第3章 线性系统的能控性与能观测性

能控性(controllability)和能观测性(observability) 是由 R. E. Kalman 于 20 世纪 60 年代初首先提出研究的两个重要概念,深刻揭示了系统的内部结构关系,在现代控制理论的研究与实践中,具有极其重要的意义。事实上,能控性与能观测性是系统分析和设计的理论基础。能控性指的是控制作用对被控系统的状态进行控制的可能性,能观测性反映的是通过测量系统输出确定系统状态的可能性。

在本章中,我们将限于讨论线性系统。首先给出能控性与能观测性的定义,然后推导出判别系统能控和能观测性的若干判据。

3.1 线性定常连续系统的能控性

3.1.1 能控性定义

首先看两个例子。一个是如图 3-1 所示系统的状态结构图。显然,u 只能控制 x_1 而不能影响 x_2,我们称状态变量 x_1 是可控的,而 x_2 是不可控的。只要系统中有一个状态变量是不可控的,则该系统就是状态不完全可控的。

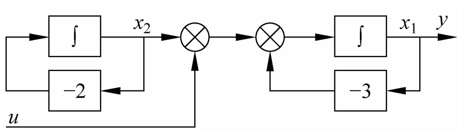

图 3-1 不能控系统的状态结构图

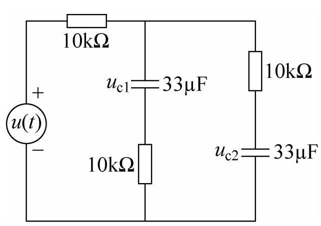

图 3-2 阻容电路

再来看如图 3-2 所示电路，由回路的电压关系有

$$u(t)=10\times10^{3}\times\left(33\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}u_{c1}}{\mathrm{d}t}+33\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}u_{c2}}{\mathrm{d}t}\right)+u_{c1}+10\times10^{3}\times33\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}u_{c1}}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t)=10\times10^{3}\times\left(33\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}u_{c1}}{\mathrm{d}t}+33\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}u_{c2}}{\mathrm{d}t}\right)+u_{c2}+10\times10^{3}\times33\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}u_{c2}}{\mathrm{d}t}$$

选取电容两端的电压为状态变量，即 $x_1=u_{c1}$，$x_2=u_{c2}$，输出为电容 C_2 上的电压，$y=u_{c2}=x_2$，则描述系统的方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[0\quad 1]\boldsymbol{x}$$

系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\\ \mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$$

若初始状态 $\boldsymbol{x}_0=0$，则

$$\boldsymbol{x}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

可见，无论输入 u 为何值，对所有 $t\geqslant0$，必有 $\boldsymbol{x}(t)$ 正比于 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，即 $x_1=x_2$，不可能做到 $x_1\neq x_2$，这表明此电路是部分能控的。

一般情况下，对于线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{3.1}$$

如果给定系统的一个初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，在一个有限的时间间隔内施加一个无约束的控制向量，能够使得系统由初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 转移到任一状态，则称该系统在 t_0 时刻是能控的；如果系统对任意一个初始状态都能控，则称系统是状态完全能控的，简称系统是状态能控的或系统是能控的。

根据初始状态和终端状态的不同位置，关于能控性还可以演化出以下两种定义：

（1）初始状态为状态空间任意非零有限点，终端状态为状态空间原点，即零态。此时可表述为：如果存在一个分段连续的输入 $\boldsymbol{u}(t)$，能在 $[t_0,t_f]$ 的有限时间内使得系统从某一初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 转移到零态 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$，则称系统是状态能控的。

（2）初始状态为状态空间原点，即零态，终端状态为状态空间任意非零有限点。此时可表述为：如果存在一个分段连续的输入 $\boldsymbol{u}(t)$，能在 $[t_0,t_f]$ 的有限时间内使得系统从零态 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 转移到任意非零状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$，则称系统是状态能控（有时称为能达）的。

如果若 $t_0=0$，$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}(0)$，系统状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

如果系统是能控的，能找到控制 $\boldsymbol{u}(t)$，使得

$$\boldsymbol{x}(t_1) = e^{\boldsymbol{A}t_1}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\boldsymbol{A}(t_1-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = 0$$

$$\boldsymbol{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \tag{3.2}$$

满足上式的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$，必是能控状态。

3.1.2　判别系统能控性的方法

判别系统能控性的方法有两种，一种是直接根据状态方程的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 阵来判别，另一种方法是先进行状态变换，化为约当标准型后，再根据 $\boldsymbol{B}$ 阵确定其能控性。

1. 秩判据

按照定义，需要考察对系统任意的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，能否找到输入 $\boldsymbol{u}(t)$，使之在 $[t_0, t_f]$的有限时间内转移到零 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$。

线性定常非齐次状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

将 $t=t_f$ 代入上式得

$$\boldsymbol{x}(t_f) = \Phi(t_f-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = 0$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

由凯莱 - 哈密尔顿定理 $e^{\boldsymbol{A}(t)} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j(t)\boldsymbol{A}^j$，有

$$\Phi(t_0-\tau) = e^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t_0-\tau)\boldsymbol{A}^j$$

于是，可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t_0) &= -\int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t_0-\tau)\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B}\int_{t_0}^{t_f} a_j(t_0-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\
&= -\left[\boldsymbol{B}\int_{t_0}^{t_f} a_0(t_0-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\int_{t_0}^{t_f} a_1(t_0-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\int_{t_0}^{t_f} a_{n-1}(t_0-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right]
\end{aligned}$$

令

$$U_j = \int_{t_0}^{t_f} a_j(t_0 - \tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad j = 0,1,\cdots,n-1$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t_0) &= -(\boldsymbol{B}U_0 + \boldsymbol{AB}U_1 + \cdots + \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}U_{n-1}) \\ &= -[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}][U_0^{\mathrm{T}} \quad U_1^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad U_{n-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ &= -\boldsymbol{MU}\end{aligned}$$

这是关于 $\boldsymbol{U}$ 的非齐次方程组。其中 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$，称为能控阵。由线性代数知识知道，其有解的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相等，即

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{rank}[\boldsymbol{M} \quad \boldsymbol{x}(t_0)]$$

由于 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 任意性。所以，必须有

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = n \tag{3.3}$$

对于多输入系统，$\boldsymbol{M}$ 不是方阵，秩的确定可能比较复杂，在计算行比列少的矩阵的秩时，可利用 $\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}$ 的积为方阵，且

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}})$$

此时，通过计算方阵 $\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}$ 的秩确定 $\boldsymbol{M}$ 的秩较为方便。

【例 3.1】 已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}u$$

判别系统的能控性。

解：由于

$$\det\boldsymbol{M} = \det[\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB}] = \begin{vmatrix}1 & 1 \\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

即 $\boldsymbol{M}$ 为奇异，其秩小于 2，所以该系统是状态不能控的。

【例 3.2】 考虑由图 3-3 表示的系统，取 i_{L} 和 u_{c} 作为状态变量，u_{r} 为输入，$y=u_{\mathrm{c}}$ 为输出，判别系统的能控性。

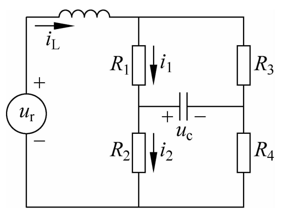

图 3-3 例 3.2 原理图

解：选取电阻 R_1 和 R_2 上的电流 i_1 和 i_2 为中间变量，由电路原理有

$$u_r = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 + R_2 i_2$$

$$i_1 - i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}$$

$$R_1 i_1 = (i_L - i_1)R_3 - u_{\mathrm{c}}$$

$$R_2 i_2 = u_c + R_4\left[C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + (i_L - i_1)\right]$$

$$\begin{pmatrix} i_L \\ \dot{u}_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} i_L \\ u_c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_r$$

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}] = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{L^2}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) \\ 0 & -\frac{1}{LC}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix}$$

当$\frac{R_1}{R_2} \neq \frac{R_3}{R_4}$时，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}) = 2$，系统是状态能控的，否则不能控。

【例 3.3】 已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

判别系统的能控性。

解：由于

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) &= \mathrm{rank}(\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}) \\ &= \mathrm{rank}[(\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}] \\ &= \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right) \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 59 & 49 & 49 \\ 49 & 42 & 42 \\ -49 & -42 & -42 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 59 & 49 & 49 \\ 49 & 42 & 42 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3 \end{aligned}$$

故系统状态不完全能控。

2. 状态变换与系统可控性之间的关系

系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$经非奇异变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}$后，状态方程为$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$，其能控性矩阵为

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{M}} &= [\tilde{\boldsymbol{B}} \quad \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} \quad \cdots \quad (\tilde{\boldsymbol{A}})^{n-1}\tilde{\boldsymbol{B}}] \\ &= [\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{ATT}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^{n-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}] \\ &= [\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \\ &= [\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})] \end{aligned}$$

由于 $\det(\boldsymbol{T})\neq 0$，故

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}) = \operatorname{rank}(\widetilde{\boldsymbol{M}})$$

这说明，状态变换不改变系统的可控性。

3. 标准型判据

(1) 系统特征根为单根时，系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{B}$ 阵中第 i 行元素全为零，则有

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i$$

显然无法找到输入 $\boldsymbol{u}$ 使状态 x_i 可控。或者说，如果 $n\times p$ 维矩阵的任一行元素全为零，那么对应的状态变量就不能由任一 $\boldsymbol{u}$ 来控制。因此，当且仅当输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 没有一行的所有元素均为零时，系统才是状态能控的。

在应用状态能控性的这一条件时，应特别注意，必须将系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转换成对角线形式。

(2) 系统特征根为 n 重根时，系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

此时，若 $\boldsymbol{B}$ 阵中第 i 行元素全为零，则有

$$\dot{x}_i = \lambda x_i + x_{i+1} \quad (i \neq n)$$

由于 x_{i+1} 可能受制于输入控制，而 x_i 与 x_{i+1} 相互关联，故不能说明 x_i 的可控性，但若 $\boldsymbol{B}$ 阵中第 n 行元素全为零，则有

$$\dot{x}_n = \lambda x_n$$

状态 x_n 一定不可控。故要使系统可控，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 最后一行的所有元素不能全为零。

(3) 系统特征根有多个重根时，且每个重特征值只对应一个独立的特征向量，若 λ_1 为 σ_1 重根，λ_2 为 σ_2 重根，λ_l 为 σ_l 重根，且

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_l = n$$

则

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{bmatrix}_{n\times p},$$

$$
\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{\sigma_i\times\sigma_i},\quad \boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}B_{i1}\\ B_{i2}\\ \vdots \\ B_{i\sigma_i}\end{bmatrix}_{\sigma_i\times p}
$$

要使系统可控，与每个 Jordan 块最后一行相对应的 $\boldsymbol{B}$ 的元素不全为零。

（4）如果某个特征值对应几个约当块，则不能简单地按(3)判断系统的可控性。在这种情况下，其能控性应根据同一个特征值对应的每个约当块的最后一行所对应的 $\boldsymbol{B}$ 中的行向量是否行线性无关来判断，若它们行线性无关，则系统才是状态能控的。

根据这些判据，容易判断出下列系统是状态能控的

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}u
$$

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 4\\ 3\end{bmatrix}u
$$

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ & & & -5 & 1\\ 0 & & & 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 3 & 0\\ 0 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\\ \dot{x}_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}u
$$

下列系统是状态不能控的

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u
$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&2\\0&0\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&0&&0\\0&-2&1&&\\0&0&-2&&\\&&&-5&1\\0&&&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\2\\1\\3\\0\end{bmatrix}u$$

(5) 若系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&&1&&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

以三阶系统为例，由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=[\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{AB}\quad\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]\\&=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-a_2\\1&-a_2&a_2^2-a_1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\det(\boldsymbol{M})=-1\neq 0$$

故由能控标准型描述的系统一定是状态可控的。

3.1.3 输出能控性

在实际的控制系统设计中，需要关心的是输出，而不是系统的状态。对于控制系统的输出，状态能控性既不是必要的，也不是充分的。因此，有必要再定义输出能控性。

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}\\\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Du}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{u}\in R^p$，$\boldsymbol{y}\in R^q$，$\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in R^{n\times p}$，$\boldsymbol{C}\in R^{q\times n}$，$\boldsymbol{D}\in R^{q\times p}$。

如果能找到一个无约束的控制向量 $\boldsymbol{u}(t)$，在有限的时间间隔 $t_0\leqslant t\leqslant t_f$ 内，使系统从任一初始输出 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 转移到任一最终输出 $\boldsymbol{y}(t_f)$，那么称系统为输出能控的。

由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t_f) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t_f) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t_f)\\ &= \boldsymbol{C}\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_f-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t_f)\end{aligned}$$

不失一般性，令 $t_0=0$，$\boldsymbol{y}(t_f)=0$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_f}x_0 &= -\boldsymbol{C}\int_0^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_f-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t_f)\\ &= -\boldsymbol{C}\int_0^{t_f}\sum_{j=0}^{n-1}a_j(t_f-\tau)\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t_f)\\ &= -\boldsymbol{C}\sum_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B}\int_0^{t_f}\sum_{j=0}^{n-1}a_j(t_f-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t_f)\end{aligned}$$

令 $u_m(t_f) = \int_0^{t_f}a_m(t_f-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_f}\boldsymbol{x}_0 &= -\boldsymbol{C}\sum_{m=0}^{n-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_m(t_f) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t_f)\\ &= -\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0(t_f) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1(t_f) - \cdots - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{n-1}(t_f) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t_f)\\ &= -[\boldsymbol{CB} \quad \boldsymbol{CAB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{D}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_0(t_f)\\ \boldsymbol{u}_1(t_f)\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_{n-1}(t_f)\\ \boldsymbol{u}(t_f)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{M}_o = [\boldsymbol{CB} \quad \boldsymbol{CAB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{D}]$$

$\boldsymbol{M}_o$ 为 $q\times(n+1)p$ 维输出能控性矩阵。显然，输出能控的条件为，输出能控性矩阵的秩等于输出变量的维数 q。即

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}_o) = q \tag{3.4}$$

需要注意的是，状态可控性和输出可控性是两个不同的概念，两者之间没有必然的联系。

【例 3.4】 已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

试判断系统的状态可控性和输出可控性。

解：由于

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}] = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = 1 < 2 = n$$

故状态不可控。

$$M_o = [CB \quad CAB \quad D] = [1 \quad -2 \quad 0]$$

$$\mathrm{rank}(M_o) = 1 = q$$

故输出可控。

3.2 线性连续系统的能观测性

系统的能观测性是研究状态和输出量的关系，即能否通过对输出量在有限时间间隔内的量测来确定或识别任一时刻系统的状态。

3.2.1 能观测性定义

首先看一个例子，如图 3-4 所示的系统，显然输出 y 中只有 x_2，而无 x_1，所以从输出 y 中不能确定 x_1，只能确定 x_2。我们称 x_2 是可观测的，x_1 是不可观测的。

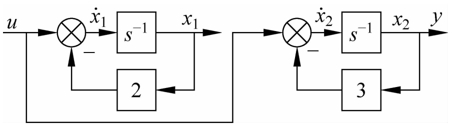

图 3-4 不能测系统的状态结构图

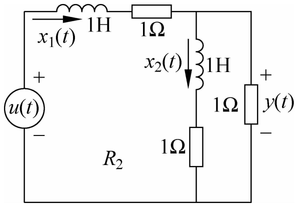

图 3-5 *RL* 电路

再来看图 3-5 所示的电路，选取电感中的电流为状态变量，$y(t)$为输出量，由回路的电压关系有

$$u(t) = 1 \times \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + 1 \times x_1 + 1 \times \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + 1 \times x_2$$

$$u(t) = 1 \times \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + 1 \times x_1 + 1 \times (x_1 - x_2)$$

$$y = 1 \times (x_1 - x_2)$$

则描述系统的方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad -1] \boldsymbol{x}$$

系统的状态转移矩阵为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

当已知输入 $u(t)$时，通过上式即可求得 $\boldsymbol{x}(t)$，从而求得 $y(t)$。为简便起见，设 $u(t) = 0$，则

$$y(t) = [1 \quad -1] \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{x}(0) = (x_{10} - x_{20}) \mathrm{e}^{-3t}$$

因此，当 $x_{10}=x_{20}$ 时，$y(t)=0$，即输出不产生任何响应。这表明此电路是部分不能观测的，我们称这样的系统是不能观测的。

一般地，对于线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

其中，$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{y}\in R^q$，$\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}\in R^{q\times n}$。如果对任意给定的输入 $\boldsymbol{u}(t)$，存在一有限观测时间 $t_f>t_0$，使得根据$[t_0,t_f]$期间的输出 $\boldsymbol{y}(t)$能唯一地确定系统在初始时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，则称状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$是能观测的。如果系统的每一个状态都是能观测的，则称系统是状态能观测的。

对于能观测性的定义，需要说明的是：

(1) 已知系统在有限时间区间$[t_0,t_f]$内的输出 $\boldsymbol{y}(t)$，观测的目标是为了确定初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$。

(2) 一旦确定了 $\boldsymbol{x}(t_0)$，则在输入作用下任意时刻的状态可由状态转移矩阵得到。即

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

即由系统对于在$[t_0,t_f]$内的输出 $\boldsymbol{y}(t)$能唯一地确定任意指定的状态 $\boldsymbol{x}(t)$，则称系统是状态能检测的；因为连续系统的状态转移矩阵是非奇异的，所以系统能检测性与能观测性是等价的。

(3) 能观测性表示的是输出 $\boldsymbol{y}(t)$反映状态 $\boldsymbol{x}(t)$的能力，即通过输出量在有限时间内的量测，能否把系统的状态识别出来。由于输入引起的输出可计算，所以分析能观测性时，不妨设 $\boldsymbol{u}(t)=0$，只需从齐次状态方程和输出方程出发进行分析。

3.2.2　判别系统能观测性的方法

判别系统能观测性的方法也有两种，一种是直接根据状态方程的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 阵来判别，另一种方法是先进行状态变换，化为约当标准型后，再根据 $\boldsymbol{C}$ 阵确定其能观测性。

1. 秩判据

将线性定常系统的状态空间方程重写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{3.5}$$

易知，其输出向量为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

将 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 写为 $\boldsymbol{A}$ 的有限项的形式，即

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\boldsymbol{A}^k$$

所以

$$\boldsymbol{y}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(t)\boldsymbol{CA}^k\boldsymbol{x}(0)$$

或

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)&=a_0(t)\boldsymbol{C}x(0)+a_1(t)\boldsymbol{CA}x(0)+\cdots+a_{n-1}(t)\boldsymbol{CA}^{n-1}x(0)\\&=\begin{bmatrix}a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-1}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix}x(0)\end{aligned}\tag{3.6}$$

定义

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\vdots\cdots\vdots(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\tag{3.7}$$

为能观测阵，由于 $a_i(t)$ 是已知函数，因此根据有限时间区间 $[t_0,t_f]$ 内的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 能唯一地确定初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 的充分必要条件为

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N})=n\tag{3.8}$$

当然，也可通过 $\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$ 计算方阵的秩确定 $\boldsymbol{N}$ 的秩。

【例 3.5】 试判断由式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

所描述系统的能观测性。

解：由状态空间表达式，有

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -7 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CA}^2=\begin{bmatrix}-6 & -7 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\-6 & -7 & -1\\6 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N})=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\-6 & -7 & -1\\6 & 5 & -1\end{bmatrix}=2<3$$

所以,此系统不是状态完全能观测的。

【例 3.6】 判别系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

所描述系统的能观测性。

解:由状态表达式有

$$\boldsymbol{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N}) = 2$$

故此系统是状态完全能观测的。

2. 状态变换与系统可测性之间的关系

系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$ 经非奇异变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}$后,状态方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \widetilde{\boldsymbol{A}}\,\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{\boldsymbol{C}}\,\tilde{\boldsymbol{x}}$$

其能测性矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{C}} \\ \widetilde{\boldsymbol{C}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{C}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{CT} \\ \boldsymbol{CTT}^{-1}\boldsymbol{AT} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CT}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{CT} \\ \boldsymbol{CAT} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{T}$$

由于 $\det(\boldsymbol{T}) \neq 0$,故

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N}) = \mathrm{rank}(\widetilde{\boldsymbol{N}})$$

这说明,状态变换不改变系统的可测性。

3. 标准型判据

(1) 系统特征根为单根时,系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{C}$ 阵中第 j 列元素全为零,则有

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 \\
\dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \lambda_n x_n \\
y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1(j-1)}x_{j-1} + 0x_j + c_{1(j+1)}x_{j+1} + \cdots + c_{1n}x_n \\
y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2(j-1)}x_{j-1} + 0x_j + c_{12(j+1)}x_{j+1} + \cdots + c_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_q &= c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{(j-1)}x_{j-1} + 0x_j + c_{q(j+1)}x_{j+1} + \cdots + c_{qn}x_n
\end{aligned}$$

显然无法从输出 $\boldsymbol{y}$ 得出 x_j,x_j 不可测。因此,当且仅当输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 没有一列的所有元素均为零时,系统才是状态能测的。

在应用状态能测性的这一条件时,应特别注意,必须将系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转换成对角线形式。

(2)系统特征根为重根时,系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

此时,若 $\boldsymbol{C}$ 阵中第 1 列元素全为零,则有

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & c_{q2} & c_{q3} & \cdots & c_{qn} \\ 0 & \lambda c_{12} & c_{12}+\lambda c_{13} & \cdots & c_{1(n-1)}+\lambda c_{1n} \\ 0 & \lambda c_{22} & c_{22}+\lambda c_{23} & \cdots & c_{2(n-1)}+\lambda c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & \lambda c_{q2} & c_{q2}+\lambda c_{q3} & \cdots & c_{q(n-1)}+\lambda c_{qn} \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{N}$ 的第一列元素全部为零，故状态不可测。故要使系统可测，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第一列所有元素不能全为零。

（3）系统特征根有多个重根时，且每个重特征值只对应一个独立的特征向量，则其状态完全能观测的充分必要条件是系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & 0 \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{J}_k \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

中，$\boldsymbol{C}$ 阵中与每个约当块 $\boldsymbol{J}_i(i=1,2,\cdots)$ 首列所对应的列，其元素不全为零。

（4）如果某个特征值对应几个约当块，则不能简单地按（3）判断系统的可测性。在这种情况下，其能测性应根据同一个特征值对应的每个约当块的首列所对应的 $\boldsymbol{C}$ 中的列向量是否是行线性无关来判断，若它们行线性无关，则系统才是状态能测的。

根据这些判据，容易判断出下列系统是状态能测的：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

下列系统是状态不能测的：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}1\\ \dot{x}2\\ \dot{x}3\\ \dot{x}4\\ \dot{x}5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&&0\\0&2&1&&\\0&0&2&&\\&&&-3&1\\0&&&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

对于系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&&\\&&0&\\0&\lambda_1&&\\&&\lambda_1&1\\&0&&\\&&0&\lambda_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}\end{bmatrix}$$

若$\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{13}\\c_{23}\end{bmatrix}$列线性无关，则状态能观。

在系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&&&&&\\0&-2&&&&&\\&&-2&&&&\\&&&-2&&&\\&&&&3&1&\\&&&&0&3&\\&&&&&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}4&0&0&0&2&0&0\\0&0&3&0&1&0&1\\0&0&0&5&3&0&0\end{bmatrix}x$$

中，$\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}$以及$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$均线性独立，故该系统是状态可测的。

(5) 若系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&-a_0\\1&0&0&\cdots&-a_1\\0&1&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-2}\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\\vdots\\b_{n-2}\\b_{n-1}\end{bmatrix}u$$

$$y=[0\quad 0\quad \cdots\quad 1]\boldsymbol{x}$$

以三阶系统为例，由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -a_0\\1 & 0 & -a_1\\0 & 1 & -a_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=[0\quad 0\quad 1]$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -a_2\\1 & -a_2 & a_2^2-a_1\end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{N})=-1\neq 0$$

故由能测标准型描述的系统一定是状态可测的。

3.3　能控性和能观测性与传递函数零极点的关系

系统的能控性和能观测性是现代控制理论中两个重要的基本概念，而传递函数矩阵概念目前已被广泛应用于控制工程中，那么系统的能控性和能观测性与传递函数阵有什么样的关系？能否通过系统传递函数阵的特征来判别其状态的能控性和能观测性呢？

考察系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\quad y=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M})=\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 4\end{bmatrix}=1<2$$

故系统不完全能控。

系统的传递函数为

$$G(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{s-1}{(s-1)(s-4)}$$

系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_1=1$ 的因子被约去了，如果选择变换阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$$

则把系统化为对角线标准型

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\quad y=[1\quad 1]\boldsymbol{z}$$

可以清楚地看到，对应于 $\lambda_1=1$ 的状态方程与输入无关，自然不能控，也不会出现于系统的传递函数之中。

显然，由系统的传递函数

$$G(s)=\frac{s-1}{s^2-4s+5}$$

可知其状态空间描述亦可写为

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 5\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad y=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

由于系统的能测性矩阵

$$\text{rank}(\boldsymbol{N})=\text{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=1<2$$

说明系统不能测。

通过以上分析可知，描述系统内部结构特性的能控性和能观测性与描述系统外部特性的传递函数之间，是必然存在密切关系的，能控性、能观测性与传递函数的零极点对消现象之间的关系，可用来判断单输入单输出系统的能控性和能观测性。系统的传递函数所表征的只能是既能控又能观测的子系统，由于系统不能控或不能观测部分的运动无法用传递函数反映出来，若存在有不稳定的运动模式，那就会有“潜伏振荡”发生，这就是用传递函数来描述系统的局限性。

一般情况下，当由状态空间描述导出的传递函数存在零极点对消时，该系统或是能控不能观测、或是能观测不能控、或是不能控不能观测，三者必居其一。故对单输入单输出系统，无论 $\boldsymbol{A}$ 阵有相异或相重特征值，系统能控能观测的充要条件是：传递函数没有零极点对消，或传递函数不可约。

特别需要指出，对于多输入多输出系统，情况则较为复杂，这只是必要条件，而不是充分条件。也就是说，如果系统是能控的(或能观测的)，则传递函数阵中必无零极点相消现象；但如果传递函数阵中没有零极点相消现象，则系统不一定就是能控的(或能观测的)。

3.4　对偶原理

系统的能控性与能观测性无论从定义还是从判据来看都是很相似的，它们之间的内在关系是由卡尔曼提出的对偶原理确定的，利用对偶关系可以把系统能控性分析转化为对其对偶系统的能观测性进行分析。

3.4.1　线性系统的对偶关系

考虑由状态空间表达式描述的两个系统。S_1 为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}\end{cases}$$

S_2 为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{x}^{*}+\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{u}^{*}\\ \boldsymbol{y}^{*}=\boldsymbol{C}^{*}\boldsymbol{x}^{*}\end{cases}$$

如果满足

$$A^* = A^T,\quad B^* = C^T,\quad C^* = B^T$$

则称两系统是互为对偶的。

显然，若系统 S_1 是一个 p 维输入，q 维输出的 n 阶系统，则其对偶系统 S_2 是一个 q 维输入，p 维输出的 n 阶系统，图 3-6 是对偶系统的状态结构图。

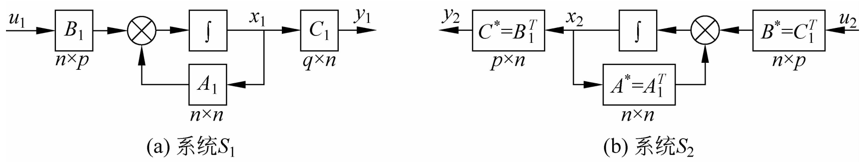

图 3-6　对偶系统的状态结构图

从图 3-6 可以看出，互为对偶的系统状态结构图亦为对偶，即输入端与输出端互换，信号传递方向相反，信号引出点和综合点互换，对应矩阵互为转置。

3.4.2　对偶系统的性质

若系统 S_1 和系统 S_2 互为对偶，且系统 S_1 的传递函数矩阵为 $\boldsymbol{W}_1(s)$，系统 S_2 的传递函数矩阵为 $\boldsymbol{W}_2(s)$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_2(s) &= \boldsymbol{C}^*(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}^*\\ &= \boldsymbol{B}^T(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{C}^T\\ &= \boldsymbol{B}^T[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^T\boldsymbol{C}^T\\ &= [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]^T = \boldsymbol{W}_1^T(s)\end{aligned}$$

也就是说，互为对偶的系统其传递函数阵是互为转置的。

由于

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^T| = |(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^T| = |s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = 0$$

所以还可以看出，互为对偶的系统其特征方程是相同的。

3.4.3　对偶原理

若系统 S_1 和系统 S_2 互为对偶，则对于系统 S_1，状态能控的充要条件是 $n\times np$ 维能控性矩阵

$$\boldsymbol{M}_1 = [\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$$

的秩为 n。状态能观测的充要条件是 $n\times nq$ 维能观测性矩阵

$$\boldsymbol{N}_1 = [\boldsymbol{C}^T \vdots \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^T)^{n-1}\boldsymbol{C}^T]$$

的秩为 n。

对于系统 S_2 状态能控的充要条件是 $n\times nq$ 维能控性矩阵

$$\boldsymbol{M}_2 = [\boldsymbol{B}^* \vdots \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^*)^{n-1}\boldsymbol{B}^*] = [\boldsymbol{C}^T \vdots \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^T)^{n-1}\boldsymbol{C}^T]$$

的秩为 n。状态能观测的充要条件是 $n\times np$ 维能观测性矩阵

$$\boldsymbol{N}_2=[\boldsymbol{C}^* \ \vdots\ \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{A}^* \ \vdots\ \cdots \ \vdots\ \boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{A}^*)^{n-1}]^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \ \vdots\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \ \vdots\ \cdots \ \vdots\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

的秩为 n。

显然，$\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}$，故当且仅当系统 S_2 状态能观测（状态能控）时，系统 S_1 是状态能控（状态能观测）的。

利用对偶原理，可以把对系统能控性的分析转化为对其对偶系统能观测性的分析，从而沟通了控制问题和估计问题之间的关系。

3.5 能控标准型和能观测标准型

由于状态变量选择的非唯一性，故系统的状态空间描述不是唯一的。一个系统通过线性变换可以变换成简单而典型的形式，对于揭示系统的本质特征是很有意义的。前面通过分析，说明系统的能控性是非常重要的，所以有必要介绍系统的能控标准型。由于状态变换不改变系统的能控性，故若系统的状态是能控的，那么系统的状态空间表达式必能变换成能控标准型。

3.5.1 单输入系统的能控标准型

n 维线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u}\in R^p$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{y}\in R^q$$

如果状态完全能控，必有

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{B} \ \vdots\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \ \vdots\ \cdots \ \vdots\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_p \ \vdots\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_p \ \vdots\ \cdots \ \vdots\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_p]=n$$

上述能控判据矩阵中，有且仅有 n 个列向量是线性无关的，可取 n 个线性无关的列向量或某种组合构成状态空间的一组基底。所谓能控标准型，就是指系统在上述基底下所具有的标准型式。对于单输入系统，在能控阵中只有唯一的一组 n 个线性无关的向量。而对于多输入系统，在能控阵中，从只有唯一的一组 np 个中选取 n 个线性独立向量的取法不是唯一的，故能控标准型仅讨论单输入系统。

1. 单输入系统的能控标准Ⅰ型

假定单输入线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{3.9}$$

是状态能控的，因而有

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]=n$$

令特征多项式为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

引入线性非奇异变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{c1}\bar{\boldsymbol{x}}$，其中

$$\boldsymbol{T}_{c1}=[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}\quad \cdots\quad \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ a_{n-1} & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_2 & & \ddots & \ddots & 0\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\end{bmatrix}$$

则式(3.9)经变换后有

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{b}}u\\ \boldsymbol{y}=\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}\end{cases}\tag{3.10}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}_{c1}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{c1}=\boldsymbol{T}_{c1}^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}\quad \cdots\quad \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix}1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{T}_{c1}^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_n]$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1&=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}+\cdots+a_1\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{e}_2&=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-3}\boldsymbol{b}+\cdots+a_2\boldsymbol{b}\\ &\vdots\\ \boldsymbol{e}_{n-1}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{e}_n&=\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

由于

$$\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}^1+a_0\boldsymbol{I}=0$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1&=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{A}a_1\boldsymbol{b}\\ &=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{A}a_1\boldsymbol{b}+a_0\boldsymbol{b}-a_0\boldsymbol{b}\\ &=-a_0\boldsymbol{b}=-a_0\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2&=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{A}a_2\boldsymbol{b}\\ &=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{A}a_2\boldsymbol{b}+a_1\boldsymbol{b}-a_1\boldsymbol{b}\\ &=\boldsymbol{e}_1-a_1\boldsymbol{e}_n\\ &\vdots\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{n-1}&=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\\ &=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}+a_{n-2}\boldsymbol{b}-a_{n-2}\boldsymbol{b}\\ &=\boldsymbol{e}_{n-2}-a_{n-2}\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\\ &=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}+a_{n-1}\boldsymbol{b}-a_{n-1}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{e}_{n-1} - a_{n-1}\boldsymbol{e}_n$$

所以有

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{T}_{c1}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{c1} = \boldsymbol{T}_{c1}^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n] \\
&= \boldsymbol{T}_{c1}^{-1}[-a_n\boldsymbol{e}_n \quad \boldsymbol{e}_1 - a_1\boldsymbol{e}_n \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{n-2} - a_{n-2}\boldsymbol{e}_n \quad \boldsymbol{e}_{n-1} - a_{n-1}\boldsymbol{e}_n] \\
&= \boldsymbol{T}_{c1}^{-1}[\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n]\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由于

$$\boldsymbol{T}_{c1}^{-1}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{b}}$$

且

$$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{b}$$

所以

$$\boldsymbol{T}_{c1}\bar{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n]\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}$$

故

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{C}} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_{c1} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n] \\
&= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} + \cdots + a_1\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b}] \\
&= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b} + \cdots + a_1\boldsymbol{b}) \\
&\vdots \\
\beta_{n-2} &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} + a_{n-1}\boldsymbol{b}) \\
\beta_{n-1} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

这样系统就转换成了能控标准Ⅰ型。

我们知道，传递函数分子分母多项式的系数与能控标准Ⅰ型表示时的输出矩阵

及系统矩阵是一一对应的。根据系统能控标准Ⅰ型表达式，可直接得到传递函数为

$$W(s)=\bar{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})\,\bar{\boldsymbol{b}}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s^{n-1}+a_0}$$

反过来，知道了系统的传递函数，也可直接得到能控标准Ⅰ型的表达式。

【例 3.7】　设线性定常系统的状态空间描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试将状态方程化为能控标准Ⅰ型。

解：系统的能控阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{Ab} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 16\\ 1 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 12\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M})=3$$

故系统完全能控。

系统的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -3 & \lambda+1 & -1\\ 0 & -2 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^3-9\lambda+2=0$$

故 $a_0=2$，$a_1=-9$，$a_2=0$。转换为能控标准Ⅰ型后的系数矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 9 & 0\end{bmatrix}\quad \bar{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad \bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} & \boldsymbol{Ab} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a_2 & 1 & 0\\ a_1 & a_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

状态空间描述为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 9 & 0\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}$$

【例 3.8】　写出以下传递函数的能控标准Ⅰ型。

$$G(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解：由于

$$G(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{(s+2)^2+1}{(s+3)(s+2)(s+1)}$$

无零极点相约，故能控且能观测，可以化为能控标准型，同时有

$$a_0=6,\quad a_1=11,\quad a_2=6$$

$$\beta_0 = 5,\quad \beta_1 = 4,\quad \beta_2 = 1$$

能控标准Ⅰ型的系数矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{C}} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2] = [5 \quad 4 \quad 1]$$

2. 单输入系统的能控标准Ⅱ型

如果单输入线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

是状态能控的,因而有

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = n$$

令特征多项式为

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

引入线性非奇异变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{c2}\bar{\boldsymbol{x}}$,其中

$$\boldsymbol{T}_{c2} = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]$$

则经变换后有

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{c2} = \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \\ &= \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}] \\ &= \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}^2 b \quad \cdots \quad (-a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} - a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-2} - \cdots - a_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}] \\ &= \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_{c2}^{-1}\boldsymbol{b}$$

所以

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}_{c2}\,\bar{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]\,\bar{\boldsymbol{b}}$$

故

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{C}} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_{c2} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \\ &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \end{aligned}$$

【例 3.9】 已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \quad y = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

试将其变换为能控标准Ⅱ形。

解：由于

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = 2 = n$$

故系统是状态能控的。

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^2 - 1$$

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 0$$

所以

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_{c2} = \boldsymbol{C}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

3.5.2　单输出系统的能观测标准型

1. 单输出系统的能观测标准Ⅰ型

由于系统的能控标准型和能观测标准型对系统的分析和综合有着十分重要的意义，前一节已经分析了系统的能控标准型，这里介绍系统的能观测标准型。由于状态变换不改变系统的能观测性，故若系统的状态是能观测的，那么系统的状态空间表达式必能变换成能观测标准型。

n 维线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{3.11}$$

如果状态完全能观测，必有

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}[\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \vdots \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\\ &= \operatorname{rank}[\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\cdots(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{c}_q^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = n\end{aligned}$$

能观测判据矩阵中，有且仅有 n 个行向量是线性无关的，可取 n 个线性无关的行向量或其某种组合构成状态空间的一组基底。所谓能观测标准型，就是系统在上述基底下所具有的标准型式。要使行向量取法唯一，则 $q=1$，故能观测标准型仅讨论单输出系统。

设特征方程为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

引入线性非奇异变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{o1}\bar{\boldsymbol{x}}$，其中

$$\boldsymbol{T}_{01} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}$$

则式(3.11)经变换后有

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}\\ y = \bar{\boldsymbol{c}}\bar{\boldsymbol{x}}\end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{o1} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{o1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{cA}\\ \boldsymbol{cA}^2\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}_{o1}\\
&= \begin{bmatrix}\boldsymbol{cA}\\ \boldsymbol{cA}^2\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}(-a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} - a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-2} - \cdots - a_0\boldsymbol{I})\end{bmatrix}\boldsymbol{T}_{o1}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}_{o1}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由于

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{o1} = \bar{\boldsymbol{c}}$$

故

$$\bar{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}=\boldsymbol{c}$$

所以

$$\bar{\boldsymbol{c}}=[1\quad 0\quad \cdots\quad 0]$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \cdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \cdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

2. 单输出系统的能观测标准Ⅱ型

n 维线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}\\ y=\boldsymbol{cx}\end{cases}$$

如果状态完全能观测,必有

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=n$$

设特征方程为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

引入线性非奇异变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{o2}\bar{\boldsymbol{x}}$,其中

$$\boldsymbol{T}_{o2}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & & a_1\\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & & a_2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & a_3\\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{cA}^{n-1}\\ \boldsymbol{cA}^{n-2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{cA}^{n-1}+a_{n-1}\boldsymbol{cA}^{n-2}+\cdots+a_2\boldsymbol{cA}+a_1\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}^{n-2}+a_{n-1}\boldsymbol{cA}^{n-3}+\cdots+a_3\boldsymbol{cA}+a_2\boldsymbol{c}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}+a_{n-1}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}_{o2}^{-1}\boldsymbol{AT}_{o2}=\begin{bmatrix}1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & & a_1\\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & & a_2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & a_3\\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{cA}^{n-1}\\ \boldsymbol{cA}^{n-2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}\boldsymbol{AT}_{o2}$$

$$
=\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{o2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{T}_{o2} = \begin{bmatrix} -a_0\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{e}_1 - a_1\boldsymbol{e}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{n-1} - a_{n-1}\boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{T}_{o2}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{T}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}
$$

由于

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{o2} = \bar{\boldsymbol{c}}$$

故

$$\bar{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{T}_{o2}^{-1} = \boldsymbol{c}$$

所以

$$\bar{\boldsymbol{c}} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]$$

$$\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}_{o2}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

由于能观测标准Ⅱ型对偶于能控标准Ⅰ型，能观测标准Ⅰ型对偶于能控标准Ⅱ型，故上面的变换结果也可以用对偶原理得到证明。

【例 3.10】 已知系统的状态空间表达式为

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

将其变换为能测标准Ⅰ型。

解：由于

$$
\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det\boldsymbol{N} = 1 \neq 0 \quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{N}) = 3
$$

故系统完全可测。

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$a_2 = -2, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 1$$

取

$$
\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{cA}\\\boldsymbol{cA}^{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&2\end{bmatrix}\quad\bar{\boldsymbol{c}}=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\quad\bar{\boldsymbol{B}}=T_{o1}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}
$$

【例 3.11】 已知系统的传递函数为

$$
G(s)=\frac{s^{2}+4s+5}{s^{3}+6s^{2}+11s+6}
$$

求其能观测标准Ⅱ型。

解：由于

$$
G(s)=\frac{s^{2}+4s+5}{s^{3}+6s^{2}+11s+6}=\frac{(s+2)^{2}+1}{(s+3)(s+2)(s+1)}
$$

无零极点相约，故能控且能观测，可以变换为能观测标准Ⅱ型。同时，由于

$$
a_0=6,\quad a_1=11,\quad a_2=6
$$

$$
\beta_0=5,\quad \beta_1=4,\quad \beta_2=1
$$

能观测标准Ⅱ型的系数矩阵为

$$
\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0&0&-a_0\\1&0&-a_1\\0&1&-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix},\quad\bar{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix},\quad\bar{\boldsymbol{c}}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}
$$

3.6 系统的结构分解

对于一个不完全能控或一个不完全能观测的系统，并不意味着所有的状态都不能控或不能观测，在这种情况下可通过状态变换的方法对状态空间进行分解，把系统的不能控、不能观部分和能控、能观部分区分开来，这就是系统的结构分解问题。系统的结构分解是状态空间分析中的一个重要内容，它揭示了状态空间的本质特性，为最小实现问题的提出提供了理论依据，并与系统的状态反馈、系统镇定等问题的解决都有密切的关系。

例如，若系统的状态空间描述为

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}u
$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

容易判断出这个系统是既不能控也不能观测的，而且能容易分解出能控、能测、不能控和不能观测的子空间，x_1、x_2 为能控状态，它们构成的子空间为能控子空间；x_2、x_3 为能测状态，它们构成的子空间为能测子空间；x_2 为既能控又能观测的状态，其构成的子空间为既能控又能观测的子空间；x_4 为既不能控又不能观测的状态，其构成的子空间为既不能控又不能观测的子空间。

这样如果按照能控又能测、能控不能测、能测不能控及不能控又不能测的顺序排列状态，则这个系统的状态方程表达为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\\dot{x}_1\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\0 & -3 & 0 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

一般情况下，对于任何一个系统，若

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]=n_1<n$$
$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{CA}\quad \cdots\quad \boldsymbol{CA}^{n-1}]^{\mathrm{T}}=n_2<n$$

则都可以分解为能控能测、能控不能测、能测不能控及不能控又不能测 4 个子系统，即

$$x=\begin{bmatrix}x_{co}\\x_{c\bar{o}}\\x_{\bar{c}o}\\x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

但是，除了对角线和约当标准型可能明显识别外，其他能控、能观测、不能控和不能观测部分不能显性地表示出来。

3.6.1 按能控性分解

1. 分解方法

如果线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

是状态不完全能控的，它的能控性判别矩阵的秩

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = n_1 < n$$

选择非奇异变换阵

$$\boldsymbol{T}_c = [\boldsymbol{R}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{R}_{n1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{R}_n]$$

前 n_1 列为 $\boldsymbol{M}$ 中 n_1 个线性无关的列，其余列在保证 $\boldsymbol{M}$ 非奇异下任选，保证 $\boldsymbol{T}_C^{-1}$ 的存在。

经过线性变换后

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_c \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c\,\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_c\,\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{C}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_c \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = [\bar{\boldsymbol{C}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{C}}_2]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_c \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3.13}$$

即系统分解为两个部分，可控部分为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_c = \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\,\dot{\boldsymbol{x}}_c + \bar{\boldsymbol{A}}_{12}\boldsymbol{x}_{\bar{c}} + \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_1 = \bar{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{x}_c \end{cases} \tag{3.14}$$

不可控部分为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\boldsymbol{x}_{\bar{c}} \\ \boldsymbol{y}_2 = \bar{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{x}_{\bar{c}} \end{cases} \tag{3.15}$$

输出为

$$\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{x}_c + \bar{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{x}_{\bar{c}} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$$

能控性分解如图 3-7 所示。

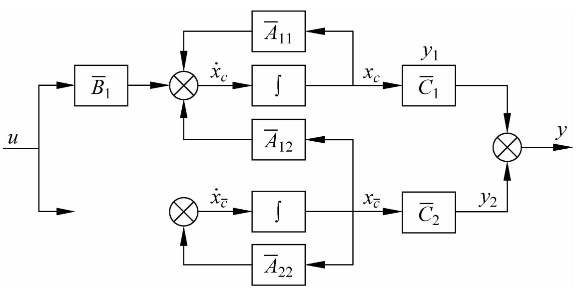

图 3-7　能控性分解的状态结构图

2. 能控性分解的特征

(1) 能控性分解与传递函数矩阵的关系

由于

$$\mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{B}} \quad \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}} \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{A}}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}]$$

$$= \mathrm{rank}[\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{B} \quad (\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c)(\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{B}) \quad \cdots \quad (\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_c)^{n-1}(\boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{B})]$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 & \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{B}}_1 & \cdots & \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{B}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{B}}_1 \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}_1] = n_1$$

因而 n_1 维系统是可控的。

又由于

$$\bar{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}} = [\bar{\boldsymbol{C}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{C}}_2]\left[s\boldsymbol{I} - \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\bar{\boldsymbol{C}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{C}}_2]\begin{bmatrix} (s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1} & (s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{12}(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{22})^{-1} \\ 0 & (s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{22})^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{\boldsymbol{C}}_1(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}_1$$

因而当从传递函数的角度分析系统时,可以用可控子系统等价分析原 n 维系统,由于前者维数降低了很多,可能使分析变得简单。

(2) 输入 u 只能通过可控子系统传递到输出,而与不可控子系统无关,故 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的传递函数不能反映不可控部分的特性。但是,不可控子系统对整个系统的影响是存在的,不可忽视。要求 $\bar{\boldsymbol{A}}_{22}$ 仅含稳定的特征值,以保证整个系统的正常工作。同时还应考虑到可控子系统的状态 $\boldsymbol{x}_c(t)$ 以及整个系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 均与不可控子系统的状态 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}}(t)$ 有关。

(3) 由于选取非奇异变换阵各列向量 $\boldsymbol{R}_1 \quad \boldsymbol{R}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{R}_{n1} \quad \boldsymbol{R}_{n1+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{R}_n$ 的非唯一性,虽然系统可控性分解的形式不变,但诸系数阵不相同,故可控性分解不是唯一的。设一个可控性分解为

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{C}} = [\bar{\boldsymbol{C}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{C}}_2]$$

另一个可控性分解为

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{C}} = [\tilde{\boldsymbol{C}}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{C}}_2]$$

因为

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}[\tilde{\boldsymbol{B}}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{11}\tilde{\boldsymbol{B}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{11}^{n1-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_1] &= \mathrm{rank}[\tilde{\boldsymbol{B}}_1 \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{11}\tilde{\boldsymbol{B}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{11}^{n-1}\tilde{\boldsymbol{B}}_1] \\ &= \mathrm{rank}[\tilde{\boldsymbol{B}} \quad \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{A}}^{n-1}\tilde{\boldsymbol{B}}] \\ &= \mathrm{rank}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \\ &= \mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{B}} \quad \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}} \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{A}}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}] \\ &= \mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{B}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{B}}_1 \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}_1] \\ &= \mathrm{rank}[\bar{\boldsymbol{B}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{B}}_1 \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n1-1}\bar{\boldsymbol{B}}_1] \\ &= n_1 \end{aligned}$$

这说明 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}$ 和 $\bar{\boldsymbol{A}}_{11}$ 的秩形同,均为 n_1。

(4) 由于

$$\det(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}) = \det(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{11})\det(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}}_{22})$$

故 $\boldsymbol{x}_c$ 的稳定性完全由 $\bar{\boldsymbol{A}}_{11}$ 的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n1}$ 决定，$\boldsymbol{x}_{\bar{c}}$ 的稳定性完全由 $\bar{\boldsymbol{A}}_{22}$ 的特征根 $\lambda_{n1+1},\lambda_{n1+2},\cdots,\lambda_n$ 决定，而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n1},\lambda_{n1+1},\lambda_{n1+2},\cdots,\lambda_n$ 均是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n1}$ 称为系统的可控因子，$\lambda_{n1+1},\lambda_{n1+2},\cdots,\lambda_n$ 称为系统的不可控因子。对于不同的分解，虽然诸系数阵不相同，但可控因子和不可控因子是相同的，这是由于非奇异变换不改变系统的特征值的缘故。

(5) 可控性分解表达式(3.13)也为判断系统的可控性提供了一个准则，即线性系统完全可控的条件是系统经过非奇异变换不能化成式(3.13)的形式，其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_{11}$ 的阶数 $n_1<n$。

【例 3.12】 已知某系统

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\1 & 0 & -3\\0 & 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试进行可控性分解。

解：由于

$$\begin{aligned}\text{rank}(\boldsymbol{M}) &= \text{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\\ &= \text{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 1 & -3\\0 & 1 & -2\end{bmatrix} = 2 < 3\end{aligned}$$

故系统不完全可控。

选取

$$\boldsymbol{T}_c = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}_c^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\-1 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\1 & -2 & -2\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u \quad y = \begin{bmatrix}1 & -1 & -2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}$$

可控子系统为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_c &= \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_c + \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\\ y_1 &= \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_c\end{aligned}$$

不可控子系统为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} &= -\boldsymbol{x}_{\bar{c}}\\ y_2 &= -2\boldsymbol{x}_{\bar{c}}\end{aligned}$$

若选择

$$\boldsymbol{T}_c=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

则

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&-1&-2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}$$

从两个状态空间描述可以看出，它们都是把系统分成两部分。一部分是二维能控子系统，另一部分是一维不能控子系统，而且二维能控子系统的状态空间描述是相同的，均属能控标准Ⅱ型。即

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c=\begin{bmatrix}0&1\\1&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_c+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

这是不难理解的，因为变换阵的前 n_1 列同为 $\boldsymbol{M}$ 中 n_1 个线性无关的列。

3.6.2 按能观测性分解

如果线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

是状态不完全能观测的，它的能控性判别矩阵的秩为

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{N})=n_2<n$$

选择非奇异变换阵

$$\boldsymbol{R}_o^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{R}_{n_2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{R}_n\end{bmatrix}$$

前 n_2 行为 $\boldsymbol{N}$ 中 n_2 个线性无关的行，其余行在保证 $\boldsymbol{R}_o$ 非奇异下任选。

经过线性变换后

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_o\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_o\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{T}_o^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11}&\boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21}&\bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_o\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2\end{bmatrix}u\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_o\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\boldsymbol{C}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_o\\ \boldsymbol{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_1&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_o\\ \boldsymbol{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}\tag{3.16}$$

即系统分解为两个部分，可测部分为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_o = \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\boldsymbol{x}_o + \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_1 = \bar{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{x}_o\end{cases} \tag{3.17}$$

不可测部分为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{o}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{21}\boldsymbol{x}_o + \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\boldsymbol{x}_{\bar{o}} + \bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{3.18}$$

输出为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 = \overline{\boldsymbol{C}_1}\boldsymbol{x}_o$$

能测性分解如图 3-8 所示。

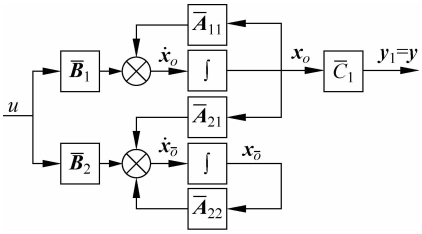

图 3-8　能测性分解的状态结构图

与可控性分解相比，能测性分解也有类似的特征。

【例 3.13】 已知某系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}u \quad y = [0 \quad 1 \quad -2]\boldsymbol{x}$$

试进行可测性分解。

解：由于

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{N}) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4\end{bmatrix} = 2 < 3$$

故系统不完全可测。

选取

$$\boldsymbol{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}_o = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix}1 \\ -1 \\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\,\bar{\boldsymbol{x}}$$

可测子系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_o + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

$$y_1 = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}_o$$

不可测子系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{o}} = [1 \quad 0]\boldsymbol{x}_o - \boldsymbol{x}_{\bar{o}}$$

$$y_2 = 0$$

3.6.3 按能控和能观测性分解

假设系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

不能控也不能观，则一定存在非奇异变换阵将系统按能控性分解，使得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_c^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_c \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

其次，一定存在非奇异变换阵将系统的能控子系统按能观性分解，使得

$$\boldsymbol{x}_c = \boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

同时也一定存在非奇异变换阵将系统的不能控子系统按能观性分解，使得

$$\boldsymbol{x}_{\bar{c}} = \boldsymbol{T}_{o2}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\bar{c}o} \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

这样，经过分解后，系统的状态为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_c^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_c \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{x}_c \\ \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \\ \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o2}^{-1}\boldsymbol{x}_{\bar{c}o} \\ \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o2}^{-1}\boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o1}^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o1}^{-1} & & \\ & & \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o2}^{-1} & \\ & & & \boldsymbol{T}_c^{-1}\boldsymbol{T}_{o2}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}o} \\ \boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}$$

也就是说，经过两次分解后，系统分解为能控能观测、能控不能观测、不能控能观测、不能控不能观测四部分。关于同时按能控性、能观测性进行结构分解的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的确定方法较多，下面重点介绍工程上常用的两种方法，即排列变换法和逐步分解法。

1. 排列变换法

（1）首先将待分解的系统化成对角标准型或约当标准型，得到新的状态方程。

（2）按能控性和能观测性判据判别系统各状态变量的能控性和能观测性，并将系统的状态变量分为能控又能观测的状态变量 $\boldsymbol{x}_{co}$，能控但不能观测的状态变量 $\boldsymbol{x}_{c\bar{o}}$，不能控但能观测的状态变量 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}$，不能控也不能观测的状态变量 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}$。

（3）按照 $\boldsymbol{x}_{co}$，$\boldsymbol{x}_{c\bar{o}}$，$x_{\bar{c}o}$，$\boldsymbol{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ 的顺序重新排列状态变量的顺序，即可组成相应的子系统。

【例 3.14】 已知某系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\\\dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&&&&\\0&-1&&&&\\&&-2&1&&\\&&0&-2&&\\&&&&-3&\\&&&&&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\5\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}$$

试按能控性和能观测性进行分解。

解：根据能控性和能观测性判据易知，能控且能观测变量为 x_5，能控但不能观测变量为 x_1，x_2，x_3，不能控但能观测变量为 x_6，不能控且不能观测变量为 x_4，按此顺序重新排列，分解为 4 个子系统。即

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_5\\\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_6\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&0&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-2&0&1\\0&0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_1\\x_2\\x_3\\x_6\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0&0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_1\\x_2\\x_3\\x_6\\x_4\end{bmatrix}$$

2．按能控和能观测性逐次分解

第一步，先按能控性进行分解，即将 x 分解为 x_c 和 $x_{\bar{c}}$。所以有

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix}\dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix} = T_c^{-1}AT_c\,\bar{x} + T_c^{-1}Bu = \begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c \\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{B}_{n1} \\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = CT_c\,\bar{x} = \bar{C}\begin{bmatrix}x_c \\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix} = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2]\begin{bmatrix}x_c \\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

能控子系统为

$$\dot{x}_c = \bar{A}_{11}x_c + \bar{A}_{12}x_{\bar{c}}$$
$$y_1 = \bar{C}_1 x_c$$

不能控子系统为

$$\dot{x}_{\bar{c}} = \bar{A}_{22}x_{\bar{c}}$$
$$y_2 = \bar{C}_2 x_{\bar{c}}$$

第二步，按能测性将不能控子系统进行分解，即将 $x_{\bar{c}}$ 分解为 $x_{\bar{c}o}$ 和 $x_{\bar{c}\bar{o}}$。所以有

$$\dot{x}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix}\dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} = T_{o2}^{-1}\bar{A}_{22}T_{o2}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{\bar{c}o} & 0 \\ A_{43} & A_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

$$y_2 = \bar{C}_2 T_{o2}x_{\bar{c}} = [C_{\bar{c}o} \quad 0]\begin{bmatrix}x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

第三步，按能测性将能控子系统进行分解，即将 x_c 分解为 x_{co} 和 $x_{c\bar{o}}$，此时需要考虑不能控子系统的作用。所以有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}}\end{bmatrix} = T_{o1}^{-1}\bar{A}_{11}T_{o1}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix} + T_{o1}^{-1}\bar{A}_{12}T_{o2}\begin{bmatrix}\dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} + T_{o1}^{-1}\bar{B}_{n1}u$$

$$= \begin{bmatrix}A_{co} & 0 \\ A_{21} & A_{c\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A_{13} & 0 \\ A_{23} & A_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_{co} \\ B_{c\bar{o}}\end{bmatrix}u$$

$$y_1 = \bar{C}_1 T_{o1}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix} = [C_{co} \quad 0]\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}}\end{bmatrix}$$

将四个部分合起来，有

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{co} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{c\bar{o}} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_{co} \\ B_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}u \\ y = [C_{co} \quad 0 \quad C_{\bar{c}o} \quad 0]\begin{bmatrix}x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{3.19}$$

能控能观测性分解如图 3-9 所示。

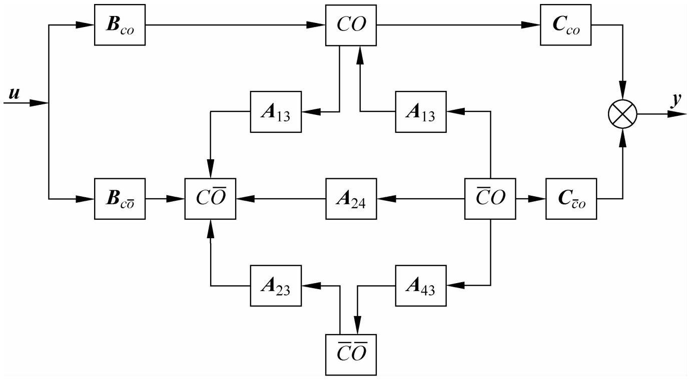

图 3-9　能控能观测性分解

系统的传递函数矩阵为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(s) &= [\boldsymbol{C}_{co}\quad 0\quad \boldsymbol{C}_{c\bar{o}}\quad \boldsymbol{0}]\left[s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{co} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{co}\\ \boldsymbol{B}_{c\bar{o}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\\
&= [\boldsymbol{C}_{co}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{C}_{c\bar{o}}\quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{co} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}}\end{bmatrix} & -\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{c\bar{o}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{co}\\ \boldsymbol{B}_{c\bar{o}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\\
&= [\boldsymbol{C}_{co}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{C}_{c\bar{o}}\quad \boldsymbol{0}]\\
&\quad\begin{bmatrix}\left[s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{co} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}\right]^{-1} & -\left[s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{co} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{c\bar{o}}\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24}\end{bmatrix}\left[s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{c\bar{o}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\right]^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \left[s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{c\bar{o}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\right]^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{co}\\ \boldsymbol{B}_{c\bar{o}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\\
&= \boldsymbol{C}_{co}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{co})^{-1}\boldsymbol{B}_{co}
\end{aligned}
$$

这说明,传递函数矩阵反映的是系统中既能控又能观测部分的传递关系。

【例 3.15】 已知某系统

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u \quad y=[0\quad 1\quad -2]\boldsymbol{x}
$$

试按能控和能观测性逐次分解。

解:由于

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}) &= \operatorname{rank}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]\\
&= \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix} = 2 < 3
\end{aligned}
$$

故系统不完全可控。

选取

$$\boldsymbol{T}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}_c^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad -1 \quad -2]\,\bar{\boldsymbol{x}}$$

可控子系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_c + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = [1 \quad -1]\boldsymbol{x}_c$$

不可控子系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} = -\boldsymbol{x}_{\bar{c}}$$

$$y_2 = -2\boldsymbol{x}_{\bar{c}}$$

显然不可控子系统可测,故无需再分解。

对于可控子系统,可测阵的秩为

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{N}_c) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{C}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{C}}_1\bar{\boldsymbol{A}}_{11} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

取

$$\boldsymbol{T}_{o1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{co} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{T}_{o1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{T}_{o1}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = [1 \quad -1]\boldsymbol{T}_{o1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{co} \\ \boldsymbol{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

所以分解结果为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{co} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad -2]\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \end{bmatrix}$$

3.7 传递函数阵的实现问题

状态空间分析法是现代控制理论的基础，建立系统的状态方程和输出方程是分析和综合系统首先要解决的问题。在系统机理、结构和参数已知的情况下，可以按照第 1 章的方法建立系统方程。但在很多实际系统中，由于其物理过程复杂，相互之间的数量关系不完全清楚，要直接建立系统方程就显得十分困难。为了解决这类问题，一个可能的办法是先用实验的方法确定系统的传递函数（传递函数阵），然后再根据传递函数推导出相应的状态方程和输出方程，这种由传递函数来建立系统的状态方程和输出方程的问题，即称为实现问题。

3.7.1 定义和基本特性

1. 定义

对给定的传递函数阵为 $\boldsymbol{G}(s)$，如果某系统的状态空间描述

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$$

使得

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{G}(s) \tag{3.20}$$

成立，则称该系统是 $\boldsymbol{G}(s)$ 的一个实现。

2. 实现的基本特性

（1）存在性。对任意给定的传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$，其每个元素的分子分母多项式系数均为实常数，且每个元素是 s 的准真分式型（分子多项式阶次等于分母多项式阶次）或严格真分式型函数（分子多项式阶次低于分母多项式阶次，实现中无 D），那么一定可以找到其实现。

（2）非唯一性。实现的实质是用状态空间分析法，寻找一个与真实系统具有相同传递函数阵的假想系统，但从传递函数阵出发，一般可以构造无数多个与真实系统输入输出特性相同的假想系统，状态空间描述的非唯一性决定了实现的非唯一性。

（3）实现的形式。当传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 所有单元的传递函数 $G_{ij}(s)$ 均为 s 的真有理分式函数时，实现中无 $\boldsymbol{D}$，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$；当 $G_{ij}(s)$ 的分子多项式的阶次等于分母多项式的阶次时，实现中有 $\boldsymbol{D}$，且有

$$\boldsymbol{D} = \lim_{s\to\infty}\boldsymbol{G}(s) \tag{3.21}$$

3.7.2 能控标准型实现和能观测标准型实现

对于单输入单输出系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-2}&b_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{3.22}$$

其传递函数为

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

$$=\begin{bmatrix}b_0&b_1&\cdots&b_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s&-1&0&\cdots&0&0\\0&s&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&s&-1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&s+a_{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_0&b_1&\cdots&b_{n-1}\end{bmatrix}\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\begin{bmatrix}*&\cdots&*&1\\ *&\cdots&*&s\\\vdots&\cdots&&\vdots\\ *&\cdots&*&s^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-21}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

这说明

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-2}&b_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

是传递函数

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-21}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\tag{3.23}$$

的能控标准型实现。

同理可以说明

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&-a_0\\1&0&0&\cdots&-a_1\\0&1&0&\vdots&-a_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\\vdots\\b_{n-1}\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{3.24}$$

是式(3.23)表示的传递函数的能测标准型实现。

【例 3.16】 已知某系统的传递函数为

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+7s+8}$$

求能控标准型实现和能观测标准型实现。

解：因为 $a_0=8,a_1=7,a_2=5,b_0=2,b_1=3,b_2=1$，所以，能控标准型实现为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-7&-5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[2\quad 3\quad 1]\boldsymbol{x}$$

能观测标准型实现为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&-8\\1&0&-7\\0&1&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}$$

对于多输入—多输出系统亦有类似于单输入单输出的典型实现，把 $q\times p$ 维的传递函数阵写成和单输入—单输出系统的传递函数相类似的形式，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(s)&=\boldsymbol{C}_c(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_c)^{-1}\boldsymbol{B}_c=\boldsymbol{C}_o(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_o)^{-1}\boldsymbol{B}_o\\&=\frac{\boldsymbol{b}_{n-1}s^{n-1}+\boldsymbol{b}_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\boldsymbol{b}_1s+\boldsymbol{b}_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\end{aligned}\tag{3.25}$$

式中，$\boldsymbol{b}_{n-1},\boldsymbol{b}_{n-2},\cdots,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_0$ 为 $q\times p$ 维常数阵。

能控标准型实现为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_p&\boldsymbol{I}_p&\boldsymbol{0}_p&\cdots&\boldsymbol{0}_p\\\boldsymbol{0}_p&\boldsymbol{0}_p&\boldsymbol{I}_p&\ddots&\boldsymbol{0}_p\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{0}_p&\boldsymbol{0}_p&\boldsymbol{0}_p&\cdots&\boldsymbol{I}_p\\-a_0\boldsymbol{I}_p&-a_1\boldsymbol{I}_p&-a_2\boldsymbol{I}_p&\cdots&-a_{n-1}\boldsymbol{I}_p\end{bmatrix}\\\boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_p\\\vdots\\\boldsymbol{0}_p\\\boldsymbol{I}_p\end{bmatrix}\\\boldsymbol{C}_c=[\boldsymbol{b}_0\quad\boldsymbol{b}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{b}_{n-1}]\end{cases}\tag{3.26}$$

式(3.26)中，$\boldsymbol{0}_p$ 和 $\boldsymbol{I}_p$ 为 $p\times p$ 阶零矩阵和单位矩阵。

能观测标准型实现为

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_q & \boldsymbol{0}_q & \cdots & \boldsymbol{0}_q & -a_0\boldsymbol{I}_q \\ \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{0}_q & \cdots & \boldsymbol{0}_q & -a_1\boldsymbol{I}_q \\ \boldsymbol{0}_q & \boldsymbol{I}_q & \ddots & \boldsymbol{0}_q & -a_2\boldsymbol{I}_q \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0}_q & \boldsymbol{0}_q & \cdots & \boldsymbol{I}_q & -a_{n-1}\boldsymbol{I}_q \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_0 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{n-1} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{C}_o = [\boldsymbol{0}_q \quad \cdots \quad \boldsymbol{0}_q \quad \boldsymbol{I}_q] \end{cases} \tag{3.27}$$

式(3.27)中，$\boldsymbol{0}_q$ 和 $\boldsymbol{I}_q$ 为 $q\times q$ 阶零矩阵和单位矩阵。

显而易见，能控标准型实现的维数是 $n\times p$，能观测标准型实现的维数是 $n\times q$。为了保证实现的维数较小，当 $q>p$ 时，应采用能控标准型实现；当 $q<p$ 时应采用能观测标准型实现。需要注意的是，多输入多输出系统的能观测标准型并不是能控标准型简单的转置，这和单输入单输出系统不同。

【例 3.17】 试求系统

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

的能控标准型实现和能观测标准型实现。

解：由于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(s) &= \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ -\dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & (s+1)(s+2) \\ -(s+2)(s+3) & -(s+1)(s+3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

与式(3.25)比较知

$$a_0=6, \quad a_1=11, \quad a_2=6$$

$$\boldsymbol{b}_0=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

代入式(3.26)得能控标准型实现的各系数阵为

$$
\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\-6&0&-11&0&-6&0\\0&-6&0&-11&0&-6\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C}_c=\begin{bmatrix}6&2&5&3&1&1\\-6&-3&-5&-4&-1&-1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}
$$

同理,能观测标准型实现的各系数阵为

$$
\boldsymbol{A}_o=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-6&0\\0&0&0&1&0&-6\\1&0&0&0&-11&0\\0&1&0&0&0&-11\\0&0&1&0&-6&0\\0&0&0&1&0&-6\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_o=\begin{bmatrix}6&2\\-6&-3\\5&3\\-5&-4\\1&1\\-1&1\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C}_o=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}
$$

所得结果表明,多输入多输出系统的能观测标准型并不是能控标准型简单的转置关系。

3.7.3　最小实现

对应于一个传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的实现不是唯一的,且实现的阶数也有很大差别。一般总希望实现的阶数越低越好,在很多可能实现中,总会存在一个状态变量个数最少或阶数最低的实现。传递函数阵实现中,维数最小的实现,称为最小实现。对于给定的传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$,虽然其最小实现不是唯一的,但是它们的维数是相同的,而且必是等价的。

当传递函数阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的一个实现是完全能控且完全能观测时,则其必为 $\boldsymbol{G}(s)$ 的最小实现。反之若系统是最小实现时,则其必为完全能控且完全能观测的。不是完全能控和不是完全能观测的实现不会是最小实现,把系统中不完全能控或不完全能观测的状态分量消去,将不会影响系统的传递函数阵。

所以构造最小实现时,可以先任意求出能控标准型或能观测标准型。当 $q>p$ 时,应采用能控标准型实现;当 $q<p$ 时应采用能观测标准型实现。然后对能控(观测)标准型,判断能观测(控)性,若为能控且能观测,则为最小实现,否则进行能观测(控)性分解,找出能控且能观测部分的状态空间描述,则为最小实现。

【例 3.18】　试求系统

$$
\boldsymbol{G}(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}
$$

的最小实现。

解：由于

$$G(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{(s+2)^2+1}{(s+3)(s+2)(s+1)}$$

无零极点相约，故能控且能观测，用能控(观)标准型都可以。又由于

$$a_0=6,\quad a_1=11,\quad a_2=6$$

$$\beta_0=5,\quad \beta_1=4,\quad \beta_2=1$$

故能观测标准Ⅱ型实现为

$$\boldsymbol{A}_o=\begin{bmatrix}0&0&-a_0\\1&0&-a_1\\0&1&-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_o=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}_o=[0\quad 0\quad 1]$$

能控标准Ⅰ型实现为

$$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_c=[\beta_0\quad \beta_1\quad \beta_2]=[5\quad 4\quad 1]$$

【例 3.19】 试求系统

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+2)(s+1)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

的最小实现。

解：由于传递函数阵为严格真分式型，故 $\boldsymbol{D}=0$。同时由于

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \dfrac{(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}=\frac{[1\quad 1]s+[3\quad 1]}{s^3+6s^2+11s+6}$$

故

$$a_0=6,\quad a_1=11,\quad a_2=6$$

$$\beta_0=[3\quad 1],\quad \beta_1=[1\quad 1],\quad \beta_2=[0\quad 0]$$

从传递函数阵可以看出，系统为 2 输入单输出系统，采用能观标准型实现。能观测标准Ⅱ型实现为

$$\boldsymbol{A}_o=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_q&\boldsymbol{0}_q&-a_0\boldsymbol{I}_q\\\boldsymbol{I}_q&\boldsymbol{0}_q&-a_1\boldsymbol{I}_q\\\boldsymbol{0}_q&\boldsymbol{I}_q&-a_2\boldsymbol{I}_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_o=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_o=[\boldsymbol{0}_q\quad \boldsymbol{0}_q\quad \boldsymbol{I}_q]=[0\quad 0\quad 1]$$

因为

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{B}_o\quad \boldsymbol{A}_o\boldsymbol{B}_o\quad \boldsymbol{A}_o^2\boldsymbol{B}_o]=\begin{bmatrix}3&1&0&0&-6&-6\\1&1&3&1&-11&-11\\0&0&1&1&-3&-5\end{bmatrix}$$

满秩，系统能控。所以能观标准型实现是能控且能观测的，为最小实现。

3.8　离散系统的能控性与能观测性

离散系统的能控性和能观测性和连续系统的能控性和能观测性类似，很多规律可参照连续系统进行说明。

3.8.1　离散系统的能控性

1. 能控性定义

设线性定常离散系统为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases} \tag{3.28}$$

式(3.28)中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}$ 为 p 维输入向量，$\boldsymbol{y}$ 为 q 维输出向量。若存在控制序列$\{\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\cdots,\boldsymbol{u}(l-1)\}(l\leqslant n)$能使系统对任意初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，在第 l 步上到达零态，即 $\boldsymbol{x}(l)=\boldsymbol{0}$，则称此状态是能控的。如果系统的所有状态都是能控的，则称系统是状态完全能控的，简称系统是能控的。

2. 能控性判据

由离散系统状态方程求解的递推公式(2.26)知

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-j-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j)$$

若在第 l 步上能将任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 转移到零态，则有

$$\boldsymbol{x}(l) = \boldsymbol{G}^l\boldsymbol{x}(0) + \sum_{j=0}^{l-1}\boldsymbol{G}^{l-j-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j) = \boldsymbol{0}$$

即

$$\boldsymbol{G}^l\boldsymbol{x}(0) = -\sum_{j=0}^{l-1}\boldsymbol{G}^{l-j-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j) = -[\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(l-1) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(l-2) + \cdots + \boldsymbol{G}^{l-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)]$$

写成向量形式为

$$[\boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{H} \quad \cdots \quad \boldsymbol{G}^{l-1}\boldsymbol{H}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(l-1) \\ \boldsymbol{u}(l-2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(0) \end{bmatrix} = -\boldsymbol{G}^l\boldsymbol{x}_0 \tag{3.29}$$

这是一个具有 lp 个变量，n 个方程的非齐次线性代数方程。欲从式(3.29)解出 $\boldsymbol{u}$，则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}) = \operatorname{rank}[\boldsymbol{H} \vdots \boldsymbol{G}\boldsymbol{H} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{G}^{l-1}\boldsymbol{H}] = n \tag{3.30}$$

对于单输入单输出系统，$\boldsymbol{H}$ 是 $n\times 1$ 矩阵，欲使式(3.30)成立的 l 必须大于或等于 n。然而若不能使初始状态在第 n 步上转移到零，则在第 n 步以后的各步上也不可能转移到零。于是，式(3.30)中的 l 应等于 n。

对于多输入—多输出系统,能控矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是 $n\times pl$ 维矩阵,欲使 $n\times pl$ 矩阵维的秩等于 n,其 l 值将取决于 $\boldsymbol{H}$ 阵的秩。若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{H})=1$,则多输入—多输出系统和单输入—单输出系统一样,$l=n$;若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{H})>1$,则满足式(3.30)中的 l 可以小于 n。考虑到以上两种情况,统一规定 $l=n$。

3.8.2 离散系统的能观测性

1. 能观测性定义

对于式(3.28)表示的离散系统,如果根据有限个采样周期内测量的输出 $\boldsymbol{y}(0)$,$\boldsymbol{y}(1)$,…,$\boldsymbol{y}(l)$,可以唯一地确定出系统的任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$,则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为能观测状态。如果系统的所有状态都是能观测的,则称系统是状态能观测的。

2. 能测性判据

由离散系统状态方程求解的递推公式(2.26)知,$0\sim(n-1)$各采样瞬时的观测值为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{Cx}(0)\\
\boldsymbol{y}(1) &= \boldsymbol{Cx}(1) = \boldsymbol{CGx}(0)\\
\boldsymbol{y}(2) &= \boldsymbol{Cx}(2) = \boldsymbol{CG}^2\boldsymbol{x}(0)\\
&\vdots\\
\boldsymbol{y}(n-1) &= \boldsymbol{Cx}(n-1) = \boldsymbol{CG}^{n-1}\boldsymbol{x}(0)
\end{aligned}$$

或写为

$$\boldsymbol{Nx}_0 = \boldsymbol{y} \tag{3.31}$$

这是一个具有 n 个未知数的 $q\times n$ 个方程的线性代数方程组,$\boldsymbol{x}_0$ 有唯一解的条件是系数矩阵满秩,即

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N}) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CG}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CG}^{n-1}\end{bmatrix} = n \tag{3.32}$$

比较连续系统的能控性与能测性的判据可知,只要把连续系统中的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别换成 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$,即为离散系统的判据。但需要指出的是,连续系统的能控性与能达性是完全一致的,而离散系统只有在 $\boldsymbol{G}$ 为非奇异时,其能控性才与能达性一致。

【例 3.20】 判别离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad y(k) = [0 \quad -1 \quad 1]\boldsymbol{x}(k)$$

的能控性与能观测性。

解:由于

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{GH}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H}=\boldsymbol{GGH}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4\\0&1\\4&2\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{M})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{H}\quad\boldsymbol{GH}\quad\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H})=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&0&1&2&0&4\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&4&2\end{bmatrix}=3=n$$

$$\boldsymbol{C}=[0\quad-1\quad1]\quad\boldsymbol{CG}=[0\quad-1\quad1]\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}=[1\quad-1\quad3]$$

$$\boldsymbol{CG}^2=\boldsymbol{CGG}=[0\quad-1\quad3]\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}=[4\quad1\quad8]$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{N})=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CG}\\\boldsymbol{CG}^2\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}=3=n$$

所以系统完全能控、完全能观测。

【例 3.21】 设线性定常离散系统方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&-2&0\\0&1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

试判断其能观测性。

解：由于

$$\boldsymbol{CG}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&-2&0\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CG}^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&-2&0\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{N})=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CG}\\ \boldsymbol{CG}^2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&0\\-1&-2&0\\4&0&0\\0&4&0\end{bmatrix}=2<3$$

所以系统状态不完全能观测。

【例 3.22】 设线性定常离散系统方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

试判断其能控性，若 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，求 $u(0)$，$u(1)$，$u(2)$，使系统可控。

解：由于

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{M})=\operatorname{rank}[\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{GH}\quad \boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H}]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&-2\\1&-1&-3\end{bmatrix}=3$$

系统状态可控。又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(3)&=\boldsymbol{G}^3\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{GH}u(1)+\boldsymbol{H}u(2)\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{bmatrix}^3\boldsymbol{x}(0)+\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix}u(0)+\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}u(1)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u(2)\end{aligned}$$

按能控性定义，$\boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{0}$，故

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&-2&0\\-3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\-1&1&0\end{bmatrix}^3\boldsymbol{x}(0)$$

解得

$$\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\\u(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\11\\-8\end{bmatrix}$$

3.8.3　连续系统离散化后的能控性与能观测性

一个连续系统离散化后其能控性与能观测性是否发生改变，是设计计算机控制系统时需要考虑的一个重要问题。

考虑线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

由于

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{M})=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=2$$

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{N})=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$$

所以连续系统是能控、能观测的。

连续系统的状态转移矩阵为

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s\end{bmatrix}^{-1}\\ &=L^{-1}\begin{bmatrix}s/(s^2+1) & 1/(s^2+1)\\ -1/(s^2+1) & s/(s^2+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

系统离散化后

$$\boldsymbol{G}=\Phi(T)=\begin{bmatrix}\cos T & \sin T\\ -\sin T & \cos T\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\left(\int_0^T\Phi(t)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}=\int_0^T\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\mathrm{d}t\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\cos T\\ \sin T\end{bmatrix}$$

则离散化后的系统方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\begin{bmatrix}\cos T & \sin T\\ -\sin T & \cos T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1-\cos T\\ \sin T\end{bmatrix}u(k)\\ y(k)&=[0\quad 1]\boldsymbol{x}(k)\end{aligned}$$

要使系统状态能控，则能控判别阵的行列式非零，即

$$|\boldsymbol{M}|=|[\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{GH}]|=\begin{vmatrix}1-\cos T & \cos T-\cos^2T+\sin^2T\\ \sin T & 2\sin T\cos T-\sin T\end{vmatrix}=2\sin T(\cos T-1)\neq 0$$

要使系统状态能观测，则能观测判别阵的行列式非零，即

$$|\boldsymbol{N}|=\left|\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CG}\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos T & \sin T\end{vmatrix}=\sin T\neq 0$$

联立上述两式可知，要使离散化后系统能控且能观测，T 必须满足

$$T\neq k\pi,\quad (k=1,2,\cdots)$$

一般情况下，若线性连续定常系统是不能控和不能观测的，则其离散化后的系

统也必是不能控和不能观测的；如果线性连续定常系统是能控和能观测的，则其离散化后的系统不一定是能控和能观测的。离散化后的系统能否保持能控和能观测性，取决于采样周期 T 的选择。

3.9 利用 MATLAB 分析系统的能控性和能观测性

系统的能控性与能观测性可以根据能控性矩阵和能观测性矩阵的秩来判别，在 MATLAB 中，能控性矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和能观测性矩阵 $\boldsymbol{N}$ 可由控制系统工具箱中提供的 ctrb()函数和 obsv()函数自动产生，调用格式为

```
M = ctrb(A,B)
N = obsv(A,C)
```

直接调用 MATLAB 命令计算矩阵的秩，即 rank(M)和 rank(N)，就可以判别系统的能控性和能观测性。

如果系统不完全能控或不完全能观测，还可以利用 MATLAB 函数进行结构分解。控制系统工具箱中提供了 ctrbf()函数和 obsvf()函数，函数的调用格式为

```
[Ac,Bc,Cc,T,K] = ctrbf(A,B,C)
[Ao,Bo,Co,T,K] = obsvf(A,B,C)
```

式中，(A,B,C)为给定系统状态方程的 ss 模型，返回的矩阵(Ac,Bc,Cc)包含能控子系统

$$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{c}} & \boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_c\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{B}}_c\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}_c=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{\bar{c}} & \bar{\boldsymbol{C}}_c\end{bmatrix}$$

(Ao,Bo,Co)包含能观测子系统

$$\boldsymbol{A}_o=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{o}} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \bar{\boldsymbol{A}}_o\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_o=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_{\bar{o}}\\ \bar{\boldsymbol{B}}_o\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}_o=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \bar{\boldsymbol{C}}_o\end{bmatrix}$$

T 为该标准型的变换阵，向量 K 为各子块的秩。

【例 3.23】 设线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

利用 MATLAB 判断系统是否完全能控，若不完全能控，则按能控性进行结构分解；判断系统是否完全能观测，若不完全能观测，按能观测性进行结构分解。

解：(1) 按能控性进行结构分解。

MATLAB 程序为

```
>> A = [1 2 -1;0 1 0;1 -4 3];B = [0; 0; 1];
C = [1 -1 1];Mc = ctrb(A,B);rank(M)
```

结果显示为

```
ans =
2
```

所以系统不完全能控。

```
>> [Ac,Bc,Cc,T,k] = ctrbf(A,B,C)
```

结果显示为

```
Ac =
       1     0     0
     - 2     1   - 1
       4     1     3
Bc =
       0
       0
     - 1
Cc =
     - 1   - 1   - 1
T =
       0     1     0
     - 1     0     0
       0     0   - 1
k =
       1     1     0
```

（2）按能观测性进行结构分解。

```
>> Qo = obsv(A,C);rank(Qo)
```

结果显示为

```
ans =
2
```

所以系统不完全能观测。

```
>> [Ao,Bo,Co,T,k] = obsvf(A,B,C)
```

结果显示为

```
Ao =
     2.0000   - 2.3094     4.0825
     0.0000     0.6667     0.9428
     0.0000   - 0.4714     2.3333
Bo =
   - 0.7071
   - 0.4082
   - 0.5774
Co =
```

```
    0 0.0000     -1.7321
T =
    0.7071    0.0000   -0.7071
   -0.4082   -0.8165   -0.4082
   -0.5774    0.5774   -0.5774
k =
    1    1    0
```

本章小结

能控性与能观测性是现代控制理论中两个基本概念，是系统分析和设计的理论基础。本章主要介绍了能控性与能观测性的定义，能控性与能观测性的判别方法，能控标准型与能观测标准型的变换方法。系统的能控标准型和能观测标准型对系统的分析和综合有着十分重要的意义，系统的能控性与能观测性无论从定义还是从判据来看都很相似，它们之间的内在关系是由对偶原理确定的。系统的结构分解是状态空间分析中的又一个重要内容，它揭示了状态空间的本质特性。可以通过系统传递函数阵的特征来判别其状态的能控性和能观测性。如果确定了系统的传递函数(传递函数阵)，就可以根据传递函数(或脉冲响应)建立系统的状态方程和输出方程，即传递函数阵的实现。另外，本章也对离散控制系统的能控性与能观测性进行了分析，并简要介绍了 MATLAB 在能控性与能观性分析中的应用。

习题

3-1 考虑由下式定义的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试判断该系统是否为状态能控和状态能观测，是否为输出能控？

3-2 系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

是状态能控和状态能观测的吗？

3-3　考虑如下系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

除了明显地选择 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 外，试找出使该系统状态不能观测的一组 c_1，c_2 和 c_3。

3-4　(1) 系统如图 3-10 所示，系统中 a、b、c 和 d 的取值与能控性和能观性是否有关，若有关，其取值条件如何？

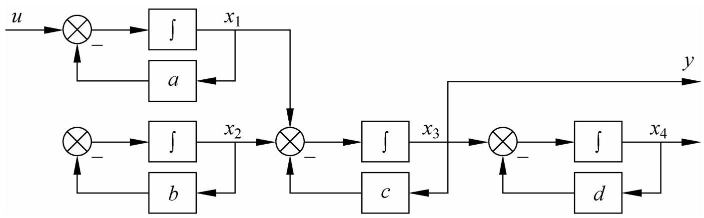

图 3-10　习题 3-4

(2) 系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

回答(1)中的问题。

3-5　已知系统的状态空间表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试用两种方法判别其能控性和能观性。

3-6　设系统的传递函数是

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+a}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$$

(1) 当 a 取何值时，系统将是不完全能控或不完全能观的？

(2) 当 a 取上述值时，求使系统完全能控的状态空间表达式。

(3) 当 a 取上述值时,求使系统完全能观的状态空间表达式。

3-7 已知系统的微分方程为

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$$

试写出其对偶系统的状态空间表达式及其传递函数。

3-8 已知系统的传递函数为

$$W(s)=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$$

试求其能控标准型和能观标准型。

3-9 试将系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

按能控性或能观性进行结构分解。

3-10 试将系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\ 2 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 4 & -1 & -2 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

按能控性和能观性进行结构分解。

3-11 已知系统的传递函数阵为

$$\boldsymbol{W}(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

求系统的最小实现。

3-12 设 Σ_1 和 Σ_2 是两个能控且能观的系统,相应的系数矩阵为

$$\Sigma_1:\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2:A_2=-2\quad B_2=1\quad C_2=1$$

(1) 试分析由 Σ_1 和 Σ_2 所组成的串联系统的能控性和能观性,并求其传递函数。

(2) 试分析由 Σ_1 和 Σ_2 所组成的并联系统的能控性和能观性,并求其传递函数。

3-13 从传递函数是否出现零极点对消现象出发,试证明单位反馈闭环系统的能控性与能观性与开环系统的能控性与能观性是一致的。