

电路的基本概念和分析方法

把各种电路元件(element)以某种方式互联而形成的能量或信息的传输通道称为电路(electric circuit),或称为电路网络(electric network)。电路元件的运用与电能的消耗和存储相关。例如,当电流通过电阻时将电能转换成热能,同时电流也会产生磁场。如果电流是变化的,则电路中各元件通过空间的电磁感应相互作用,使电路中的一部分能量会通过电磁波辐射。但是,如果电路元件及电路的尺寸远远小于电路中与电流频率有关的电磁波波长,则可以近似认为能量只驻留于(或者说集总于)各个元件的内部,这种元件称为集总元件(lumped element),由集总元件组成的电路称为集总电路(lumped circuit)。在集总电路中电场与磁场是分隔开的,不存在相互作用,电路不存在电磁辐射。只有在集总电路中电路的各种定律及其分析方法才成立,本书的电路分析以集总电路为基本假设。

在电路中,能产生电能或者电信号的电路元件称为电源(source);能将电能转化为其他形式的能量,或对信号进行处理的电路元件称为负载(load)。在电路中,电源、负载、连接导线和开关构成通路,产生电压和电流。电路中的电压和电流是在电源的作用下产生的,所以电源又称为激励源或激励,电压、电流称为响应。

电路分析建立在电路模型的基础上。电路模型中各电路元件是从实际电路中抽象得到的理想模型,可以用数学表示式精确地描述其特性。在电路模型中,元件之间的连线是没有电阻的理想导线,开关为理想开关,即当开关闭合时其电阻为0,断开时其电阻为 ∞ 。

本章将介绍电路分析所常用的物理量、电路的基本定律、电路元件的电路模型及其端口电压和电流的特性、电路的分析方法。

1.1 电路变量

电路变量用于描述电路特性。电路变量有电流(current)、电压(voltage)、电荷(charge)、磁通量(flux)、功率(power)和能量(energy)

等,其中电压和电流是电路中最容易观察和测量的两个基本变量,电路元件的特性通常以电压和电流的关系来描述(称为伏安特性,volt-ampere characteristic),电路的基本定律也即电路中电压或电流的关系。这些电路变量在物理学中已给出严格的定义,这里仅简单介绍在电路分析中常用的一些物理量。

1.1.1 电流及其参考方向

电流定义为单位时间内,通过某一导体横截面的电荷量,用符号 i 表示。根据定义,有

$$i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (1.1.1)$$

式中, i 为流过导体的电流; q 为通过横导体截面的电荷量; t 为时间。在国际单位制(SI)中,电流的单位为 A(安[培])。实用中还常用到千安(kA)、毫安(mA)和微安(μ A)。

如果电流的大小和方向不随时间变化,则称之为直流电流或恒定电流(direct current, DC),用大写字母 I 表示。如果电流的大小和/或方向随着时间变化,则用小写字母 i 表示。

电流的实际方向规定为正电荷移动的方向。但在分析电路时,若事先并不知道电流的实际方向,则需先假定电流的方向才能列写电路方程。这种人为假设的方向称为参考方向(reference direction),亦称正方向(positive direction)。电流的参考方向可以在电路图中用箭头表示,如图 1.1(a)所示,假定电流 i 沿箭头方向流动;也可以在电流符号中用双下标表示参考方向,如图 1.1(b)所示, i_{AB} 表示假设电流从点 A 流到点 B。如果所分析的结果为正,表明实际方向与参考方向一致;否则,实际方向与参考方向相反。若无特别说明,电路中物理量所标示的方向均为其参考方向。

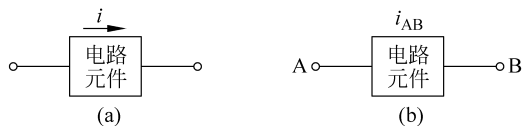


图 1.1 电流参考方向的表示法

1.1.2 电压、电压的参考方向和电位

在电场力的作用下,将单位正电荷从点 A 移到点 B 所做的功称为点 A 与点 B 之间的电压,记作 u_{AB} 。根据定义,有

$$u_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega_{AB}}{dq} \quad (1.1.2)$$

式中, u_{AB} 为点 A 到点 B 的电压; q 为电荷量; ω_{AB} 为将电荷量为 q 的正电荷从点 A 移动到点 B 所做的功。在国际单位制(SI)中,电压的单位为 V(伏[特])。实用中还常用到千伏(kV)、毫伏(mV)和微伏(μ V)。直流电压用大写字母 U 表示,非直流电压用小写字母 u 表示。

在静电学中,电位即电势(electric potential)定义为:位于电场中某个位置的单位电荷所具有的电势能。在分析电路时,通常在电路中选择某点为“0”电位点,称为参考节点,亦称

接地点。参考节点在电路图中的符号如图 1.2 所示,本书统一使用图 1.2(a)所示的符号。电路中某点与参考节点之间的电压,称为该点的电位,通常记作 $V(\text{DC})$ 或 $v(\text{非 DC})$ 。

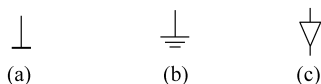


图 1.2 参考节点的表示法

电压的实际方向规定为从高电位端指向低电位端,即电位降低的方向。电压的参考方向为假定方向,有三种表示方法:正负号、箭头、双下标,分别如图 1.3(a),(b),(c)所示。图 1.3(a)中“+”表示高电位端,“-”表示低电位端;图 1.3(b)中箭头从高电位端指向低电位端;图 1.3(c)中, u_{AB} 的下标 A 表示高电位端,B 表示低电位端。

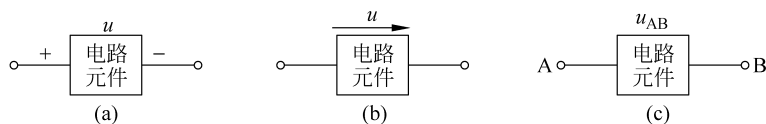


图 1.3 电压参考方向的表示法

电压和电位是两个概念。电路中任何两点的电压等于这两点的电位差。电压为绝对量,不随参考节点的变化而变化;电位是相对量,随参考节点的变化而变化。

1.1.3 电功率和电能

电功率(power)定义为电流在单位时间内所做的功,记作 P 或 p ,单位为 W (瓦[特])。根据电功率、电压和电流的定义,有

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = ui \quad (1.1.3)$$

功率的方向即能量的流向,规定能量流入(即消耗能量)时功率的值为正,能量流出(即提供能量)时则功率的值为负。当某电路元件电压与电流的实际方向相同时,则表明正电荷从高电位移动到低电位,电场力做功,则该元件消耗电能,功率的值为正;反之,当其电压与电流的实际方向相反时,则该元件提供电能,功率的值为负。

在计算某电路元件的功率时,根据其电压和电流的参考方向选择计算公式:在电压 U 和电流 I 的参考方向一致(称为一致参考方向或关联参考方向)时,如图 1.4(a),(b)所示,采用公式 $P=UI$ 计算;在电压 U 和电流 I 的参考方向不一致(称为不关联参考方向)时,如图 1.4(c),(d)所示,采用公式 $P=-UI$ 计算。计算结果 $P>0$,则表示元件的 U 、 I 实际方向一致,元件消耗电能,是电路中的负载; $P<0$,则表示元件的 U 、 I 实际方向相反,元件提供电能,是电路中的供电电源。

电能指一段时间内所提供或者消耗的能量。电能通常记作 W 。 W 和 p 的关系可表示为

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (1.1.4)$$

在物理学中,能量单位是 J (焦[耳])。在电力系统中,电能通常采用的单位是“千瓦时”

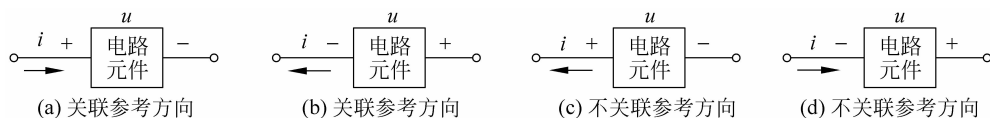


图 1.4 电压与电流参考方向的关联性

(kW·h), 1 千瓦时即为常说的 1“度”电。两种电能单位之间的换算关系为 $1\text{kW}\cdot\text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{J}$ 。

例 1.1.1 直流电路如图 1.5 所示, 图中已标出各电路元件电流和电压的参考方向。已知 $I=1\text{A}$, $U_1=-2\text{V}$, $U_2=3\text{V}$, $U_3=-5\text{V}$ 。问:

- (1) 三个元件的功率各是多少?
- (2) 哪个元件是供电电源, 哪个元件是负载?

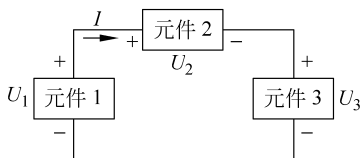


图 1.5 例 1.1.1 电路

解 (1) 三个元件的功率分别为

$$P_1 = -IU_1 = -1 \times (-2) = 2(\text{W})$$

$$P_2 = IU_2 = 1 \times 3 = 3(\text{W})$$

$$P_3 = IU_3 = 1 \times (-5) = -5(\text{W})$$

(2) 因为 $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 < 0$, 所以元件 1 和元件 2 消耗功率, 为负载; 元件 3 为电路提供功率, 为供电电源。

1.2 基尔霍夫定理

首先了解几个有关电路结构的名词:

支路(branch): 电路中的每个分支。电路元件的串联组合为一条支路。

节点(node): 三条或三条以上支路的连接点。

回路(loop): 电路中的任何一条闭合路径。

网孔(mesh): 把电路图画在一个平面上, 不含有分支的回路称为网孔, 即平面电路的每一个格就是一个网孔。一个网孔是一条回路, 而一条回路不一定是网孔。

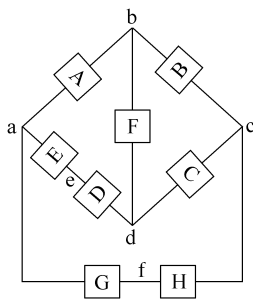


图 1.6 例 1.2.1 图

例 1.2.1 电路中各电路元件的连接如图 1.6 所示。试分析该电路有几条支路, 几个节点, 几条回路, 几个网孔。

解 该电路共有 6 条支路: ab, bc, cd, dea, bd, afc 。

有 4 个节点: 点 a, 点 b, 点 c, 点 d。

有 7 条回路：abdea, bcdb, abcdea, abcfa, aedcfa, abdcfa, aedbcfa。

有 3 个网孔：abdea, bcdb, aedcfa。

基尔霍夫定理(Kirchhoff's law)包含基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL),描述了电路中电流和电压分别遵循的基本规律。

1.2.1 基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律描述了电路中各支路电流之间关系,其内容为:在任何时刻,流入某节点的电流之和恒等于流出该节点的电流之和。若规定电流流入节点为正,流出为负,则基尔霍夫电流定律可以表述为:电路中与某节点连接的所有支路的电流的代数和为 0。若有 n 条支路与某节点连接,则

$$\sum_{m=1}^n i_m = 0 \quad (1.2.1)$$

电路如图 1.7 所示。按流入节点的电流等于流出节点的电流列节点 a 的电流方程,有

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

按照节点 a 电流的代数和为 0 列方程,有

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

基尔霍夫电流定律不仅适用于电路中的任何节点上,还可推广到包围电路任何部分的闭合面上:与闭合面相连接的各支路电流的代数和等于零。在电路分析中,这种闭合面称为广义节点。例如,在图 1.8 所示的电路中,可用一个闭合面(图中虚线所示)把右边的电路圈起来作为一个广义节点。对于这个广义节点,根据 KCL,有

$$\sum_{m=1}^n i_m = 0$$

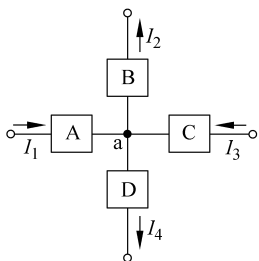


图 1.7 KCL 例图

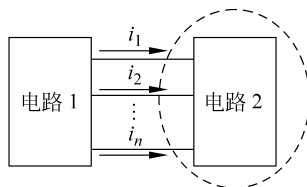


图 1.8 广义节点(虚线框以内)

利用 KCL 可以证明电路中功率守恒。设电路有 n 个节点, b 条支路。第 k 条支路连接在第 p 、 q 两个节点之间,支路电压和电流 u_k 、 i_k 参考方向一致,则

$$u_k i_k = u_{pq} i_{pq} = u_{qp} i_{qp}$$

所以有

$$u_k i_k = \frac{1}{2} (u_{pq} i_{pq} + u_{qp} i_{qp})$$

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = \sum_{p,q=1}^n \frac{1}{2} (u_{pq} i_{pq} + u_{qp} i_{qp})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n [(v_p - v_q)i_{pq} + (v_q - v_p)i_{qp}] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (v_p - v_q)i_{pq} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p \sum_{q=1}^n i_{pq} - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n v_q \sum_{p=1}^n i_{pq}
 \end{aligned}$$

式中, $\sum_{q=1}^n i_{pq}$ 为第 p 个节点电流的代数和, $\sum_{p=1}^n i_{pq}$ 为第 q 个节点电流的代数和。所以根据 KCL, 可得

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \quad (1.2.2)$$

式(1.2.2)表明功率的代数和为 0, 即电路中发出的功率之和与消耗的功率之和相等。

1.2.2 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律描述了电路中电压之间的关系, 其内容为: 在任何时刻, 沿电路中的任一回路巡行一周, 则在该回路上电位升之和恒等于电位降之和。若规定沿回路方向电位降低则电压为正, 电位升高则电压为负, 基尔霍夫电压定律可以表述为: 电路中的任何回路中, 各支路(或电路元件)电压的代数和为 0。若某回路中有 n 个电路元件, 则

$$\sum_{m=1}^n u_m = 0 \quad (1.2.3)$$

例如, 在图 1.9 所示的电路中, 沿图中虚线箭头的方向巡行一周, 根据 KVL, 有

$$U_1 + U_4 = U_2 + U_5$$

按照电压的代数和为 0 列方程, 有

$$-U_1 + U_2 - U_4 + U_5 = 0$$

基尔霍夫电压定律也适合于开口电路。例如, 在图 1.10 所示的电路中, 设端口 a、b 间的电压为 U_{ab} , 则根据 KVL, 有

$$-U_{ab} - U_2 + U_1 = 0$$

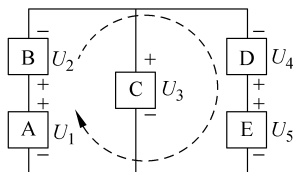


图 1.9 KVL 例图

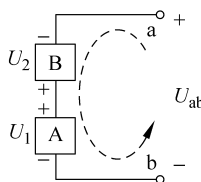


图 1.10 开口电路

1.3 电路元件

在分析电路时, 需要列写电路方程。尽管 KVL 揭示了电路中各电压之间的关系, KCL 揭示了电路中各电流之间的关系, 但仅列写 KVL 电压方程和 KCL 电流方程不能分析任何

电路。要完成电路分析,还需要根据电路元件的端口特性,列写其电压与电流的关系式。

实际电路元件的电磁特性比较复杂。根据实际电路元件的各种电磁特性,抽象出只考虑某种单一电磁特性的电路元件,称为理想元件(ideal element)。理想电路元件端口的电压与电流的关系(即伏安特性)可以严格地定义,并能用数学式精确地描述。常用的理想电路元件有电阻(resistor)、电容(capacitor)、电感(inductor)、理想电压源、理想电流源等。实际电路元件的电路模型则通过若干理想电路元件的连接来构成。在集总参数电路中,电路元件为一个广义节点,根据 KCL,其端子电流的代数和为 0。

1.3.1 电阻、电感和电容

1. 电阻

电阻体现了电路元件对电流的阻力。通过电阻的电流与其端电压成正比,与其电阻阻值成反比。电阻的这种端口特性称为欧姆定律。电阻的电路符号如图 1.11 所示,电阻值标记为 $R(r)$,单位为 Ω (欧[姆]),简称欧,实用中还常用到千欧($k\Omega$)、兆欧($M\Omega$)等。电阻的阻值越大,表明其对电流的阻碍作用越大。电阻的电压与电流的实际方向一致。如果电阻的电压和电流的参考方向一致,如图 1.11 所示,则根据欧姆定律,有

$$u = iR \quad (1.3.1)$$

但若电压和电流的参考方向不一致,则有

$$u = -iR \quad (1.3.2)$$

电阻可分为线性电阻和非线性电阻。线性电阻的伏安特性曲线为过原点的直线,如图 1.12(a)所示;非线性电阻的伏安特性非直线,例如图 1.12(b)所示为二极管的正向伏安特性曲线。电工技术课程中,假定所分析电路中的电阻为线性电阻。

电阻是耗能元件,其消耗的功率和能量分别为

$$p = ui = \frac{u^2}{R} = i^2 R$$

$$W_R = \int_{t_1}^{t_2} ui \, dt$$

实际电阻器与电位器均可看作理想电阻。实际电阻的种类、型号、标称阻值、额定功率、允许偏差等标志内容和标志方法参见附录 A。

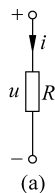


图 1.11 电阻的电路符号

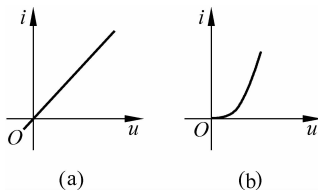


图 1.12 电阻的伏安特性曲线

2. 电感

电感(inductor)可以将电能转换为磁场(magnetic field)能量,其电路符号如图 1.13 所示。在电路中,电感线圈所能感应到的电流的强度称为电感量或电感值,是衡量电感大小的

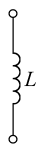


图 1.13 电感的电路符号

一个物理量,标记为 L 。电感值的单位为 H(亨[利]),实用中还常用到毫亨(mH)、微亨(μ H)等。电感量的大小取决于线圈的结构及磁心介质材料的性质,其关系为

$$L = \frac{\mu S N^2}{l}$$

式中, μ 为介质材料的导磁率(permeability); S 为线圈面积; N 为线圈匝数; l 为线圈长度。实际电感线圈电感量的计算公式参见附录 B。

根据电感介质材料,电感分为线性电感和非线性电感。如果介质材料的 μ 为常数,则电感为线性电感,例如空心电感;如果 μ 不为常数,电感大小与电压和电流有关,为非线性电感,例如铁心电感。本课程主要讨论含线性电感的电路。

当线性电感线圈中通入电流 i 时,设每匝线圈中产生的磁通为 Φ 、线圈总匝数为 N ,则

$$L = \frac{N\Phi}{i} \quad (1.3.3)$$

楞次定律(Lenz law)描述了理想电感的电特性:当线圈中的电流随时间变化时,线圈中就会产生感应电动势,感应电动势趋于产生一个电流,该电流的方向趋于阻止产生此感应电动势的磁通的变化。设电感的电流 i 和端电压 u 的参考方向一致,按照电流的参考方向,用右手定则设定磁通 Φ 的参考方向;感应电动势 e 的参考方向由 i 的参考方向决定, i 从 e 的“-”流到“+”,如图 1.14 所示。

根据楞次定律,有

$$e = - \frac{d(N\Phi)}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

根据 KVL,可得电感的电压和电流的关系为

$$u = -e = L \frac{di}{dt} \quad (1.3.4)$$

由式(1.3.4)可知,如果线圈中通入的是直流电流,线圈中将不产生感应电动势,其端电压为 0。所以在直流电路中,电感相当于短路。

电感是储存磁场能量的元件。它所储存的能量随电流变化,电流的值增大时储存的能量增加;反之,储存的能量减少。设 $t=0$ 时电感的储能为 0,电感储存的磁场能量可表示为

$$W = \int_0^t ui dt = \int_0^t L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2 \quad (1.3.5)$$

3. 电容

电容(capacitor)是将电能转换为电场(electric field)能量的元件。电容值为电容器的两极板间的电压增加 1V 所需的电量,是表征电容器容纳电荷能力的物理量,标记为 C 。电容值的单位为 F(法[拉]),实用中还常用到微法(μ F)、纳法(nF)、皮法(pF)。当电容的两极板间加上电压(u)时,极板上聚集电荷(q),如图 1.15 所示,电容量与电压和电荷的关系为

$$C = \frac{q}{u} \quad (1.3.6)$$

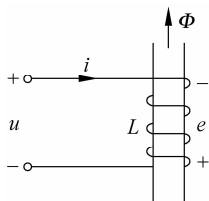


图 1.14 电感元件的电压、电流、磁通和电动势的参考方向

当 C 为常数时,称为线性电容; C 不为常数时,称为非线性电容。本课程主要讨论含线性电容的电路。

常用的电容按极性可分为有极性电容和无极性电容两种。在使用无极性电容时,两个接线端不分极性,可以任意接入电路中,无极性电容的容量一般较小。有极性电容接入电路时,必须区分两个接线端的极性,标“+”号的一端,一定接到高电位上。常用的电解电容是有极性电容,其电容量较大。电容的符号如图 1.16 所示,其中图 1.16(a)为无极性电容的电路符号,图 1.16(b)为有极性电容的电路符号。

若电容的电流 i 与端电压 u 的参考方向一致,如图 1.17 所示,根据电流的定义,则有

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(uC)}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (1.3.7)$$

由式(1.3.7)可知,若电容两端的电压不变,则电容电流为零。因此在直流电路中,电容相当于开路。

电容为储能元件。电容储存的电场能量随其端电压 u 的变化而改变。 u 的值增大时电容充电,储存的能量增加;反之电容放电,储存的能量减小。设 $t=0$ 时电容的储能为 0,则电容储存的电场能量为

$$W_C = \int_0^t ui dt = \int_0^t uC \frac{du}{dt} dt = \int_0^u uC du = \frac{1}{2}Cu^2 \quad (1.3.8)$$

常用电容器的类别、特点、用途及其标称容量参见附录 B。

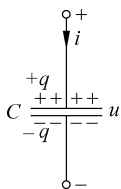


图 1.15 电容两极板上的电荷分布

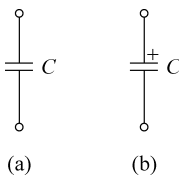


图 1.16 电容的电路符号

以上对电阻、电感、电容三种元件的讨论,都是在理想条件下进行的,突出了它们的主要物理特性,忽略了次要因素。在需要考虑其他次要因素影响的时候,可以利用理想元件对实际元件进行建模。例如电感线圈是用低电阻率的导线绕制而成,除电感参数以外,线圈本身还有导线电阻,各匝线圈间还有分布电容。所以在一个实际的电感线圈中, R 、 L 、 C 三参数并存,其电路模型如图 1.18(a)所示。如果在一定的条件下线圈间的电容可以忽略,则实际电感的电路模型如图 1.18(b)所示。

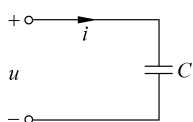


图 1.17 电容电流 i 与端电压 u 的参考方向

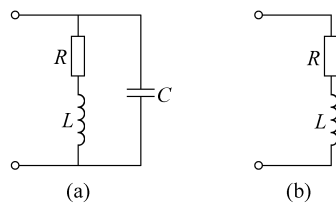


图 1.18 实际电感的电路模型

1.3.2 电源

能将其他能量转换为电能的元件称为电源(power source 或 supply)。电源可独立地为电路提供能量或信号。电动势(electromotive force, 简写 emf)是一个表征电源特征的物理量, 为非静电力将单位正电荷从电源的负极通过电源内部移送到正极时所做的功, 其实际方向规定为电位升的方向, 即从低电位端指向高电位端。电动势常用符号 E (或 e) 表示, 单位是 V。根据上述定义, 有

$$e_{BA} = \frac{d\omega}{dq} \quad (1.3.9)$$

式中, e_{BA} 为电源内部从端点 B 到端点 A 的电动势; ω 为外力将电荷量为 q 的正电荷从点 B 移动到点 A 所做的功。

电动势的电路符号如图 1.19 所示, 其参考方向有三种表示方法: 正负号、箭头和双下标, 分别如图 1.19(a), (b), (c) 所示。在图 1.19(a) 中, “+”表示高电位端, “-”表示低电位端; 在图 1.19(b) 中, 箭头从低电位端指向高电位端; 在图 1.19(c) 中, e_{BA} 的下标 A 表示高电位端, B 表示低电位端。也可直接用端电压表示电源的该项参数。

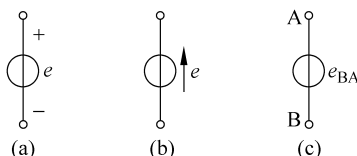


图 1.19 电动势的参考方向的表示法

1. 理想电压源

理想电压源(voltage source)具有以下性质:

(1) 理想电压源的端电压恒等于其电动势, 与外电路以及流经它的电流的大小和方向均无关;

(2) 理想电压源电流的大小和方向由其电动势和外电路共同决定;

(3) 理想电压源既可以向外电路提供能量, 也可以从外电路接受能量。

理想直流电压源, 又称恒压源, 其电路模型和伏安特性分别如图 1.20(a), (b) 所示。在图 1.20(a) 所示的电路中, 恒压源的电压与电流的参考方向不关联, 功率 $P = -UI$, 所以图 1.20(b) 所示伏安特性曲线位于第一象限, $P < 0$, 恒压源供能; 位于第二象限, $P > 0$, 恒压源耗能。

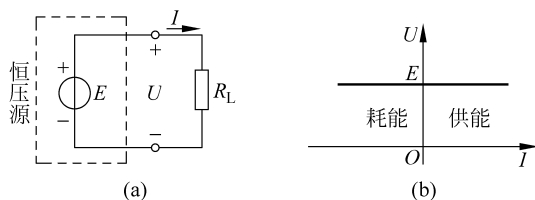


图 1.20 恒压源的电路模型及其伏安特性