第3章

电阻电路系统法分析

本章的基本任务是学习线性电阻电路的几种系统分析方法，以便从不同角度掌握线性电路的分析计算，为深入理解电路的一般规律和编制计算机程序进行电路的分析计算提供理论依据。

3.1 基本要求

（1）掌握支路法。

（2）牢固掌握并熟练应用网孔分析法和回路分析法。

（3）牢固掌握并熟练应用节点分析法。

（4）掌握理想运算放大器的电路模型及其主要特点，熟练运用“虚断”和“虚短”的概念分析含理想运算放大器的电阻电路。

（5）掌握和熟练应用叠加定理，理解对偶原理。

（6）熟练运用系统法等效化简一端口电路。

3.2 理论提要

电路系统分析法是对给定了结构、元件参数和激励电源的电路，选择合适的电路变量，依据 KCL 和 KVL 建立电路方程并求解电路变量，再按元件的伏安关系求出待求量的分析方法。由于电路变量选择的不同，电路系统分析法通常分为支路法、网孔分析法、回路分析法和节点分析法。这些方法均是依据 KVL、KCL 来列写求解变量的线性方程，通过求解方程而得到分析计算的结果，所以系统分析法亦称为电路方程法。

叠加定理、替代定理、戴维南定理（诺顿定理）、特勒根定理和互易定理共同构成了电路的基本定理。电路基本定理描述了线性电路的基本性质，是分析线性电路的重要方法。它们既可以从系统法得到论证，又有助于对网络分析的一般方法加深理解，并简化其分析计算。其中，叠加定理揭示了线性电路的最基本的性质——叠加性，它的重要性，不仅在于提供了电路分析中用的叠加法，尤其在于它为其他网络定理的证明和分析法提供了理论依据。由它引出的齐性性质，也为电路分析提供了方便。

1. 电阻电路系统分析方法

电阻电路的系统分析方法主要有支路分析法、网孔分析法、回路分析法和节点分析法。

（1）支路分析法

支路分析法亦即支路电流法，简称支路法。支路法直接以支路电流为电路变量，按照 KCL、KVL 建立与支路电流数相等的独立方程，从而解得支路电流的分析方法。建立方程关键是选择独立节点列出节点电流方程和选择独立回路列出回路电压方程。

对于有 b 条支路 n 个节点的电路，在确定支路电流参考方向的条件下，选择任一节点

为参考点，则其他节点即为独立节点，按照 KCL 可列出 $n-1$ 个独立节点方程。独立回路的选择，可按每次选取的回路至少有一条新支路(独立回路)的方法选取，直到选出 $l=b-(n-1)$个。取法有两种：①对于平面网络，每一网孔就是一个独立回路；②先将电路中连接全部 n 个节点的 $n-1$ 条支路(树支)保留不动，其他支路(连支)暂时移出，然后将被移出的支路逐条添加上去，每添一条就得一个独立回路(单连支回路)。选好独立回路后，指定回路绕向，按照 KVL 列出 $l=b-(n-1)$个独立回路方程。两组方程的总数 $n-1+b-(n-1)$为支路数 b，满足待求变量支路电流的数目。支路法的缺点是方程数目多，分析计算量繁重。

由上面的分析已知，一个网络有 $l=b-(n-1)$个独立回路，有 $n-1$ 个独立节点，如果分别以独立回路电流和独立节点电压为求解变量，就是回路分析法和节点分析法。这些方法的独立变量和独立方程数目均较支路法大为减少，而且电路方程的建立和求解具有系统性和规则性，是线性电路普遍适用的一般分析方法。

(2) 网孔分析法

对于平面电路，网孔是平面电路中若干支路组成的区域内没有支路交叉的独立回路。网孔电流是假想的沿网孔边界流动的电流，就是独立回路电流。各网孔电流之间不受 KCL 的约束，一旦求出了网孔电流，则各支路电流就可从有关的网孔电流的代数和求得。以网孔电流为变量分析电路的方法，称为网孔电流分析法，简称网孔分析法。网孔分析法是分析电路的有效方法，但当电路中含有电流源时，由于电流源的端电压未知，要设其为未知量，使方程数目增加，增加了分析计算量。

(3) 回路分析法

用回路分析法求解含有电流源的电路时，如果假想的沿回路边界流动的回路电流选择适当，即只让一个回路电流通过电流源，那么这个回路电流的量值就是电流源的量值，未知量就少了一个，方程也就少了一个，方程越少分析求解越方便。回路电流求得后，各支路电流、支路电压就可从有关的回路电流的代数和求得。这种以回路电流为变量分析电路的方法，称为回路电流分析法，简称回路分析法。网孔分析法是回路分析法的特例。

(4) 节点分析法

节点电压(也称节点电位)是由节点指向参考节点的电压。各节点电压之间不受 KVL 的约束，一旦求出了节点电压，则各支路电压就从有关节点电压之差求得。节点分析法特有的优点是：①独立节点电压容易确定；②适用于平面网络和非平面网络；③便于编制程序，易于采用计算机分析。这种以节点电压(电位)为变量分析电路的方法，称为节点电压(电位)分析法，简称节点分析法。

由上叙述可知各种分析方法的优缺点。学习分析方法，应从支路法入手，支路法是方程法的基础，集中主要精力于网孔分析法、回路分析法和节点分析法。牢固掌握和熟练应用它们的理论根据、独立变量的选择、运用特点、步骤和规律性。

几种分析方法小结见表 3-1。

表 3-1 几种分析方法小结

分析方法	支路分析法	网孔分析法	回路分析法	节点分析法
电路变量	支路电流	网孔电流	回路电流	节点电压
理论根据	KCL、KVL	KVL	KVL	KCL
分析步骤	① 选定各支路电流的参考方向； ② 对 $n-1$ 个独立节点列写 KCL 方程； ③ 选取 $b-n+1$ 个独立回路，列写 KVL 方程； ④ 联立求解 b 个独立方程，得出各支路电流； ⑤ 选一个未用过的回路，如果满足 $\sum u=0$，则求解正确。或用功率平衡验算	① 选定网孔电流参考方向； ② 列写 $l=b-(n-1)$ 个网孔电流方程； ③ 解方程求得各网孔电流； ④ 标出各支路电流的参考方向，求各支路电流、电压和功率； ⑤ 选外网孔，如满足 $\sum u=0$，则分析正确	① 选定 $b-n+1$ 个独立回路，并假定回路电流方向； ② 利用自电阻、互电阻及回路电压源电位升等概念，直接列写回路电流方程； ③ 联立求解这 $b-n+1$ 个独立方程，进而求出各回路电流或其他待求量； ④ 选择一个未用过的回路，如满足 $\sum u=0$，则分析正确。 * 如有电流源，只让一个回路电流通过电流源，且方向一致，此时回路电流就等于电流源的电流，该回路的 KVL 方程不需要列写	① 选定参考节点； ② 对 $n-1$ 个独立节点列节点电压方程； ③ 解方程求得各节点电压； ④ 求各支路电压、电流和功率； ⑤ 对参考节点，如满足 $\sum i=0$，则分析正确 * 如有无伴电压源，则取其中一个无伴电压源的负极端为参考节点，另一端节点电压为该电压源的数值，可不列写该节点的电压方程
电路方程	用 KCL 对 $n-1$ 个节点列写，有关支路电流的代数和等于零； 用 KVL 对 $b-n+1$ 个独立回路列写，有关支路电压的代数和等于零	$R_{11}I_1+R_{12}I_2+\cdots+R_{1n}I_n=U_{S11}$ $R_{21}I_1+R_{22}I_2+\cdots+R_{2n}I_n=U_{S22}$ … $R_{n1}I_1+R_{n2}I_2+\cdots+R_{nn}I_n=U_{Snn}$ $R_{11},\cdots,R_{nn}$ 为各网孔的自电阻，自电阻为正； R_{ij} 为网孔间的互电阻，互电阻在两网孔电流流过它时，方向一致为正，否则为负； U_{Sii} 为网孔电压源电压的代数和，与网孔电流绕向一致为负，否则为正	$R_{11}I_1+R_{12}I_2+\cdots+R_{1n}I_n=U_{S11}$ $R_{21}I_1+R_{22}I_2+\cdots+R_{2n}I_n=U_{S22}$ … $R_{n1}I_1+R_{n2}I_2+\cdots+R_{nn}I_n=U_{Snn}$ $R_{11},\cdots,R_{nn}$ 为各回路的自电阻，自电阻为正； R_{ij} 为回路间互电阻，互电阻在两回路电流流过它时，方向一致为正，否则为负； U_{Sii} 为回路电压源电压的代数和，与回路电流绕向一致为负，否则为正。 * 如有电流源，且取回路电流的序号与电流源序号一致，则有 $I_k=I_{Sk}$	$G_{11}U_1+G_{12}U_2+\cdots+G_{1n}U_n=I_{S11}$ $G_{21}U_1+G_{22}U_2+\cdots+G_{2n}U_n=I_{S22}$ … $G_{n1}U_1+G_{n2}U_2+\cdots+G_{nn}U_n=I_{Snn}$ $G_{11},\cdots,G_{nn}$ 为各节点的自电导，自电导为正； G_{ij} 为节点间的互电导，互电导为负； I_{Sii} 为注入各节点的电流的代数和，流入节点为正，流出节点为负 * 与电流源串联的电阻不计入方程

续表

分析方法	支路分析法	网孔分析法	回路分析法	节点分析法
物理意义	在各电源的作用下,流入(流出)各节点的电流代数和为零,各回路中支路电压的代数和为零	在各电压源的作用下,沿网孔电流方向,各元件电压降的代数和等于该网孔电压源电位升的代数和	在各电压源的作用下,沿回路电流方向各元件电压降的代数和等于该回路电压源电位升的代数和	在各节点电压的共同作用下,流出节点的电流代数和等于流入节点的电流源电流的代数和

2. 具有运算放大器的电阻电路分析

在第1章初步掌握运算放大器的概念和特点的基础上,本章对具有运放的电阻电路进行分析,运放一般不单独使用,它总是和其他元件一起构成不同的电路,以实现不同的功能。

本章所涉及的运放均处于放大工作状态按理想运放对待,因此,只要紧紧抓住理想运放的特点——“虚断”和“虚短”,并正确运用,就不难分析含有运放的电路。

3. 叠加定理、齐性定理和替代定理

(1) 叠加定理

叠加定理可以表述为:线性电阻电路中,任一电压或电流都是电路中各个独立电源单独作用时,在该处产生的电压或电流的代数和。当电路中存在受控源时,叠加定理仍然适用。使用叠加定理时应注意以下几点:

① 叠加定理只适用于线性电路,不适用于非线性电路。

② 在各电源单独作用时,不作用的电压源置零,原电压源处用短路代替;不作用的电流源置零,原电流源处用开路代替。电路中所有电阻都不予变动,受控源仍保留在各个分电路中。

③ 计算各独立源单独作用时,电路中的电流、电压参考方向如与原电路中的参考方向相同,叠加时取正,否则取负。

④ 功率不能用叠加定理计算,必须用叠加后的电压、电流计算功率。

(2) 齐性原理(齐次定理)

齐性原理可以表述为:在线性电路中,当所有激励同时增大 k 倍(缩小为原来的 $1/k$)时,响应也相应增大 k 倍(缩小为原来的 $1/k$)。

应用齐性原理要注意:

① 激励是指独立电源;

② 当电路中只有一个激励时,响应与激励成正比。

(3) 替代定理

替代定理可以表述为:在给定的任意一个线性或非线性的电路中,若第 k 条支路的电压 u_k 和电流 i_k 为已知,那么该支路可以用一个电压等于 u_k 的电压源,或一个电流等于 i_k 的电流源,或一个电阻值等于 u_k/i_k 的电阻替代,替代后电路中各支路电压和电流均

保持原值。

替代时要注意：不能形成电压源回路，也不能形成电流源割集。

4. 系统法等效化简一端口电路

对于复杂的有源一端口网络，除用电源的等效变换方法得到最简的戴维南等效电路或诺顿等效电路，在电路分析中常用回路法和节点法等系统方法分别计算其 u_{oc} 和 R_i，从而得到最简等效电路。

本章重点难点

网孔分析法、回路分析法和节点分析法是本章的重点。对于有伴电压源与无源元件组成的电路和有伴电流源与无源元件组成的电路，可以分别用网孔分析法、回路分析法和节点分析法等系统方法建立方程进行分析。采用节点分析法，可把有伴电压源变成有伴电流源，也可直接用电压源的电压除以它的内阻写在方程等号的右边。如果电压源的"＋"极性在所考虑的节点取正号，否则取负号。运用节点分析法时，要特别注意对无伴电压源和电流源与电阻串联支路的处理，当电路中具有两个或两个以上无伴电压源时，正确列写节点方程是本章的难点。

对于复杂电路采用何种方法分析，要具体问题具体分析，一般来说，若电路中电流源较多，常选择回路法，如果电流源大多分布在电路的外围，则往往选择网孔法；若电路中电压源较多，且独立节点数与独立回路数相当或者更少，则选择节点分析法。

叠加定理、替代定理、戴维南定理（诺顿定理）、特勒根定理和互易定理等定理都是线性电路的重要定理，其中较常用的是叠加定理，用得最多的是戴维南定理。对于仅由独立源组成的网络，根据两个定理进行分析并不困难。但当网络含有受控源，运用叠加定理时，不同独立源单独作用或分组作用都会带来控制量的变化；而求戴维南输入电阻时，要计及受控源的影响，必须采用外加电源法或开路短路法。这些往往会使初学者顾此失彼，难以掌握，这是本章的难点。需要综合应用各定理时，难度往往更大。

3.3 典型题解析

1. 支路分析法

例 3-1 列写图 3-1 所示电路的支路电流方程。

解 把 R_3，I_{S3} 看成一条支路，该电路便有 6 条支路，4 个节点，选支路电流标号与支路电阻标号一致，各支路电流方向及节点电压标号见图示。取节点④为参考节点。统一规定流出节点的支路电流为正，流入节点的支路电流为负，则有

节点①

$$-I_1 - I_2 + I_5 = 0$$

节点②

$$I_1 - I_3 + I_4 = 0$$

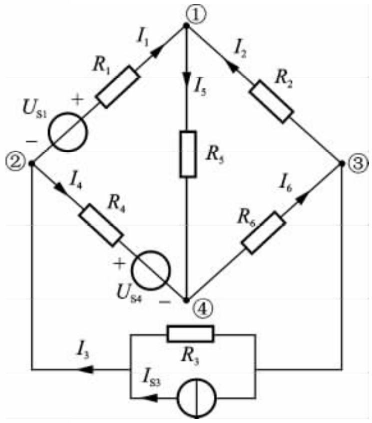

图 3-1

节点③

$$I_2 + I_3 - I_6 = 0$$

取3个网孔作为独立回路，取回路绕向是顺时针方向，由KVL有

$$R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_4 I_4 = U_{S1} + U_{S4}$$
$$-R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0$$
$$R_4 I_4 + R_6 I_6 + R_3 (I_3 - I_{S3}) = -U_{S4}$$

将上述三方程整理后便有

$$R_1 I_1 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_{S1} + U_{S4}$$
$$-R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0$$
$$R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_6 I_6 = -U_{S4} + R_3 I_{S3}$$

将三个节点电流方程和三个回路电压方程联立求解，可得各支路电流及其他待求量。

2. 网孔分析法和回路分析法

(1) 常规电路的网孔分析和回路分析

例 3-2 列写图3-2中的网孔电流方程和回路电流方程。

解法 1 选定三个网孔电流 i_1、i_2、i_3 如图3-2中所示，则网孔电流方程为

$$\begin{cases} (1+2+3)i_1 - 3i_2 - 2i_3 = 16-6 \\ -3i_1 + (1+2+3)i_2 - i_3 = 6-4 \\ -2i_1 - i_2 + (1+2+3)i_3 = -2 \end{cases}$$

即

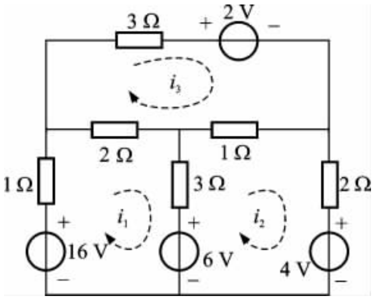

图 3-2

$$\begin{cases}6i_1-3i_2-2i_3=10\\-3i_1+6i_2-i_3=2\\-2i_1-i_2+6i_3=-2\end{cases}$$

解法 2 如选回路电流与网孔电流相同，则回路电流方程与上方程一样。解上述方程组可得各网孔(回路)电流。网孔是回路的特例，读者自行选择回路电流列写回路电流方程进行回路法分析。

该电路不含受控源，方程的系数行列式对主对角线对称，此特点可用来检验方程的正确性。

(2) 含理想电流源电路的网孔分析和回路分析

理想电流源的输出电流恒定或是给定的时间函数，它的端电压不确定而取决于外电路。这就给网孔电流方程的建立带来困难，可根据电流源在电路中所处的两种位置，予以分别处理。

① 电流源仅处于一个网孔，此时该网孔电流等于电流源电流为已知，该网孔的电压方程不必列写，其他网孔电流方程按常规列写。

例 3-3 列写图 3-3 所示电路的网孔电流方程。

解 选网孔电流 i_1、i_2、i_3 如图 3-3 所示，则网孔电流方程为

$$(R_2+R_3+R_4)i_1-R_3i_2-R_4i_3=U_{S2}$$
$$-R_3i_1+(R_1+R_3)i_2=U_{S1}-U_{S3}$$
$$i_3=I_S$$

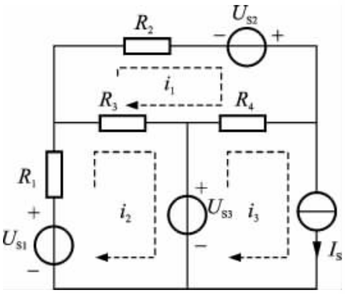

图 3-3

② 电流源处于两网孔的公共支路上。

例 3-4 试求图 3-4(a)中的电压 U_o。

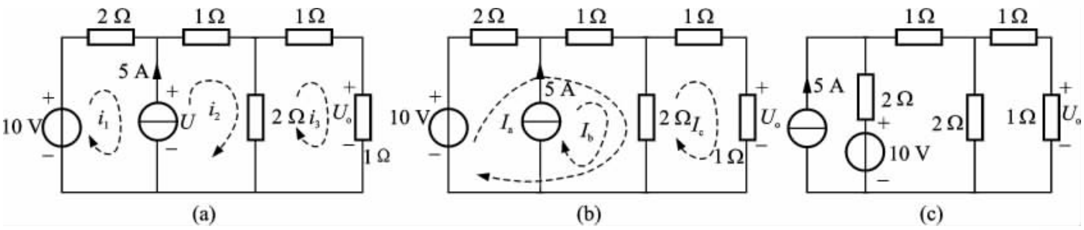

图 3-4

解法 1 直接用网孔分析法。5 A 电流源在网孔电流 i_1、i_2 的公共支路上，设 5 A 电流的端电压为 U，网孔电流 i_1、i_2、i_3 如图 3-4(a)中所示。由于增设了一个辅助变量 U，必须增加一个有关网孔电流与 5 A 电流源电流相约束的辅助方程，网孔电流方程则为

$$2i_1+U=10 \qquad ①$$
$$3i_2-2i_3-U=0 \qquad ②$$
$$-2i_2+4i_3=0 \qquad ③$$

辅助方程为

$$i_2 - i_1 = 5 \qquad ④$$

式①+式②得

$$2i_1 + 3i_2 - 2i_3 = 10 \qquad ⑤$$

由式③得

$$i_2 = 2i_3 \qquad ⑥$$

由式④得

$$i_1 = i_2 - 5 = 2i_3 - 5 \qquad ⑦$$

将式⑥、式⑦代入式⑤得

$$2(2i_3 - 5) + 3 \times 2i_3 - 2i_3 = 10$$

$$8i_3 = 20$$

$$i_3 = 2.5\ \mathrm{A}$$

所以

$$U_o = 2.5\ \mathrm{V}$$

解法 2 本例也可用回路分析法求解。只让一个回路电流通过 5 A 电流源,取回路电流 I_a、I_b、I_c 如图 3-4(b)所示。回路电流方程为

$$5I_a + 3I_b - 2I_c = 10 \qquad ⑧$$

$$I_b = 5 \qquad ⑨$$

$$-2I_a - 2I_b + 4I_c = 0 \qquad ⑩$$

式⑨代入式⑧和式⑩并整理得

$$5I_a - 2I_c = -5 \qquad ⑪$$

$$-I_a + 2I_c = 5 \qquad ⑫$$

式⑪+式⑫×5 得

$$8I_c = 20$$

$$I_c = 2.5\ \mathrm{A}$$

所以 $$U_o = 2.5\ \mathrm{V}$$

可见,用回路分析法方程数少,求解更方便些。熟练后式⑨可不列出,其值直接代入其他回路方程。

解法 3 此例是求 U_o,可以把 5 A 电流源变换一下位置,如图 3-4(c)所示,此时再用网孔分析法或回路分析法皆较方便。

③ 含理想受控电流源的网孔分析和回路分析。

例 3-5 试求图 3-5(a)所示电路中电流 I 及受控电流源的功率。

解 电路含有理想电流源和理想受控电流源,前者在两网孔的公共支路上,如用网孔法分析,必须在 5 A 电流源两端设一电压,比较麻烦。而用回路分析法,取回路如图 3-5(b) 所示,就比较方便。列方程时受控源按独立源看待,并把控制量用回路电流表示,回路电流方程为

$$I_1 = 5\ \mathrm{A} \qquad ①$$

$$I_2 = 0.25U_2 \qquad ②$$

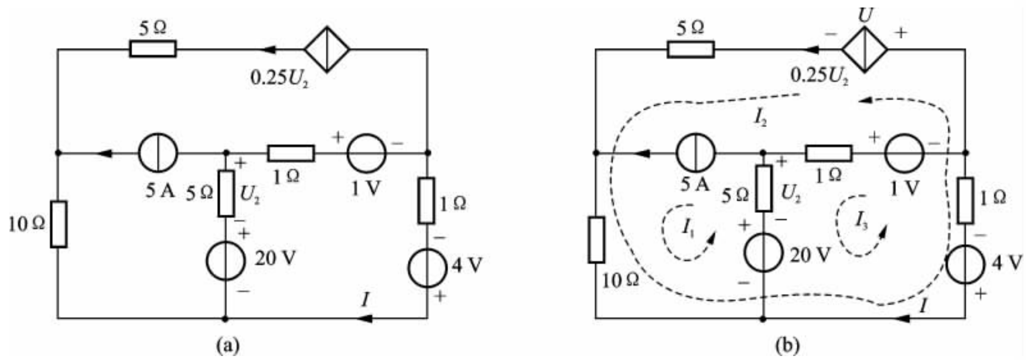

图 3-5

$$U_2 = (I_3 - I_1) \times 5 \quad ③$$

$$(1+1+5)I_3 - 5I_1 + I_2 = 1 - 20 - 4 \quad ④$$

式①代入式③，式③再代入式②得

$$I_2 = 0.25(I_3 - 5) \times 5 = 1.25I_3 - 6.25 \quad ⑤$$

将式①和式⑤代入式④得

$$7I_3 - 5 \times 5 + 1.25I_3 - 6.25 = -23$$

$$8.25I_3 = 8.25$$

$$I_3 = 1\ \text{A}$$

$$I_2 = 1.25 \times 1 - 6.25 = -5\ \text{A}$$

所以

$$I = -(I_2 + I_3) = -(-5+1) = 4\ \text{A}$$

设受控电流源的端电压 U 的方向与其关联，由 KVL 则有

$$U + 5I_2 + 10(I_1 + I_2) + 4 + (I_2 + I_3) \times 1 = 0$$

$$U = -5 \times (-5) - 10 \times (5-5) - 4 - (-5+1) \times 1 = 25\ \text{V}$$

所以受控源的功率

$$P_{0.25U_2} = 25 \times (-5) = -125\ \text{W} < 0 \quad (\text{实际发出})$$

思考 求解过程中，理想受控电流源与 5 Ω 电阻串联的支路可等效为受控电流源，而将 5 Ω 电阻去掉时，对求解 I 和受控电流源的功率有无影响？

3. 节点分析法

(1) 只含电流源和电阻电路的节点分析

例 3-6 列写图 3-6 所示电路的节点电压方程。

解 该电路由电阻和电流源构成，共有 4 个节点，参考节点选在下面，设其它节点电压分别为 u_1、u_2 和 u_3，节点电压方程为

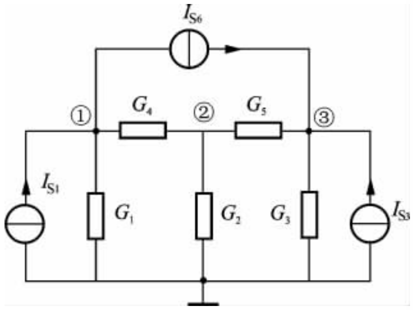

图 3-6

$$\begin{cases}(G_1+G_4)u_1-G_4u_2-0u_3=i_{S1}-i_{S6}\\-G_4u_1+(G_2+G_4+G_5)u_2-G_5u_3=0\\-0u_1-G_5u_2+(G_3+G_5)u_3=i_{S3}+i_{S6}\end{cases}$$

电路不含受控源,故系数行列式关于主对角线对称。

(2) 含有伴电压源电路的节点分析

例 3-7 求图 3-7 所示电路的各节点电压。

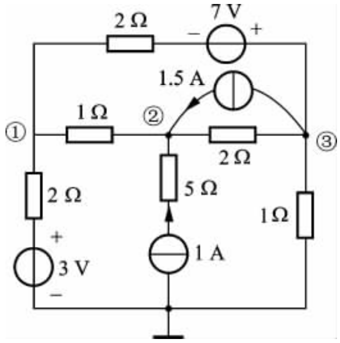

图 3-7

解 参考节点已选定,令其余各节点电压分别为 u_1、u_2 和 u_3。该电路中各支路给出的是电阻值,而节点方程中为电导,这应特别注意。电路含 2 个有伴电压源,如用等效变换将它们变成有伴电流源,就可以用常规方法列写方程。也可不进行等效变换,直接列写方程,有伴电压源引起的电流用它们的电压与串联电阻的比值表示。所考虑的节点在电压源的正极端时,比值写在方程等号右边,取正号;反之取负号。另外,该题中还有一个 1 A 与5 Ω 串联的支路,按电流源与电阻串联等效的原理可等效为 1 A 电流源,所以 5 Ω 不能作为自导(凡是与理想电流源相串联的电阻或电导,在列写节点电压方程时,该电阻或电导不能作为自导或互导,其理由是该电阻或电导不影响该支路电流)。

考虑了上述诸问题后,可得该电路的节点电压方程为

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)u_1-\frac{1}{1}u_2-\frac{1}{2}u_3=\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\\-\frac{1}{1}u_1+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)u_2-\frac{1}{2}u_3=1+1.5\\-\frac{1}{2}u_1-\frac{1}{2}u_2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)u_3=\frac{7}{2}-1.5\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}4u_1-2u_2-u_3=-4\\-2u_1+3u_2-u_3=5\\-u_1-u_2+4u_3=4\end{cases}$$

解得

$$u_1=1\text{ V},\quad u_2=3\text{ V},\quad u_3=2\text{ V}$$

(3) 含无伴(理想)电压源电路的节点分析

理想电压源的端电压恒定或是给定的时间函数,但输出电流不定,它取决于外电路。这给列写节点电压方程带来困难,要根据情况作相应处理。

① 若电路中只有一个理想电压源,选取电压源的一端为参考节点,则另一端的节点电压即为已知,就是此电压源的电压,该节点的电流方程就不用列写。

例 3-8 用节点分析法求图 3-8 所示电路中的电压 u 和电流 i。

解 该电路只有一个理想电压源,可选其负端节点④为参考节点,其节点电压方程为

$$u_1=2\text{ V} \qquad ①$$

$$-\frac{1}{2}u_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)u_2-0u_3=4 \qquad ②$$

$$-\frac{1}{1}u_1-0u_2+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)u_3=-4 \qquad ③$$

式①分别代入式②和式③可得

$$u_2=5\ \text{V},\quad u_3=-1\ \text{V}$$

所以

$$u=u_2-u_3=5-(-1)=6\ \text{V}$$

$$i=\frac{u_1-u_3}{1}=\frac{2-(-1)}{1}=3\ \text{A}$$

② 电路中有两个(无公共节点)以上理想电压源。由于无公共节点,选其中一个电压源的一端为参考点,则其他电压源就不能与参考点直接相连,理想电压源支路的电导为无限大,无法列节点方程,可将剩余理想电压源的电流作为变量,在其中加设一个未知电流,暂时把它当作电流源处理。由于未知量增加,必须增加相应的有关节点电压与理想电压源之间关系的辅助方程。

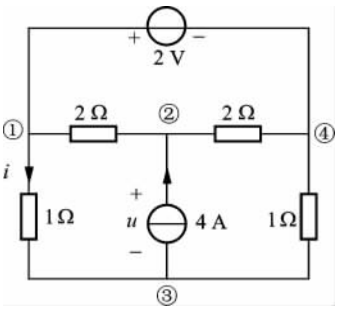

图 3-8

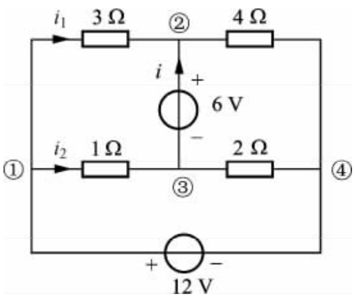

图 3-9

例 3-9 用节点分析法求图 3-9 所示电路中电流 i_1 和 i_2。

解 该电路有两个理想电压源,无公共节点。选④为参考节点,并设 6 V 电压源中电流为 i,该电路节点电压方程为

$$u_1=12\ \text{V} \qquad ①$$

$$-\frac{1}{3}u_1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)u_2=i \qquad ②$$

$$-\frac{1}{1}u_1+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)u_3=-i \qquad ③$$

辅助方程为

$$u_2-u_3=6\ \text{V} \qquad ④$$

式②+式③并整理得

$$-16u_1+7u_2+18u_3=0 \qquad ⑤$$

式①代入式⑤得

$$7u_2+18u_3=192 \qquad ⑥$$

式⑥－式④×7 得

$$25u_3 = 150$$
$$u_3 = 6\ \text{V}$$
$$u_2 = 6+6 = 12\ \text{V}$$

所以

$$i_1 = \frac{u_1-u_2}{3} = \frac{12-12}{3} = 0$$
$$i_2 = \frac{u_1-u_3}{1} = \frac{12-6}{1} = 6\ \text{A}$$

(4) 含受控源电路的节点分析

对含受控源电路列节点电压方程时，把受控源当作独立源看待，控制量用节点电压表示。

例 3-10 用节点分析法求图 3-10 所示电路中的 i_X 和 u_X。

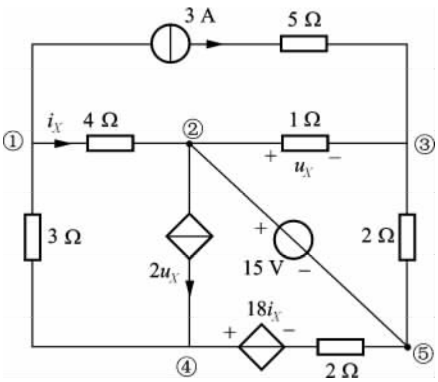

图 3-10

解 由图 3-10 可知该电路有 5 个节点，两个受控源。理想电压源在节点②和节点⑤之间，故选⑤为参考节点，可得节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)u_1 - \frac{1}{4}u_2 - \frac{1}{3}u_4 = -3 \qquad ①$$
$$u_2 = 15\ \text{V} \qquad ②$$
$$-\frac{1}{1}u_2 + \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)u_3 = 3 \qquad ③$$
$$-\frac{1}{3}u_1 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)u_4 = 2u_X + \frac{18i_X}{2} \qquad ④$$

控制量用节点电压表示为

$$i_X = \frac{u_1-15}{4} \qquad ⑤$$
$$u_X = 15-u_3 \qquad ⑥$$

式②代入式③得

$$\frac{3}{2}u_3 = 18$$
$$u_3 = 12\ \text{V} \qquad ⑦$$

式⑦代入式⑥得

$$u_X = 15-12 = 3\ \text{V} \qquad ⑧$$

式②代入式①后两边同乘以 12 得

$$7u_1 - 4u_4 = 9 \qquad ⑨$$

式⑤和式⑧代入式④并整理得

$$-31u_1 + 10u_4 = -333 \qquad ⑩$$

式⑨和式⑩联立得

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -333 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -31 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{-1242}{-54} = 23\ \text{V}$$

代入式⑤得

$$i_X = \frac{23-15}{4} = 2\ \text{A}$$

注意 $u_4=38$ V 对本题可以不求。与 3 A 串联的 5 Ω 电阻不能作为自导，也不能作为互导。

4. 具有运算放大器的电阻电路分析

同时运用理想运放的"虚断"和"虚短"两条规则，并与节点分析法相结合，将使含理想运放的电路的分析大为简化。需要注意，在对理想运放输入端列写 KCL 方程时，由于理想运放输入端电流为零，故可将其视为"开路"。另外，由于运放输出端的电流事先无法确定，因此不能对输出端列节点方程，所缺方程由"虚短"来补充。

例 3-11 图 3-11 所示电路为电流-电压变换器，求 u_o/i_S。

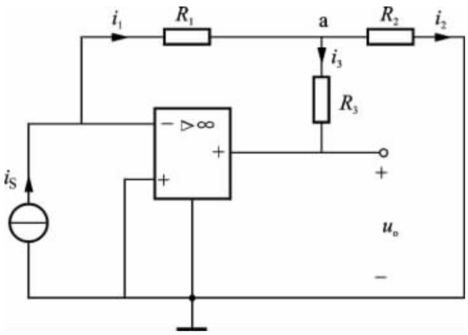

图 3-11

解法 1 设三电阻相连的节点为 a，且设三个电阻中的电流分别为 i_1、i_2 和 i_3，方向如图 3-11 所示。由"虚断"有

$$i_1 = i_S$$

由"虚短"有

$$u_a = -R_1 i_1 = -R_1 i_S$$

$$i_2 = \frac{u_a}{R_2} = \frac{-R_1 i_S}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{u_a - u_o}{R_3} = \frac{-R_1 i_S - u_o}{R_3}$$

对节点 a

$$i_S = i_2 + i_3 = \frac{-R_1 i_S}{R_2} + \frac{-R_1 i_S - u_o}{R_3} = \frac{-R_1 i_S}{R_2} + \frac{-R_1 i_S}{R_3} - \frac{u_o}{R_3}$$

整理得

$$i_S\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_1}{R_3}\right)=-\frac{u_o}{R_3}$$

所以
$$\frac{u_o}{i_S}=-R_3\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_1}{R_3}\right)$$

解法 2 也可对节点 u_-,u_a 直接列节点电压方程

$$\frac{1}{R_1}u_- - \frac{1}{R_1}u_a = i_S \quad ①$$

$$-\frac{1}{R_1}u_- + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_a - \frac{1}{R_3}u_o = 0 \quad ②$$

对输出端不宜列方程,但有

$$u_- = u_+ = 0 \quad ③$$

式③代入式①即得

$$u_a = -R_1 i_S \quad ④$$

式③和式④代入式②得

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)(-R_1 i_S) = \frac{1}{R_3}u_o$$

所以

$$\frac{u_o}{i_S} = -R_1R_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$
$$= -R_3\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_1}{R_3}\right)$$

例 3-12 求图 3-12 所示电路的输出电压 u_o。

解 由"虚短"有

$$u_- = u_+ = 4\ \text{V}$$

由"虚断"有

$$i_2 = i_1 = \frac{6-4}{4\times10^3} = \frac{2}{4\times10^3}$$

所以

$$u_o = -10\times10^3 i_2 + 4 = -10\times10^3\times\frac{2}{4\times10^3}+4$$
$$= -1\ \text{V}$$

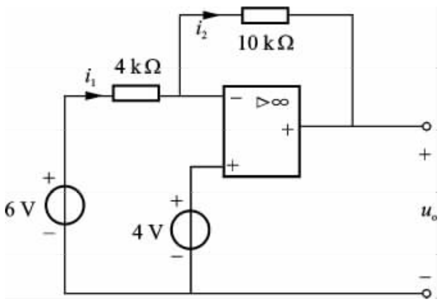

图 3-12

例 3-13 求图 3-13 所示电路的电流增益 i_o/i_S。

解法 1 由"虚断"对节点①列 KCL 方程

$$-i_S + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1-u_{o1}}{R_3} + \frac{u_1-u_{o2}}{R_2} + 0 = 0 \quad ①$$

由"虚短"

$$u_1 = u_- = u_+ = 0$$

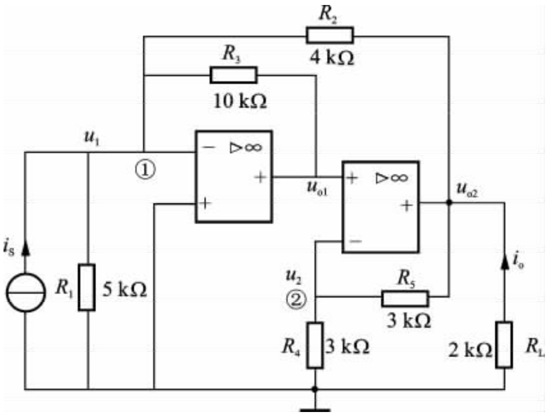

图 3-13

式①变为

$$-i_S-\frac{u_{o1}}{R_3}-\frac{u_{o2}}{R_2}=0 \quad ②$$

而

$$u_{o1}=u_2=\frac{u_{o2}}{R_4+R_5}\times R_4 \quad ③$$

$$u_{o2}=-i_oR_L \quad ④$$

式④代入式③得

$$u_{o1}=-\frac{R_4R_L}{R_4+R_5}i_o \quad ⑤$$

将式④和式⑤代入式②得

$$-i_S+\frac{R_4R_L}{R_3(R_4+R_5)}i_o+\frac{R_L}{R_2}i_o=0$$

$$i_S=\left[\frac{R_4R_L}{R_3(R_4+R_5)}+\frac{R_L}{R_2}\right]i_o=\left[\frac{3\times 2}{10\times(3+3)}+\frac{2}{4}\right]i_o$$

$$=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\right)i_o=\frac{3}{5}i_o$$

所以

$$\frac{i_o}{i_S}=\frac{5}{3}$$

解法 2 直接对节点①、②列节点电压方程，再由“虚短”得 2 个补充方程。

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_1-\frac{1}{R_3}u_{o1}-\frac{1}{R_2}u_{o2}=i_S \quad ⑥$$

$$\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_2-\frac{1}{R_5}u_{o2}=0 \quad ⑦$$

$$u_1=0 \quad ⑧$$

$$u_{o1}=u_2 \quad ⑨$$

由式⑦得

$$u_2=\frac{1}{R_5}\times\frac{1}{\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)}u_{o2}=\frac{R_4}{R_4+R_5}u_{o2} \tag{⑩}$$

将式⑧～式⑩代入式⑥得

$$-\frac{1}{R_3}\times\frac{R_4}{R_4+R_5}u_{o2}-\frac{1}{R_2}u_{o2}=i_S \tag{⑪}$$

再将 $u_{o2}=-R_L i_o$ 代入式⑪得

$$\frac{1}{R_3}\times\frac{R_4R_L}{R_4+R_5}i_o+\frac{R_L}{R_2}i_o=i_S$$

将电阻值代入后可得

$$\frac{i_o}{i_S}=\frac{5}{3}$$

例 3-14 求图 3-14 所示电路的电压增益 u_o/u_i。

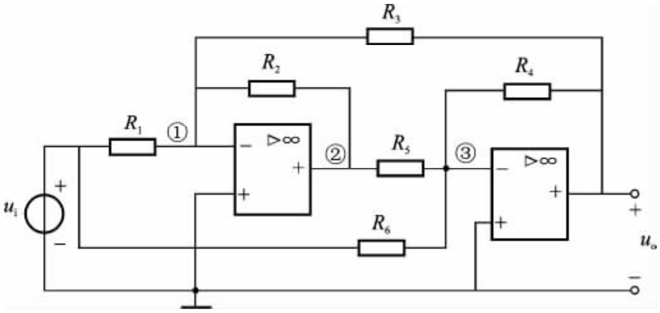

图 3-14

解法 1 分别对节点①、③列 KCL 方程。

由“虚断”

$$\frac{u_i-u_1}{R_1}=\frac{u_1-u_2}{R_2}+\frac{u_1-u_o}{R_3} \tag{①}$$

$$\frac{u_i-u_3}{R_6}+\frac{u_2-u_3}{R_5}=\frac{u_3-u_o}{R_4} \tag{②}$$

由“虚短”

$$u_1=0$$

$$u_3=0$$

式①和式②化简为

$$\frac{u_i}{R_1}=\frac{-u_2}{R_2}+\frac{-u_o}{R_3} \tag{③}$$

$$\frac{u_i}{R_6}+\frac{u_2}{R_5}=\frac{-u_o}{R_4} \tag{④}$$

由式④可得

$$u_2=R_5\left(-\frac{u_i}{R_6}-\frac{u_o}{R_4}\right)$$

代入式③得

$$\begin{aligned}\frac{u_i}{R_1}&=-\frac{1}{R_2}R_5\left(-\frac{u_i}{R_6}-\frac{u_o}{R_4}\right)-\frac{u_o}{R_3}\\&=\frac{R_5}{R_2R_6}u_i+\frac{R_5}{R_2R_4}u_o-\frac{u_o}{R_3}\end{aligned}$$

移项合并得

$$\left(\frac{1}{R_1}-\frac{R_5}{R_2R_6}\right)u_i=\left(\frac{R_5}{R_2R_4}-\frac{1}{R_3}\right)u_o$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{u_o}{u_i}&=\frac{\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{R_5}{R_2R_6}}{\dfrac{R_5}{R_2R_4}-\dfrac{1}{R_3}}=\frac{\dfrac{R_2R_6-R_1R_5}{R_1R_2R_6}}{\dfrac{R_5R_3-R_2R_4}{R_2R_4R_3}}\\&=\frac{R_3R_4(R_2R_6-R_1R_5)}{R_1R_6(R_3R_5-R_2R_4)}\end{aligned}$$

解法 2 直接对节点①、③列节点电压方程

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_1-\frac{1}{R_2}u_2-\frac{1}{R_3}u_o=\frac{u_i}{R_1} \quad ⑤$$

$$-\frac{1}{R_5}u_2+\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)u_3-\frac{1}{R_4}u_o=\frac{u_i}{R_6} \quad ⑥$$

$$u_1=0 \quad ⑦$$

$$u_3=0 \quad ⑧$$

将式⑦和式⑧代入式⑤和式⑥得

$$-\frac{1}{R_2}u_2-\frac{1}{R_3}u_o=\frac{u_i}{R_1} \quad ⑨$$

$$-\frac{1}{R_5}u_2-\frac{u_o}{R_4}=\frac{u_i}{R_6} \quad ⑩$$

式⑨和式⑩与解法 1 的式③和式④一样，所以得到

$$\frac{u_o}{u_i}=\frac{R_3R_4(R_2R_6-R_1R_5)}{R_1R_6(R_3R_5-R_2R_4)}$$

在以计算机为核心构成的数据处理或控制等系统中，计算机处理的是数字信号。这些经过处理后的数字信号往往需要转换成模拟信号（亦称为连续信号），然后直接输出或控制执行机构如电动机等。通过数字-模拟转换器（digital-analog convertor，DAC）可以将数字信号变换为模拟信号。

计算机处理的数字信号采用二进制，即仅采用 0 和 1 两个数码。设一个 4 位的二进制数码为“$d_3d_2d_1d_0$”（数字量），则其对应的十进制数值（模拟量）为

$$2^3\times d_3+2^2\times d_2+2^1\times d_1+2^0\times d_0$$

表 3-2 列举了二进制数码及其对应的十进制数值（0～15）。

表 3-2　二进制数码及其对应的十进制数值

二进制数码	十进制数码	二进制数码	十进制数码	二进制数码	十进制数码	二进制数码	十进制数码
0 0 0 0	0	**0 1 0 0**	4	**1 0 0 0**	8	**1 1 0 0**	12
0 0 0 1	1	**0 1 0 1**	5	**1 0 0 1**	9	**1 1 0 1**	13
0 0 1 0	2	**0 1 1 0**	6	**1 0 1 0**	10	**1 1 1 0**	14
0 0 1 1	3	**0 1 1 1**	7	**1 0 1 1**	11	**1 1 1 1**	15

例 3-15　图 3-15 所示为实现 DAC 的一种电路。求输出电压 u_o。

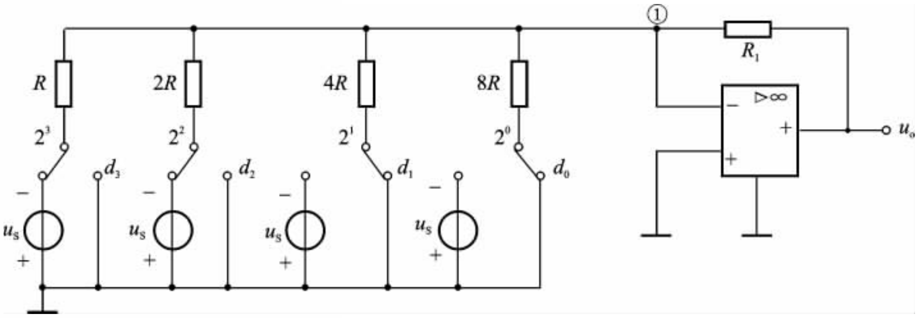

图　3-15

解　用节点法分析电路，运用运算放大器的“虚断”、“虚短”的概念，对节点①列出节点电压方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{2R}+\dfrac{1}{4R}+\dfrac{1}{8R}+\dfrac{1}{R_1}\right)u_{n1}-\dfrac{u_o}{R_1}= \\ \quad -\dfrac{d_3u_S}{R}-\dfrac{d_2u_S}{2R}-\dfrac{d_1u_S}{4R}-\dfrac{d_0u_S}{8R} \\ u_{n1}=0\end{cases}$$

解得输出电压

$$u_o=\frac{R_1u_S}{8R}(2^3\times d_3+2^2\times d_2+2^1\times d_1+2^0\times d_0)$$

如果取

$$R_1=\frac{8R}{u_S}$$

则有

$$u_o=2^3\times d_3+2^2\times d_2+2^1\times d_1+2^0\times d_0$$

对图 3-15 所示电路，$d_3d_2d_1d_0=1100$，因此有

$$u_o=2^3\times1+2^2\times1+2^1\times0+2^0\times0=12\ \text{V}$$

即输出的电压值与输入的二进制数字所表示的十进制数值完全相同。

讨论　该电路的核心为接入运算放大器的电阻电路，称为权电阻解码电路。由于所使用的电阻的个数较少，而每个电阻的大小都不一样，且电阻之间的差值较大，给保证精度带来一定的困难，因此转换的精度不高。

例 3-16 图 3-16(a)所示为 T 形电阻网络 DAC 的电路。

(1) 利用戴维南定理化简图 3-16(a)电路；

(2) 在图 3-16(b)电路中，$u_{Si}=\dfrac{1}{2^4}(2^3d_3+2^2d_2+2^1d_1+2^0d_0)u_S$，求输出电压 u_o，由此结果阐述实现数字到模拟信号的转换。

(3) 若图 3-16(a)电路中，已知 $u_S=16$ V，输入数字信号"1010"，则输出模拟量 u_o 为多少？若输入为"1111"，则 u_o 为何值？

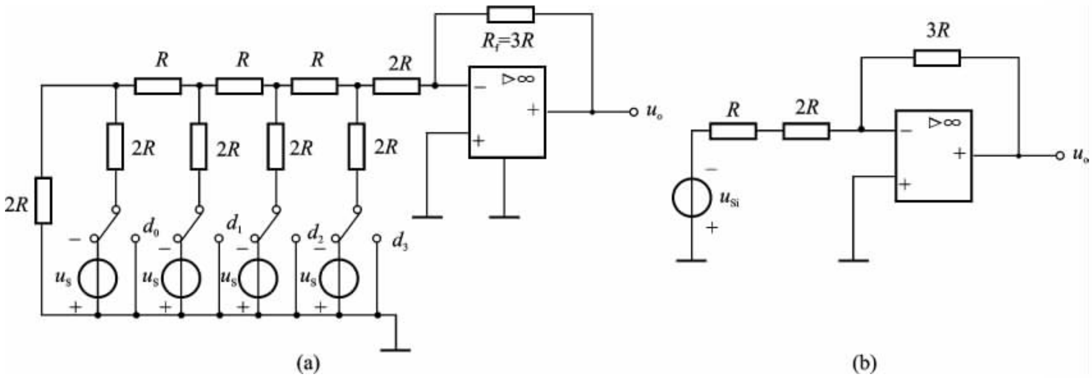

图 3-16

解 (1) 戴维南等效电路如图 3-16(b)所示。

(2) 利用运算放大器"虚断"、"虚短"的概念

$$u_o=\frac{u_{Si}}{3R}\cdot 3R=u_{Si}$$

上式说明数字到模拟信号的转换。

(3) 若输入数字信号"1010"，则

$$\begin{aligned}u_o&=\frac{u_S}{2^4}(2^3\times d_3+2^2d_2+2^1d_1+2^0d_0)\\&=(2^3\times 1+2^2\times 0+2^1\times 1+2^0\times 0)=10\ \text{V}\end{aligned}$$

若输入数字信号"1111"，则

$$u_o=2^3\times 1+2^2\times 1+2^1\times 1+2^0\times 1=15\ \text{V}$$

讨论 理想运算放大器是集成运算放大器的电路模型，"虚断"和"虚短"是理想运放工作在线性放大区时的两个重要特性。利用运算放大器能构成各种运算电路，数/模(DAC)、模/数(ADC)转换器是其应用之一。运算放大器在电子技术中有着广泛的应用，请读者参阅有关电子技术书籍。

5. 叠加定理

例 3-17 电路如图 3-17(a)所示，用叠加定理求电压 U_{ab}。

解 应用叠加定理时，电源分别单独作用，也可分组作用。本题将电压源和电流源分两组作用，如图 3-17(b)、(c)所示。

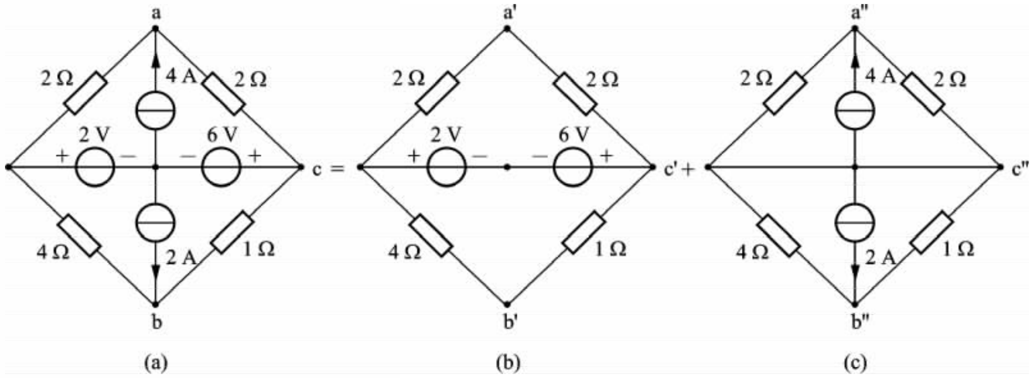

图　3-17

由图 3-17(b)有

$$U_{a'b'}=U_{a'c'}+U_{c'b'}=\frac{2-6}{2+2}\times 2+\frac{6-2}{1+4}\times 1=-1.2\ \text{V}$$

由图 3-17(c)有

$$U_{a''b''}=U_{a''c''}+U_{c''b''}=\frac{1}{2}\times 4\times 2-\frac{2}{4+1}\times 4\times 1=2.4\ \text{V}$$

根据叠加定理,得

$$U_{ab}=U_{a'b'}+U_{a''b''}=-1.2+2.4=1.2\ \text{V}$$

例 3-18　用叠加定理求图 3-18(a)所示电路中的 i_X 和 u_X。

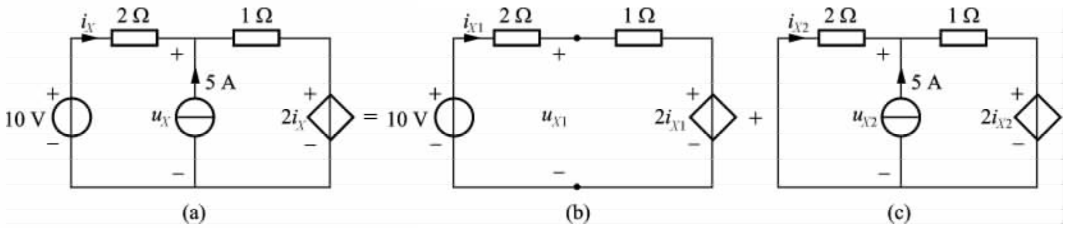

图　3-18

解　用叠加定理求解,电压源和电流源分别作用,受控源保留,如图 3-18(b)、(c)所示。控制量分别为 i_{X1},i_{X2},受控量相应为 $2i_{X1}$ 和 $2i_{X2}$。

由图 3-18(b)有　$$i_{X1}=\frac{10-2i_{X1}}{2+1}$$

可解得　$$i_{X1}=2\ \text{A},\quad u_{X1}=10-2i_{X1}=6\ \text{V}$$

由图 3-18(c),根据 KVL 有

$$2i_{X2}+(i_{X2}+5)\times 1+2i_{X2}=0\quad \text{(也可用 KCL 求)}$$

可解得　$$i_{X2}=-1\ \text{A},\quad u_{X2}=-2i_{X2}=2\ \text{V}$$

据叠加定理

$$i_X=i_{X1}+i_{X2}=2-1=1\ \text{A}$$

$$u_X = u_{X1} + u_{X2} = 6 + 2 = 8\ \text{V}$$

例 3-19 图 3-19(a)所示电路，N 为无源电阻网络。当 $U_S=12$ V，$R_1=0$ 时，$I_1=5$ A，$I_R=4$ A；当 $U_S=18$ V，$R_1\to\infty$时，$U_1=15$ V，$I_R=1$ A。试求 $U_S=6$ V，$R_1=3\ \Omega$ 时，I_R 为何值？

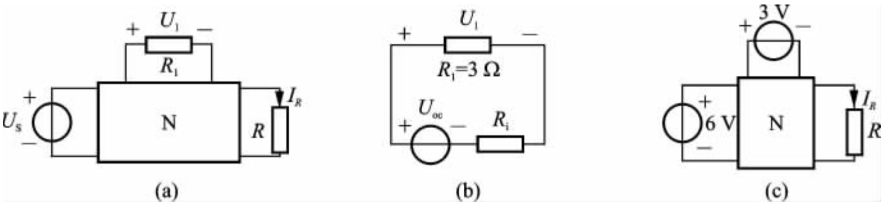

图 3-19

解 由条件 $R_1\to\infty$，$U_1=15$ V 可知 R_1 两端的开路电压。据此由线性性质得知，当 $U_S=12$ V，$R_1\to\infty$时，电阻 R_1 两端开路电压为

$$18:12 = 15:U_{oc}$$

所以

$$U_{oc} = \frac{12\times 15}{18} = 10\ \text{V}$$

而 $U_S=12$ V 时，$R_1=0$，$I_1=5$ A 即为 R_1 支路的短路电流，所以 R_1 两端视入电路的戴维南等效电阻

$$R_i = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \frac{10}{5} = 2\ \Omega$$

当 $U_S=6$ V，$R_1\to\infty$时，R_1 两端的开路电压

$$U_{oc} = \frac{15\times 6}{18} = 5\ \text{V}$$

就 R_1 两端的戴维南等效电路如图 3-19(b)所示，由此得

$$U_1 = \frac{U_{oc}}{R_i+R_1}\cdot R_1 = \frac{5\times 3}{2+3} = 3\ \text{V}$$

将 U_1 用电压源替代，其等效电路如图 3-19(c)所示，应用线性与叠加性，则 I_R 可表示为

$$I_R = k_1U_S + k_2U_1$$

式中 k_1、k_2 是电压源 U_S、U_1 分别为 1 V 单独作用电路时产生的响应电流，由已知条件得

$$\begin{cases} k_1\times 12 + k_2\times 0 = 4 \\ k_1\times 18 + k_2\times 15 = 1 \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{3} \\ k_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

故

$$I_R = 6k_1 + 3k_2 = 2 - 1 = 1\ \text{A}$$

评注　应用替代(置换)定理时,被替代的支路既可用电压源也可用电流源置换,对电路求解的结果是相同的。一般用已知值的电压源(或电流源)进行置换对电路求解较为方便。应用替代定理还可加深对无伴电压源支路和电流源与电导串联支路电路的等效变换的理解。

例 3-20　图 3-20(a)所示电路中,方框部分 N_S 为含独立源和电阻的网络。当端口 ab 短接时,电阻 R 支路中电流 $I=I_{S1}$;当端口 ab 开路时,电阻 R 支路中电流 $I=I_{S2}$。当端口 ab 间接电阻 R_f 时,R_f 获得最大功率。试证明当端口 ab 间接电阻 R_f 时,流过 R 支路的电流 $I=\dfrac{I_{S1}+I_{S2}}{2}$。

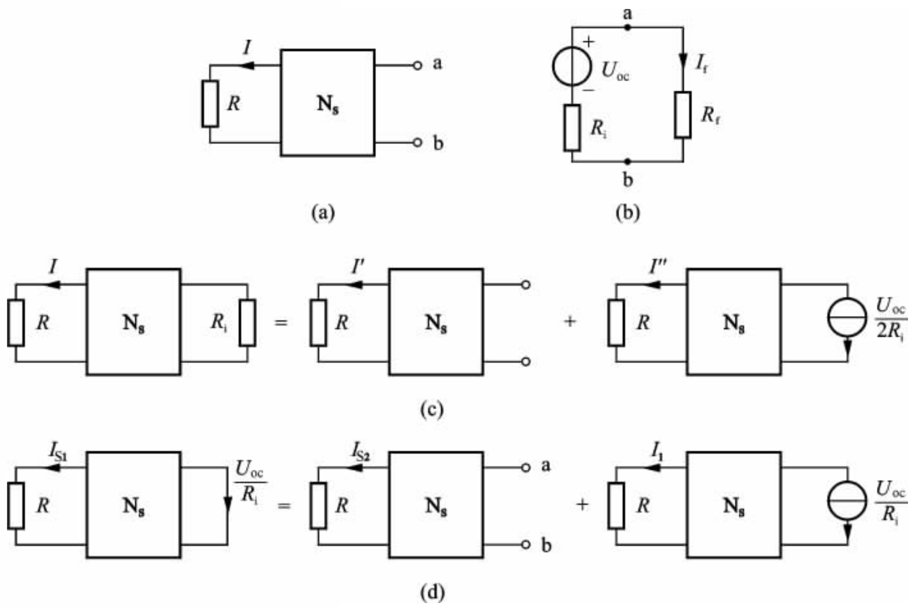

图　3-20

证明　图 3-20(a)所示 a、b 端口的戴维南等效电路如图 3-20(b)所示。设流过 R_f 的电流为 I_f,当 $R_f=R_i$ 匹配时,负载 R_f 获得最大功率,则有

$$I_f = \frac{U_{oc}}{2R_i}$$

根据叠加定理和替代定理,将待求电路分为两个电路如图 3-20(c)所示。

根据已知条件并应用叠加定理和替代定理得电路如图 3-20(d)所示。

比较图 3-20(c)和图 3-20(d),可得

$$I' = I_{S2}$$

$$I'' = \frac{I_1}{2} = \frac{I_{S1} - I_{S2}}{2}$$

根据叠加定理得

$$I = I' + I'' = I_{S2} + \frac{I_{S1} - I_{S2}}{2} = \frac{I_{S1} + I_{S2}}{2}$$

证毕。

例 3-21 图 3-21(a)电路中，N_S 为含源线性电阻网络，n 支路接电阻 R，m 支路断开。当 n 支路断开时，m 支路两端的电压为 U_{mo}；当 n 支路短接时，m 支路两端的电压为 U_{mS}。从 n 支路 a、b 两端向左看去，入端电阻为 R_i。试证明当 n 支路接有电阻 R 时，m 支路的电压为

$$U_m = U_{mo} + (U_{mS} - U_{mo})\frac{R_i}{R + R_i}$$

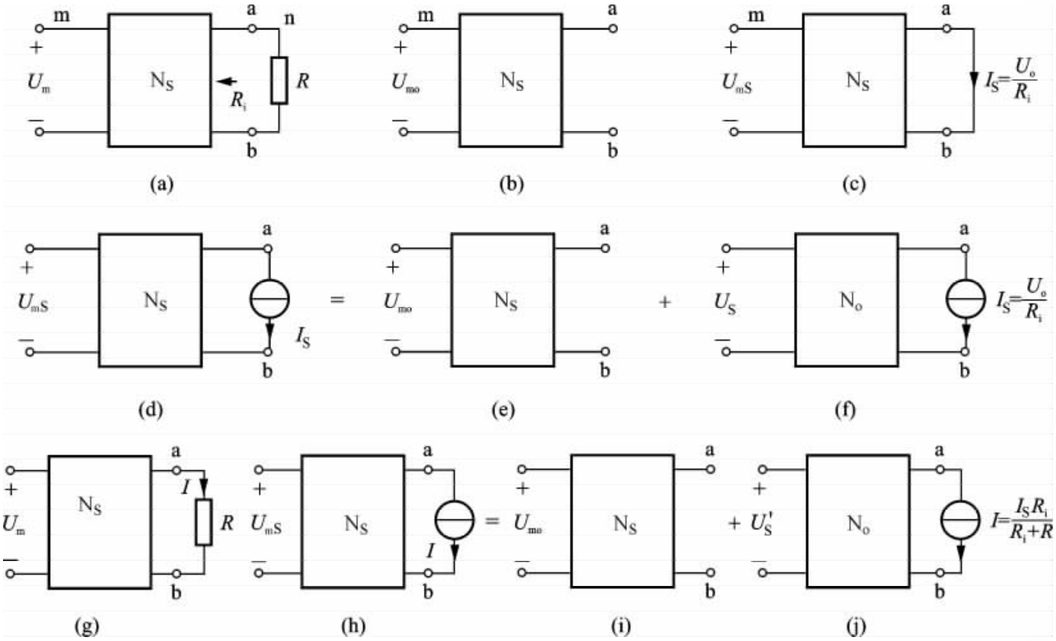

图 3-21

证明 设从 a、b 端向左看进去的戴维南等效电路的参数为 $U_o = U_{ab}$ 及 R_i(已知)。

由条件，当 a、b 开路时，此时为 N_S 内电源激励，m 支路电压为 U_{mo}，如图 3-21(b)所示。

当 a、b 短路时，仍为 N_S 内电源激励，m 支路电压为 U_{mS}，n 支路(a、b 间)电流为 $I_S = \frac{U_o}{R_i}$，如图 3-21(c)所示。将 $I_S = \frac{U_o}{R_i}$ 用电流源替代，如图 3-21(d)所示。

将图 3-21(d)用叠加定理分成有源网络内电源作用和 I_S 分别独立作用，如图 3-21(e)、(f)所示。

因为 $$U_{mS} = U_{mo} + U_S$$

所以 $$U_S = U_{mS} - U_{mo}$$

其中，U_{mo}为 I_S 单独作用时的响应。

当 n 支路接有电阻时，如图 3-21(g)所示，电阻中的电流

$$I=\frac{U_o}{R_i+R}=\frac{I_S R_i}{R_i+R}$$

将 I 用电流源替代，如图 3-21(h)所示。再用叠加定理分成有源网络内电源作用和 I 作用，如图 3-21(i)、(j)所示。

将图 3-21(j)与图 3-21(f)比较，由齐性原理可得

$$U'_S=(U_{mS}-U_{mo})\frac{R_i}{R_i+R}$$

所以

$$U_m=U_{mo}+U'_S=U_{mo}+(U_{mS}-U_{mo})\frac{R_i}{R_i+R}$$

证毕。

该题还有其他证法，读者可以试试。

例 3-22 图 3-22(a)所示电路，网络 N 仅由线性电阻组成。当 $I_S=20$ A，$R=r=2\ \Omega$ 时，$I=5$ A；当 $I_S=10$ A，$R=r=3\ \Omega$ 时，$I=2$ A。求当 $I_S=15$ A，$R=4\ \Omega$，$r=5\ \Omega$ 时的 I 值。

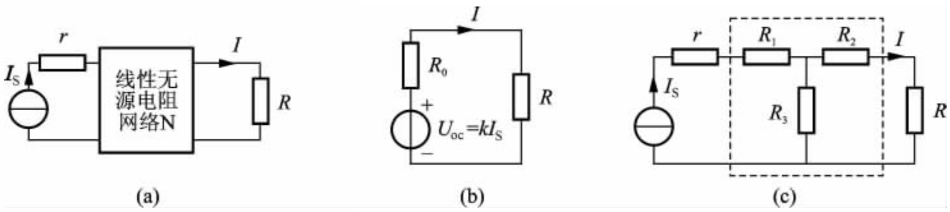

图 3-22

解法 1 此例看起来激励源只有一个 I_S，其变化必然影响 I，但是 I 与 I_S 之间并不成比例关系，因为还有 r 和 R 也在变，也就是说除了激励源外，电路中的电阻参数也在变，仔细观察电阻 r 与电流源 I_S 是串联，其变化不影响 I，但 R 变化时，必然导致其上电压变化，因此可将其看做成电压源 $R\cdot I$，这样支路电流 I 就与两个源有关系，一个电流源 I_S，一个电压源 $R\cdot I$，它们之间的线性关系可用叠加定理表示为

$$I=k_1 I_S+k_2 RI$$

由已知条件得

$$\begin{cases}5=k_1\times 20+k_2\times 2\times 5\\ 2=k_1\times 10+k_2\times 3\times 2\end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases}k_1=0.5\\ k_2=-0.5\end{cases}$$

故

$$I=0.5\times 15+(-0.5)\times 4\times I$$

得

$$I=2.5\text{A}$$

评注 此例中，读者知道 I 与激励源成线性关系，但写成 $I=k_1 I_S+k_2 R$，就是错误

的，叠加定理中一定是激励与响应之间呈线性关系。另外，电阻 r 与电流源串联等效的特点没有想到。

解法2 此电路从 R 往左看，其开路电压与 I_S 成比例关系，记作 $U_{oc}=kI_S$。而除源电阻是电流源 I_S 断开只与网络 N 有关的电阻，网络 N 不变，此电阻记为 R_0，则 R 左边一端口戴维南等效电路如图 3-22(b)所示，电路中电流 I 表示为

$$I=\frac{kI_S}{R_0+R}$$

由已知条件得

$$\begin{cases}5=\dfrac{k\cdot 20}{R_0+2}\\[2ex]2=\dfrac{k\cdot 10}{R_0+3}\end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases}k=1\\[1ex]R_0=2\end{cases}$$

故
$$I=\frac{1\times 15}{2+4}=2.5\ \text{A}$$

解法3 网络 N 仅由线性电阻组成，可将其等效为最简 T 形网络，如图 3-22(c)所示。由图 3-22(c)可知

$$I=\frac{R_3}{R_2+R_3+R}I_S$$

由已知条件得

$$\begin{cases}5=\dfrac{R_3}{R_2+R_3+2}\times 20\\[2ex]2=\dfrac{R_3}{R_2+R_3+3}\times 10\end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases}R_2=1\ \Omega\\[1ex]R_3=1\ \Omega\end{cases}$$

故
$$I=\frac{1}{1+1+4}\times 15=2.5\ \text{A}$$

评注 解法3中看得很清楚，与 I_S 串联的电阻对 I 没有影响。电路分析要特别注意电源等效变换中与电流源串联电阻的处理。

例 3-23 图 3-23(a)所示电路中 N_R 为纯电阻网络，已知 $u_{S1}=20$ V，$R_1=1\ \Omega$，$R_2=2\ \Omega$，$R_3=3\ \Omega$。当 u_{S1} 单独作用时测得 $u_1=9$ V，$u_2=4$ V；u_{S1} 和 u_{S2} 共同作用时，测得 $u_3=-30$ V。试求 u_{S2}。

解法1 应用叠加与互易定理

当 u_{S1} 单独作用时，其电路如图 3-23(b)，据此有

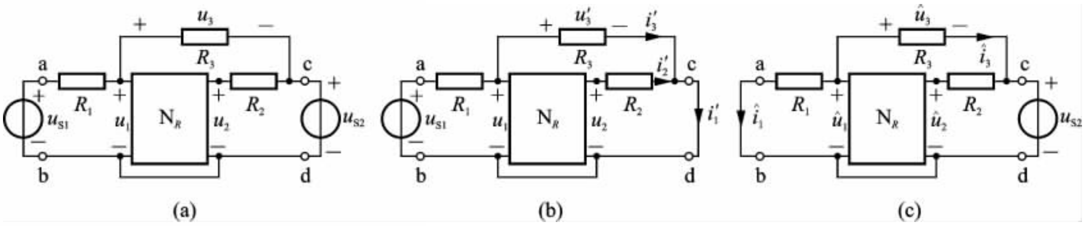

图 3-23

$$i_2'=\frac{u_2}{R_2}=\frac{4}{2}=2\ \text{A}$$

$$u_3'=u_1=9\ \text{V}$$

$$i_3'=\frac{u_3'}{R_3}=\frac{9}{3}=3\ \text{A}$$

$$i_1'=i_2'+i_3'=2+3=5\ \text{A}$$

当 $u_{S2}=u_{S1}=20\ \text{V}$ 单独作用时,由互易性知

$$i_{ab}=i_1'=5\ \text{A}$$

$$u_1''=R_1 i_{ab}=5\times 1=5\ \text{V}$$

$$u_3''=u_1''-u_{S2}=5-20=-15\ \text{V}$$

由齐性原理知

$$\frac{20}{u_{S2}}=\frac{u_3''}{u_3-u_3'}=\frac{-15}{-30-9}=\frac{5}{13}$$

所以

$$u_{S2}=52\ \text{V}$$

解法 2 应用叠加定理和特勒根定理

当 u_{S2} 单独作用时,其电路如图 3-23(c),由题意有

$$\hat{u}_3=-30-u_1=-30-9=-39\ \text{V}$$

$$\hat{u}_1=u_{S2}+\hat{u}_3=u_{S2}-39$$

$$\hat{i}_1=\hat{u}_1$$

$$\hat{i}_3=\frac{\hat{u}_3}{3}=-13\ \text{A}$$

据特勒根定理,由图 3-23(b)和图 3-23(c)知

$$u_{S1}\hat{i}_1+u_3'\hat{i}_3+u_{cd}\hat{i}_{cd}=\hat{u}_{ab}i_{ab}+\hat{u}_3 i_3'+u_{S2}i_1'$$

由于

$$u_{cd}=0$$

$$\hat{u}_{ab}=0$$

代入数值有

$$20(u_{S2}-39)+9\times(-13)=-39\times 3+5u_{S2}$$

所以

$$u_{S2} = 52\ \text{V}$$

例 3-24 图 3-24(a)所示是由线性电阻组成的无限伸展的网络，其中每个电阻均为 R，求节点 a、b 间的等效电阻。

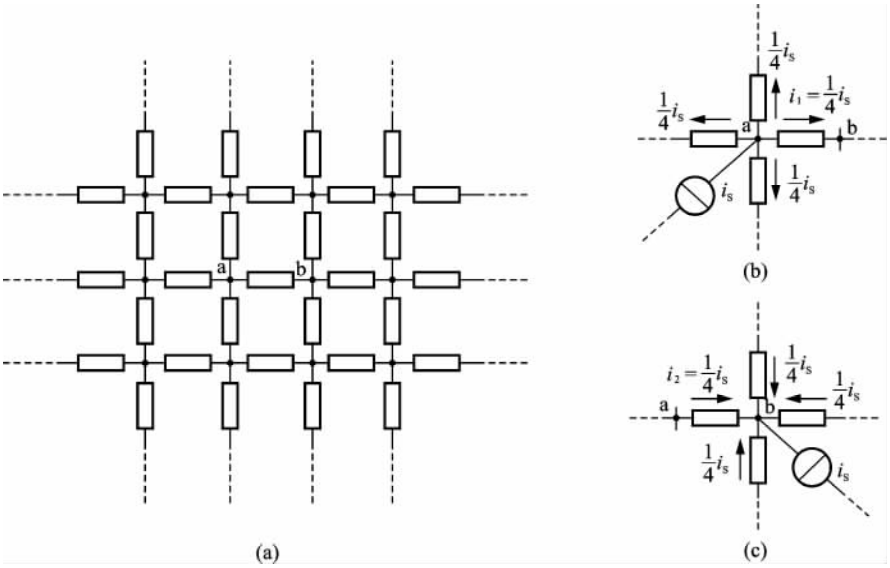

图 3-24

解 将无限伸展网络看作是以 a、b 为端子的一端口网络。若在 a、b 端加一电流源 i_S，并计算出 a、b 端的电压 u_{ab}，则根据定义，等效电阻

$$R_{ab} = \frac{u_{ab}}{i_S}$$

在 a、b 端加了电流源 i_S 后，还无法求出 u_{ab}。如将电流源分解为两个(参见电流源转移原理)，其中一个电流 i_S 流入节点 a，而在无限远处收集电流，如图 3-24(b)所示；另一电流源 i_S 由节点 b 流出，流向无限远处，如图 3-24(c)所示。

由图 3-24(b)可见，由于网络结构对称(因网络无限伸展)，所以流经与节点 a 相连的 4 个电阻中电流相等，方向如图 3-24(b)所示，可得流过 a、b 间的电流 $i_1=\dfrac{1}{4}i_S$；同理，由图 3-24(c)可得流经 a、b 间的电流 $i_2=\dfrac{1}{4}i_S$。根据叠加定理，流经 a、b 的总电流

$$i_{ab} = i_1 + i_2 = \frac{1}{2}i_S$$

故得 a、b 间的电压

$$u_{ab} = \frac{1}{2}Ri_S$$

可得 a、b 间的等效电阻

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i_S}=\frac{\frac{1}{2}Ri_S}{i_S}=\frac{1}{2}R$$

6. 系统法一端口等效

例 3-25 试求图 3-25(a)、(b)所示一端口网络的戴维南或诺顿等效电路。

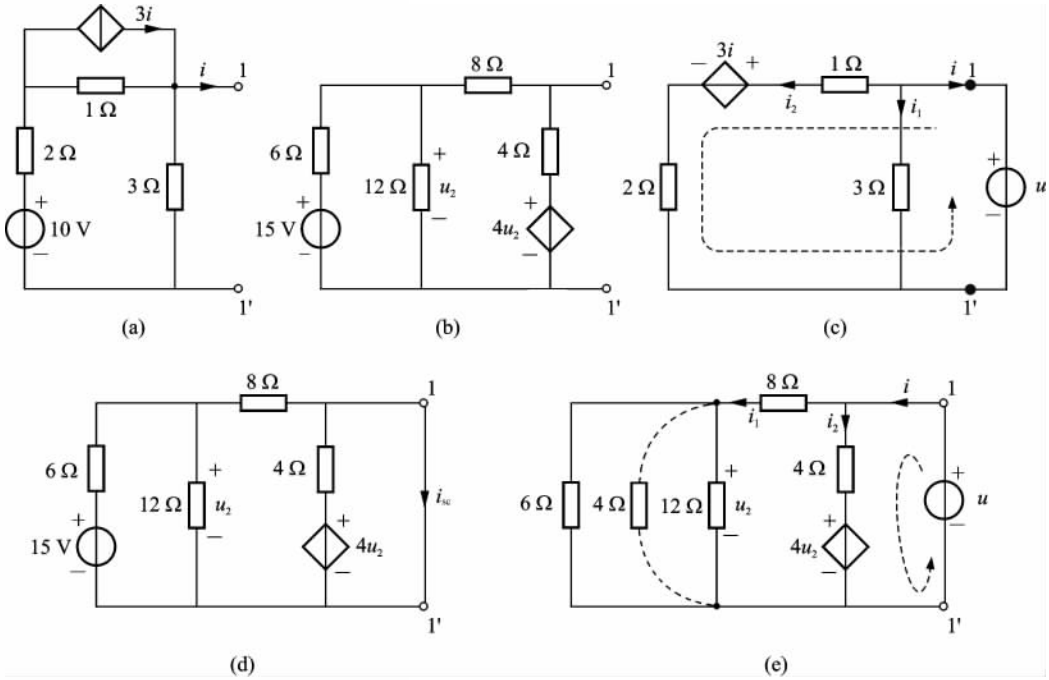

图 3-25

解 对于图 3-25(a)所示电路，开路时 $i=0$，所以受控电流源 $3i=0$，受控电流源所在处开路，可求得开路电压

$$u_{oc}=\frac{10}{2+1+3}\times 3=5\ \text{V}$$

求输入电阻时，外加电压源 u，10 V 电压源置零，有伴受控电流源等效变换为受控电压源，并设两支路的电流分别为 i_1、i_2，如图 3-25(c)所示，则有

$$i=-(i_1+i_2)=-\left(\frac{u}{3}+\frac{u-3i}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}u-i\right)$$

$$-\frac{2}{3}u=0i$$

所以
$$R_i=\frac{u}{-i}=0\ \Omega$$

图 3-25(a)所示电路的戴维南等效电路是一个 5 V 理想电压源，无诺顿等效电路。

此例在图 3-25(c)中，保留 10 V 电压源不动，取节点 1′为参考节点，则节点 1 的节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)u=\frac{10+3i}{3}-i$$

解得 $$u=5\ \mathrm{V}$$

结果相同，此为“一步法”求解戴维南或诺顿等效电路。

对图 3-25(b)所示电路，求开路电压，选 1′为参考点，则 $u_{oc}=u_1$，节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)u_2-\frac{1}{8}u_{oc}=\frac{15}{6}$$

即 $$-\frac{1}{8}u_2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)u_{oc}=\frac{4u_2}{4}$$

整理为 $$\frac{9}{24}u_2-\frac{1}{8}u_{oc}=\frac{15}{6} \qquad ①$$

$$-\frac{9}{8}u_2+\frac{3}{8}u_{oc}=0 \qquad ②$$

式①×(−3)得 $$-\frac{9}{8}u_2+\frac{3}{8}u_{oc}=-\frac{15}{2} \qquad ③$$

式③与式②矛盾，无法求得开路电压，到此并不能说此题无解。下面转而求 1-1′端口的短路电流 i_{sc}，如图 3-25(d)所示。选 1′为参考点，由于短路，$u_1=0$，节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)u_2-\frac{1}{8}\times 0=\frac{15}{6}$$

解得 $$u_2=\frac{20}{3}\ \mathrm{V}$$

所以 $$i_{sc}=\frac{u_2}{8}+\frac{4u_2}{4}=\frac{1}{8}\times\frac{20}{3}+\frac{20}{3}=7.5\ \mathrm{A}$$

再求除源电阻(电导)。将独立源置零，6 Ω 与 12 Ω 并联后为 4 Ω，用虚线所接 4 Ω 表示，外加电压 u，如图 3-25(e)所示，则

$$i=i_1+i_2=\frac{u}{8+4}+\frac{u-4u_2}{4} \qquad ④$$

$$u_2=\frac{u}{8+4}\times 4$$

代入式④得

$$i=\frac{u}{12}+\frac{1}{4}u-\frac{u}{12}\times 4=0u$$

所以 $$R_i=\frac{u}{i}=\frac{1}{0}\to\infty$$

$$G_i=\frac{i}{u}=0$$

由此可得图 3-25(b)所示电路的等效电路是一个 7.5 A 理想电流源，无戴维南等效电路。

同理，在图 3-25(e)中保留与 6 Ω 电阻电联的 15 V 电压源不动，列出节点电压方程为

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)u_2-\frac{1}{8}u=\frac{15}{6}\\ -\frac{1}{8}u_2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)u=i+\frac{4u_2}{4}\end{cases}$$

整理后解得 $i=-7.5\ \mathrm{A}$

即 $i_{sc}=-i=7.5\ \mathrm{A}$

结果相同。所以,"一步法"是求解含源一端口网络伏安关系的直接方法。

注意 有时还会遇到含源一端口网络的等效电路为一个纯电阻(电导)的情况(即开路电压为零或短路电流为零)。此时要注意当开路电压为零时,不能用开路短路法求输入电阻。

例 3-26 电路如图 3-26(a)所示,试求 R 为何值时可以获得最大功率,该最大功率值为多少?

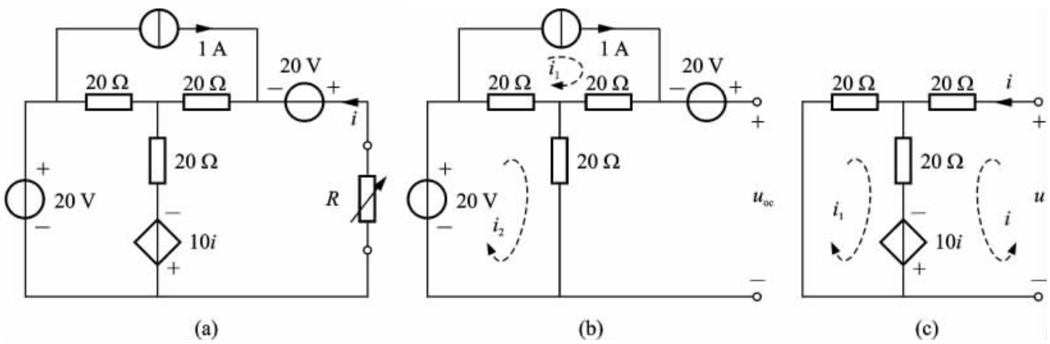

图 3-26

解 要求 R 为何值时可以获得最大功率,实际即求移去 R 后的无源一端口网络的输入电阻 R_i,要求最大功率是多少,先求出开路电压即可。

先求开路电压。因开路 $i=0$,受控电压源等于零。用回路分析法,设回路电流如图 3-26(b)所示,回路方程为

$$i_1 = 1\ \mathrm{A}$$

$$40i_2 - 20i_1 = 20$$

可得 $i_2 = 1\ \mathrm{A}$

所以 $u_{oc} = 20 + 20 \times i_1 + 20 \times i_2 = 60\ \mathrm{V}$

再求输入电阻。将独立源置零,外加电压 u,由图 3-26(c)列出网孔方程为

$$40i - 10i + 20i_1 = u$$

$$20i - 10i + 40i_1 = 0$$

整理得 $30i + 20i_1 = u$

$$10i + 40i_1 = 0$$

消去 i_1 得 $50i = 2u$

$$R_i = \frac{u}{i} = 25\ \Omega$$

所以,当 $R=R_i=25\ \Omega$ 时可获得最大功率,最大功率 P_{max} 为

$$P_{max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_i} = \frac{60^2}{4 \times 25} = 36\ \mathrm{W}$$

例 3-27 图 3-27(a)所示电路，已知二端口网络 N 的 G 参数矩阵 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}10.5 & -10\\ -10 & 11.25\end{bmatrix}$S。求：(1)1-1′端向左部分戴维南等效电路；(2)负载 R_L 消耗的功率；(3)10 V 电压源发出的功率。

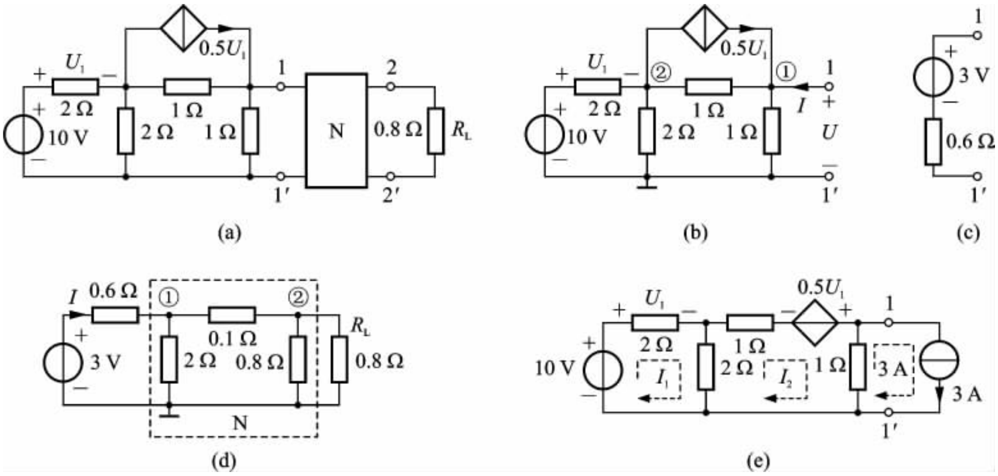

图 3-27

解 (1) 重新画出 1-1′端向左部分电路如图 3-27(b)所示，选择好参考节点，标出独立节点号，运用节点分析法列出节点方程和辅助关系方程

$$\begin{cases}(1+1)U_{n1}-U_{n2}=0.5U_1\\ -U_{n1}+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1\right)U_{n2}=\dfrac{10}{2}-0.5U_1\\ U_1=10-U_{n2}\end{cases}$$

联立求解得
$$U_{n1}=U_{oc}=3\ \text{V}$$

在图 3-27(b)中，设 10 V 电压源为零，其 1-1′端的除源电阻 R_i 为

$$R_i=\frac{U}{I}=0.6\ \Omega$$

得到 1-1′端向左部分的戴维南等效电路如图 3-27(c)所示。

(2) 由已知条件知二端口网络 N 为互易网络，应用 Π 形等效，计算出相关的参数，得到相应的等效电路如图 3-27(d)所示，运用节点法则列出方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{2}+10\right)U_{n1}-10U_{n2}=\dfrac{3}{0.6}\\ -10U_{n1}+\left(10+\dfrac{1}{0.8}+\dfrac{1}{0.8}\right)U_{n2}=0\end{cases}$$

联立解得

$$U_{n2}=\frac{24}{25}\ \text{V},\quad U_{n1}=\frac{6}{5}\ \text{V}$$

负载 R_L 消耗的功率

$$P_{RL}=\frac{U_{n2}^2}{R_L}=\frac{\left(\frac{24}{25}\right)^2}{0.8}=1.152\ \text{W}$$

(3) 在图 3-27(d)中求出电源支路电流 I 为

$$I=\frac{3-U_{n1}}{0.6}=\frac{3-\frac{6}{5}}{0.6}=3\ \text{A}$$

将有伴受控电流源等效成有伴受控电压源,并对 1-1′端应用替代定理化简 1-1′端电路,其等效电路如图 3-27(e)所示,选择应用网孔法得

$$I_1=4.6\ \text{A}$$

所以电压源发出的功率为

$$P=10I_1=46\ \text{W}$$

3.4 习题精解

题 3-1 用支路分析法求图 3-28(a)所示电路中的支路电流 i_5。

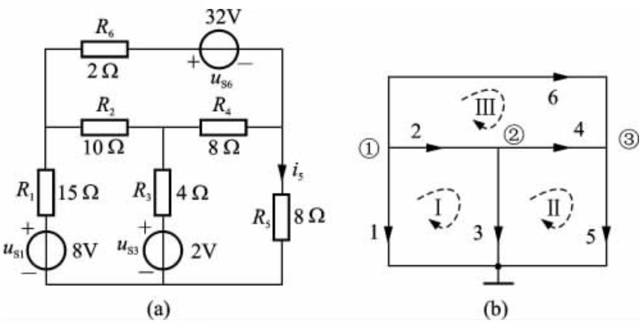

图 3-28

解 选参考点、独立节点和独立回路如图 3-28(b)所示(图中数字为支路编号、带圈数字为节点编号)。

对节点① $i_1+i_2+i_6=0$

② $-i_2+i_3+i_4=0$

③ $-i_4+i_5-i_6=0$

对回路Ⅰ $-15i_1+10i_2+4i_3=-2+8=6$

Ⅱ $-4i_3+8i_4+8i_5=2$

Ⅲ $-10i_2-8i_4+2i_6=-32$

联立求解得 $i_5=-1$ A(另 $i_1=0.75$ A,$i_2=1.625$ A,$i_3=0.25$ A,$i_4=1.375$ A,$i_6=-2.375$ A)

题 3-2 用网孔分析法求图 3-29 所示电路的网孔电流。

解 取网孔电流 i_1、i_2、i_3，并设受控源的端电压为 u'，则网孔电流方程为

$$i_1 = 15\ \text{A} \quad ①$$

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \quad ②$$

$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = u' \quad ③$$

$$u = 3\times(i_3 - i_2) \quad ④$$

$$i_3 - i_1 = \frac{u}{9} \quad ⑤$$

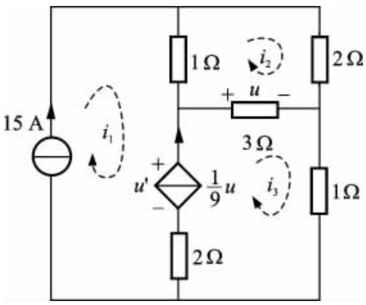

图 3-29

由于网孔 1 未列方程，式③在求网孔电流时用不到，而求 u'时要用，但不能列写成$-2i_1-3i_2+6i_3=0$。

联立求解式①、②、④、⑤可得

$$i_1 = 15\ \text{A},\quad i_2 = 11\ \text{A},\quad i_3 = 17\ \text{A}$$

题 3-3 电路如图 3-30 所示，用回路分析法求 4 Ω 电阻的功率。

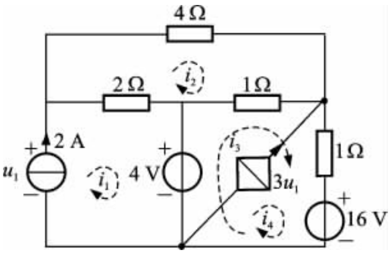

图 3-30

解 选回路电流如图所示，则有

$$i_1 = 2$$

$$-2i_1 + 7i_2 - i_3 = 0$$

$$-i_2 + 2i_3 + i_4 = -16 + 4$$

$$i_4 = 3u_1$$

$$u_1 = 2(i_1 - i_2) + 4$$

联立求解可得 $i_2=-4$ A （另 $i_3=-32$ A，$i_4=48$ A）

所以 $P_{4\Omega吸}=(-4)^2\times4=64$ W

题 3-4 已知某电路求解网孔电流的方程为

$$\begin{cases} 3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1 \\ -i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \\ -2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6 \end{cases}$$

试画出该电路的结构图。（网孔电流量纲为 A，电压源量纲为 V）

解 由已知电路的网孔电流方程求电路结构属于网络拓扑范畴。要画出最简电路（因电路不是唯一的），可根据已知方程中自电阻、互电阻和电压源电位升的概念来试画，画出后再列出方程与原方程对照，一致者就满足要求。具体画时先由第一个方程知，网孔 1 的自电阻为 3 Ω，与网孔 2 的互电阻为 1 Ω，与网孔 3 的互电阻为 2 Ω，电位升为 1 V。因互电阻之和也是 3 Ω，等于自电阻，所以 1 V 电压源支路电阻为零，可得网孔 1。再由第二个方程知，网孔 2 与网孔 1 的互电阻为 1 Ω，与网孔 3 的互电阻为 3 Ω，而自电阻为 6 Ω，所以不是公共支路的电阻应为自电阻 6 Ω 减去互电阻(1+3) Ω，即为 2 Ω，再由电位升为 0 V，可得网孔 2。类推可画出网孔 3。所得电路的结构图如图 3-31 所示。由图示电路列出方程与原方程一致，满足要求。

题 3-5 求图 3-32 所示电路中 3 kΩ 电阻上的电压 u。

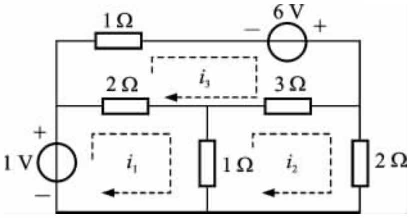

图 3-31

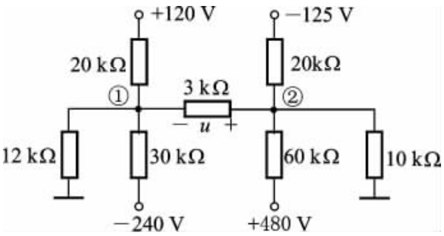

图 3-32

解 该电路中电压源用电位表示,即端点上所标的"+""−"电压值,是表示该点与接地端的电位差。用节点法可得节点电压方程为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{3}\right)u_1-\dfrac{1}{3}u_2=\dfrac{120}{20}-\dfrac{240}{30}\\ -\dfrac{1}{3}u_1+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{10}\right)u_2=\dfrac{480}{60}-\dfrac{125}{20}\end{cases}$$

可解得 $u_1=-3\ \text{V},\quad u_2=1.5\ \text{V}$

所以 $u=u_2-u_1=1.5-(-3)=4.5\ \text{V}$

注意 方程中分数分母的量纲要一致。

题 3-6 求图 3-33 所示电路中的 u。

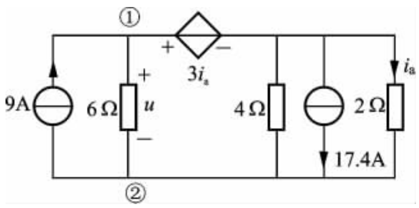

图 3-33

解法 1 因电路中含理想受控电压源,可取其"−"极为参考节点,则节点电压方程为

$$u_1=3i_a$$

$$-\frac{1}{6}u_1+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)u_2=17.4-9$$

$$i_a=-\frac{u_2}{2}$$

联立求解可得

$$u_1=-10.8\ \text{V},\quad u_2=7.2\ \text{V},\quad i_a=-3.6\ \text{A}$$

所以

$$u=u_1-u_2=-10.8-7.2=-18\ \text{V}$$

解法 2 由图 3-33 可知 $i_a=\dfrac{u_1-3i_a}{2}$

得到 $i_a=0.2u_1$

对节点②列 KCL 方程

$$-9+\frac{u}{6}+\frac{2i_a}{4}+17.4+i_a=0$$

将 $i_a=0.2u$ 代入上式,可得

$$u=-18\ \text{V}$$

题 3-7 N_A 与 N_B 均为含源线性电阻网络,如图 3-34(a)所示,用多种方法计算 3 Ω

电阻的端电压 U。

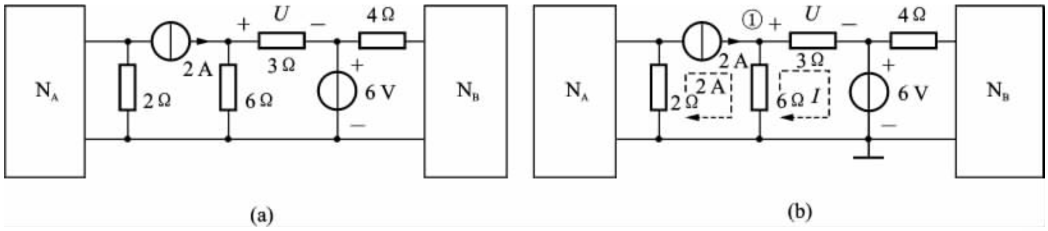

图 3-34

解法 1 节点法 选择参考节点如图 3-34(b)所示，列出节点电压方程

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)U_1-\frac{1}{3}\times 6=2$$

解出

$$U_1=8\ \text{V}$$

所以

$$U=U_1-6=2\ \text{V}$$

解法 2 网孔法 选择网孔电流如图 3-34(b)中所示，列出网孔方程

$$(3+6)I-6\times 2=-6$$

解出

$$I=\frac{2}{3}\text{A}$$

所以

$$U=3I=2\ \text{V}$$

注解 由二端网络的等效概念不难理解，含源线性电阻网络 N_A、N_B 的作用其端口特性就体现在 2 A 电流源和 6 V 电压源上。本题还有其他解法，如叠加法、戴维南定理等，读者不妨一试。

题 3-8 求图 3-35 所示电路的电压比值 u_o/u_i。

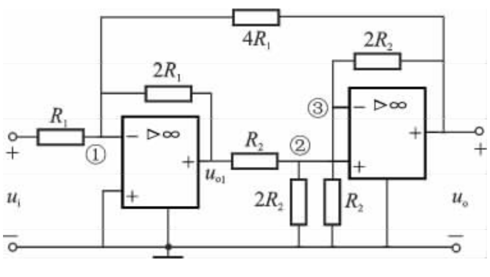

图 3-35

解 对节点①、②、③列节点电压方程

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{4R_1}\right)u_1-\frac{1}{2R_1}u_{o1}-\frac{1}{4R_1}u_o=\frac{u_i}{R_1} \qquad ①$$

$$-\frac{1}{R_2}u_{o1}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{2R_2}\right)u_2=0 \quad ②$$

$$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{2R_2}\right)u_3-\frac{1}{2R_2}u_o=0 \quad ③$$

$$u_1=0 \quad ④$$

$$u_2=u_3 \quad ⑤$$

式⑤代入式③得

$$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{2R_2}\right)u_2=\frac{1}{2R_2}u_o \quad ⑥$$

式⑥代入式②得

$$\frac{1}{R_2}u_{o1}=\frac{1}{2R_2}u_o$$

$$u_{o1}=\frac{1}{2}u_o \quad ⑦$$

式④和式⑦代入式①得

$$-\frac{1}{2R_1}\times\frac{1}{2}u_o-\frac{1}{4R_1}u_o=\frac{u_i}{R_1}$$

$$-\frac{1}{2}u_o=u_i$$

所以 $$\frac{u_o}{u_i}=-2$$

题 3-9 根据所学知识,设计一个 4 输入单输出的数模转换器(DAC),即输出电压与输入电压的关系为 $u_o=2^0u_{i1}+2^1u_{i2}+2^2u_{i3}+2^3u_{i4}$。

解 据题意电路可设计成如图 3-36 所示。

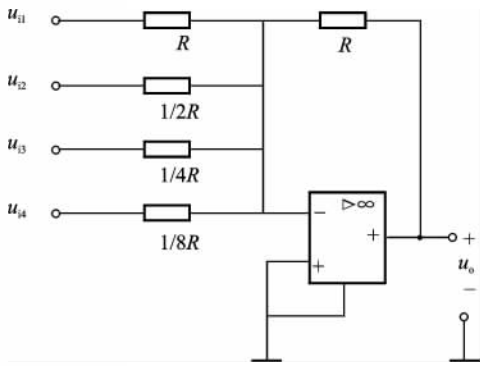

图 3-36

验证 利用理想运算放大器的“虚断”、“虚短”概念列出方程为

$$\frac{u_{i1}}{R}+\frac{u_{i2}}{\frac{1}{2}R}+\frac{u_{i3}}{\frac{1}{4}R}+\frac{u_{i4}}{\frac{1}{8}R}=-\frac{u_o}{R}$$

整理得

$$u_o = -(2^0 u_{i1} + 2^1 u_{i2} + 2^2 u_{i3} + 2^3 u_{i4})$$

式中负号表示输出电压与输入电压极性相反，只要适当选取输入电压的极性，即可满足题意所要求关系式。

题 3-10 图 3-37 中 N 为含源线性电阻网络。当 $I_{S1}=0, I_{S2}=0$ 时，$U_X=-20$ V；当 $I_{S1}=8$ A，$I_{S2}=12$ A 时，$U_X=80$ V；当 $I_{S1}=-8$ A，$I_{S2}=4$ A 时，$U_X=0$ V。求 $I_{S1}=I_{S2}=20$ A 时，U_X 是多少。

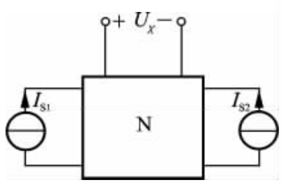

图 3-37

解 设 k_1、k_2 为电流源 I_{S1}、I_{S2} 等于 1 A 单独作用电路时，响应端口产生的电压分量；k_3 为网络 N 内部电源单独作用电路时，响应端口产生的电压分量。则电源共同作用时，响应端口的电压为

$$U_X = k_1 I_{S1} + k_2 I_{S2} + k_3$$

代入已知条件

$$k_1 \times 0 + k_2 \times 0 + k_3 = -20$$
$$k_1 \times 8 + k_2 \times 12 + k_3 = 80$$
$$-k_1 \times 8 + k_2 \times 4 + k_3 = 0$$

可解得

$$k_1 = 1.25$$
$$k_2 = 7.5$$
$$k_3 = -20$$

当 $I_{S1}=I_{S2}=20$ A 时

$$U_X = 1.25 \times 20 + 7.5 \times 20 - 20 = 155 \text{ V}$$

题 3-11 电路如图 3-38(a)所示，当开关 S 在位置 1 时，毫安表的读数为 40 mA；当开关 S 在位置 2 时，毫安表的读数为 −60 mA。求开关 S 在位置 3 时毫安表的读数。

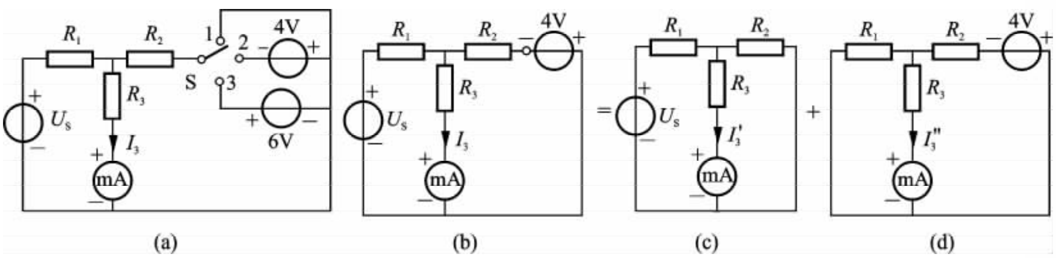

图 3-38

解法 1 可设电源共同作用时毫安表的读数为

$$I_3 = k_1 U_S + k_2 U_{右}$$

代入已知条件

$$k_1 U_S + k_2 \times 0 = 40$$
$$k_1 U_S + k_2(-4) = -60$$

可解得

$$k_1 U_S = 40$$
$$k_2 = 25$$

当 S 打在位置 3 时

$$I_3 = k_1 U_S + k_2 \times 6 = 40 + 25 \times 6 = 190 \text{ mA}$$

用求系数的方法，有时比较方便，但学会用叠加定理求出各电源单独作用或分组作用的分响应，再求总响应，对于比较复杂的电路是很有用的。

解法2　当开关S打在位置1时，实际为U_S单独作用，其响应$I'_3=40\ \text{mA}$，如图3-38(c)所示。

当开关S打在位置2时，U_S与4 V电压源共同作用，如图3-38(b)所示。由叠加定理可分成图3-38(c)加图3-38(d)

由已知条件有
$$-60=I'_3+I''_3$$
求得
$$I''_3=-100\ \text{mA}$$
I''_3为4 V电压源单独作用的响应。

根据齐性原理，当6 V电压源单独作用时(6 V和4 V极性相反)响应应为
$$\frac{-100}{-4}=\frac{I'''_3}{6}$$
所以
$$I'''_3=150\ \text{mA}$$
当U_S和6 V电压源共同作用时
$$I_3=I'_3+I'''_3=40+150=190\ \text{mA}$$

题3-12　求图3-39(a)所示电路a、b端的戴维南等效电路。

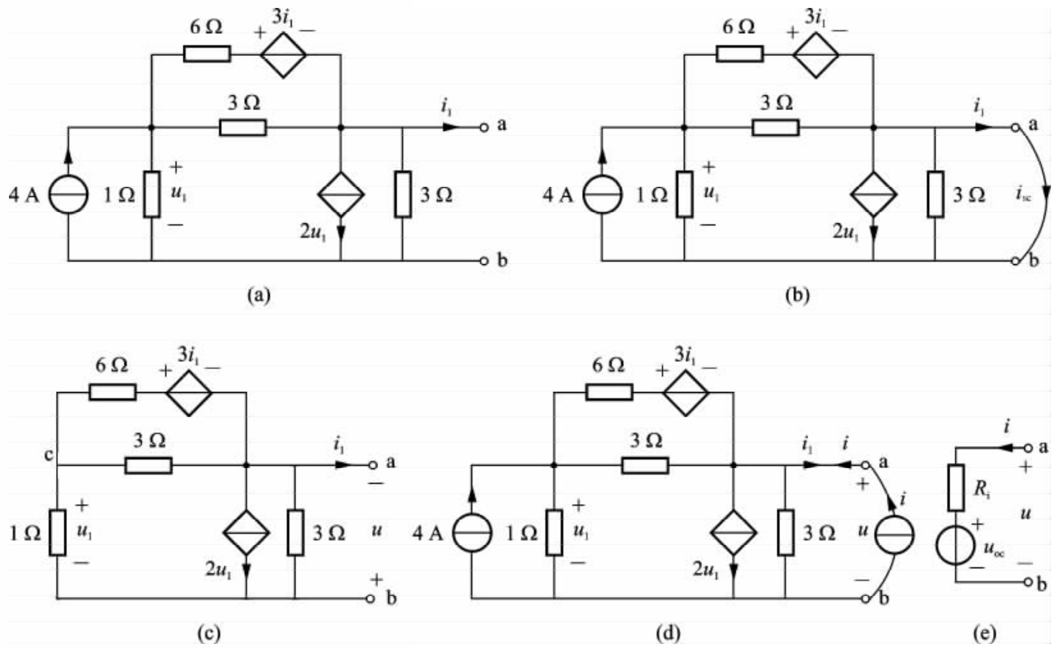

图　3-39

解　先求开路电压$u_{oc}=u_{ab}$，因a、b端开路，$i_1=0$，所以受控电压源$3i_1=0$。用节点法，选b为参考点，则
$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_a=4$$

$$-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)u_a=-2u_1$$

化简得 $\quad 1.5u_1-0.5u_a=4$

$$1.5u_1+\frac{5}{6}u_a=0$$

可解得 $\quad u_a=-3\ \text{V}$

所以 $\quad u_{oc}=-3\ \text{V}$

再求除源电阻 R_i，分别用几种方法求。

(1) 开路短路法。将 a、b 端短接，设电流为 i_{sc}，如图 3-39(b)所示，由图 3-39(b)可见 $i_1=i_{sc}$。对节点 a

$$\frac{u_1-3i_{sc}}{6}+\frac{u_1}{3}=2u_1+i_{sc}$$

对节点 b 有 $\quad \frac{u_1}{1}+2u_1+i_{sc}=4$

化简得 $\quad u_1+i_{sc}=0$

$$3u_1+i_{sc}=4$$

可解得 $\quad i_{sc}=-2\ \text{A}$

所以 $\quad R_i=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=\frac{-3}{-2}=1.5\ \Omega$

(2) 输入法。独立源置零，电流源开路，在端口加电压 u，如图 3-39(c)所示。对节点 b 有

$$i_1=\frac{u}{3}-2u_1-\frac{u_1}{1}=\frac{u}{3}-3u_1 \qquad ①$$

对节点 c 有

$$\frac{u_1}{1}+\frac{u_1+u}{3}+\frac{u_1+u-3i_1}{6}=0 \qquad ②$$

由式②有 $\quad u_1=\frac{i_1-u}{3}$

代入式①，得

$$i_1=\frac{u}{3}-3\,\frac{i_1-u}{3}=\frac{u}{3}-i_1+u$$

$$2i_1=\frac{4}{3}u$$

所以 $\quad R_i=\frac{u}{i_1}=\frac{2\times 3}{4}=1.5\ \Omega$

注意　如果 a 端为电压 u 的“+”极，则 $R_i=\frac{u}{-i_1}$。

(3) 一步法。原电路不变，在端口加电流源 i（也可加电压源 u），端口电压为 u，如图 3-39(d)所示。写出端口的电压电流表达式，可同时求得开路电压 u_{oc}和除源电阻 R_i，其原理由图 3-39(e)可知，端口电压电流表达式为

$$u=u_{oc}+R_i i$$

由表达式可见,等式右边的常数项为开路电压,电流 i 前面的系数为 R_i。对图 3-39(d),选 b 点为参考点,列节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u=4+\frac{3i_1}{6}$$

$$-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)u=i-\frac{3i_1}{6}-2u_1$$

$$i_1=-i$$

化简可得 $$1.5u_1-0.5u=4-\frac{i}{2} \quad ③$$

$$1.5u_1+\frac{5}{6}u=1.5i \quad ④$$

式④－式③得 $$\frac{8}{6}u=-4+2i$$

即 $$u=-3+1.5i$$

所以可得 $$u_{oc}=-3\ \mathrm{V}$$

$$R_i=1.5\ \Omega$$

另外,也可对电路中受控电压源和受控电流源支路先进行等效变换,然后再求 u_{oc} 和 R_i,这样会简单些。但要注意,控制量不能随便变掉。

题 3-13 线性无源电阻网络 N_R 如图 3-40(a)所示。若 $U_S=100$ V,$U_2=20$ V,当电路改为图 3-40(b)时,求 I。

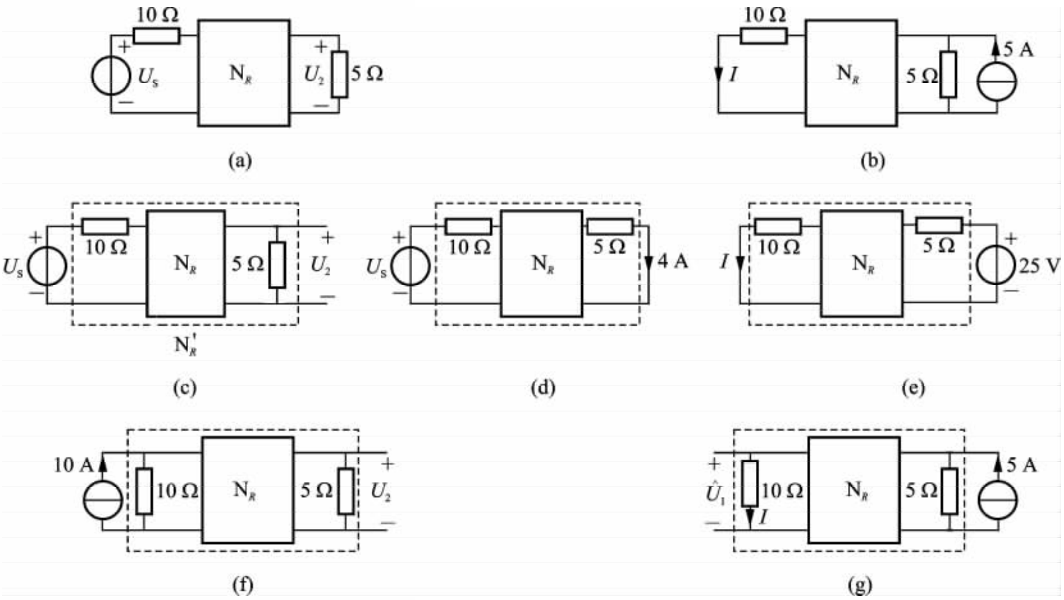

图 3-40

解法 1 将 10 Ω 和 5 Ω 电阻看成是电阻网络 N_R' 的一部分,如图 3-40(c)所示。直接用互易定理第三种形式,在图 3-40(c)中为电压源 U_S 激励,U_2 为开路电压,在图 3-40(b)

中为电流源激励，I 为短路电流。如果激励在数值上相等，则响应在数值也相等。所以有

$$100:20=5:I$$

得

$$I=\frac{20\times 5}{100}=1\ \text{A}$$

解法 2 将$\frac{U_2}{5}=\frac{20}{5}=4$ A 看成短路电流，如图 3-40(d)所示。将图 3-40(b)有伴电流源变换成有伴电压源，如图 3-40(e)所示。用互易定理第一种形式有

$$100:4=25:I$$

得

$$I=\frac{4\times 25}{100}=1\ \text{A}$$

解法 3 将入端有伴电压源变换成有伴电流源，如图 3-40(f)所示。将图 3-40(b)改画成图 3-40(g)所示。由互易定理第二种形式有

$$10:20=5:\hat{U}_1$$

得

$$\hat{U}_1=\frac{20\times 5}{10}=10\ \text{V}$$

所以

$$I=\frac{10}{10}=1\ \text{A}$$

题 3-14 图 3-41 所示电路中，N 为含独立源和电阻的网络。当端钮 a、b 短接时，电阻 R 中的电流 $I=I_1$；当端钮 a、b 开路时，电阻 R 中的电流 $I=I_2$；当端钮 a、b 间接电阻 R_L 时，R_L 获得最大功率。求当端钮 a、b 间接电阻 R_L 时，流过电阻 R 的电流 I。

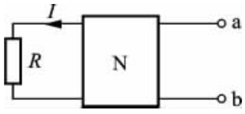

图 3-41

解 a、b 端电压为 U_{ab}，且视为电压源，则 R 支路电流 I 可看成是网络 N 内部独立源和 U_{ab}共同作用产生，由叠加定理设为

$$I=k_1+k_2U_{ab} \quad ①$$

则 a、b 短接时，$U_{ab}=0$，$I=I_1$，此时式①为

$$I_1=k_1 \quad ②$$

当 a、b 开路时，$U_{ab}=U_{oc}$，$I=I_2$，则式①为

$$I_2=k_1+k_2U_{oc} \quad ③$$

由式②和式③得

$$\begin{cases}k_1=I_1\\ k_2=\dfrac{I_2-I_1}{U_{oc}}\end{cases}$$

代入式①则有

$$I=I_1+\frac{I_2-I_1}{U_{oc}}U_{ab} \quad ④$$

由题意知，当 R_L 获得最大功率时有

$$U_{ab}=\frac{1}{2}U_{oc} \quad ⑤$$

式⑤代入式④有

$$I=I_1+\frac{I_2-I_1}{U_{oc}}\times\frac{1}{2}U_{oc}=\frac{1}{2}(I_1+I_2)$$

题 3-15 在图 3-42 所示电阻网络中,电压源电压 u_S 及电阻 R_2、R_3 的值可调,改变 u_S、R_2、R_3 的值,进行两次测量的数据如下:

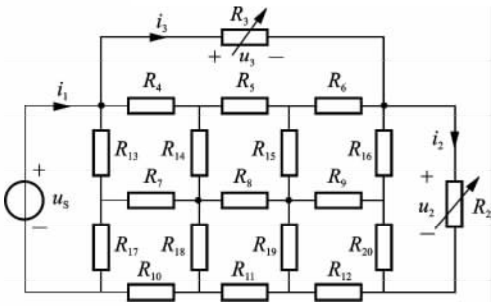

图 3-42

(1) 当 $u_S=3$ V,$R_2=20$ Ω,$R_3=5$ Ω 时,$i_1=1.2$ A,$u_2=2$ V,$i_3=0.2$ A;

(2) 当$\hat{u}_S=5$ V,$\hat{R}_2=10$ Ω 时,$\hat{R}_3=10$ Ω,$\hat{i}_1=2$ A,$\hat{u}_3=2$ V。求此时的$\hat{i}_2$。

解 由条件(1)可知

$$u_S=3\text{ V},\quad u_2=2\text{ V},\quad u_3=0.2\times5=1\text{ V}$$

$$i_1=1.2\text{ A},\quad i_2=\frac{2}{20}=0.1\text{ A},\quad i_3=0.2\text{ A}$$

由条件(2)可知

$$\hat{u}_S=5\text{ V},\quad \hat{u}_2=10\hat{i}_2,\quad \hat{u}_3=2\text{ V}$$

$$\hat{i}_1=2\text{ A},\quad \hat{i}_3=\frac{2}{10}=0.2\text{ A}$$

由特勒根定理有

$$u_S(-\hat{i}_1)+u_2\hat{i}_2+u_3\hat{i}_3+\sum_{k=4}^{20}u_k\hat{i}_k=0$$

$$\hat{u}_S(-i_1)+\hat{u}_2i_2+\hat{u}_3i_3+\sum_{k=4}^{20}\hat{u}_ki_k=0$$

因为 $$\sum_{k=4}^{20}\hat{u}_ki_k=\sum_{k=4}^{20}u_k\hat{i}_k$$

所以有

$$u_S(-\hat{i}_1)+u_2\hat{i}_2+u_3\hat{i}_3=\hat{u}_S(-i_1)+\hat{u}_2i_2+\hat{u}_3i_3$$

代入数据得

$$3\times(-2)+2\times\hat{i}_2+1\times0.2=5\times(-1.2)+10\hat{i}_2\times0.1+2\times0.2$$

所以 $$\hat{i}_2=0.2\text{ A}$$

3.5 阶段测试题

3-1 用支路分析法求图 3-43 所示电路的各支路电流。

3-2 分别用网孔分析法和回路分析法求图 3-44 所示电路中的电流 I。

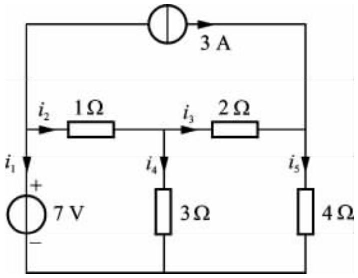

图 3-43

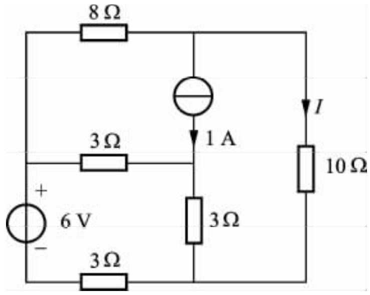

图 3-44

3-3 图 3-45 所示电路，要求仅列一个方程求电流 i。

3-4 图 3-46 所示电路中，已知 $U_{ab}=8$ V，$I_R=200$ mA，求 U_S 及 U_S 发出的功率。

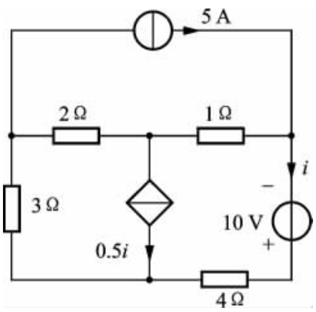

图 3-45

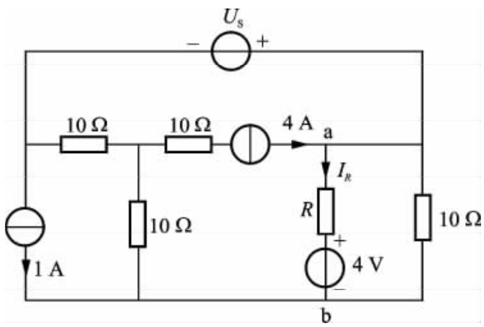

图 3-46

3-5 求图 3-47 所示电路的节点电压 u_1、u_2。

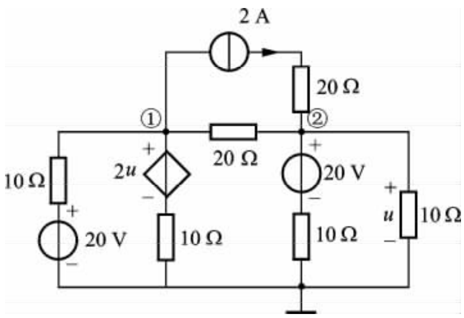

图 3-47

3-6 电路如图 3-48 所示，当 $u_i=3$ V 时，求负载电阻中的电流 i_o。

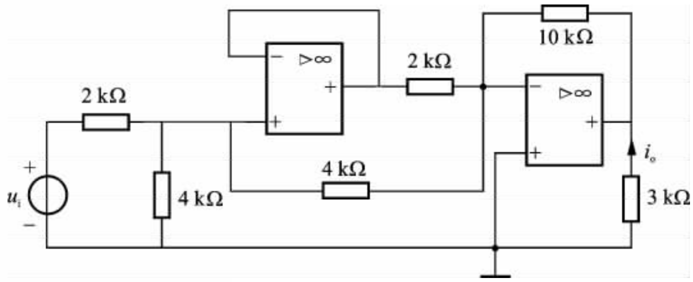

图 3-48

3-7 图 3-49 所示为实现 DAC 的一种电路。电路输出电压满足

$$u_o = 2^3 \times d_3 + 2^2 \times d_2 + 2^1 \times d_1 + 2^0 \times d_0$$

试求 R_1、R_f 应满足的关系，并求该图所示电路的输出电压 u_o。

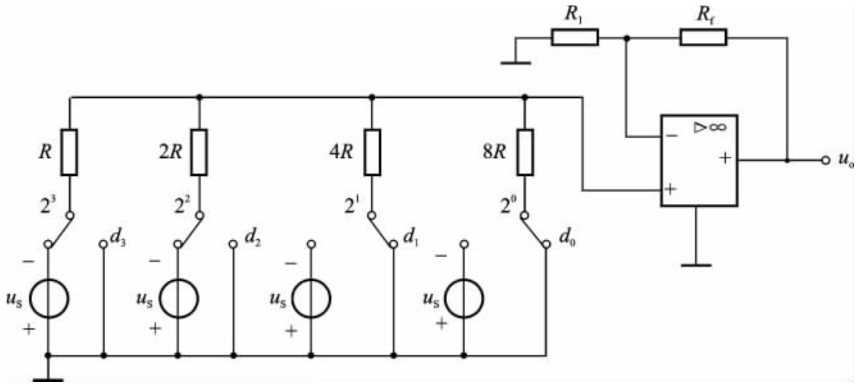

图 3-49

3-8 电路如图 3-50 所示，求该电路的电压增益比 u_o/u_i。

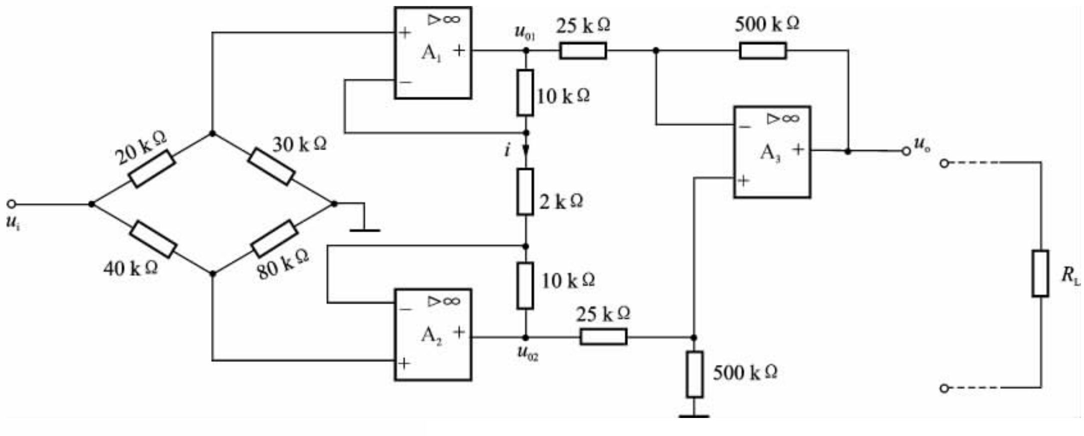

图 3-50

讨论：

（1）若在输出端接入负载电阻 $R_L=10\ \text{k}\Omega$，其他条件均不变，则电压增益 u_o/u_i 是否改变？

（2）运算放大器 A_3 是否实现减法器功能？

（3）列举应用理想运算放大器和电阻构成加法器、减法器的电路。

3-9 用叠加定理求图 3-51(a)、(b)电路中的 I_X 和 U_X。

3-10 电路如图 3-52 所示，N 为含独立源的线性电阻电路。如已知：当 $u_S=0$ 时，电流 $i=4$ mA；当 $u_S=10$ V 时，$i=-2$ mA。求当 $u_S=-15$ V 时的电流 i。

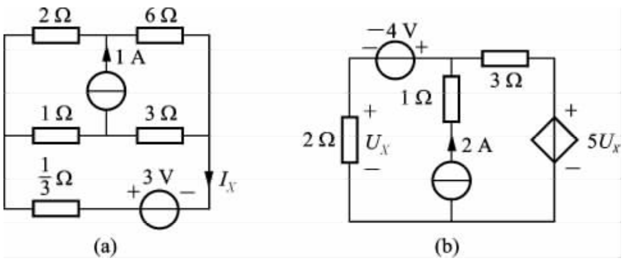

图 3-51

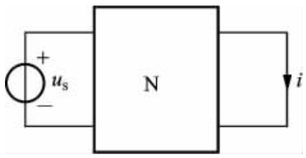

图 3-52

3-11 N_0 为无源线性电阻网络，工作状态如图 3-53(a)所示，现将 1-1′端口支路置换成图 3-53(b)所示，则 2-2′端口输出的电压 U_2 为：

A. 2V　　B. 2.4 V　　C. $\frac{16}{3}$ V　　D. 4 V

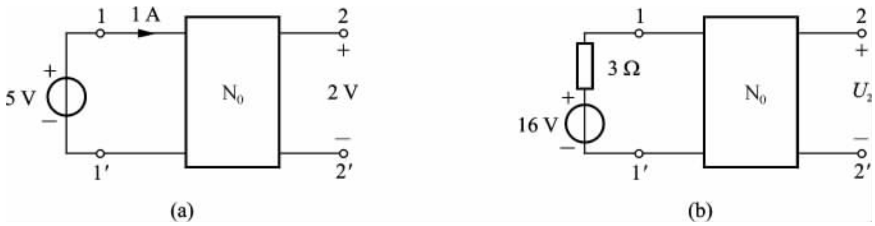

图 3-53

3-12 求图 3-54 所示电路 a、b 端的戴维南等效电路。

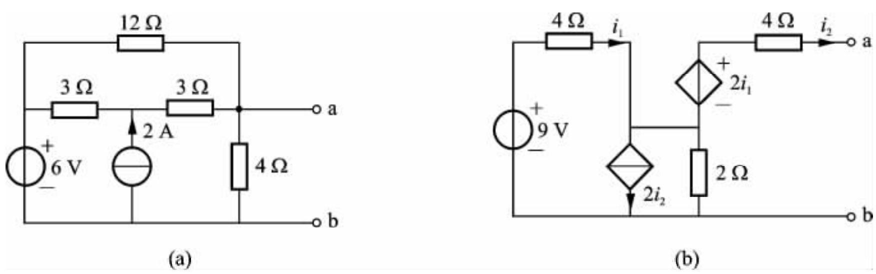

图 3-54

3-13　求图 3-55 所示电路 a、b 端的诺顿等效电路。

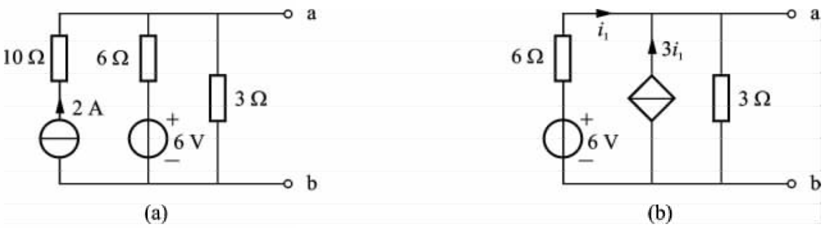

图　3-55

3-14　电路如图 3-56 所示，负载 R_L 为何值时能获得最大功率？最大功率是多少？

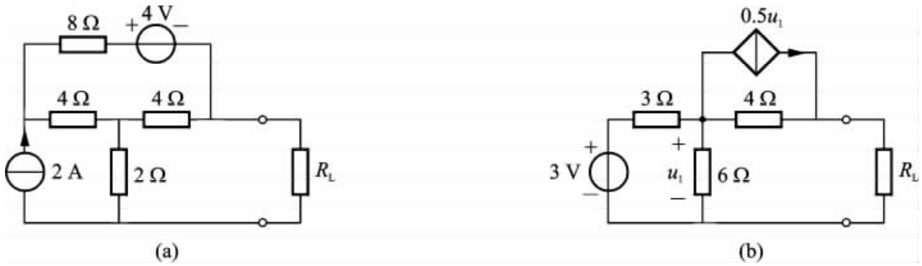

图　3-56

3-15　图 3-57 所示电路。

(1) 求当负载电阻 R_L 为何值时，它消耗的功率最大？

(2) 求出此时的最大功率 P_{max}。

3-16　图 3-58 所示电路。

(1) 写出二端口网络 N 的 T 参数矩阵；(2)当 $R_L=4\ \Omega$ 时，若二端口网络 N 的输入端与电源阻抗匹配，求 R_S；(3)当 $R_S=6\ \Omega$，R_L 可调时，则 R_L 为何值时获得最大功率 P_{max}。

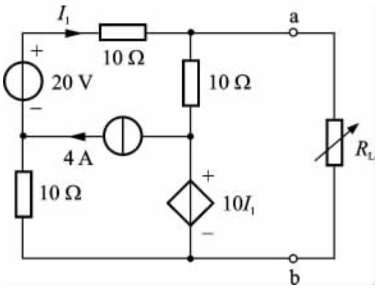

图　3-57

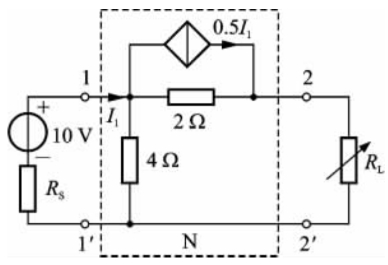

图　3-58

3-17　图 3-59(a)、(b)所示电路中，N 为同一线性无源电阻网络。在图 3-59(b)电路中，当

(1) $R=210\ \Omega$ 时，求电流 i_1；

(2) R 为何值时,其可获得最大功率?并求此时的最大功率。

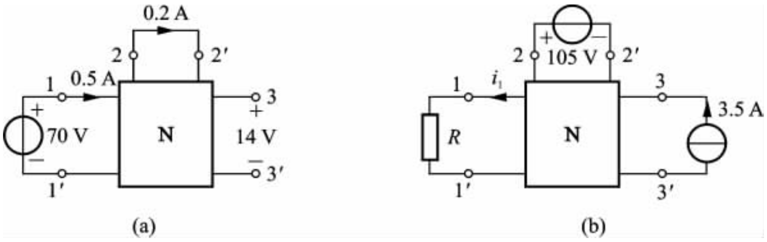

图 3-59

3.6 阶段测试题答案

3-1 $i_1=-4$ A, $i_2=1$ A, $i_3=-1$ A, $i_4=2$ A, $i_5=2$ A

3-2 -0.25 A

3-3 2 A

3-4 8 V, -24 W

3-5 $u_1=20$ V, $u_2=20$ V

3-6 3.75 mA

3-7 $\frac{u_S}{15}\left(1+\frac{R_f}{R_1}\right)=1$, $u_o=9$ V

3-8 $\frac{u_o}{u_i}=\frac{44}{3}$

3-9 1 A, -4 V

3-10 13 mA

3-11 D

3-12 (a) 5 V, 2 Ω　　(b) 6 V, 6 Ω

3-13 (a) 3 A, 2 Ω(或 0.5 S)　　(b) 4 A, 1 Ω(或 1 S)

3-14 (a) 5 Ω, 1.25 W　　(b) 10 Ω, 0.9 W

3-15 5 Ω, 45 W

3-16 (1) $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.8\ \Omega\\ 0.2\ \mathrm{S} & 1.2\end{bmatrix}$

(2) $R_S=2$ Ω

(3) $R_L=4$ Ω, $P_{max}=1.5625$ W

3-17 (1) 0.4 A　　(2) 140 Ω, 35 W