克上挂满彩带，往总监狱的方向驶去。上面有一位戴着墨镜的中年人，身上背了肩带，别有不少徽章，在阳光下闪亮得有点刺眼。他是大元帅，只有逢年过节才会露面的。大家见状立刻安静下来，还转身要后头的人别发出声音。纷纷转头的人们，在广场上形成了一片波浪，传递到远方的尽头。

大元帅被随扈簇拥着上台，开始演讲。

“同志们，整整一百年了！当那些所谓的民主国家的各党派还在忙着内斗，我们已经在享受乌托邦式的生活了。说我们独裁，但他们国民生产值渐渐下降，我国的富庶却有目共睹。” 大元帅稍稍停顿，环视一下人群，“这个模范的国家，她的安全有赖于赏罚分明的戒律。那些不畏光明的恶徒，毫无例外地服从在法律的铡刀之下。”

这场无聊的演讲进行约十分钟时，一群被剃光头的死刑犯，身穿黑白条纹的罩衫，蒙着头，被集合到广场中央。

---

1 Markov chain。马尔可夫性质是概率论中的一个概念，因俄国数学家安德雷·马尔可夫得名。当一个随机过程在给定现在状态及所有过去状态情况下，其未来状态的条件概率分布仅依赖于当前状态，而与该过程的历史路径是条件独立的，那么此随机过程即具有马尔可夫性质。具有马尔可夫性质的过程通常称为马尔可夫过程。马尔可夫链又称离散时间马尔可夫链，是马尔可夫过程中的一个特例，为具备马尔可夫性质与离散时间状态的随机过程。

大元帅走到死刑犯们面前，庄严而高声地说：“但法律也并非毫无情理。在这举国欢腾的日子，我想你们的罪行，也应当获得相当的谅解！”

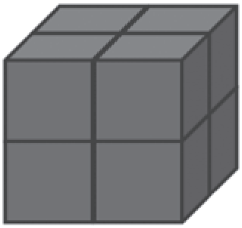
此时几位官员交头接耳，似乎十分慌张。台下的人从鸦雀无声，渐渐变得鼓噪。而死刑犯们纷纷抬起头，原本沉在湖底的眼神，升起了一线曙光。

“但是，”他话锋一转，“你们所犯下的罪行已是事实，如果白白放走你们，太对不起全国人民了！”

场外所有民众群起应和，“对！”“杀人偿命，天经地义！”“不可原谅！”……近乎疯狂的声音此起彼落，仿佛这些人要冲过去，将死刑犯们就地行刑。

“所以，我让天意来决定你们的命。”大总统在护卫下缓缓走到方才那栋建筑物旁边：“这里有栋建筑物，里面是 $2\times2\times2$ 的房间，八个房间，每间只能容纳一人。”

他指着背后，那栋建筑看上去像这样：



“当里面有 4 个人时，特殊的传感器将启动。只要有任何一横列，直行或竖排上有两个人，里面的炸药就会引爆，你们将死在里面。反之，你们 4 个就能安全走出这栋建筑，重新开始你们的自由生活！”透过墨镜，看不清元帅的眼睛，但我的身体却不自觉地颤抖起来。多么疯狂的做法啊！

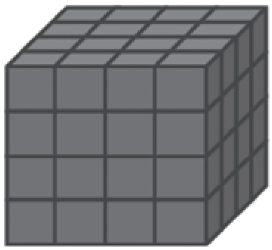
死囚们依序抽签。签依照楼层分成两叠，每叠 4 个对应到该楼层的房间。看似不起眼的小纸条，此时成为了天国与地狱的分水岭。

不一会儿，爆炸声此起彼落，伴随民众的声音，有欢呼，有诅咒。有些顺利地走出，有些化为灰烬。从通道喷溅而出的血肉、脑浆像水豆花，和书上画的一样，地板变成了一副天然的泼墨。起初大家目不转睛看呆了，但过了一个多小时开始无聊，有的盘腿睡觉，有的交头接耳。

这时，元帅示意停止，他接过麦克风说：

“我发现这样不尽公平。因为一楼和二楼的签分开放，而每一个犯人都可以瞄到前一位抽的是哪一堆的签，就可以抽跟前一个人不同堆的签了。” 大元帅走到另一栋建筑物旁，“而且这样实在太久了，我决定改到后面这栋 $4\times4\times4$ 的建筑，同样，每间都只容纳一人。上次启用，大概是 50 周年国庆了吧。”

警察一边拿枪抵着，驱赶囚犯们到隔壁栋建筑。



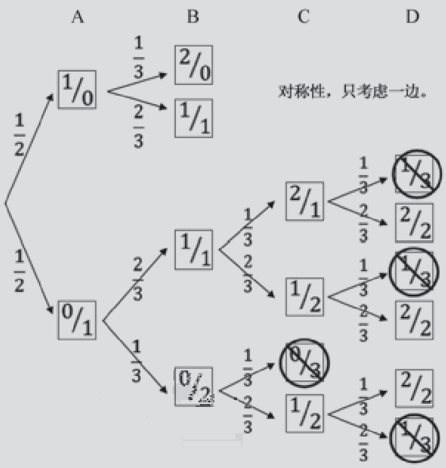
“规则不变，” 元帅继续说，“传感器只有在里面有 16 人时才开启。签也不依楼层分堆，直接是放一堆，让犯人依序排队来抽签。”

他的这番话却激起我的好奇心。

按照原来方式，签分为两堆，一堆为一楼的房间，另一堆为二楼的，每支签恰对应到 $2\times2\times2$ 建筑里的某个房间。两堆签都经过随机打散。每个犯人抽完签不放回，待一批 4 人全数抽完再将签交回以供下一批人使用。同时，每一个犯人都可以瞄到前一位抽的是哪一堆的签，依据常理，抽跟前一个人不同堆的签好像被炸死的概率比较低，那不妨假设：犯人抽跟前一个人同一堆（同一楼）的签的

概率是抽另一堆的一半。当然，第一位抽签者没有参考依据，故抽任一堆的概率是相等的。

那 4 人生还的概率是多少？我们可以列出树形图。4 位囚犯依序叫 A，B，C，D； 其中每个框框的斜线左方是上层人数，斜线右方是下层人数。一层楼有 3 个人的情况可以直接打叉了。然后由于对称性，我也没有把上面那个分支画完，它只是下面分支的上下两层楼交换而已。



故得两层各有 2 人的概率为

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{27}$$

以下我说共线，是指两人在同直行，或横列，或竖排。同一楼之中，两人不共线，即对角线的概率是$\frac{1}{3}$。因为头一个人选哪个位置，接下来 3 个空位之中只有对角线处是可能的。这两楼都必须如此。

如果两层楼之中，各层楼的两人都是对角线，有可能皆位于同一竖列上，也可能错开。错开的概率是$\frac{1}{2}$。

把它们都相乘，得到

$$\frac{14}{27}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{243}$$

这就是存活的概率。

※

算到这里抬头一看，已有 3 人抽签了，都未共线。我不禁又好奇，若前 3 个人抽的位置互不共线 (事件 F)；那全数生还 (事件 E) 的概率，又是 16 个人随机抽签生还概率的几倍？

显然 E 成立下 F 必成立。故

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E)}{P(F)}$$

所以待求的$\frac{P(E|F)}{P(E)}$就是$\frac{1}{P(F)}$。

现在来求 $P(F)$。第一位囚犯 A 可以任选 64 种位置，第二位 B 则只剩 63 种，第三位 C 则有 62 种。然而固定 A 下，B 安全的情形有 27 格。再讨论 C 可以选的位置，分以下两个情形：

(1) A，B 在同一个平面上 (三种方向的平面都算)。

那么 A 占了 1 格，B 占了 1 格；

和 A 共线的有 9 格；

和 B 共线的有 9 格；

和 A, B 都共线的有 2 格；

故第三位剩下

$$64-1-1-9-9+2=46$$

即 46 格。

(2) A, B 不在同一个平面上。那么 C 不可能和 A, B 都共线。其他部分相同，类似地，有 44 格。

总共有

$$P(F)=\frac{27}{63}\times\frac{46}{62}+\frac{27}{63}\times\frac{44}{62}=\frac{135}{217}$$

故

$$\frac{P(E|F)}{P(E)}=\frac{217}{135}\ (\text{倍})$$

也就是说，要是前三个人不共线的话，存活概率将会提高约 1.6 倍。

※

天色渐暗，吃人的喋血建筑在地上投下长长的阴影。警察拿枪抵着一位囚犯，推他到高台边缘。大元帅又示意停止，拿起麦克风。

“有一位政治犯，自以为聪明绝顶，跟包括自己接下来要进去的共 16 个人私下谈好，别管签上写什么，每 4 个人各被分配到某层，还说同一层的私下安排好，任意直行与横列都只能有一个人。这种投机取巧的人，配当我们公民吗？”

“杀！斩！”群众高喊道，甚至涌过栏杆，要冲上前。

一位秃头的官员赶快抢过麦克风，说：“快到宵禁时间了，请各位先回家。明天早上将交由在场民众票选他的凌虐方式，连同剩下的特赦仪式一起进行。”

我心想，真不愧是政治犯呢，照此作弊的方法，生还的概率可大多了。

假如 16 个人中固定的 4 个人在一楼，另 4 个人在二楼，然后每层的 4 人都不共线，每种安排的概率相同。至于竖排，因为楼层间无法沟通，就只能听天由命了。

要算这个，把同一层的囚犯都看作相同物品。然后列出按照作弊的方法生还的排列数 M，以及 16 个人作弊下可能的排列数 N，再相除就可以了。

先算 N。

对 1 楼而言，一定有一个人在第 1 列。不论他占了哪里，剩下

3 个人都只剩下 9 个位置。类似地，不论第 2 列的人占哪里，剩下 2 人只剩 4 个位置。这样，他们共有 $4! = 24$ 种安排法。2，3，4 楼也是一样的，而且互不限制，故共有 24^4 种方法。

再来算 M。我们俯瞰这个建筑，并把 4 层楼的囚犯位置都记录在 4×4 的表格上，也就是投影到 1 楼。因为他们生还，我们知道 16 格中都只有一个人。把楼层编号后，把该楼层的囚犯以该楼层的数字标记，投影至同一层后，可以得到类似这样的排列：

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

我们现在所求的问题，等价于计算同数字不位于同一行列的个数。试着穷举所有的排列情况，为简化计算，先强制将第 1 列的顺序通过行之间的交换，形成 1234，全部情况就是结果再乘上 4! 即可。再次简化计算，强制将 1 通过列之间的交换至位于对角在线，所有情况就是再乘上 3! 即可。

可穷举出以下的 4 种排列：

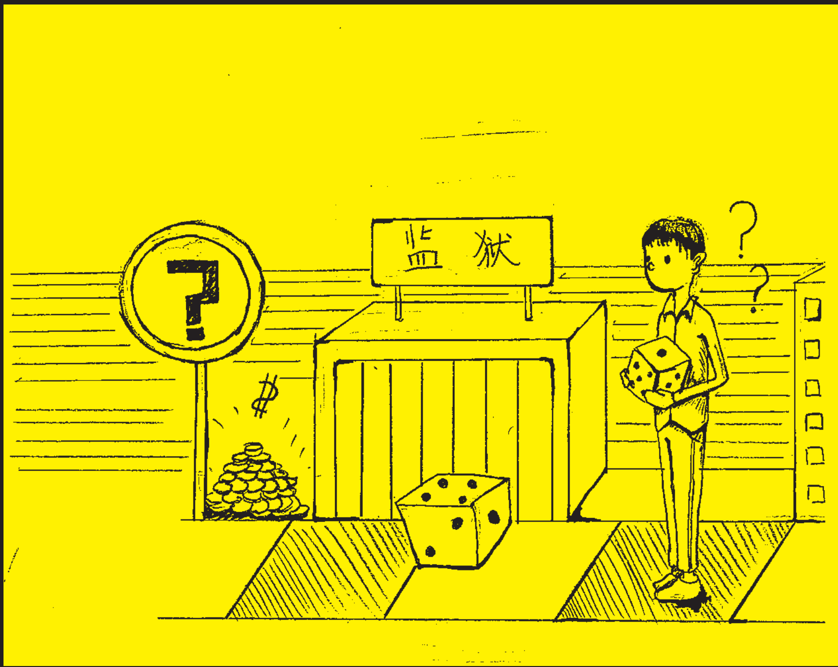
(a)				(b)				(c)				(d)			
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	3	1	4	2	2	1	4	3	2	1	4	3
3	4	1	2	2	4	1	3	3	4	1	2	4	3	1	2
2	3	4	1	4	3	2	1	4	3	2	1	3	4	2	1

稍微想想可以知道，(a)、(b)、(c)、(d) 就是所有的可能性。例如可以固定最左第 1 行的 2 的位置，若排在第 3 行，就立即导致 (a) 的组合，类似这样。所以

$$P(\text{生还}) = \frac{M}{N} = \frac{(4!)(3!)(4)}{(4!)^4} = \frac{1}{576}$$

人潮渐渐散去，我终于可以搭地铁了。一个人呀，看似可以决定的多，实际上一支下下签就征召了他卑微的性命呀。看着那些死刑犯，又有什么好悲伤、好兴奋的呢？毕竟我跟他们也差不多。

除了数学以外，世上实在没有值得研究的。所谓生老病死，无不是一些粒子的随机概率分布和作用造成的，那么喜怒哀乐之类的都是枉然呢。今天就写到这里吧。



少年哥的富翁漂流

难　　度：★★★★

使用技巧：读者必须具备发现概率中的简单递归式的能力，亦即能发现个别概率间所存在的数学关系，并有序地解出各概率数值。

原 作 者：吴冠融、黄大珉、谢瑞贤

“欸！哥融！” 端肾躺在床上说，“你不用睡觉，别人也要睡呀。” 作为一名电机系的学生，期限前彻夜写程序是很常有的事，因此期限过后的整个周末拿来补觉也是很正常的事。

“没办法呀！我上学期已经第一名了，这学期再这样下去，要是又不小心拿书卷奖了怎么办？人怕出名猪怕肥呀！我这个人一向低调的，对不对？所以这几天我都在努力玩大富翁 4，好降低拿书卷的概率。这真是个妙计呀！哈哈哈！”

哥融倒在计算机椅上大笑，整个人往后仰，差点要翻倒了。端肾用枕头蒙着头，希望赶快进入美梦。

“欸！你来看！快点啦！” 哥融过了一会又叫端肾看他的屏幕，像这样：

“依我睿智地综观，眼前的这块大地 1 在整个局势中举足轻重，是兵家必争之地，无论如何得买下它。聪明如我，决定算算有多少把握可以走到那块大地，买下它，再决定要不要用遥控骰子。” 他朝端肾推了推眼镜，似乎在期待端肾的一番赞美。

“嗯……”

端肾拿起纸笔，坐到一旁。

“就是说，假设没有其他人妨碍，而且走到监狱格不会影响行动，那么求你能买到这张图中的大地 1 的概率 p 咯。简言之，就是求**能在一回合或多回合之后走到第 4 格或第 5 格的概率 p**。当然，也可以掷好几次骰子，不用一次就到 4 或 5。”

“现在令 $p(k)$ 是能走到接下来的第 k 格的概率。那：

$p(1) = P($第一次掷出 1$) = 1/6$

$p(2) = P($第一次掷出 1$) \times p(1) + P($第一次掷出 2$)$

$= 1/36 + 1/6 = 7 / 6^2$

$p(3) = P($第一次掷出 1$) \times p(2) + P($第一次掷出 2$) \times p(1)$

$+ P($第一次掷出 3$)$

$= 7/216 + 1/36 + 1/6 = 7^2 / 6^3$

类似这样，有

$p(4) = 7^3 / 6^4$

$p(5) = 7^4 / 6^5$

这样就可以算

$p = p(4) + p(5) - P($依序走到第 4 格和第 5 格$)$

$= 7^3 / 6^4 + 7^4 / 6^5 - p(4)\, p(1)$

$= 7^3 / 6^4 + 7^4 / 6^5 - 7^3 / 6^5$

$= 2 \times 7^3 / 6^4 \approx 53\%$ 的概率

“怎么样？” 端肾把结果递到哥融面前。

“唉！你看看！还好我决定赌一赌自己的人品，不使用遥控骰子。大概是昨天我扶老婆婆过马路，人品爆发，一次就骰出 4 买到了大地 1 呀！”

想到哥融根本没在听，自顾自地沉浸在好手气里，端肾有点恼怒，不过还是看了一下屏幕，是这样一张图：

可惜哥融把人品曝光后运气变得很差，一旦踩到“问号格”一定会跳出“妨害风化坐牢 5 天”这样的事件。为了避免这种事，哥融打算使用 Save/Load 大法：先存盘，之后一旦踩到问号就立刻关闭游戏，读取原来的存档，回到还没掷骰子的状态，如此就能确保哥融就算妨害风化也不会坐牢了。

“不过我也有我的矜持啦，”哥融吐了口气，“除了踩到问号格以外都不会使用 Save/Load 大法。这样我到底能不能买到大地 2 呢？好烦恼呀！”

“爱问又爱啰哩啰嗦，这不就是求在不走到第 2 格的条件下，**能在一回合或多回合之后走到第 4 格或第 5 格的概率 q** 嘛。不过如果直接穷举骰子点数的排列，会有点麻烦，又容易出错。所以用反面的解法吧。”端肾想了一会，写道：

$q = P($ 走到第 4 格或第 5 格 | 不走到第 2 格 $)$

$= P($ 不走到第 2 格且能走到第 4 格或第 5 格 $) / P($ 不走到第 2 格 $)$

其中：

P(不走到第 2 格且能走到第 4 格或第 5 格)

$= P$(能走到第 4 格或第 5 格) $-$ P(会走到第 2 格且能走到第 4 格或第 5 格)

第一项刚才已经算过了，就是 p。

$$q = \frac{2 \times 7^3 / 6^4 - p(2) \times P(\text{能走到接下来的第 2 格或第 3 格})}{1 - p(2)}$$

第二项的道理和方才相同：

P(能走到接下来的第 2 格或第 3 格)

$= p(2) + p(3) - P$(能走到第 2 格和第 3 格)

$= p(2) + p(3) - p(2)\,p(1)$

$= 7 / 6^2 + 7^2 / 6^3 - (7 / 6^2)\,(1/6)$

代入这些，得

$$q = \frac{2 \times 7^3 / 6^4 - 7/36 \times (7 / 6^2 + 7^2 / 6^3 - 7 / 6^2 \times 1/6)}{29/36} \approx 0.563$$

其中分母由 $(1-p(2))$ 算出。

嘭！嘭！传来敲门的声音。端肾一抬头，发现哥融已经去开门了。一个烫着大波浪的高挑女子走进来，小麦色的皮肤，浓妆，假睫毛。她一面乱翻桌上的纸张，一边说：“吼！老公！你这几天都不陪我！原来在玩大富翁！难道我的魅力比不上这几枚臭金币吗？你说，你说呀！” 她几乎都要哭了。

“不是这样，大妮，我可以解释！其实我不是在玩，我是在……讨论数学！你看！” 他拿起端肾的计算纸，说：“端肾，对不对？”

一回头，端肾早已将头蒙进被子里了。

“你骗我！” 大妮哭着说，“这么简单的问题，怎么可能算一个下午？”

真不愧是电机系高材生，大妮即使没有听到前后文，立刻就会算了。她说：

"'不走到第 m 格且走到第 n 格' 的概率就相当于 '走到第 $n-1$ 格的概率'，因为前者每当要跨越第 m 格时，把骰子的值减 1，就会和后者一样呀。"

"啊？" 哥融搔着头。

"我懂了。" 端賢躺在床上嘟哝。

"你想想看，以 '不走到第 1 格且走到第 4 格' 为例，你可能依序掷出 (2, 1, 1) 或 (2, 2) 或 (3, 1) 或 4。至于 '能走到第 3 格' 的情况，有以下几种可能：(1, 1, 1) 或 (1, 2) 或 (2, 1) 或 (3)。差别只在于第一次骰出的值差 1，而当 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 时，骰到 n 和骰到 $n+1$ 的概率都相同，所以这两种情况发生的概率会一样。简言之，在 6 格以内，可以把不能走到的格子抽掉，并把后面的格子往前挪，概率上是一样的。"

"听到没有？" 大娓敲了一下哥融的头，边念边写：

$p = P($ 能走到第 4 格或第 5 格 $)$

$= P($ 能走到第 4 格 $) + P($ 不走到第 4 格且能走到第 5 格 $)$

$= P($ 能走到第 4 格 $) + P($ 能走到第 4 格 $)$

$= 2\,p(4)$

$= 2 \times 7^3 / 6^4$

$q = P($ 能恰好走到第 4 格或第 5 格 | 不走到第 2 格 $)$

$= P($不走到第 2 格且能走到第 4 格或第 5 格$) / P($不走到第 2 格$)$

$= P($ 能走到第 3 格或第 4 格 $) / (1 - p(2))$

$= (p(3) + p(3)) / (1 - p(2))$

$= (2 \times 7^2 / 6^3) / (29/36)$

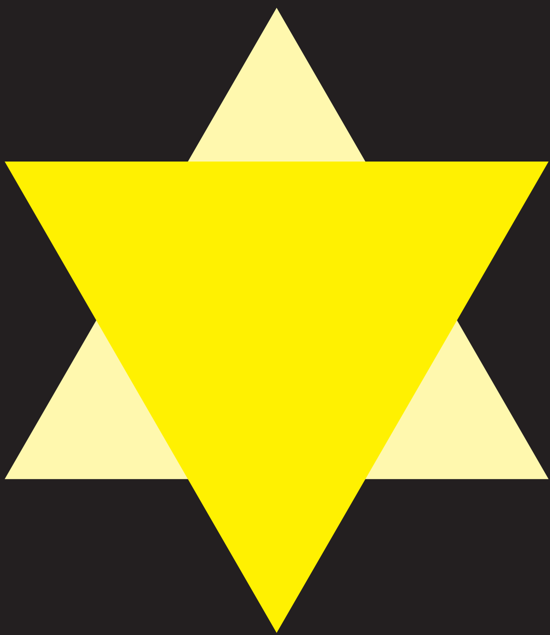
$= 49 / 87$

“原来是这样啊……咦，我的计算机为什么关机了？” 哥融突然抓住大妮手说。

“噢，大概是我不小心踢到开关了吧。” 大妮轻描淡写地说。

“你好歹等我存档！你回来！！”

傍晚了。端肾关上宿舍的门，把小两口跟他们的打闹留在里面。要睡觉看来是不可能了，他心想，还是去图书馆念书吧。

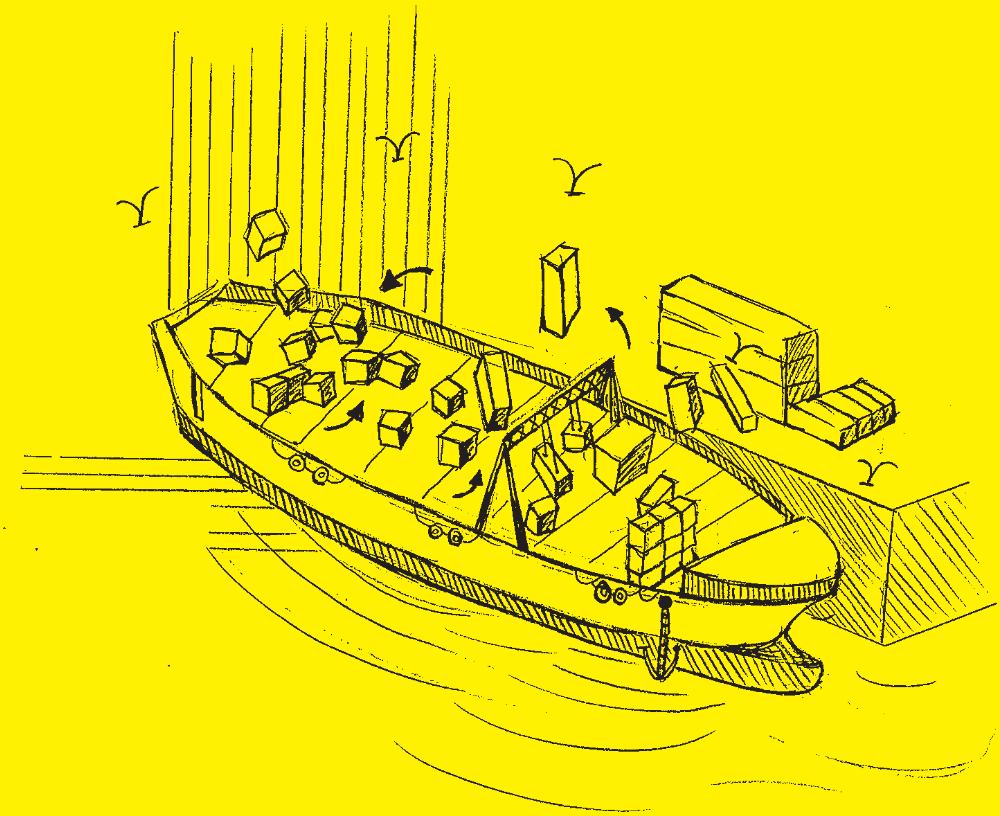


伊伊港载货

难　　度：★★★

使用技巧：本题运用基本的概率定义，先用排列组合算出所有可能发生的情况，再算出目标事件的数量，借此求出概率。然而请别大意，本题需要极端高超的排列组合技巧。

原 作 者：陈鸿猷、王瑄、李品贤



遥远的地方，有个称为随机国 (Republic of Random, ROR) 的神秘国度。

该国国民喜欢每件事都是随机 (random)，而非既定 (deterministic) 的。这里的第一大港——伊伊港，每天有大量船只进出，载货、卸货。国民们要求随机的个性在港口依然不改，常常与外国人有所争执。

阿贤，呆呆号货轮的船员，这天第一次踏上随机国港口，看到不远处另外一艘货轮正准备装货。

“你们的货物有点儿多，让我帮你配置一下吧。” 那艘货轮的其中一位船员对着一旁的商人们说。

“不不不！” 其中一个商人立刻否决，“我们坚持要用我们的方法上货。”

“你们说要用抽签决定，那不就是随机了吗？如果你们不让我们帮忙安排装货顺序，不怕装不下吗？” 船员说。

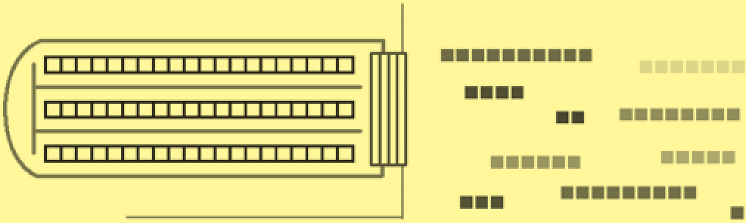
“能不能装得下是其次，重点是随机！要随机！你怎么可以片面决定装货的顺序和位置呢？” 另一位商人吼着。

“最好都随机啦！要是你们的货全部随机到同一列，不就不用装啦！”

“哼！我们才不用那么烂的随机法则，随机也有等级之分的！”

这下阿贤就不懂了。他饶有兴致地站在港边，仔细观察起老练的商人们，是用何种高级随机方法装货。

一阵子后，阿贤归纳出结论：如图，货轮底层左、中、右三排，每排长度 20 米，宽和高都是 1 米，呈现长条状，商人有 10 个货物，宽和高都是 1 米，但长度不一，分别为 1,2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 米。



商人们的随机装货规则如下：

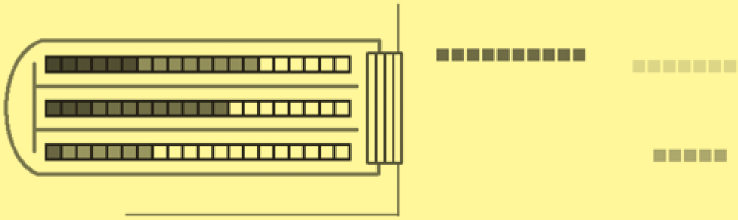
(1) 装货员从剩余的货物中随机挑选一个，概率均等。

(2) 在还塞得下的几排中，随机挑选一排放入，概率均等； 然后向最里面摆。

(3) 如果上、中、下 3 排都放不下，就把该货物搁置在岸上，等待下一艘船。

(4) 继续挑选货物，重复以上步骤，直到能上的货都上完为止。

举例来说，如果前 7 个货物排成这样：



此时剩下 5，7 和 10 号货物，接下来选到 5，7 和 10 的概率各为 1/3。如果先选到 5，则 5 放到这三排的概率各为 1/3； 如果 5 被放置在下排且接下来 10 被选到，10 将被搁置，而接下来 7 被放置在中排和下排的概率各为 1/2。

阿贤凝神细看时，船员和商人仍在吵架。

“你看吧，这个方法多么完美，多么随机啊！” 商人们自鸣得意地说。

“你们这样搞，至少会有两个货上不去。” 船员故意酸了一下。

“真是乌鸦嘴！ 不过，你的乌鸦嘴和上货概率是独立事件，哈

哈。” 商人们立刻回呛。

“不信我说的？那就叫旁边那个少年人帮你们算一下**有 2 个或以上的货物被搁置的概率**有多少。” 船员指着旁边探头探脑的阿贤说道。

“关我什么事啊！” 阿贤喃喃道，但瞬间就被附近的人团团围住了。

“你不评评理，我就向伊伊港管理局举发，说呆呆号每天的耗油量不是常态分布。以后你们别想拿到入关许可。” 后面一位喝得醉醺醺的中年人说，阿贤注意到，他穿着船长的服饰。

“好吧！好吧！给我一点时间想想。” 阿贤掏出一张纸，用方才拿到的一沓传单埋头计算。正当众人围着他，快要失去耐心，开始鼓噪时，阿贤抬头说：

“我懂了！这个问题看似变化很大，其实不然。”

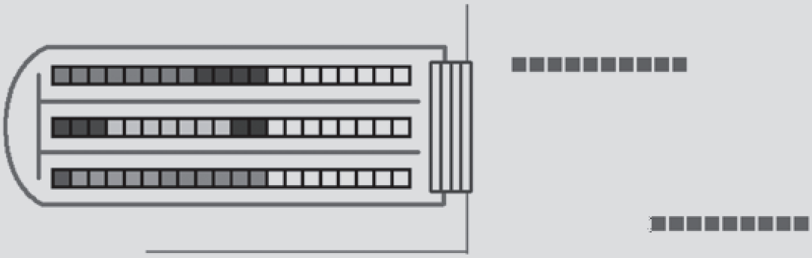
“你们想想，船上有 60 米的空位，货物长度总和却只有 55 米，可以想象，超过 2 个货物被搁置的情况是相当稀少的。先假设极端情况，9 和 10 放不下，空位还有 $60 - 36 = 24$ 个，刚好三列分成 8，8，8 米空位的时候会装不下； 如果把 9 或 10 换成更小的货物，则更好放了； 如果外面剩 3 个货物，不用说，一定有空位让至少一个货物上船，回到剩 2 个货物 (9,10) 的情况。”

“因此，唯一一种可能，就是外面剩 9 和 10，里面三列分成 8，8，8 的时候。”

不难得知，24 个空位平均分散在三列，共有 3 种可能：

(a)			(b)			(c)		
上	中	下	上	中	下	上	中	下
8 4	7 3 2	6 5 1	8 4	7 5	6 3 2 1	8 3 1	7 5	6 4 2

下图画的是 (a)。这并不难列举，以 (a) 来说，8 如果配 4，然后 7 要配 5 个空格，只可能是 3 和 2； 然后 6, 5, 1 刚好塞满。



- 选货顺序必须是 1~8 在前，9 和 10 在后，概率为 $8! \times 2! / 10! = 1/45$。
- 由于 3 列可自由交换，且如上所言有 3 种可能排列法，因此共 $(3)(3!) = 18$ 种可能。
- 现在固定 18 种排列法的任一种。因此，1~8 号货物都有各自必须去的归属列。无论 1~8 前后怎么排列，都不会有放不下的情形，每个货物能成功去到自己归属列的概率是 $1/3$，因此成功进到自己归属列的概率是 $(1/3)^8$。
- 若采用上述算法，1~8 号的顺序便不重要，无须计算。
- 总概率为

$$\frac{1}{45} \times 18 \times \frac{1}{3^8} = \frac{2}{32805}$$

商人忍不住嘲笑船员：“哈哈，你看，概率简直低得可以嘛！”

※

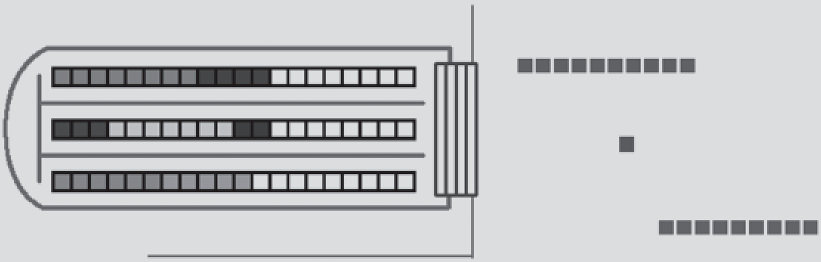
这时，群众身后传来一位女子的声音：“你漏了一种可能吧？”

大伙儿回头，那女子穿着黑色羽绒大衣，年纪和阿贤相仿，比他稍矮，戴着墨镜，头发及肩，被烫得卷卷的，遮住了半边脸。

“我们继续假设 9 号箱和 10 号箱最后会被搁置。像你说的，这

是唯一可能。但你并没有证明 9 号箱和 10 号箱必须是最后两个被抽到的商品，事实上也不必然。” 那女子缓缓挤到前面，对着阿贤说道：“虽然这么说，9 号箱仍然必须比 1~8 号箱晚抽到。因为少了 1~8 号箱任一个货物，就会有一列的空超过 9 格，因此 9 号箱必须是最后两个被抽到的商品。但 10 号箱就不一定了。如果 10 号箱是最后或是倒数第 2 个被抽到，情况讨论过了，但如果是倒数第 3 个被抽到，举个例子，最后 3 个被抽到的货物是 10 号箱，1 号箱，9 号箱，三列空格分别为 8，8，9，像这样——”

她用阿贤的纸画了张图：



“这时候先抽到 10 号箱，10 号箱就进不去。1 号箱把剩下的洞补上，让之后的 9 号箱也进不去。这样 9 号箱和 10 号箱仍然会被搁置，但你没有计算到。” 那女子停顿了一下，又继续说，“如果把 1 号箱换成 2 号箱呢？剩下的空间不是 10 米、8 米、8 米，就是 9 米、9 米、8 米。前一种情况，10 号箱放得进去；后一种情况，2 号箱不管放哪一排，9 号箱都放得进去。既然两种情况 9 号和 10 号箱没办法留在外面，2 号箱就不能是最后三个上船的，3 号箱到 8 号箱当然也不行。因此，如果 10 号箱是倒数第三个上船的，只能是外面剩 10 号、1 号、9 号箱的情况。如果 10 号箱是倒数第 4 个上船的呢？这样只能是外面 (10, 1, 2, 9)，里面空格 (9, 9, 9)，但是塞入 1 号箱和 2 号箱之后，9 号箱仍然可以被塞入，没有这种情况。”

当众人还在努力理解她到底讲了些什么时，这女子径自宣布：

“因此，你唯一漏掉的情况，就是刚才举例的情况。

选货顺序为 2~8 号箱，10 号箱，1 号箱，9 号箱，概率为

$$\frac{7!\times 1!\times 1!\times 1!}{10!}=\frac{1}{720}$$

其他部分类似前述。总概率为

$$\frac{1}{720}\times 18\times\frac{1}{3^8}=\frac{1}{262440}$$

把两个部分相加，得到

$$\frac{2}{32805}+\frac{1}{262440}=\frac{17}{262440}$$”

说完，那女子就回头穿梭进人群中，留下窃窃私语的围观群众。阿贤连忙钻进群众，追着喊道：“小姐！小姐！请问贵姓？”

但他只听得到装货员与商人的对话。

“概率一下相对就暴增了 1/16，还敢说你们的随机多厉害？”

“整体概率依然很低好吗！”

阿贤喘着气，目光茫然地搜索着人群：从啤酒馆里出来的醉汉，提着名牌包的贵妇，靠着消波块抽烟的水手……

可是那女孩消失了。

愤怒的小鸟：角度，很重要

难　　度：★★★★

技　　巧：反三角函数、抛射运动

使用技巧：解题者需要有高中抛射运动的概念，并且需要一些反三角函数的知识，依照题意带入计算即可。

原 作 者：谢瑞贤、黄大珉、吴冠融

某日，概率之神“台大叶沛然” 正在黑板上振笔疾书，大谈 Poisson、Exponential、Erlang 之间的三角恋情。资质驽钝的端肾为此感到十分挫折，因此摇头晃脑、左顾右盼，不知道如何是好。

“老师哩洗咧工三 ×……甘五哈甘丹……(闽南语方言，意思是： 老师是在说什么啦，哪有那么简单)” 端肾埋怨着。

一旁的哥融毫不理睬端肾，低头凝视自己下面，手指抚弄着什么。端肾凝神一看，只见哥融下面偌大的 iPad 屏幕上显示着游戏画面 ：

看到这么低的最高分纪录，端肾对哥融相当失望，立马伸手到他下面抢走 iPad，一边说 ：“闪开，让专业的来！”

经过精密的分析，端肾发现要拿到更高分，唯一的方法就是让愤怒的小鸟直接打中图中用椭圆圈圈起来的蓝色冰块，让上方的石块失去平衡而掉落。

偏偏端肾技术不够，没办法保证一次到位。

可是，出来混总是要还的，刚刚呛过哥融，现在已经没有失败的空间了。谨慎起见，端肾想先计算打中目标的概率，再决定是要怒帅一发，还是索性投降输一半。

端肾凭着高中所学的物理，替游戏建立了一个斜向抛射的模型：

(1) 鸟可视为一个质点。

(2) 鸟离开弹弓时的速度为固定的 v_0。

(3) 重力加速度为一恒定的 g 值。

(4) 仰角 θ(初速度方向与地面的夹角) 先假设为 $0°<\theta \leqslant 90°$且概率均匀分布。

(5) 没有空气阻力。

(6) 因为目标冰块的高度与弹弓的高度相同，所以端肾以随机变量 X 表示“鸟落回弹弓的高度时移动的距离”。

在有了基本的数学模型之后，为了要计算打中冰块的概率，端肾打算先计算随机变量 X 的累积分布函数，并用此来计算在冰块分布的区间与可能击中范围的分布区间的比例，就可以得知打中冰块的概率究竟是多少。

那么，**随机变量 X 的累积分布函数**[1] $F_X(x)$=? (以 v_0、g、x 表示)

假设抛射的仰角为 θ，抛射物体落回相同高度时，前进的距离为 d，则

$$\begin{aligned} d &= (\text{初速度的水平分量}) \times (\text{物体落回相同高度所需的时间}) \\ &= v_0 \cos\theta \times \left[\frac{0-(+v_0\sin\theta)}{-g} \times 2\right] = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \end{aligned}$$

1 Cumulative distribution function，CDF。

故

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)$$

考虑 $0° < \theta \leqslant 90°$ 的区间，端肾在心中算着，这时台上老师说着：

“有的时候，在计算概率的时候，考虑其对称分布的情况，可以使计算化简不少！”

对了，因为 0°~45°、90°~45° 是对称的，所以说，前面计算的结果在抛射角限定 45°~90° 的情况也可以适用。端肾决定马上把老师的话加以实际应用。θ 在 0°~90° 之间均匀分布，所以

$$P(X \leqslant d) = P\left(\theta \leqslant \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)\right) + P\left(\theta \geqslant \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)\right]\right)$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) - 0\right] + \left\{\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)\right]\right\}}{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) \times 2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)$$

这只对$0 < d \leqslant \frac{v_0^2}{g}$成立，所以 CDF 为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) & , 0 < x \leqslant \frac{v_0^2}{g} \\ 1, & x > \frac{v_0^2}{g} \end{cases}$$

端肾又查了一下帮助菜单，发现游戏设定的参数是：拉满弓射出的速度为 50 units/s, 重力加速度为 10 units/s^2。以弹弓射出点为原点，冰块露出的部分的位置为 +215units ~ +225units。依照端肾的估计，他应该以仰角 60° 发射。但因为他手会抖，所以实际的抛射角会在 55.085°~64.158° 之间均匀分布，对应的距离为 +205units~ +225units。

另外，要打破冰块，就必须直接打到冰块，如果先撞到石板再反弹打到冰块，会因为力量不够而打不破冰块。那么**成功打破冰块的概率**是多少呢？他掐指算了算。

因为 0°~45°和 90°~45° 的概率分布情况相同，所以就算抛射角从 0°~90° 改成 45°~90°，CDF 也不会改变。此题虽限定抛射角在 55.085°~64.158° 均匀分布，但 CDF 不必整个重算，只要用条件概率的概念就可以解题。代入参数后

$$F_X(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{250}\right)$$

所求为

$$\frac{F_X(225)-F_X(215)}{F_X(225)-F_X(205)}=\frac{\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{225}{250}\right)-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{215}{250}\right)}{\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{225}{250}\right)-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{205}{250}\right)}\approx 0.5335984145$$

大约是 53% 的概率，端肾算出成功概率后，决定冒险一试。

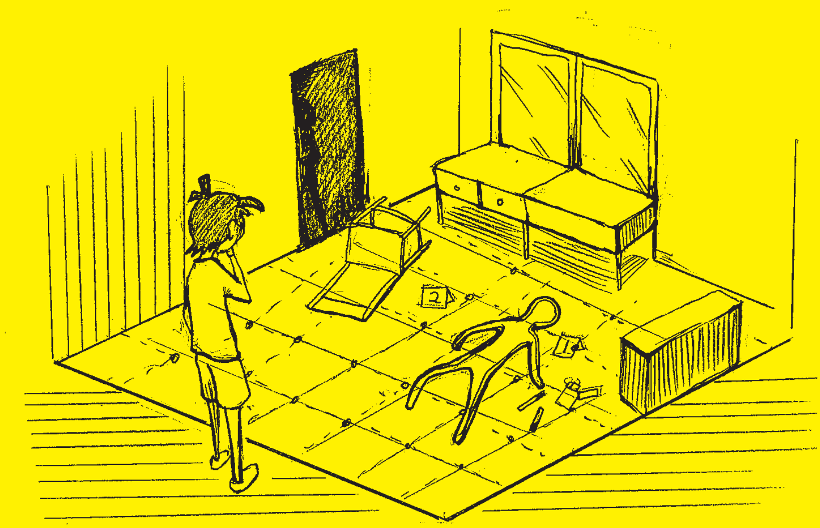
最后他也得到满意的结果 <(￣︶￣)>(见下图)。

Face on FIRE!!!

难　　度：★★

使用技巧：读者须了解条件概率所要表达的意义以及知道其在计算上如何操作。

原 作 者：刘人硕、辜禹仁、吴昱辉



键盘柯南和苗栗小五郎一家到台大人人会馆参加婚礼，新郎是小五郎的亲戚，恰好也是一位黑道老大，

但是，“死神柯南” 的名号不是随便叫叫的。婚礼开始不久，远方传来一阵男性的呻吟声，紧接着，女性的尖叫声划破了会场……

柯南一行人赶到案发现场，发现新郎在客房里被烧死，脸部焦黑，焦黑部分由脸的下半缘渐连到眉梢。诸位看官看过这么多集漫画和卡通，想想就知道了，根据柯南专业的判断，这不会是单纯的自杀事件，而是一场精心策划的谋杀案。经过详细的调查，他得到以下的命案线索：

案发时，有位女服务生在房外打扫，听到了以下的对话：

老大：“因为做贼的喊捉贼啊！”

不明人声：“别气了，大哥，我帮你点烟。”

(点火声)

不明人声：“应该是这个位子吧。”

老大：“我再给你一次机会！”

(点火声)

老大：“你，你干嘛烧我！！(惨叫连连)”

(房间陷入寂静)

这情况对其他人来说，或许难以理解，但柯南想都没想，嘀咕了一句：“这不是很简单吗？”

他立刻对苗栗小五郎射出麻醉药，还原现场。沉睡的苗栗小五郎指挥目暮警官饰演拿烟的老大，小兰姊姊饰演凶手。还原现场的情况：

柯南将客房划分成为 20 个区块与 ABCD 四区，他说

“老大的脸、手，以及火焰的位置，只有这几种可能。”

示意图： (ˊ-ˋ)y-

脸	(ˊ - ˋ)				y-	(ˊ - ˋ)				y-	(ˊ - ˋ)				y-	(ˊ - ˋ)				y-
	A					B					C					D				
火焰	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

他又依现场情况作了以下假设：

(1) 凶手是冲动的，只会一次点 4 把火，火必定会烧到相邻的 4 个格子 (ex.1~4，2~5，3~6，…，17~20)，因此共有 17 种点火位置；

(2) 因为案发时房内没有光线，凶手的点火位置是随机的，各位置均等；

(3) 老大占了 5 个格子 (身体 4 格，手 + 烟 1 格)，只会固定出现在 A、B、C、D 这 4 个区块之一；

(4) 老大在各个区间出现的概率并不相等，A:0.4，B:0.3，C:0.2，D:0.1；

(5) 老大很脆弱又很油，只要有一点火苗烧到脸，老大就会被烧死；

(6) 由于习惯，老大用不同手点烟的概率不一样，左右手拿烟的概率各自是 0.8 与 0.2。

以下为烟被点燃，老大被烧死的范例 (有任何一根 ζ 出现在老大脸下方)：

(ˊ - ˋ)				y-															
			ζ	ζ	ζ	ζ													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

以下为烟被点燃，老大没被烧死的范例：

										(ˊ - ˋ)				y-					
														ζ	ζ	ζ	ζ		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

以下为烟没被点燃，老大被烧死的范例：

					(´ - `)				y-										
				ζ	ζ	ζ	ζ												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

以下为烟没被点燃，老大没被烧死的范例：

															(´ - `)				y-
				ζ	ζ	ζ	ζ												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

小蓝跟目暮紧关走进房间，一会儿，一丝烟味飘出，女服务生拿着电话，犹豫着不知道该打给医师求救，还是干脆找牧师来处理后事。

这时，柯南利用变声器模仿苗栗小五郎的声音说着：

“在案件发生之后，柯南跟我说过，他以前学过概率，可以用来计算未知事情发生的可能性。在你查看目暮警官的伤势之前，应该先试着去推估他被烧死的概率，就可以作出正确的判断了。若目暮警官被烧死的条件概率低于五成，则需找医师治疗；若高于或等于五成，那么，就打给牧师来处理后事吧。”

在场的人被这番话引起注意力，完全不管目暮警官的死活，仔细听他继续说。

“首先，因为已知道烟被点燃了，我们所求的是条件概率：

$$\frac{P(\text{烟被点燃且目暮警官被烧死})}{P(\text{烟被点燃})}$$

如果说这样子的概率超过五成的话，就替他默哀；反之，就只要稍微包扎一下伤口就好了。”

柯南缓缓地说道。

“依照之前的假设，计算目暮警官出现在某格的概率 × 左手或右手拿烟的概率 × 凶手在特定位置点烟的概率去推算概率。

举例来说，当目暮警官的脸在 A 区时，概率为 0.4，右手拿烟的

概率是 0.2，这时，能够点到烟的就只有最下方的第 1 区，因此烟被点燃的概率是$0.4\times0.2\times\frac{1}{17}$。

如果目暮警官的脸在 A 区，且左手拿烟，那么烟可以被点燃的区域，从 2~5、3~6、4~7 和 5~8 都有可能，此时烟被点燃是$0.4\times0.8\times\frac{4}{17}$，至于要将目暮警官烧死，5~8 这个区域的火点燃后是不会烧到脸的，此时烟被点燃且目暮警官被烧死的概率是$0.4\times0.8\times\frac{3}{17}$。”

“欸欸，你这样子，要算到什么时候啊？等你算完，我们都被烟味呛死了吧！”

一旁的白鸟警官抱怨着。

“你们不用担心这一点，我已经叫柯南先把整个概率计算好了。柯南！”柯南伪装成苗栗小五郎呼叫自己。

“有！”

柯南从椅子背后跳了出来

“我把各个部分的概率写好了：

$$\frac{P(\text{烟被点燃且目暮警官被烧死})}{P(\text{烟被点燃})}$$

$$=\frac{0.4\times0.2\times\frac{1}{17}+(0.4\times0.8+0.3\times0.2+0.3\times0.8+0.2\times0.2+0.2\times0.8+0.1\times0.2)\times\frac{3}{17}+0.1\times0.8\times\frac{1}{17}}{0.4\times0.2\times\frac{1}{17}+(0.4\times0.8+0.3\times0.2+0.3\times0.8+0.2\times0.2+0.2\times0.8+0.1\times0.2)\times\frac{4}{17}+0.1\times0.8\times\frac{1}{17}}$$

$$=\frac{0.08\times1+0.84\times3+0.08\times1}{0.08\times1+0.84\times4+0.08\times1}=\frac{67}{88}$$

≈ 0.76”

“嗯，反正大概也来不及了，等会儿再打电话给牧师，先让目暮警官安息一下吧！”柯南赶紧跑回椅子后面，用苗栗小五郎的声音激昂地说着，获得全场鼓掌叫好，一片欢呼。

“等等，我只是手被烧伤了，既然你们都不救我，我只好自己先包扎了。”

突然间，目暮警官从后方窜出，脸上还包着绷带。

“目暮警官！你不是应该被烧死了吗？你被烧死的概率将近八成耶！” 白鸟警官惊讶地问着。

“笨蛋，被烧死的概率高达八成，不代表一定会被烧死啊！”

目暮警官敲了白鸟警官的头一下，接着说：“话说，苗栗老弟，你这样子叫我还原现场，还因此让我脸部被烧伤，究竟要做什么？”

“哼哼，真相，永远只有一个。” 柯南冷笑地说着。

“凶手就是——你！新娘小姐！” 柯南用激动的声音说着，全场一片哗然。

“我，我怎么可能杀掉自己的老公？！”

“让我告诉你吧！事实上，我刚刚吩咐小兰，一定要烧到目暮警官的脸。” 柯南说着，让目暮警官整个不敢置信。

“苗栗老弟，你要杀……”

柯南不理会目暮警官，接着继续推理。

“纵然故意烧到目暮警官的脸，但是他仍然只受到轻微烧伤，这是因为……他没有胡子！”

“这跟我为什么杀了他一点关系都没有啊！”

新娘生气地说着。

“根据我苗栗小五郎对新郎的认识，他不喜欢留胡子。但是你却以‘喜欢长胡子的男人’为由，逼他留长胡子。所以今天，你才能叫小弟帮他点烟，把胡子点燃，将他烧死。”

新娘的表情越来越惊恐。

“你、你这样子说，你有什么证据！”

“新郎很爱赌博，他的口头禅就是‘我十次赌博有八次会赢’，但是他最近运气很差，输了，连婚礼都缩水了。他有跟我说过，你一直很生他的气，不停讽刺他‘不是十次有八次会赢吗？不如我们

赌一把，看看是谁十次有八次会赢’，而且，你还替他保了巨额的意外险。所以当我算出老大被烧死的概率将近八成时，我就想到，这是你精心设计出的一场你跟他的赌局。”

“都怪他……” 这一刻，低头的新娘流下了眼泪。

“就叫他不要再去赌博了，都讲不听……拿了这么多钱又有什么用，我内心一点都不希望我赌赢这场赌局啊！！”

新娘说到最后泣不成声。早已看惯这些场景的目暮警官，将她铐上手铐，移送法办。

“爸，你这次又立下大功了！” 事件结束后，小兰称赞着苗栗小五郎。

“啊……有吗……” 小五郎虽然有点不解，但仍沾沾自喜。

“不过，胡子被点燃以后会烧到整张脸，好像有点神奇耶！” 小兰说着。

“哎呀，是要那种很长的山羊胡才会烧死人的，像我这种小胡子……” 小五郎笑着说道，把打火机拿起，对着自己的小胡子点了火……

几十秒后，小兰赶紧跟女服务生要了医师的电话，将小五郎紧急送医。