

我们懂得的不多,我们不知道的却是浩瀚无垠。

皮埃尔-西蒙·拉普拉斯侯爵(Pierre-Simon,marquis de Laplace)(1749—1827 年)

法国数学家和天文学家

3.1 引言

第 3 至第 5 章的内容在连续时间信号和系统的分析中非常重要。本章开始连续时间信号和系统的频域分析,采用的是拉普拉斯变换,而后面两章则分别采用傅里叶级数和傅里叶变换来进行分析。拉普拉斯变换是这些变换最一般的形式,不过所有这些变换都为我们表示信号提供了除时域形式之外的其他一些不同的表达形式。拉普拉斯变换是复变量 $s=\sigma+j\Omega$ 的函数,该复变量由一个阻尼系数 σ 和一个频率变量 Ω 构成,而傅里叶变换只是频率 Ω 的函数。信号在时域里的增长或衰减即阻尼,还有它的重复属性即频率,在拉普拉斯域里是由信号的拉普拉斯变换的分子和分母的根,或者说零点和极点的位置来表征的。转移函数的极点和零点的位置与系统的动态特性有关。

拉普拉斯变换为连续时间系统提供了一个重要的代数表征方式:输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比即系统的转移函数。转移函数的概念将 LTI 情况下的卷积积分和常微分方程表示统一了起来。转移函数的概念不仅在系统分析中 useful,在系统设计中也很有用,这一点将在第 7 章中看到。

连续时间系统的某些特性只有经过拉普拉斯变换之后才能加以研究,例如稳定性、暂态响应和稳态响应等,这也是为什么在学习傅里叶分析之前先学习拉普拉斯分析的一个重要原因,要知道傅里叶分析是专门用来处理连续时间信号和系统的频率特性的。在经典控制论中,稳定性和瞬态是主要的问题,因此拉普拉斯变换在这个领域非常重要;而在通信领域,信号的频率特性和系统的频率响应非常重要,这些则是由傅里叶变换提供的。

考虑到因果信号(在负的时间等于零的信号)和因果系统(冲激响应在负的时间等于零的系统)的普遍性,拉普拉斯变换通常被称为“单边的”,但其实“双边的”变换也存在!虽然给人的印象是它们是两个不同的变换,但实际上这是拉普拉斯变换应用于不同类型的信号和系统的结果。后面将会证明,通过将信号分成因果分量和反因果分量两个部分,我们只需要应用单边变换即可。不过在求逆变换时,要想得到正确的信号,还是需要小心谨慎。

由于拉普拉斯变换需要在无限域内进行积分,所以有必要考虑积分是否收敛以及在哪里收敛,即在 s 平面上的收敛区域。如果这个区域包含 s 平面上的 $j\Omega$ -轴,那么当 $s=j\Omega$ 时的拉普拉斯变换存在,且此时的拉普拉斯变换与将在第 5 章介绍的傅里叶变换是一致的,因此对于一大类函数来说,它们的傅里叶

变换可以直接由它们的拉普拉斯变换获得,这是先学习拉普拉斯变换的另一个理由。拉普拉斯变换还以一种微妙的方式与周期连续时间信号的傅里叶级数表示相关联,当已经得到了信号的一个周期的拉普拉斯变换时,利用二者之间的这种关系可以消除积分从而减少傅里叶级数的计算复杂度。

线性时不变系统响应复指数信号的方式非常特别:系统的输出等于输入的复指数信号,不过其幅度和相位都被系统的响应所改变。这个事实提供了用拉普拉斯变换表征系统的方法(当指数是复频率 s 时),如果指数是 $j\Omega$,我们就用傅里叶变换表征系统。特征函数的概念与用于计算电路稳态响应的相量有关。

拉普拉斯(LAPLACE)和海维塞德(HEAVISIDE)

皮埃尔-西蒙·拉普拉斯侯爵(The Marquis Pierre-Simon de Laplace)(1749—1827 年)是法国数学家和天文学家。虽然出身贫贱,他却凭借着自己的政治能力成为了贵族。作为天文学家,他毕生致力于将牛顿万有引力定律应用于整个太阳系的工作。他被认为是一位应用数学家,作为法国科学院的院士,他认识同一时期的其他伟大的数学家,如勒让德(Legendre)、拉格朗日(Lagrange)和傅里叶(Fourier)。除了在天体力学领域的贡献,拉普拉斯在概率论方面也做了重要的工作,而且拉普拉斯变换可能就是从概率论中来的,他觉得“概率论只不过是把常识化成计算而已”。欧拉(Euler)和拉格朗日在早前曾用过类似于拉普拉斯变换的变换,然而,是奥利弗·海维塞德(Oliver Heaviside)(1850—1925 年)将拉普拉斯变换应用于常微分方程的求解。海维塞德是个英国人,他自学成才成为了电气工程师、数学家和物理学家。

3.2 双边拉普拉斯变换

先来凭直觉看看如何得到拉普拉斯变换及其逆变换,而不是直接给出它们的定义。正如前面指出的那样,在表征信号以及将其输入 LTI 系统所得到的响应时,有一个基本思想,那就是把它们看作为一些基本信号的组合,且系统对这些基本信号的响应很容易求出。在第 2 章考虑“时域”解法时,我们是把输入表示成无限多个冲激信号的组合,这些冲激被输入信号的值所加权,而且是出现在所有可能的时间,之所以将信号表示为冲激之和是因为由冲激引起的响应正是 LTI 系统的冲激响应,它是我们学习的基础。若想获得输入 LTI 系统的信号的“频域”表示,可以采用相似的做法,这种情况下所用的基本函数是复指数函数或正弦函数。接下来要讨论的特征函数概念,最初读者可能会觉得有点儿抽象,但是当看到它在本章以及后面傅里叶表达式中的应用之后,你就知道它为我们提供了一个获得类似于冲激表示的表达式的途径(见图 3.1)。

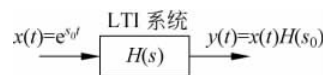


图 3.1 LTI 系统的特征函数性质
系统的输入是 $x(t) = e^{s_0 t} = e^{\sigma_0 t} e^{j\Omega_0 t}$, 系统的输出是同样的输入乘以复数值 $H(s_0)$, 其中 $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ 或者说系统冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。

3.2.1 LTI 系统的特征函数

考虑输入 LTI 系统的信号是复信号 $x(t) = e^{s_0 t}$, $s_0 = \sigma_0 + j\Omega_0$, $-\infty < t < \infty$ 的情况,设系统的冲激响应为 $h(t)$,那么由卷积积分可得系统输出为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s_0(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{s_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s_0 \tau} d\tau}_{H(s_0)} = x(t) H(s_0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

由于输入中的指数函数同样出现在了输出中,故 $x(t)=e^{s_0 t}$ 被称为 LTI 系统的特征函数^①。输入 $x(t)$ 在输出端被复数 $H(s_0)$ 所修改, $H(s_0)$ 则通过冲激响应 $h(t)$ 与系统相关联。通常对于任意 s , 输出端的特征函数被复函数

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (3.2)$$

所修改,此复函数就是 $h(t)$ 的拉普拉斯变换!

输入 $x(t)=e^{s_0 t}$, $s_0=\sigma_0+j\Omega_0$, $-\infty < t < \infty$ 被称为具有冲激响应 $h(t)$ 的 LTI 系统的特征函数,如果系统相应的输出等于

$$y(t) = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt = x(t) H(s_0)$$

其中, $H(s_0)$ 是 $h(t)$ 的拉普拉斯变换在 $s=s_0$ 的值。该性质只有对 LTI 系统才有效,时变系统或非线性系统都不满足该性质。

注:

(1) 可认为 $H(s)$ 是一个被冲激响应 $h(t)$ 加权的复指数函数的无限组合,对信号的拉普拉斯变换做类似的理解也合理。

(2) 现在来考虑应用特征函数这个结论的意义。假设信号 $x(t)$ 被表示成以 $s=\sigma+j\Omega$ 为自变量的复指数函数之和的形式:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

即以 s 为变量的指数函数的无限和,每一项都被函数 $X(s)/(2\pi j)$ 所加权(很快就会看到这个式子与拉普拉斯逆变换的关系)。利用 LTI 系统的叠加性质,再考虑到对于冲激响应为 $h(t)$ 的 LTI 系统,由 e^{st} 引起的输出是 $H(s)e^{st}$,则由 $x(t)$ 引起的输出为

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) [H(s) e^{st}] ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s) e^{st} ds$$

其中,设 $Y(s)=X(s)H(s)$ 。但由前一章可知 $y(t)$ 等于卷积,即 $y(t)=[x * h](t)$,因此以下两个表示式一定有关系:

$$y(t) = [x * h](t) \Leftrightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$

左边的表示式指明如何在时域中求输出,右边的表示式指明如何在频域中计算输出的拉普拉斯变换。这是拉普拉斯变换最重要的性质:它降低了时域中计算卷积积分的复杂度,将卷积积分转化成输入的拉普拉斯变换 $X(s)$ 和冲激响应的拉普拉斯变换 $H(s)$ 的乘积。

下面给出信号或系统的冲激响应的拉普拉斯变换以及逆变换的直接定义:

一个连续时间函数 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换定义为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \text{ROC} \quad (3.3)$$

其中,变量 $s=\sigma+j\Omega$, σ 是阻尼系数, Ω 是角频率,单位是 rad/s。ROC 代表 $F(s)$ 的收敛域,即无限积分存在的区域。

拉普拉斯逆变换定义为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad \sigma \in \text{ROC} \quad (3.4)$$

^① 大卫·希尔伯特(David Hilbert)(1862—1943年),德国数学家,他似乎是第一个于1904年使用德语单词 eigen 来表示特征值和特征向量的人。德语单词 eigen 的意思是自己的、固有的。

注:

(1) 拉普拉斯变换 $F(s)$ 提供了信号 $f(t)$ 在 s -域内的表达式, 反过来利用收敛域, 也能够以一一对应的方式将 $F(s)$ 变回原来的时域函数, 于是

$$F(s) \text{ ROC} \Leftrightarrow f(t) \text{ ①}$$

(2) 如果 $f(t)=h(t)$, 即 LTI 系统的冲激响应, 那么 $H(s)$ 称为系统函数或转移函数, 它可以在 s -域内表征系统, 就像 $h(t)$ 在时域内表征系统一样。如果 $f(t)$ 是一个信号, 那么 $F(s)$ 就是它的拉普拉斯变换。

(3) 拉普拉斯逆变换式(3.4)可以被理解为是 $f(t)$ (不管它是信号还是冲激响应) 的一个表达式, 该表达式是一个被 $F(s)$ 加权的复指数函数的无限和。用式(3.4)求拉普拉斯逆变换需要计算复积分, 后面将用代数方法求拉普拉斯逆变换, 这样可以避免计算复积分。

【例 3.1】

在无线通信中影响发射信号的多径效应是一个常见的问题。考虑发射机和接收机之间的信道, 它类似于图 3.2 描述的系统。发射信号 $x(t)$ 并不一定由发射机直接(沿视线)传送至接收机, 而是可能沿着不同的路径传播, 由于各路径的长度不同, 因此每条传输路径上的信号被衰减的程度和延迟的时间都不同^②。在接收端, 这些被延迟和衰减的信号叠加在一起引起衰落效应, 即接收到的这些信号具有不同相位, 在接收机端进行叠加会导致一个或强或弱的信号, 因此产生一种忽强忽弱的感觉。如果 $x(t)$ 是从发射机发出的信号, 且信道有 $N+1$ 条不同路径, 各自的衰减系数为 $\{\alpha_i\}$, 相应延时为 $\{t_i\}$, $i=0, \dots, N$, 利用特征函数性质求出这个引起多径效应的信道的系统函数。

解 图 3.2 所示传输信道的输出可写为

$$y(t) = \alpha_0 x(t - t_0) + \alpha_1 x(t - t_1) + \dots + \alpha_N x(t - t_N) \quad (3.5)$$

由特征函数性质有, 此多径系统对 $e^{s_0 t}$ 的响应等于 $e^{s_0 t} H(s_0)$,

于是对于 $x(t)=e^{s_0 t}$ 可得到两个等价的响应

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{s_0 t} H(s_0) \\ &= \alpha_0 e^{s_0(t-t_0)} + \dots + \alpha_N e^{s_0(t-t_N)} \\ &= e^{s_0 t} [\alpha_0 e^{-s_0 t_0} + \dots + \alpha_N e^{-s_0 t_N}] \end{aligned}$$

故该信道的系统函数可利用变量 s 表示为

$$H(s) = \alpha_0 e^{-s t_0} + \dots + \alpha_N e^{-s t_N}$$

注意在输入-输出方程中的时移量变成了拉普拉斯域中的指数, 在后面将介绍这个性质。

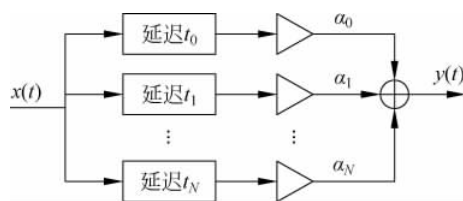


图 3.2 对发送消息 $x(t)$ 存在多径效应的无线通信信道框图

当消息 $x(t)$ 在 $N+1$ 条路径上传输时被延迟并衰减, 其效果类似于声音信号的回声效果。

3.2.2 收敛域

若要考虑不同类型的函数(可以是连续时间信号, 也可以是连续时间系统的冲激响应), 我们可能会对以下信号的拉普拉斯变换的计算感兴趣:

■ 有限支撑函数: 当 t 不在有限时段 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内时, $f(t)=0$ 。

① 这个记号仅仅表明, 对应于某个具有收敛域 ROC 的拉普拉斯变换 $F(s)$, 有一个时间函数 $f(t)$ 。它并不意味着 $F(s)$ 等于 $f(t)$, 实际上二者差得很远—— $F(s)$ 和 $f(t)$ 完全是不同域内的两个函数!

② 一般每条路径对发送信号的影响有三个。信号要到达接收机所需行进的距离(在每条路径上这个距离可能都不同, 因为有建筑物、建筑构造和汽车等的反射或折射)决定了信号的衰减程度, 以及相对于信号直接到达接收机的传输延迟时间。另一个影响是频移, 即多普勒效应, 它是由发射机和接收机之间的相对速度引起的。图 3.2 中的信道模型没有考虑多普勒效应。

这里 t_1 、 t_2 的值是任意有限大小的可正可负的数, 只要 $t_1 < t_2$ 。这类有限支撑信号的拉普拉斯变换一定存在, 并且它在周期信号的傅里叶级数系数的计算中特别有用。

■ 无限支撑函数: 在这种情况下 $f(t)$ 定义在一个无限支撑上, 即 $t_1 < t < t_2$, 其中 t_1 或 (和) t_2 的值为无穷大。

一个有限支撑或无限支撑函数 $f(t)$ 被称为

- (i) 因果的, 当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$;
- (ii) 反因果的, 当 $t > 0$ 时, $f(t) = 0$;
- (iii) 非因果的, 以上二者的组合。

图 3.3 解释了这些不同类型的信号。

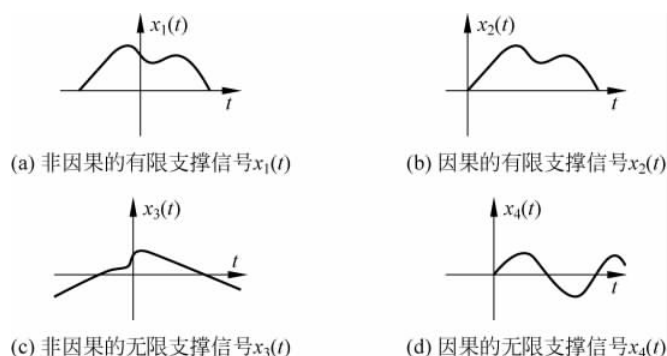


图 3.3 不同类型信号的例子

因为式(3.3)中 $F(s)$ 的定义要求在一个无限支撑上进行积分运算, 所以需要考虑以上每种情况下, 在 s 平面上的哪些区域内变换是存在的, 该区域称为变换的**收敛域**(region of convergence, ROC)。收敛域的获得要通过考察变换的收敛情况。

为了使 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 存在, 需要

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

即 $f(t) e^{-\sigma t}$ 绝对可积。即使在 $f(t)$ 本身不绝对可积的情况下, 也有可能通过选取适当的 σ 值而使 $f(t) e^{-\sigma t}$ 绝对可积。因此所取的 σ 值决定了 $F(s)$ 的 ROC, 而频率 Ω 则对 ROC 没有影响。

1. 极点和零点以及收敛域

收敛域(ROC)可以根据拉普拉斯变换中的积分的存在条件而得到, ROC 与变换的极点有关, 而变换一般都是复有理函数。

对于有理函数 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = N(s)/D(s)$, 其零点是使函数 $F(s) = 0$ 的 s 值, 极点是使 $F(s) \rightarrow \infty$ 的 s 值。虽然一般仅考虑 $F(s)$ 的有限零点和有限极点, 但它也可能具有无限零点和无限极点。

$F(s)$ 一般是有理函数, 即两个多项式 $N(s)$ 和 $D(s)$ 之比, 或 $F(s) = N(s)/D(s)$, 因此 $F(s)$ 的零点就是使分子多项式 $N(s) = 0$ 的 s 值, 而极点则是使分母多项式 $D(s) = 0$ 的 s 值。例如, 对于变换

$$F(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2(s+j)(s-j)}{(s+1)^2 + 4} = \frac{2(s+j)(s-j)}{(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

其零点为 $s_{1,2} = \pm j$, 即 $N(s)=0$ 的根, 于是有 $F(\pm j)=0$; 一对复共轭极点 $-1 \pm 2j$ 是方程式 $D(s)=0$ 的根, 于是有 $F(-1 \pm 2j) \rightarrow \infty$ 。从几何学上看, 零点可被视为使函数趋于 0 的那些值, 极点可被视为使函数趋于无穷大的那些值(看上去像马戏团的帐篷的那根主要“支柱”), 如图 3.4 所示。

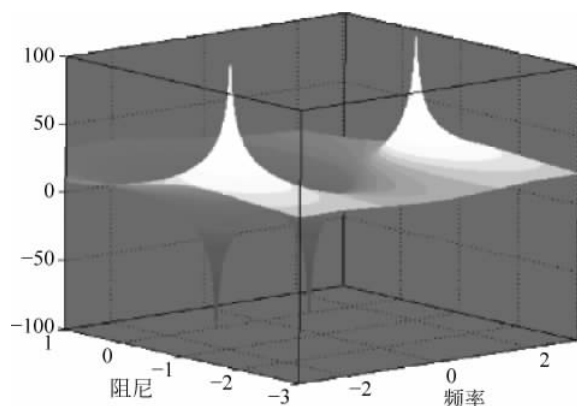


图 3.4 以阻尼系数 σ 和频率 Ω 为变量的函数 $F(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{(s^2 + 2s + 5)}$ 的对数模的三维图像

当 s_i 是极点(即 $s_{1,2} = -1 \pm 2j$)时, 函数 $\log|F(s_i)| \rightarrow \infty$, 而当 s_i 是零点(即 $s_{1,2} = \pm j$)时, 函数 $\log|F(s_i)| \rightarrow -\infty$ 。

并非所有拉普拉斯变换都有极点或零点或者有有限数量的极点和零点。考虑函数

$$P(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{s}$$

看上去 $P(s)$ 有个极点在 $s=0$, 然而该极点与位于同样位置的一个零点抵消掉了。实际上, 要获得 $P(s)$ 的零点需要令 $e^s - e^{-s} = 0$, 然后等式两边同乘以 e^s 可得

$$e^{2s} = 1 = e^{j2\pi k}$$

$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 是整数。于是得到零点为 $s_k = j\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。当 $k=0$ 时, 在 0 处的零点抵消了该处的极点, 从而使得 $P(s)$ 只有零点, 而且是无限多个零点 $\{j\pi k, k=\pm 1, \pm 2, \dots\}$ 。同理, 函数 $Q(s) = 1/P(s)$ 有无限多个极点, 但没有零点。

2. 极点和收敛域

ROC 是由使 $x(t)e^{-\sigma t}$ 绝对收敛的 σ 值组成, 对于不同类型的所有信号, 在确定它们的 ROC 时, 都可以应用以下两个一般性质:

- ROC 内不包含任何极点。这条性质意味着, 由于 ROC 是拉普拉斯变换的定义域, 故变换在 ROC 内任何一个点的值都不可能等于无穷大, 因此极点不应该出现在 ROC 内。
- ROC 是一个平行于 $j\Omega$ -轴的平面。这条性质意味着定义 ROC 的是阻尼系数 σ , 而不是频率 Ω 。因为在为了检验收敛性而计算拉普拉斯变换中被积函数的绝对值时, 令 $s = \sigma + j\Omega$, 而 $|e^{j\Omega}| = 1$, 所以所有的收敛域都将包括 $-\infty < \Omega < \infty$ 。

不管什么类型的信号或者冲激响应, 它们的收敛域都由其极点决定, 如果 $\{\sigma_i\}$ 是 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ 的极点的实部, 那么具体情况如下:

(1) 对于因果信号 $f(t)$, 即当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, 其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域是在其极点右边的一个平面,

$$\mathcal{R}_c = \{(\sigma, \Omega) : \sigma > \max\{\sigma_i\}, -\infty < \Omega < \infty\}$$

(2) 对于反因果信号 $f(t)$, 即当 $t > 0$ 时, $f(t) = 0$, 其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域是在其极点左边的一个平面,

$$\mathcal{R}_{ac} = \{(\sigma, \Omega) : \sigma < \min\{\sigma_i\}, -\infty < \Omega < \infty\}$$

(3) 对于非因果信号 $f(t)$, 即 $f(t)$ 定义于 $-\infty < t < \infty$, 其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域是其因果部分的收敛域 $\mathcal{R}_c$ 与其反因果部分的收敛域 $\mathcal{R}_{ac}$ 的交集:

$$\mathcal{R}_c \cap \mathcal{R}_{ac}$$

图 3.5 中的例子说明了 ROC 是如何与极点以及信号的类型相关的。

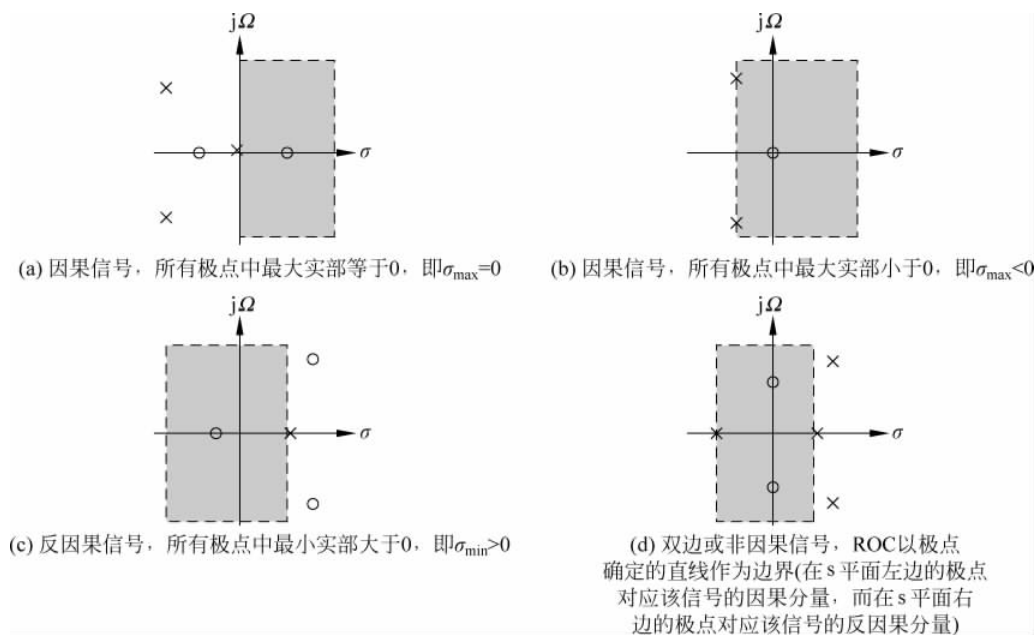


图 3.5 不同类型信号的 ROC(ROC 不包含极点,但可以包含零点)

【例 3.2】

求 $\delta(t)$ 、 $u(t)$ 和脉冲 $p(t) = u(t) - u(t-1)$ 的拉普拉斯变换, 并指出它们的收敛域, 然后用 MATLAB 验证所求出的变换。

解 虽然 $\delta(t)$ 不是个常规信号, 但它的拉普拉斯变换却很容易得到

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-s \cdot 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

该积分不需要任何条件即能存在, 因此对所有 s 值 $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ 均存在, 即其 ROC 是整个 s 平面。实际上, $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ 没有极点的这个事实也可以说明 ROC 为整个 s 平面。

$u(t)$ 的拉普拉斯变换可由

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\Omega t} dt$$

而求得, 其中做了变量替换 $s = \sigma + j\Omega$ 。由欧拉公式, 上式变成

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} [\cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t)] dt$$

由于正弦函数和余弦函数是有界的,于是只需要找到一个 σ 值,它能使指数函数 $e^{-\sigma t}$ 不随 t 的增大而增长。若 $\sigma < 0$,当 $t \geq 0$ 时指数函数 $e^{-\sigma t}$ 将会增长,从而积分不收敛;而另一方面,若 $\sigma > 0$,则积分收敛,因为当 $t \geq 0$ 时指数函数 $e^{-\sigma t}$ 将会衰减;不过当 $\sigma = 0$ 时会发生什么我们并不清楚。因此积分存在的区域是由 $\sigma > 0$ 及所有频率 $-\infty < \Omega < \infty$ 定义的(频率的值对收敛性没有影响),即积分存在于 s 平面的右半开平面。在收敛域 $\sigma > 0$ 内可求得积分等于

$$U(s) = \frac{e^{-st}}{-s} \bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

其中,由于 $\sigma > 0$,当 $t = \infty$ 时极限值为0。故拉普拉斯变换 $U(s) = 1/s$ 在由 $\{(\sigma, \Omega): \sigma > 0, -\infty < \Omega < \infty\}$ 所定义的区域收敛,即在 s 平面右半开(不包括 $j\Omega$ -轴)平面内收敛,也可以通过考虑到 $U(s)$ 的极点在 $s=0$,并且 $u(t)$ 是因果信号而得到该 ROC。

脉冲 $p(t) = u(t) - u(t-1)$ 是一个有限支撑信号,因此它的 ROC 是整个 s 平面。其拉普拉斯变换为

$$P(s) = \mathcal{L}[u(t) - u(t-1)] = \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{-e^{-st}}{s} \bigg|_{t=0}^1 = \frac{1}{s} [1 - e^{-s}]$$

$P(s)$ 的 ROC 为整个 s 平面是由于极点、零点相互抵消了。 $P(s)$ 的零点是使 $1 - e^{-s} = 0$ 或 $e^s = 1 = e^{j2\pi k}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的 s 值,当 $k=0$ 时的零点 $s=1$ 抵消了极点 $s=1$,于是

$$P(s) = \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} (s - j2\pi k)$$

有无限多的零点,但没有极点,因此 $P(s)$ 的 ROC 为整个 s 平面。

可以利用 MATLAB 函数 laplace 求这些信号的拉普拉斯变换,脚本文件如下:

```
% 例 3.2
% %
syms t s
% 单位阶跃函数
u = sym('heaviside(t)')
U = laplace(u)
% delta 函数
d = sym('dirac(t)')
D = laplace(d)
% 脉冲
p = heaviside(t) - heaviside(t-1)
P = laplace(p)

u = heaviside(t)
U = 1/s
d = dirac(t)
D = 1
p = heaviside(t) - heaviside(t-1)
p = 1/s - 1/(s * exp(s))
```

在符号 MATLAB 中 $u(t)$ 和 $\delta(t)$ 分别取名为 Heaviside 函数和 Dirac^① 函数。

3.3 单边拉普拉斯变换

单边拉普拉斯变换很重要,因为绝大多数应用中考考虑的都是因果系统和因果信号,在这种情况下双

① 保罗·狄拉克(Paul Dirac)(1902—1984 年)是英国电气工程师,但以在物理学方面的成就而出名。

边变换没必要,还因为任何信号或者 LTI 系统的冲激响应都可以分解成为因果分量和反因果分量,因此只需要计算单边拉普拉斯变换。

对任意函数 $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, 其单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 定义为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)u(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \text{ROC} \quad (3.6)$$

或者说因果的或使成为因果的信号的双边拉普拉斯变换。

注:

(1) 以上函数 $f(t)$ 既可以是一个信号,也可以是 LTI 系统的冲激响应。

(2) 如果 $f(t)$ 是因果的,将它乘以 $u(t)$ 则是多余的,但是若 $f(t)$ 不是因果的,乘以 $u(t)$ 就会使 $f(t)u(t)$ 成为因果的。若 $f(t)$ 是因果的,则其双边和单边拉普拉斯变换是一致的。

(3) 对于因果函数 $f(t)u(t)$ (注意 $u(t)$ 表明函数是因果的,因此它是函数的一个重要部分),其相应的拉普拉斯变换是带有某个收敛域的 $F(s)$,于是这个独一无二的关系可用以下变换对的形式来指明

$$f(t)u(t) \leftrightarrow F(s), \quad \text{ROC}$$

其中,符号 $\leftrightarrow$ 表明一个时域中的函数与一个 s 域中的函数的唯一对应关系,并非等号(实际上远非如此!)

(4) 在单边拉普拉斯变换中,积分下限设置为 $0_- = 0 - \epsilon$, 其中 $\epsilon \rightarrow 0$, 或者说 0_- 是 0 左侧的一个值。这样设置的理由是,在计算拉普拉斯变换时要保证定义在 $t=0$ 处的冲激函数 $\delta(t)$ 被包括进去。对于其他不包含冲激的函数,该下限也可取为 0 ,对变换没有任何影响。

(5) 单边拉普拉斯变换的一个重要用途是求解带初始条件的常微分方程,而双边拉普拉斯变换从 $t=-\infty$ (积分下限)开始,忽略了在 $t=0$ 时可能出现的非零初始条件,因而在解常微分方程时没有用,除非初始条件为零。

单边拉普拉斯变换可用于求任意信号或冲激响应的双边拉普拉斯变换。

■ 对有限支撑函数 $f(t)$, 即当 $t < t_1$ 及 $t > t_2$ 时, $f(t)=0$, 其中 $t_1 < t_2$, 其拉普拉斯变换为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)[u(t-t_1) - u(t-t_2)]], \quad \text{ROC: 整个 } s \text{ 平面} \quad (3.7)$$

■ 对因果函数 $g(t)$, 即当 $t < 0$ 时, $g(t)=0$, 其拉普拉斯变换为

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)u(t)], \quad \mathcal{R}_c = \{(\sigma, \Omega) : \sigma > \max\{\sigma_i\}, -\infty < \Omega < \infty\} \quad (3.8)$$

其中, $\{\sigma_i\}$ 是 $G(s)$ 的极点的实部。

■ 对反因果函数 $h(t)$, 即当 $t > 0$ 时, $h(t)=0$, 其拉普拉斯变换为

$$H(s) = \mathcal{L}[h(-t)u(t)]_{(-s)} \quad \mathcal{R}_{ac} = \{(\sigma, \Omega) : \sigma < \min\{\sigma_i\}, -\infty < \Omega < \infty\} \quad (3.9)$$

其中, $\{\sigma_i\}$ 是 $H(s)$ 的极点的实部。

■ 对非因果函数 $p(t)$, 即 $p(t) = p_{ac}(t) + p_c(t) = p(t)u(-t) + p(t)u(t)$, 其拉普拉斯变换为

$$P(s) = \mathcal{L}[p(t)] = \mathcal{L}[p_{ac}(-t)u(t)]_{(-s)} + \mathcal{L}[p_c(t)u(t)], \quad \mathcal{R}_c \cap \mathcal{R}_{ac} \quad (3.10)$$

一个定义在有限支撑 $t_1 \leq t \leq t_2$ 上的有界函数 $f(t)$, 其拉普拉斯变换一定存在,并且 ROC 为整个 s 平面,即对于任意 σ 值,定义拉普拉斯变换的积分都是有界的。事实上,若 $A = \max(|f(t)|)$, 则有

$$|F(s)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| |e^{-st}| dt \leq A \int_{t_1}^{t_2} e^{-\sigma t} dt = \begin{cases} A(e^{-\sigma t_1} - e^{-\sigma t_2})/\sigma, & \sigma \neq 0 \\ A(t_2 - t_1), & \sigma = 0 \end{cases}$$

小于无穷大,因此拉普拉斯变换积分对于任意 σ 值都是收敛的。

对于一个反因果函数 $h(t)$, 当 $t > 0$ 时, $h(t) = 0$, 其拉普拉斯变换可通过进行变量替换 $\tau = -t$ 之后而获得

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}[h(t)u(-t)] = \int_{-\infty}^0 h(t)u(-t)e^{-st} dt = -\int_{\infty}^0 h(-\tau)u(\tau)e^{s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} h(-\tau)u(\tau)e^{s\tau} d\tau = \mathcal{L}[h(-t)u(t)]_{(-s)} \end{aligned}$$

即它是因果函数 $h(-t)u(t)$ (反因果函数 $h(t)$ 的反褶) 的拉普拉斯变换以 $-s$ 取代 s 之后的结果。

根据以上讨论可知, 对于非因果函数 $p(t) = p_{ac}(t) + p_c(t)$, 其中, $p_{ac}(t) = p(t)u(-t)$ 是反因果分量, $p_c(t) = p(t)u(t)$ 是因果分量, $p(t)$ 的拉普拉斯变换等于

$$P(s) = \mathcal{L}[p(-t)u(t)]_{(-s)} + \mathcal{L}[p(t)u(t)]$$

$P(s)$ 的 ROC 等于其反因果分量和因果分量的 ROC 的交集。

【例 3.3】

求 $e^{j(\Omega_0 t + \theta)} u(t)$ 的拉普拉斯变换并利用此变换求 $x(t) = \cos(\Omega_0 t + \theta) u(t)$ 的拉普拉斯变换。考虑当 $\theta = 0$ 和 $\theta = -\pi/2$ 时的特殊情况, 确定这两种情况下的 ROC。用 MATLAB 画出当 $\Omega_0 = 2$, $\theta = 0$ 和 $\pi/4$ 时的信号波形以及相应的极点零点图。

解 可求得复因果信号 $e^{j(\Omega_0 t + \theta)} u(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{j(\Omega_0 t + \theta)} u(t)] &= \int_0^{\infty} e^{j(\Omega_0 t + \theta)} e^{-st} dt = e^{j\theta} \int_0^{\infty} e^{-(s - j\Omega_0)t} dt \\ &= \frac{-e^{j\theta}}{s - j\Omega_0} e^{-\sigma t - j(\Omega - \Omega_0)t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{e^{j\theta}}{s - j\Omega_0}, \quad \text{ROC: } \sigma > 0 \end{aligned}$$

根据欧拉恒等式

$$\cos(\Omega_0 t + \theta) = \frac{e^{j(\Omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\Omega_0 t + \theta)}}{2}$$

由积分的线性性并利用以上结果可得

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[\cos(\Omega_0 t + \theta) u(t)] = 0.5 \mathcal{L}[e^{j(\Omega_0 t + \theta)} u(t)] + 0.5 \mathcal{L}[e^{-j(\Omega_0 t + \theta)} u(t)] \\ &= 0.5 \frac{e^{j\theta}(s + j\Omega_0) + e^{-j\theta}(s - j\Omega_0)}{s^2 + \Omega_0^2} = \frac{s \cos(\theta) - \Omega_0 \sin(\theta)}{s^2 + \Omega_0^2} \end{aligned}$$

收敛域为 $\{(\sigma, \Omega) : \sigma > 0, -\infty < \Omega < \infty\}$, 即右半开 s 平面。 $X(s)$ 的极点为 $s_{1,2} = \pm j\Omega_0$, 其零点为 $s = \frac{\Omega_0 \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \Omega_0 \tan(\theta)$ 。

如果令上式中 $\theta = 0, -\pi/2$, 由于 $\cos(\Omega_0 t - \pi/2) = \sin(\Omega_0 t)$, 则可以得到以下拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}[\cos(\Omega_0 t) u(t)] = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}, \quad \mathcal{L}[\sin(\Omega_0 t) u(t)] = \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$$

以上拉普拉斯变换的 ROC 仍为 $\{(\sigma, \Omega) : \sigma > 0, -\infty < \Omega < \infty\}$, 即 s 平面的右半开面 (即不包括 $j\Omega$ -轴)。极-零图以及当 $\theta = 0, \theta = \pi/4$ 和 $\Omega_0 = 2$ 时的相应信号波形如图 3.6 所示。注意在以上所有情况下, 收敛域都不包含位于 $j\Omega$ -轴上的拉普拉斯变换的极点。

【例 3.4】

利用 MATLAB 的符号计算求实指数函数 $x(t) = e^{-t} u(t)$ 以及 $x(t)$ 被余弦函数调制后, 即 $y(t) = e^{-t} \cos(10t) u(t)$ 的拉普拉斯变换, 画出信号的图形以及它们的拉普拉斯变换的极点和零点。

解 我们采用的是以下脚本。计算拉普拉斯变换时使用了 MATLAB 函数 `laplace`, 画信号波形时使用了 MATLAB 函数 `ezplot`, 画极点和零点采用的是自定义的函数 `splane`。运行脚本会得到如下的拉

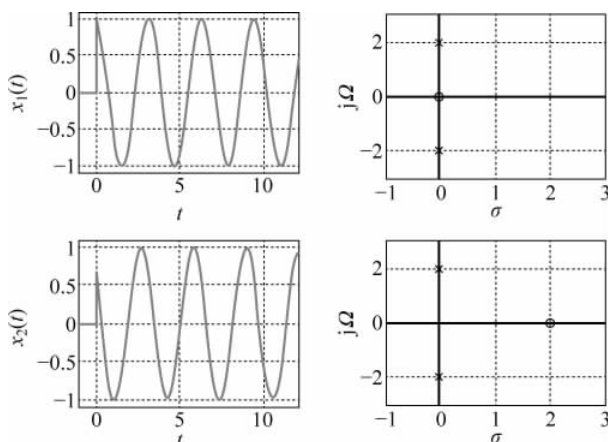


图 3.6 $\theta=0$ (上图)和 $\theta=\frac{\pi}{4}$ (下图)时, $\mathcal{L}[\cos(2t+\theta)u(t)]$ 的极点和零点的位置

注意上图中的零点在下图中被右移至 2, 因为 $x_2(t)$ 的拉普拉斯变换的零点是 $s = \Omega_0 \tan(\theta) = 2 \tan \frac{\pi}{4} = 2$ 。

普拉斯变换:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+101} = \frac{s+1}{(s+1)^2+100}$$

$X(s)$ 在 $s=-1$ 有一个极点, 但没有零点; 而 $Y(s)$ 在 $s=-1$ 有一个零点, 在 $s_{1,2}=-1 \pm j10$ 有一对极点。这些结果都显示在图 3.7 中。注意,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}[e^{-t} \cos(10t)u(t)] = \mathcal{L}[\cos(10t)u(t)]_{s'=s+1} \\ &= \frac{s'}{(s')^2+100} \Big|_{s'=s+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+100} \end{aligned}$$

即原始变量 s' 有一个“频移”。

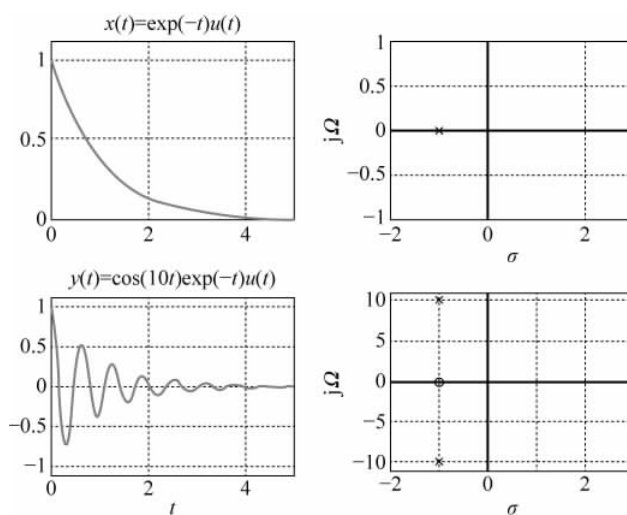


图 3.7 因果信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$ (上)和因果衰减信号 $y(t)=e^{-t}\cos(10t)u(t)$ 的拉普拉斯变换的极点和零点

```

% 例 3.4
% %
syms t
x = exp(-t);
y = x * cos(10 * t);
X = laplace(x)
Y = laplace(y)
% 信号波形及极点/零点图
figure(1)
subplot(221)
ezplot(x,[0,5]); grid
axis([0 5 0 1.1]); title('x(t) = exp(-t)u(t)')
numx = [0 1]; denx = [1 1];
subplot(222)
splane(numx,denx)
subplot(223)
ezplot(y,[-1,5]); grid
axis([0 5 -1.1 1.1]); title('y(t) = cos(10t)exp(-t)u(t)')
numy = [0 1 1]; deny = [1 2 101];
subplot(224)
splane(numy,deny)

```

以下函数 `splane` 用于画出拉普拉斯变换的极点和零点：

```

function splane(num,den)
%
% 函数 splane
% 输入：分子(num)和分母(den)的系数
% 按照降幂的顺序
% 输出：极点/零点图
% 用法：splane(num, den)
%
z = roots(num); p = roots(den);
A1 = [min(imag(z)) min(imag(p))]; A1 = min(A1) - 1;
B1 = [max(imag(z)) max(imag(p))]; B1 = max(B1) + 1;
N = 20;
D = (abs(A1) + abs(B1))/N;
im = A1:D:B1;
Nq = length(im);
re = zeros(1,Nq);
A = [min(real(z)) min(real(p))]; A = min(A) - 1;
B = [max(real(z)) max(real(p))]; B = max(B) + 1;
stem(real(z),imag(z),'o: ')
hold on
stem(real(p),imag(p),'x: ')
hold on
plot(re,im,'k'); xlabel('\sigma'); ylabel('j\Omega'); grid
axis([A 3 min(im) max(im)])
hold off

```

【例 3.5】

在统计信号处理中,随机信号的自相关函数 $c(\tau)$ 描述了随机信号 $x(t)$ 与其平移后所得信号 $x(t+\tau)$ 之间的相关性, $-\infty < \tau < \infty$ 是平移量。一般情况下 $c(\tau)$ 都是双边的,即对于正、负 τ 值, $c(\tau)$ 都是非零

的,而且 $c(\tau)$ 还是对称的。 $c(\tau)$ 的双边拉普拉斯变换与信号 $x(t)$ 的功率谱有关。令 $c(t) = e^{-a|t|}$, 其中 $a > 0$ (为了方便起见替换了变量 τ), 求其拉普拉斯变换, 指出其收敛域, 并判断是否可能计算出 $|C(\Omega)|^2$, 该函数被称为随机信号 $x(t)$ 的功率谱密度。

解 自相关函数可表示成 $c(t) = c(t)u(t) + c(t)u(-t) = c_c(t) + c_{ac}(t)$, 其中, $c_c(t)$ 是 $c(t)$ 的因果分量, $c_{ac}(t)$ 是 $c(t)$ 的反因果分量。于是 $c(t)$ 的拉普拉斯变换由下式给出:

$$C(s) = \mathcal{L}[c_c(t)] + \mathcal{L}[c_{ac}(-t)]_{(-s)}$$

对于 $c_c(t) = e^{-at}u(t)$, 其拉普拉斯变换为

$$C_c(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

收敛域为 $\{(\sigma, \Omega) : \sigma > -a, -\infty < \Omega < \infty\}$ 。反因果部分的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[c_{ac}(-t)u(t)]_{(-s)} = \frac{1}{-s+a}$$

由于它是反因果的, 且有一个极点在 $s=a$, 故其收敛域为 $\{(\sigma, \Omega) : \sigma < a, -\infty < \Omega < \infty\}$, 于是得到

$$C(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{-s+a} = \frac{2a}{a^2 - s^2}$$

收敛域是 $\sigma > -a$ 和 $\sigma < a$ 的交集, 即 $\{(\sigma, \Omega) : -a < \sigma < a, -\infty < \Omega < \infty\}$ 。这个区域包含 $j\Omega$ -轴, 于是可以计算功率在频率上的分布, 即随机信号 $x(t)$ 的功率谱密度 $|C(\Omega)|^2$ (如图 3.8 所示)。

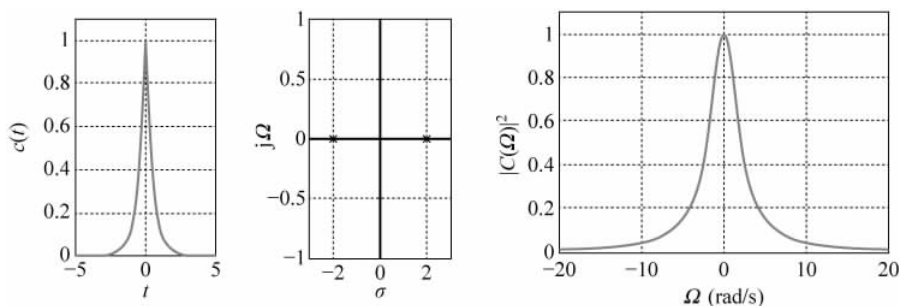


图 3.8 例 3.5 结果图

双边自相关函数 $c(t) = e^{-2|t|}$ 和 $C(s)$ 的极点(左图)。 $C(s)$ 的 ROC 为极点之间包括 $j\Omega$ -轴的区域。相应 $c(t)$ 的功率谱密度 $|C(\Omega)|^2$ 示于右图, 它等于 $c(t)$ 的傅里叶变换的幅度平方。

【例 3.6】

考虑一个非因果 LTI 系统, 其冲激响应为 $h(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t) = h_c(t) + h_{ac}(t)$, 求系统函数 $H(s)$ 及其 ROC, 并说明是否可由 $H(s)$ 计算 $H(j\Omega)$ 。

解 因果分量 $h_c(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$H_c(s) = \frac{1}{s+1}$$

只要 $\sigma > -1$ 。对于反因果分量, 有

$$\mathcal{L}[h_{ac}(t)] = \mathcal{L}[h_{ac}(-t)u(t)]_{(-s)} = \frac{1}{-s+2}$$

当 $\sigma - 2 < 0$ 或 $\sigma < 2$ 时上式收敛, 即收敛域为 $\{(\sigma, \Omega) : \sigma < 2, -\infty < \Omega < \infty\}$ 。于是系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{-s+2} = \frac{-3}{(s+1)(s-2)}$$

收敛域为 $\{(\sigma, \Omega): \sigma > -1, -\infty < \Omega < \infty\}$ 和 $\{(\sigma, \Omega): \sigma < 2, -\infty < \Omega < \infty\}$ 的交集, 或

$$\{(\sigma, \Omega): -1 < \sigma < 2, -\infty < \Omega < \infty\}$$

这是 s 平面上一个包含 $j\Omega$ -轴在内的区域, 因此 $H(j\Omega)$ 可由 $H(s)$ 得到。

【例 3.7】

求斜变函数 $r(t) = tu(t)$ 的拉普拉斯变换, 并利用它求出三角形脉冲信号 $\Lambda(t) = r(t+1) - 2r(t) + r(t-1)$ 的拉普拉斯变换。

解 注意到斜变函数虽然是一个随 t 不断增长的函数, 但仍然可以获得它的拉普拉斯变换。

$$R(s) = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2} (-st - 1) \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

当 $\sigma > 0$ 时, 以上积分存在。因此 $R(s) = 1/s^2$, 收敛域为 $\{(\sigma, \Omega): \sigma > 0, -\infty < \Omega < \infty\}$ 。其实可以避免以上的积分计算, 注意, 如果对 $u(t)$ 的拉普拉斯变换中的 s 求导, 即

$$\frac{dU(s)}{ds} = \int_0^{\infty} \frac{de^{-st}}{ds} dt = \int_0^{\infty} (-t)e^{-st} dt = - \underbrace{\int_0^{\infty} te^{-st} dt}_{R(s)}$$

这里假设求导和积分的顺序可以交换, 于是就有

$$R(s) = - \frac{dU(s)}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

可以证明, $\Lambda(t)$ 的拉普拉斯变换等于 (请读者自己尝试)

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s^2} [e^s - 2 + e^{-s}]$$

$\Lambda(s)$ 的零点是使 $e^s - 2 + e^{-s} = 0$ 的 s 值, 或者通过乘以 e^{-s} 得

$$1 - 2e^{-s} + e^{-2s} = (1 - e^{-s})^2 = 0$$

即在

$$s_k = j2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

有双重零点。特别地, 当 $k=0$ 时有两个零点在 0 处, 它们与来自分母 s^2 的两个位于 0 处的极点抵消了, 考虑到这个极零点相消 (见图 3.9) 的结果, 因此我们说 $\Lambda(s)$ 有无限多个零点, 但没有极点。于是可得到这样的结论, 作为一个有限支撑信号的拉普拉斯变换, $\Lambda(s)$ 的收敛域为整个 s 平面, 并且可以在 $s = j\Omega$ 上计算其值。

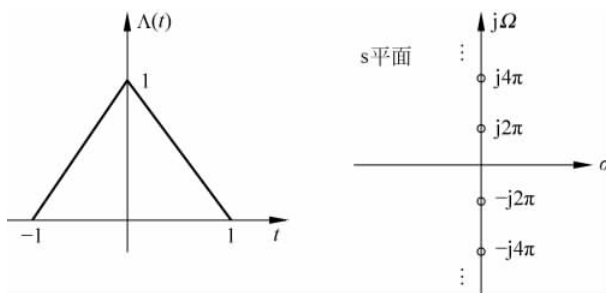


图 3.9 例 3.7 结果图

三角形脉冲信号 $\Lambda(t)$ 的拉普拉斯变换, 其收敛域是整个 s 平面, 因为它没有极点, 但有无限多个双重零点位于 $\pm j2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

3.4 单边拉普拉斯变换的性质

下面考虑单边拉普拉斯变换的基本性质,这些性质均总结在表 3.1 中。

表 3.1 单边拉普拉斯变换的基本性质

因果函数、常数	$\alpha f(t), \beta g(t)$	$\alpha F(s), \beta G(s)$
线性	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$
时移	$f(t-\alpha)u(t-\alpha)$	$e^{-\alpha s}F(s)$
频移	$e^{st}f(t)$	$F(s-\alpha)$
乘以 t	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
导数	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0_-)$
二阶导数	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0_-) - f^{(1)}(0)$
积分	$\int_{0_-}^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
扩展/压缩	$f(\alpha t), \alpha \neq 0$	$\frac{1}{ \alpha }F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
初值	$f(0_-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	

在学习这一节时要注意以下三个结论：

- 连续时间信号和系统的时域和频域表示是互补的,即信号或系统的某些特性在一个域中比在另一个域中更容易观察到。
- 由于时间和频率之间存在着反比关系,因此时域和频域的运算之间也存在着可交换的关系,或称为对偶性。
- 信号的拉普拉斯变换的性质同样适用于系统的冲激响应的拉普拉斯变换,因此将信号和冲激响应都表示为函数。

3.4.1 线性

对于函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 以及常数 a 和 b ,若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的拉普拉斯变换分别为 $F(s)$ 和 $G(s)$,则称拉普拉斯变换是线性的：

$$\mathcal{L}[af(t)u(t) + bg(t)u(t)] = aF(s) + bG(s)$$

利用积分的线性性可以很容易地证明拉普拉斯变换的线性性：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t)u(t) + bg(t)u(t)] &= \int_0^\infty [af(t) + bg(t)]u(t)e^{-st} dt \\ &= a \int_0^\infty f(t)u(t)e^{-st} dt + b \int_0^\infty g(t)u(t)e^{-st} dt \\ &= a\mathcal{L}[f(t)u(t)] + b\mathcal{L}[g(t)u(t)]\end{aligned}$$

后面将用线性性质说明因果信号拉普拉斯变换的极点位置的重要性。正如之前已得到的,指数信号 $f(t) = Ae^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$F(s) = \frac{A}{s+a}, \quad \text{ROC: } \sigma > -|a|$$

其中 a 通常可为复数,其极点 $s = -a$ 的位置与信号密切相关。例如,若 $a = 5$, $f(t) = Ae^{-5t}u(t)$ 是一个衰减指数信号, $F(s)$ 的极点在 $s = -5$ (s 平面的左半平面); 若 $a = -5$, 得到的是一个增长的指数信号, 极点在 $s = 5$ (s 平面的右半平面)。 $|a|$ 的值越大,指数衰减 ($a > 0$) 或增长 ($a < 0$) 得也就越快,因此 $Ae^{-10t}u(t)$ 比 $Ae^{-5t}u(t)$ 衰减得快得多,而 $Ae^{10t}u(t)$ 比 $Ae^{5t}u(t)$ 增长得快得多。

$f(t) = e^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s) = 1/(s+a)$, 对于 a 的任意实值, $F(s)$ 都有一个位于 s 平面实轴 σ 上的极点,于是有以下三种情况:

(1) 当 $a = 0$, 极点在原点 $s = 0$, 对应的信号是 $f(t) = u(t)$, 该信号在 $t \geq 0$ 时是个常数,即它不衰减。

(2) 当 $a > 0$, 信号 $f(t) = e^{-at}u(t)$ 是个衰减的指数信号, $F(s)$ 的极点 $s = -a$ 在 s 平面左半平面的实轴 σ 上。当极点朝着远离原点的位置向左移动时,指数衰减得快一些; 当它朝着原点移动时,指数衰减得慢一些。

(3) 当 $a < 0$, 极点 $s = -a$ 在 s 平面右半平面的实轴 σ 上,对应的是一个增长的信号。当极点向右移动时,指数增长得更快了; 当它朝着原点移动时,指数增长的速度变慢了,很明显该信号是没有用的,因为它连续不断地增长。

结论: 拉普拉斯平面上的 σ -轴对应着阻尼,位于 s 平面左半平面内 σ -轴上的单极点对应一个衰减的指数,而位于 s 平面右半平面内 σ -轴上的单极点对应一个增长的指数。

若考虑

$$g(t) = A\cos(\Omega_0 t)u(t) = A \frac{e^{j\Omega_0 t}}{2}u(t) + A \frac{e^{-j\Omega_0 t}}{2}u(t)$$

并令 $a = j\Omega_0$, 从而将 $g(t)$ 表示成

$$g(t) = 0.5[Ae^{at}u(t) + Ae^{-at}u(t)]$$

则利用拉普拉斯变换的线性性和前面的结果可得

$$G(s) = \frac{A}{2} \frac{1}{s - j\Omega_0} + \frac{A}{2} \frac{1}{s + j\Omega_0} = \frac{As}{s^2 + \Omega_0^2} \quad (3.11)$$

$G(s)$ 有一个零点位于 $s = 0$, 极点则是这些值:

$$s^2 + \Omega_0^2 = 0 \Rightarrow s^2 = -\Omega_0^2, \quad \text{即 } s_{1,2} = \pm j\Omega_0$$

这些极点都位于 $j\Omega$ -轴上。离 $j\Omega$ -轴上的原点越远的极点,频率 Ω_0 越高,越靠近原点的极点,频率 Ω_0 越低,因此 $j\Omega$ -轴对应着频率轴。而且要注意,为了产生实值信号 $g(t)$,需要两个复共轭极点,一个在 $+j\Omega_0$, 另一个在 $-j\Omega_0$ 。虽然频率是一个正值(正如用频率计测量得到的那样),但为了表示“实的”信号,“负的”频率也是必要的(如果极点不是复共轭对,拉普拉斯逆变换就是复值的,而不是实值的)。

结论: 正弦有一对位于 $j\Omega$ -轴上的极点,为了使这些极点对应一个实值信号,它们应该是复共轭对,既需要负值频率,也需要正值频率。而且,当这些极点朝着远离 $j\Omega$ -轴上原点的方向移动时,频率就增大;而任何时候极点移向原点,频率就减小。

再来考虑信号 $d(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t)u(t)$, 即因果正弦信号被 $e^{-\alpha t}$ 乘(或者说调制)的情况。根据欧拉恒等式有

$$d(t) = A \left[\frac{e^{(-\alpha + j\Omega_0)t}}{2j} u(t) - \frac{e^{(-\alpha - j\Omega_0)t}}{2j} u(t) \right]$$

这样就可以再次利用线性性得到

$$D(s) = \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{s + \alpha - j\Omega_0} - \frac{1}{s + \alpha + j\Omega_0} \right] = \frac{A\Omega_0}{(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2} \quad (3.12)$$

注意式(3.11)和式(3.12)之间的关系。若给定了 $G(s)$, 则 $D(s) = G(s + \alpha)$, $G(s)$ 对应于 $g(t) = A \cos(\Omega_0 t)$, $D(s)$ 对应于 $d(t) = g(t)e^{-\alpha t}$ 。函数 $g(t)$ 乘上一个指数 $e^{-\alpha t}$ 可以将变换 $G(s)$ 平移成为 $G(s + \alpha)$, 这里 α 既可以是实数也可以是虚数, 这就是**复频移**性质。 $D(s)$ 的极点的实部等于阻尼系数 $-\alpha$, 虚部等于频率 $\pm \Omega_0$ 。极点的实部指明信号的衰减(若 $\alpha > 0$)或增长(若 $\alpha < 0$), 而虚部则指明信号中余弦的频率。再次地, 由于信号 $d(t)$ 是实值的, 故其极点都将是复共轭对。

结论：极点的位置(从某种程度上说也包括零点的位置)决定了信号的特性, 正如前面两种情况说明的那样。信号是由它们的阻尼和频率来刻画的, 因此可由其拉普拉斯变换的极点来描述。

最后考虑的是信号 $d(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t)u(t)$ 乘以 t 从而得到 $p(t) = Ate^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t)u(t)$ 的情况。实际上时域中乘以 t 等价于在拉普拉斯域, $D(s)$ 对 s 微分并乘以 -1 , 确实如此, 假定微分和积分可以交换运算次序, 那么有

$$\frac{dD(s)}{ds} = \int_0^\infty d(t) \frac{d e^{-st}}{ds} dt = \int_0^\infty [-t d(t)] e^{-st} dt = \mathcal{L}[-t d(t)]$$

于是 $p(t)$ 的拉普拉斯变换等于

$$P(s) = \mathcal{L}[t d(t)] = -\frac{dD(s)}{ds} = -\frac{-2A\Omega_0(s + \alpha)}{[(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2]^2} = \frac{2A\Omega_0(s + \alpha)}{[(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2]^2}$$

通常有：

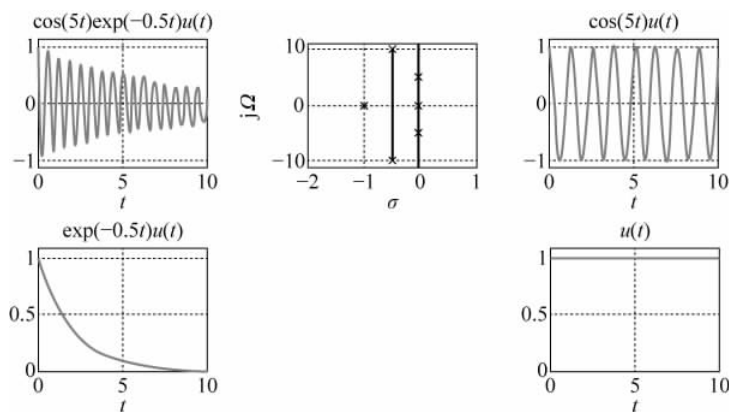
结论：函数乘以 t 会导致双重极点。通常对于因果函数 $f(t)$, 若其拉普拉斯变换为 $F(s)$, 那么有变换对

$$t^n f(t) u(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad n \text{ 为大于等于 } 1 \text{ 的整数} \quad (3.13)$$

以上结论可通过计算 $F(s)$ 的 n 阶导数而得以证明：

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \int_0^\infty f(t) \frac{d^n e^{-st}}{ds^n} dt = \int_0^\infty f(t) (-t)^n e^{-st} dt$$

如果将以上考虑过的不同信号相加, 那么所得信号的拉普拉斯变换就是各信号的拉普拉斯变换之和, 且极点/零点应该是来自于各个拉普拉斯变换的极点/零点的集合。意识到这一点对于求拉普拉斯逆变换非常重要, 若要进行拉普拉斯逆变换, 可以采用与以上过程相反的过程: 将拉普拉斯变换按照极点或极点对(若是复共轭极点)分离开, 然后将每一个(或一对)极点与一个常用形式的信号联系起来, 该信号参数则利用变换的所有零点和所有其他极点来确定。图 3.10 举例说明了极点位置的重要性以及 σ -轴和 $j\Omega$ -轴的作用。

图 3.10 极点位置以及 σ -轴和 $j\Omega$ 轴的作用

对于画在中间图中的极点,所有可能的信号都显示在周围的几个图中:极点 $s=0$ 对应一个单位阶跃信号; $j\Omega$ -轴上的一对复共轭极点对应一个正弦;具有负实部的一对复共轭极点提供了一个正弦乘以一个指数;由在负实轴上的极点得到一个衰减指数。实际的振幅和相位由零点和其他极点决定。

3.4.2 微分

对于拉普拉斯变换为 $F(s)$ 的信号 $f(t)$,其一阶和二阶导数的单边拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}u(t)\right] = sF(s) - f(0_-) \quad (3.14)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}u(t)\right] = s^2F(s) - sf(0_-) - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0_-} \quad (3.15)$$

通常,如果 $f^{(N)}(t)$ 代表函数 $f(t)$ 的 N 阶导数,其中 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$,则有

$$\mathcal{L}[f^{(N)}(t)u(t)] = s^N F(s) - \sum_{k=0}^{N-1} f^{(k)}(0_-)s^{N-1-k} \quad (3.16)$$

其中, $f^{(m)}(t) = d^m f(t)/dt^m$ 为 m 阶导数, $m > 0$, 并且 $f^{(0)}(t) \triangleq f(t)$ 。

因果信号的导数的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}u(t)\right] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

用分部积分法计算以上积分,令 $w = e^{-st}$, 则 $dw = -se^{-st} dt$, 令 $v = f(t)$, 于是 $dv = \frac{df(t)}{dt} dt$, 由于

$$\int w dv = wv - \int v dw$$

于是应该得到

$$\begin{aligned} \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= e^{-st} f(t) \Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt = -f(0_-) + s \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0_-) + sF(s) \end{aligned}$$

其中, $e^{-st} f(t) \Big|_{t=\infty} = f(0_-)$, 且由于有收敛域的保证,故 $e^{-st} f(t) \Big|_{t=\infty} = 0$ 。对于二阶导数有

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}u(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{df^{(1)}(t)}{dt}u(t)\right] = s\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] - f^{(1)}(0_-)$$

$$= s^2 F(s) - sf(0_-) - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0_-}$$

这里采用了记号 $f^{(1)}(t) = df(t)/dt$ 。将这种方法推广到任意阶导数便可得到上述一般结果。

注：

(1) 对于定义于所有 t 的信号 $x(t)$ 来说,其拉普拉斯变换的微分性质为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s)$$

通过对拉普拉斯逆变换式中的 t 求导,且假定积分和求导的顺序可以交换,就能够证明这个性质。利用式(3.4)可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \frac{de^{st}}{dt} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} (sX(s)) e^{st} ds$$

或者说 $sX(s)$ 是 $x(t)$ 的导数的拉普拉斯变换。由此可见双边拉普拉斯变换不包括初始条件。以上结论可推广至双边拉普拉斯变换的任意阶导数,有

$$\mathcal{L}[d^N x(t)/dt^N] = s^N X(s)$$

(2) 应用拉普拉斯变换的线性性质和微分性质,可以将求解微分方程的问题转化成为一个代数问题。

【例 3.8】

求 RL 电路与一个电压源 $v_s(t)$ 串联连接(见图 3.11)的冲激响应,电流 $i(t)$ 是输出,输入是电压源 $v_s(t)$ 。

解 为了求 RL 电路的冲激响应,令 $v_s(t) = \delta(t)$, 并设电感的初始电流为 0。根据基尔霍夫电压定律,有

$$v_s(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t), \quad i(0_-) = 0$$

这是一个一阶线性常系数微分方程,初始条件为零,并且输入信号是因果的,因此它是前面讨论过的线性时不变系统。

令 $v_s(t) = \delta(t)$ 并对以上方程进行拉普拉斯变换(利用变换的线性性质和微分性质,记住初始条件等于 0),可得

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)\right]$$

$$1 = sLI(s) + RI(s)$$

其中, $I(s)$ 是 $i(t)$ 的拉普拉斯变换。求解出 $I(s)$ 得

$$I(s) = \frac{1/L}{s + R/L}$$

这是之前见过的信号

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-(R/L)t} u(t)$$

的拉普拉斯变换。注意到 $i(0_-) = 0$, 而且响应具有衰减指数函数的形式,它尽力追随输入信号(一个 δ 函数),即它一开始出现跳变但最终趋向于零。

【例 3.9】

利用微分性质由 $x(t) = \cos(\Omega_0 t)u(t)$ 的拉普拉斯变换求 $\sin(t)u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解 因果正弦 $x(t) = \cos(\Omega_0 t)u(t)$ 的拉普拉斯变换为

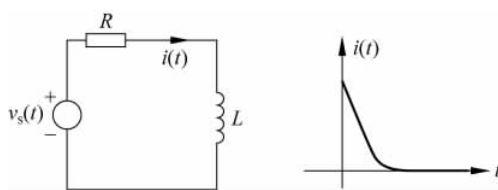


图 3.11 输入为 $v_s(t)$ 的 RL 电路的冲激响应 $i(t)$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$$

然后

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= u(t) \frac{d\cos(\Omega_0 t)}{dt} + \cos(\Omega_0 t) \frac{du(t)}{dt} = -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t)u(t) + \cos(\Omega_0 t)\delta(t) \\ &= -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t)u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$\delta(t)$ 的出现说明 $x(t)$ 在 $t=0$ 处不连续, 并且跳变量为 +1。于是 $dx(t)/dt$ 的拉普拉斯变换由下式给出:

$$sX(s) - x(0_-) = -\Omega_0 \mathcal{L}[\sin(\Omega_0 t)u(t)] + \mathcal{L}[\delta(t)]$$

故正弦的拉普拉斯变换等于

$$\mathcal{L}[\sin(\Omega_0 t)u(t)] = -\frac{sX(s) - x(0_-) - 1}{\Omega_0} = \frac{1 - sX(s)}{\Omega_0} = \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$$

以上利用了 $x(0_-) = 0$ 和 $X(s) = \mathcal{L}[\cos(\Omega_0 T)]$ 。

注意, 只要信号在 $t=0$ 处不连续, 如 $x(t) = \cos(\Omega_0 t)u(t)$ 这种情况, 由于不连续的缘故, 其导数就会包含 $\delta(t)$ 信号。相反地, 只要信号在 $t=0$ 处是连续的, 例如 $y(t) = \sin(\Omega_0 t)u(t)$, 其导数就不会包含 $\delta(t)$ 信号。实际上, 由于正弦在 $t=0$ 处等于 0, 故而有

$$\frac{dy(t)}{dt} = \Omega_0 \cos(\Omega_0 t)u(t) + \sin(\Omega_0 t)\delta(t) = \Omega_0 \cos(\Omega_0 t)u(t)$$

3.4.3 积分

因果信号 $y(t)$ 的积分的拉普拉斯变换由下式给出:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau) d\tau u(t)\right] = \frac{Y(s)}{s} \quad (3.17)$$

利用微分性质可以证明此性质。令积分为

$$f(t) = \left[\int_0^t y(\tau) d\tau\right] u(t)$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= y(t)u(t) + \delta(t)\int_0^t y(\tau) d\tau = y(t)u(t) + 0 \\ \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= sF(s) - f(0) = Y(s) \end{aligned}$$

由于 $f(0)=0$ (在一个点上的面积), 于是有

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau) d\tau u(t)\right] = \frac{Y(s)}{s}$$

【例 3.10】

假定

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = 3u(t) - 2y(t)$$

求因果信号 $y(t)$ 的拉普拉斯变换。

解 应用积分性质得

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{3}{s} - 2Y(s)$$

求解出 $Y(s)$ 为

$$Y(s) = \frac{3}{2(s+0.5)}$$

相应的信号是 $y(t) = 1.5e^{-0.5t}u(t)$ 。

3.4.4 时移

如果 $f(t)u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$, 那么时移信号 $f(t-\tau)u(t-\tau)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s) \quad (3.18)$$

该性质可以很容易地通过计算平移信号的拉普拉斯变换并替换变量而加以证明。该性质说明, 当延迟(或超前)信号得到 $f(t-\tau)u(t-\tau)$ (或 $f(t+\tau)u(t+\tau)$), 其拉普拉斯变换等于 $F(s)$ 乘以 $e^{-\tau s}$ (或 $e^{\tau s}$)。需要强调的是此性质要求对 $f(t)$ 和 $u(t)$ 都进行平移, 如果只是平移二者中的一个, 就不能直接应用该性质。

【例 3.11】

求图 3.12 所示因果脉冲序列 $x(t)$ 的拉普拉斯变换, 令 $x_1(t)$ 代表第一个脉冲, 即 $x(t)$ 在区间 $0 \leq t < 1$ 内的部分。

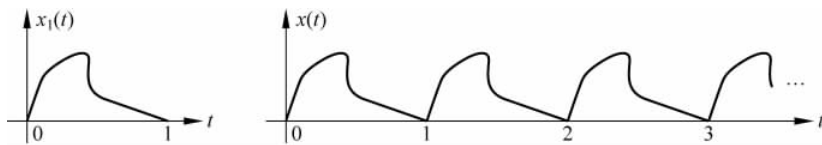


图 3.12 一类因果脉冲信号

解 当 $t \geq 0$ 时, 可写出

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t-1) + x_1(t-2) + \cdots$$

当 $t < 0$ 时 $x(t) = 0$ 。根据时移性质和线性性质有

$$X(s) = X_1(s)[1 + e^{-s} + e^{-2s} + \cdots] = X_1(s) \left[\frac{1}{1 - e^{-s}} \right]$$

注意到 $1 + e^{-s} + e^{-2s} + \cdots = 1/(1 - e^{-s})$, 该结果可以通过交叉相乘来验证:

$$[1 + e^{-s} + e^{-2s} + \cdots](1 - e^{-s}) = (1 + e^{-s} + e^{-2s} + \cdots) - (e^{-s} + e^{-2s} + \cdots) = 1$$

$X(s)$ 的极点是 $X_1(s)$ 的极点和 $1 - e^{-s} = 0$ 的根(使 $e^{-s} = 1$ 的 s 值, 即 $s_k = \pm j2\pi k$, k 为大于等于 0 的任意整数), 因此 $X(s)$ 有无穷多个极点, 后面将介绍的利用极点求拉普拉斯逆变换的部分分式展开法, 在这里是不能用的。之所以将此例安排在讲拉普拉斯逆变换之前, 是为了说明当求此类拉普拉斯函数的逆变换时, 需要应用时移性质, 否则可能需要考虑一个无限多个极点的部分分式展开问题。

【例 3.12】

考虑图 3.13 所示的全波整流信号, 求其拉普拉斯变换。

解 全波整流信号的第一个周期可表示为

$$x_1(t) = \sin(2\pi t)u(t) + \sin(2\pi(t-0.5))u(t-0.5)$$

它的拉普拉斯变换为

$$X_1(s) = \frac{2\pi(1 + e^{-0.5s})}{s^2 + (2\pi)^2}$$

正弦脉冲串可表示为

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(t - 0.5k)$$

于是其拉普拉斯变换等于

$$\begin{aligned} X(s) &= X_1(s)[1 + e^{-s/2} + e^{-s} + \cdots] = X_1(s) \frac{1}{1 - e^{-s/2}} \\ &= \frac{2\pi(1 + e^{-s/2})}{(1 - e^{-s/2})(s^2 + 4\pi^2)} \end{aligned}$$

【例 3.13】

求信号 $x(t) = e^{-3t}u(t-4)$ 的拉普拉斯变换。

解 因为信号的两个部分没有被同等地延迟,故不能直接应用时移性质,不过由 $x(t)$ 的一个等价表达式可得

$$x(t) = [e^{-3(t-4)}u(t-4)]e^{-12} \Rightarrow X(s) = e^{-12} \frac{e^{-4s}}{s+3} = \frac{e^{-4(s+3)}}{s+3}$$

注:

由于时间和频率之间的反比关系,因而时域中的运算在频域中都有相应的对偶运算,频域在本章里是拉普拉斯域。下面用三种特殊情况解释说明该结论。

(1) **求导和积分的对偶性** 对于一个因果函数 $f(t)$, 即 $f(0_-) = 0$, 考虑以下变换对:

$$\begin{aligned} f(t) &\leftrightarrow F(s) \\ \frac{df(t)}{dt} &\leftrightarrow sF(s) \\ tf(t) &\leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds} \end{aligned} \quad (3.19)$$

注意,在拉普拉斯域中 $F(s)$ 乘以 s 等价于时域中对 $f(t)$ 求导,而函数 $f(t)$ 乘以 t 等价于对 $-F(s)$ 求导。这种相反的关系被称为时域和频域中求导的对偶性。类似地,对于同样的变换对 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ 有如下的积分对偶性:

$$\begin{aligned} \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau &\leftrightarrow F(s)/s \\ f(t)/t &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{-s} F(-\rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.20)$$

以上第一个变换对就是积分性质。第二个变换对的证明如下:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-s} F(-\rho) d\rho &= \int_{-\infty}^{-s} \int_0^{\infty} f(t) e^{\rho t} dt d\rho \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{-s} e^{\rho t} d\rho dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \end{aligned}$$

在这种情况下, $F(s)$ 被 s 除等价于时域中对 $f(t)$ 积分,而 $f(t)$ 被 t 除等价于对 $F(s)$ 积分,如上所示。

在求拉普拉斯变换时可以利用这些对偶性,这样就不需要利用积分定义计算了。例如,已知斜变函数 $r(t) = tu(t)$ 的拉普拉斯变换为 $R(s) = \frac{1}{s^2}$, 于是可得

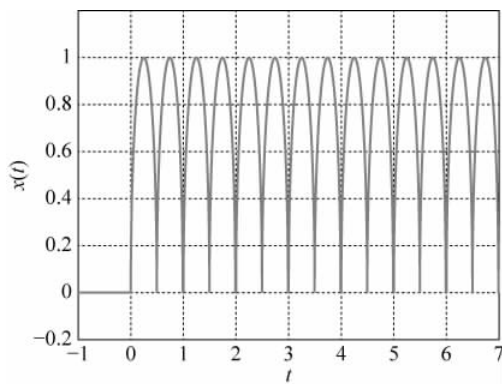


图 3.13 全波整流因果信号

$$\mathcal{L}\left[\frac{dr(t)}{dt} = u(t)\right] = sR(s) - r(0_-) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[tr(t) = t^2 u(t)] = -\frac{dR(s)}{ds} = -\frac{ds^{-2}}{ds} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t r(\tau) d\tau = \frac{t^2}{2} u(t)\right] = \frac{R(s)}{s} = \frac{1}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{r(t)}{t} = u(t)\right] = \int_{-\infty}^{-s} R(-\rho) d\rho = \int_{-\infty}^{-s} \rho^{-2} d\rho = -\rho^{-1} \Big|_{-\infty}^{-s} = \frac{1}{s}$$

(2) 时移和频移的对偶性 再次考虑变换对 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 于是有

$$\begin{aligned} f(t-\alpha)u(t-\alpha) &\leftrightarrow F(s)e^{-\alpha s} \\ f(t)e^{-\alpha t}u(t) &\leftrightarrow F(s+\alpha) \end{aligned} \quad (3.21)$$

这说明在一个域中的平移对应于在另一个域中乘以指数函数。以上第二个变换对的证明如下:

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-\alpha t}u(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s+\alpha)$$

此性质在求拉普拉斯变换时也很有用, 利用它就可以不用积分了。例如, 已知 $f(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s) = 1/(s+\alpha)$, 于是有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-\beta) = e^{-\alpha(t-\beta)}u(t-\beta)] &= F(s)e^{-\beta s} = \frac{e^{-\beta s}}{s+\alpha} \\ \mathcal{L}[f(t)e^{-\beta t} = e^{-(\alpha+\beta)t}u(t)] &= F(s+\beta) = \frac{1}{(s+\beta)+\alpha} \end{aligned}$$

与函数相乘的这个指数不必是实的, 例如 $f(t) = u(t)$, 其拉普拉斯变换为 $F(s) = 1/s$, 那么有

$$\begin{aligned} \cos(\Omega_0 t)u(t) &= 0.5e^{j\Omega_0 t}u(t) + 0.5e^{-j\Omega_0 t}u(t) \\ &= \frac{0.5}{s-j\Omega_0} + \frac{0.5}{s+j\Omega_0} = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2} \end{aligned}$$

该结果与之前得到的 $\cos(\Omega_0 t)$ 的拉普拉斯变换是一致的。

(3) 时域扩展、压缩和反褶的对偶性 再次考虑拉普拉斯变换对 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 且 $\alpha \neq 0$, 则有以下变换对:

$$\begin{aligned} f(\alpha t)u(t) &\leftrightarrow (1/|\alpha|)F(s/\alpha) \\ \frac{1}{|\alpha|}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)u(t) &\leftrightarrow F(\alpha s) \end{aligned} \quad (3.22)$$

实际上确实有如下等式成立:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(\alpha t)u(t)] &= \int_0^{\infty} f(\alpha t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau/\alpha} \frac{d\tau}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}F(s/\alpha) \\ F(\alpha s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha s t} dt = \int_0^{\infty} f(\tau/\alpha)e^{-s\tau} \frac{d\tau}{|\alpha|} = \int_0^{\infty} \left[\frac{f(\tau/\alpha)}{|\alpha|}\right]e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

除了对偶性, 这些变换对还清楚地显示出时域和频域之间的反比关系, 时域的压缩对应频域的扩展, 反之亦然。此外, 这些变换对表明当 $\alpha = -1$ 时有

$$\mathcal{L}[f(-t)u(t)] = F(-s)$$

或者说如果 $f(t)$ 是反因果的, 其拉普拉斯变换就等于其反褶 $f(-t)u(t)$ 的拉普拉斯变换将 s 变成 $-s$ 。

3.4.5 卷积积分

因为这是拉普拉斯变换最重要的性质, 所以我们会在研究完拉普拉斯逆变换之后, 再对其进行更广

泛的介绍。

一个拉普拉斯变换为 $X(s)$ 的因果信号 $x(t)$, 与一个拉普拉斯变换为 $H(s)$ 的因果冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[(x * h)(t)] = X(s)H(s) \quad (3.23)$$

如果 LTI 系统的输入是因果信号 $x(t)$, 系统的冲激响应是 $h(t)$, 那么输出 $y(t)$ 可写成

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

否则为 0。它的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} x(\tau) \left[\int_0^{\infty} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt\right] e^{-s\tau} d\tau = X(s)H(s) \end{aligned}$$

其中内部的积分可利用 $h(t)$ 的因果性证明等于 $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ (将变量变为 $v = t - \tau$), 剩下的积分是 $x(t)$ 的拉普拉斯变换。

一个输入为 $x(t)$, 输出为 $y(t)$ 的 LTI 系统, 其冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换是系统函数或转移函数 $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$, $H(s)$ 可表示为比值

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{输出}]}{\mathcal{L}[\text{输入}]} = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.24)$$

该函数被称为“转移函数”是因为它把输入端的拉普拉斯变换转移到输出端。与信号的拉普拉斯变换一样, $H(s)$ 通过其极点和零点来表征 LTI 系统, 因此它成为分析和综合系统的一个非常重要的工具。

3.5 拉普拉斯逆变换

求拉普拉斯逆变换在于找到一个函数(一个信号或者一个系统的冲激响应), 该函数的拉普拉斯变换就等于具有所给收敛域的所给变换。下面将考虑三种情况:

- 产生因果函数的单边拉普拉斯变换的逆变换;
- 包含指数函数的拉普拉斯变换的逆变换;
- 产生反因果或非因果函数的双边拉普拉斯变换的逆变换。

要求其逆的已知函数 $X(s)$ 可以是信号的拉普拉斯变换, 也可以是转移函数, 即冲激响应的拉普拉斯变换。

3.5.1 单边拉普拉斯变换的逆变换

若考虑的信号 $x(t)$ 是因果信号, 则 $X(s)$ 的收敛域一定具有以下形式:

$$\{(\sigma, \Omega): \sigma > \sigma_{\max}, -\infty < \Omega < \infty\}$$

其中, $\sigma_{\max}$ 是 $X(s)$ 的所有极点实部的最大值。由于本节只考虑因果信号, 因此可以假定收敛域已知, 并且在表示拉普拉斯变换时将不再给出收敛域了。

最常用的求拉普拉斯逆变换的方法是**部分分式展开法**,该方法将所给函数按 s 展开成为一些分量的和,这些分量的逆变换可在拉普拉斯变换对表中找到。假定要求的信号存在一个有理的拉普拉斯变换,即

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{3.25}$$

其中, $N(s)$ 和 $D(s)$ 是具有实系数的关于 s 的多项式。为了使部分分式展开成为可能,需要 $X(s)$ 为有理真分式,即分子多项式 $N(s)$ 的阶低于分母多项式 $D(s)$ 的阶。如果 $X(s)$ 不是真分式,那么需要进行长除直到得到一个有理真分式函数,即

$$X(s) = g_0 + g_1s + \cdots + g_ms^m + \frac{B(s)}{D(s)} \tag{3.26}$$

其中, $B(s)$ 的阶低于 $D(s)$ 的阶,这样就能对 $B(s)/D(s)$ 进行部分分式展开了。 $X(s)$ 的逆变换由下式给出:

$$x(t) = g_0\delta(t) + g_1\frac{d\delta(t)}{dt} + \cdots + g_m\frac{d^m\delta(t)}{dt^m} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B(s)}{D(s)}\right] \tag{3.27}$$

在实际信号中极少出现 $\delta(t)$ 和它的导数(被称为冲激偶和三重冲激等),因此典型的有理函数都是分子多项式的阶低于分母多项式的阶的情况。

注:

- (1) 在进行逆变换之前要记住以下几点:
 - $X(s)$ 的极点提供了信号 $x(t)$ 的基本特征;
 - 如果 $N(s)$ 和 $D(s)$ 是具有实系数的关于 s 的多项式,那么 $X(s)$ 的零点和极点就是实数和(或)复共轭对,并且它们可以是简单的,也可以是多重的;
 - 由于逆变换的结果是因果的,故逆变换中应该包含 $u(t)$,函数 $u(t)$ 是逆变换表达式中不可缺少的一部分。

(2) 部分分式展开法的基本思想是将有理真分式函数分解成为有理分量的和,每个有理分量的逆变换都可以直接在表中查找到。表 3.2 列出了基本的单边拉普拉斯变换对。

表 3.2 单边拉普拉斯变换

	t 的函数	s 的函数及 ROC
(1)	$\delta(t)$	1, 整个 s 平面
(2)	$u(t)$	$\frac{1}{s}, \text{Re}[s] > 0$
(3)	$r(t)$	$\frac{1}{s^2}, \text{Re}[s] > 0$
(4)	$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{s+a}, \text{Re}[s] > -a$
(5)	$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}, \text{Re}[s] > 0$
(6)	$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}, \text{Re}[s] > 0$
(7)	$e^{-at}\cos(\Omega_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}, \text{Re}[s] > -a$
(8)	$e^{-at}\sin(\Omega_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}, \text{Re}[s] > -a$

续表

	t 的函数	s 的函数及 ROC
(9)	$2Ae^{-at} \cos(\Omega_0 t + \theta)u(t), a > 0$	$\frac{A\angle\theta}{s+a-j\Omega_0} + \frac{A\angle-\theta}{s+a+j\Omega_0}, \operatorname{Re}[s] > -a$
(10)	$\frac{1}{(N-1)!} t^{N-1} u(t)$	$\frac{1}{s^N}, N \text{ 为整数}, \operatorname{Re}[s] > 0$
(11)	$\frac{1}{(N-1)!} t^{N-1} e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^N}, N \text{ 为整数}, \operatorname{Re}[s] > -a$
(12)	$\frac{2A}{(N-1)!} t^{N-1} e^{-at} \cos(\Omega_0 t + \theta)u(t)$	$\frac{A\angle\theta}{(s+a-j\Omega_0)^N} + \frac{A\angle-\theta}{(s+a+j\Omega_0)^N}, \operatorname{Re}[s] > -a$

(3) 由于在进行部分分式展开时容易犯一些简单的代数错误,所以最好对最后的结果进行一下检查。检验之一是极点的位置,逆变换的一般形式应该可以在作展开之前由极点推导出。另一个检验是由初值定理提供,可以利用初值定理检验逆变换的初始值 $x(0_-)$ 是否等于当 $s \rightarrow \infty$ 时 $sX(s)$ 的极限值,即

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0_-) \quad (3.28)$$

上式可利用微分性质证明如下:

$$\mathcal{L}[dx(t)/dt] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0_-)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0_-)$$

其中积分中的指数函数趋于 0。

1. 简单实数极点

若 $X(s)$ 是有理真分式函数

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad (3.29)$$

其中, $\{s_k = -p_k\}, k=1,2$ 是 $X(s)$ 的简单实数极点,则它的部分分式展开式以及逆变换为

$$X(s) = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} \Leftrightarrow x(t) = [A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t}]u(t) \quad (3.30)$$

其中,展开式中的系数是这样计算产生的:

$$A_k = X(s)(s+p_k)|_{s=-p_k} \quad k=1,2$$

根据拉普拉斯变换表,对应 $A_k/(s+p_k)$ 的时间函数是 $A_k e^{-p_k t} u(t)$,于是逆变换 $x(t)$ 就是这种形式。至于如何求展开式的系数,以 A_1 为例,将等式两边乘以与其对应的分母 $(s+p_1)$,于是有

$$X(s)(s+p_1) = A_1 + \frac{A_2(s+p_1)}{s+p_2}$$

如果令 $s+p_1=0$,或者说 $s=-p_1$,则上式右边第二项将等于零,而且可以发现

$$A_1 = X(s)(s+p_1)|_{s=-p_1} = \frac{N(-p_1)}{-p_1+p_2}$$

对 A_2 的求法相同。

【例 3.14】

考虑有理真分式函数

$$X(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

求其因果的逆变换函数。

解 部分分式展开式为

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

考虑到两个极点都是实数,因此要求的 $x(t)$ 将是两个阻尼系数分别为 -1 和 -2 的衰减指数函数之和,即

$$x(t) = [A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}]u(t)$$

其中系数的求法如上面指出的那样:

$$A_1 = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{3s+5}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$A_2 = X(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{3s+5}{s+1} \Big|_{s=-2} = 1$$

从而

$$X(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

于是 $x(t) = [2e^{-t} + e^{-2t}]u(t)$ 。为了检查解的正确性,可利用初值定理。根据解的结果有 $x(0) = 3$, 它应该与用初值定理求得的结果一致:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) = \frac{3s^2+5s}{s^2+3s+2}] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3+5/s}{1+3/s+2/s^2} = 3$$

的确如此。

注: 还可以用其他方法求系数 A_1 和 A_2 。

■ 只要不被 0 除,以下表达式应该对任意 s 都有效:

$$X(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} \quad (3.31)$$

因此任取两个不同的 s 值就可以求出 A_1 和 A_2 , 例如:

$$\text{当 } s=0 \text{ 时, } X(0) = \frac{5}{2} = A_1 + \frac{1}{2}A_2$$

$$\text{当 } s=1 \text{ 时, } X(1) = \frac{8}{6} = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{3}A_2$$

于是就得到一个线性方程组,包含两个线性方程和两个未知数,应用克莱姆(Cramer)法则可求得 $A_1=2$ 和 $A_2=1$ 。

■ 交叉相乘式(3.31)中的部分分式可得

$$X(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = \frac{s(A_1+A_2) + (2A_1+A_2)}{s^2+3s+2}$$

对比分子有 $A_1+A_2=3$ 和 $2A_1+A_2=5$, 两个方程两个未知数,可以证明方程有唯一解 $A_1=2$ 和 $A_2=1$, 结果与前面相同。

2. 简单复共轭极点

考虑拉普拉斯变换

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s+\alpha)^2 + \Omega_0^2} = \frac{N(s)}{(s+\alpha-j\Omega_0)(s+\alpha+j\Omega_0)}$$

因为 $X(s)$ 的分子、分母多项式都是实系数, 所以其零点和极点中若出现复数, 一定是成对的复共轭零点和极点。可以认为一对复共轭极点的情况类似于上述两个简单实数极点的情况, 注意由于 $X(s)$ 是有理真分式, 故分子 $N(s)$ 一定是一个一阶多项式。 $X(s)$ 的极点为 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega_0$, 极点的实部是 $-\alpha$ 意味着信号 $x(t)$ 将包含一个指数项 $e^{-\alpha t}$, 还会乘以一个频率为 Ω_0 的正弦, 因为极点的虚部是 $\pm\Omega_0$, 于是可得以下展开式

$$X(s) = \frac{A}{s + \alpha - j\Omega_0} + \frac{A^*}{s + \alpha + j\Omega_0}$$

其中展开式中两个系数是互为共轭的复数。由极点的信息可推知逆变换的一般形式为

$$x(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t + \Phi) u(t)$$

其中, K 和 Φ 是常数。采用与前面相同的方法可求出 A 等于

$$A = X(s)(s + \alpha - j\Omega_0) \big|_{s=-\alpha+j\Omega_0} = |A| e^{j\theta}$$

易验证 $X(s)(s + \alpha + j\Omega_0) \big|_{s=-\alpha-j\Omega_0} = A^*$ 。于是逆变换为

$$\begin{aligned} x(t) &= [A e^{-(\alpha-j\Omega_0)t} + A^* e^{-(\alpha+j\Omega_0)t}] u(t) = |A| e^{-\alpha t} (e^{j(\Omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\Omega_0 t + \theta)}) u(t) \\ &= 2 |A| e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t + \theta) u(t) \end{aligned}$$

除了以上方法, 还有一种更为简便的求简单复共轭极点情况下逆变换的方法, 即通过将分子 $N(s)$ 做适当的变形, 这样做的目的是得到 $X(s)$ 的一个等价展开式, 展开式中的两项分别对应正弦乘以实指数函数和余弦乘以实指数函数。式(3.35)中的后一个表达式是通过将对应于正弦项和余弦项的相量相加而得到。

有理真分式函数

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2} = \frac{N(s)}{(s + \alpha - j\Omega_0)(s + \alpha + j\Omega_0)} \quad (3.32)$$

的部分分式展开式为

$$X(s) = \frac{A}{s + \alpha - j\Omega_0} + \frac{A^*}{s + \alpha + j\Omega_0}$$

$\{s_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega_0\}$ 是其复共轭极点, 其中,

$$A = X(s)(s + \alpha - j\Omega_0) \big|_{s=-\alpha+j\Omega_0} = |A| e^{j\theta}$$

从而其逆变换为函数

$$x(t) = 2 |A| e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t + \theta) u(t) \quad (3.33)$$

等价的部分分式展开式: 令 $N(s) = a + b(s + \alpha)$, 其中 a 和 b 是常数, 从而有

$$X(s) = \frac{a + b(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2} = \frac{a}{\Omega_0} \frac{\Omega_0}{(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2} + b \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2} \quad (3.34)$$

因此逆变换为

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{a}{\Omega_0} e^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t) + b e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t) \right] u(t) \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{\Omega_0^2} + b^2} e^{-\alpha t} \cos\left(\Omega_0 t - \arctan\left(\frac{a}{\Omega_0 b}\right)\right) u(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

注：

(1) 当 $\alpha=0$ 时, 式(3.34)变成

$$X(s) = \frac{a + bs}{s^2 + \Omega_0^2}$$

极点为 $\pm j\Omega_0$, 其拉普拉斯逆变换等于

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{a}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) + b \cos(\Omega_0 t) \right] u(t) \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{\Omega_0^2} + b^2} \cos\left(\Omega_0 t - \arctan\left(\frac{a}{\Omega_0 b}\right)\right) u(t) \end{aligned}$$

即一个正弦函数与一个余弦函数之和。

(2) 当频率 $\Omega_0=0$ 时, 有

$$X(s) = \frac{a + b(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2} = \frac{a}{(s + \alpha)^2} + \frac{b}{s + \alpha}$$

(相当于在 $-\alpha$ 有一个双重极点), 此时拉普拉斯逆变换等于

$$x(t) = \lim_{\Omega_0 \rightarrow 0} \left[\frac{a}{\Omega_0} e^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t) + b e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t) \right] u(t) = [a t e^{-\alpha t} + b e^{-\alpha t}] u(t)$$

其中第一个极限的值是应用罗必塔法则求得的。

(3) 注意到上面计算双重极点 $s = -\alpha$ 的部分分式展开式时, 展开式是由两项构成的, 一项的分母为 $(s + \alpha)^2$, 另一项的分母为 $s + \alpha$, 二者的分子都是常数。

【例 3.15】

考虑拉普拉斯变换

$$X(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 4} = \frac{2s + 3}{(s + 1)^2 + 3}$$

求相应的因果信号 $x(t)$, 然后用 MATLAB 验证答案是否正确。

解 由于极点为 $-1 \pm j\sqrt{3}$, 因此可以预测 $x(t)$ 是一个阻尼因子为 -1 (极点的实部) 的衰减指数乘以频率为 $\sqrt{3}$ 的因果余弦信号。部分分式展开式具有以下形式:

$$X(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 4} = \frac{a + b(s + 1)}{(s + 1)^2 + 3}$$

从而得 $3 + 2s = (a + b) + bs$, 即 $b = 2$ 且 $a + b = 3$, 即 $a = 1$, 于是有

$$X(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{(s + 1)^2 + 3} + 2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 3}$$

它对应于

$$x(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) + 2 \cos(\sqrt{3}t) \right] e^{-t} u(t)$$

根据求出的 $x(t)$ 可算出其初值 $x(0) = 2$, 又由初值定理, 以下极限值可求得为 2。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 + 3s}{s^2 + 2s + 4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 + 3/s}{1 + 2/s + 4/s^2} = 2$$

利用 MATLAB 中的符号函数 ilaplace 计算拉普拉斯逆变换, 并用 ezplot 画出响应的波形, 脚本如下所示。

```

% 例 3.15
% %
clear all; clf
syms s t w
num = [0 2 3]; den = [1 2 4]; % 分子和分母
subplot(121)
splane(num, den) % 画极点和零点
disp('>> Inverse Laplace <<')
x = ilaplace((2*s+3)/(s^2+2*s+4)); % 拉普拉斯逆变换
subplot(122)
ezplot(x,[0,12]); title('x(t)')
axis([0 12 -0.5 2.5]); grid

```

结果如图 3.14 所示。

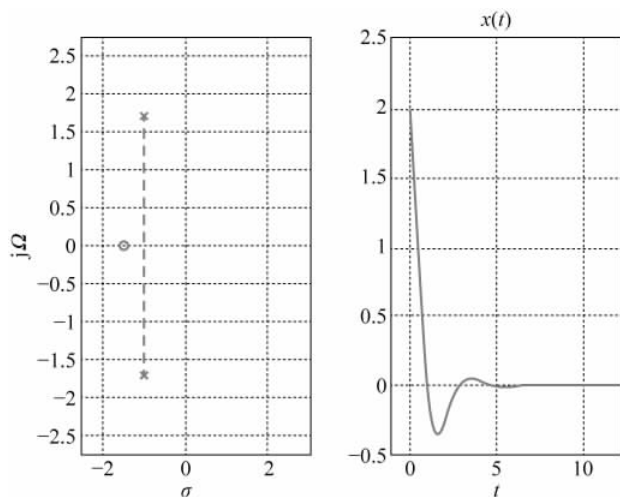


图 3.14 $X(s) = \frac{(2s+3)}{(s^2+2s+4)}$ 的拉普拉斯逆变换(极点和零点(左)与逆变换 $x(t)$ (右))

3. 双重实数极点

如果有理真分式函数有双重实数极点：

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s+\alpha)^2} = \frac{a+b(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2} = \frac{a}{(s+\alpha)^2} + \frac{b}{s+\alpha} \quad (3.36)$$

那么它的逆变换等于

$$x(t) = [ate^{-at} + be^{-at}]u(t) \quad (3.37)$$

其中 a 可通过如下计算得到

$$a = X(s)(s+\alpha)^2 \big|_{s=-\alpha}$$

将所求得的 a 值代入 $X(s)$ 之后, b 的值可通过计算对于某个 $s_0 \neq -\alpha$ 的 $X(s_0)$ 而求出。

当遇到双重实数极点的情况时,需要将分子 $N(s)$ 表示成一阶多项式,类似于一对复共轭极点情况下的处理方式, a 和 b 的值可以通过不同的方法确定,下面举例说明这些方法。

【例 3.16】

通常拉普拉斯变换都是以前面已考虑过的不同函数项的组合形式出现,例如一个一阶和一个二阶

极点的组合产生出

$$X(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}$$

该变换在 $s=0$ 有一个极点, 在 $s=-2$ 有一个双重极点。求因果信号 $x(t)$, 并用 MATLAB 画出 $X(s)$ 的极点和零点, 求出拉普拉斯逆变换 $x(t)$ 。

解 部分分式展开式为

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{a+b(s+2)}{(s+2)^2}$$

其中 $A=X(s)s|_{s=0}=1$, 从而有

$$X(s) - \frac{1}{s} = \frac{4 - (s+2)^2}{s(s+2)^2} = \frac{-(s+4)}{(s+2)^2} = \frac{a+b(s+2)}{(s+2)^2}$$

对比 $X(s)-1/s$ 的分子与部分分式展开式的分子可得 $b=-1$ 且 $a+2b=-4$, 即 $a=-2$, 于是有

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-2-(s+2)}{(s+2)^2}$$

故 $x(t)=[1-2te^{-2t}-e^{-2t}]u(t)$ 。

解决这类问题的另一种方法是先将 $X(s)$ 表示为

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}$$

然后采用与前面相同的方法求得 A , 然后再求 B , 等式两边同时乘以 $(s+2)^2$, 并令 $s=-2$, 得

$$X(s)(s+2)^2|_{s=-2} = \left[\frac{A(s+2)^2}{s} + B + C(s+2) \right]_{s=-2} = B, \Rightarrow B = -2$$

为了求 C , 可以计算当 s 取某个值时部分分式的值, 注意 s 的取值应保证不会出现除以 0 的情况。例如, 若令 $s=1$, 通过解方程

$$X(1) = \frac{4}{9} = \frac{A}{1} + \frac{B}{9} + \frac{C}{3} = 1 - \frac{2}{9} + \frac{C}{3} \Rightarrow C = -1$$

求出 C 之后就可求出逆变换了。

初值 $x(0)=0$, 与利用初值定理求得的初值

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) = \frac{4s}{s(s+2)^2}] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{s^2}}{\left(1 + \frac{2}{s}\right)^2} = 0$$

是一致的。

至于用 MATLAB 求拉普拉斯逆变换, 采用了一个与前面已用脚本相似的脚本, 仅仅将分子和分母的取值改变了。极点、零点以及 $x(t)$ 如图 3.15 所示。

【例 3.17】

求函数

$$X(s) = \frac{4}{s((s+1)^2+3)}$$

的拉普拉斯逆变换。该函数有一个简单实数极点 $s=0$ 以及复共轭极点 $s=-1 \pm j\sqrt{3}$ 。

解 部分分式展开式为

$$X(s) = \frac{A}{s+1-j\sqrt{3}} + \frac{A^*}{s+1+j\sqrt{3}} + \frac{B}{s}$$

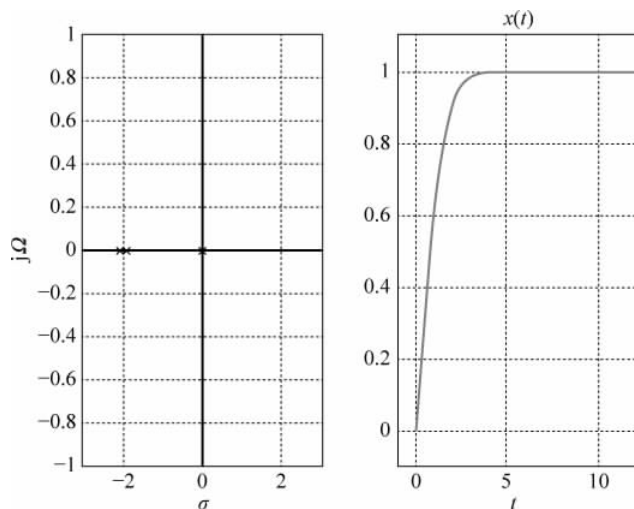


图 3.15 $X(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}$ 的拉普拉斯逆变换(极点和零点(左)与逆变换 $x(t)$ (右))

于是有

$$B = sX(s) \big|_{s=0} = 1$$

$$A = X(s)(s+1-j\sqrt{3}) \big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 0.5 \left(-1 + \frac{j}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 150^\circ$$

所以

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t} \cos(\sqrt{3}t + 150^\circ) u(t) + u(t) \\ &= -[\cos(\sqrt{3}t) + 0.577 \sin(\sqrt{3}t)] e^{-t} u(t) + u(t) \end{aligned}$$

注:

(1) 当极点是双重的复共轭极点时,只要按照以上做法,重复双重极点的处理过程即可。例如,考虑部分分式展开式

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{N(s)}{(s+\alpha-j\Omega_0)^2(s+\alpha+j\Omega_0)^2} \\ &= \frac{a+b(s+\alpha-j\Omega_0)}{(s+\alpha-j\Omega_0)^2} + \frac{a^*+b^*(s+\alpha+j\Omega_0)}{(s+\alpha+j\Omega_0)^2} \end{aligned}$$

求出 a 和 b 的值后就可以得到逆变换了。

(2) 对于二阶或更高阶复共轭极点的部分分式展开应该利用 MATLAB 进行。

【例 3.18】

本例用 MATLAB 计算更加复杂的函数的拉普拉斯逆变换,尤其是要通过该例来说明我们自定义的函数 pfeLaplace 提供的一些附加信息。考虑拉普拉斯变换

$$X(s) = \frac{3s^2 + 2s - 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

求 $X(s)$ 的极点和零点,以及其部分分式展开式中的系数(也称为留数)。用 ilaplace 求逆变换,并用 ezplot 画出它的波形。

解 以下是自定义函数 pfeLaplace:

```
function pfeLaplace(num,den)
%
disp('>>>> Zeros <<<<')
z = roots(num)
[r,p,k] = residue(num,den);
disp('>>>> Poles <<<<')
p
disp('>>>> Residues <<<<')
r
splane(num,den)
```

函数 pfeLaplace 利用 MATLAB 中的函数 roots 求 $X(s)$ 的零点, $X(s)$ 则由其分子和分母按照 s 的降幂顺序排列的系数来定义。对于部分分式展开, pfeLaplace 利用 MATLAB 中的函数 residue 求展开式中的系数以及 $X(s)$ 的极点(在向量 r 中的留数 $r(i)$ 对应包含极点 $p(i)$ 的展开项;例如,留数 $r(1)=8$ 对应于决定了极点 $p(1)=-3$ 的展开项)。然后用符号函数 ilaplace 计算逆变换 $x(t)$, 作为 ilaplace 的输入, 函数 $X(s)$ 被定义为符号型。MATLAB 函数 ezplot 用于画出符号计算的结果。解析结果显示如下, $x(t)$ 的图形如图 3.16 所示。

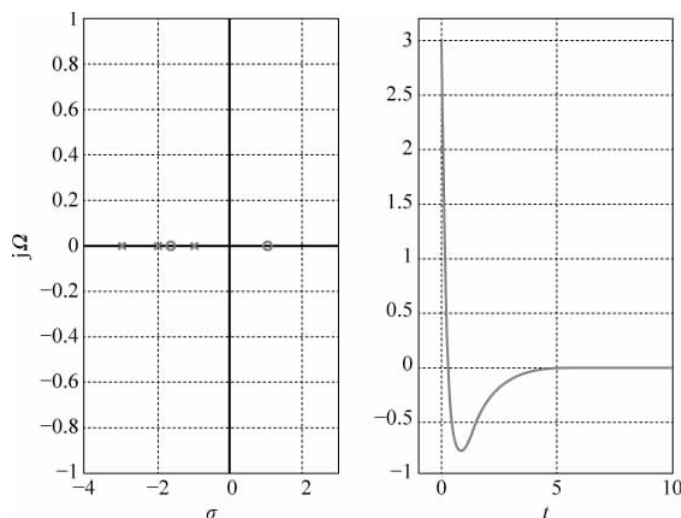


图 3.16 $X(s)=(3s^2+2s-5)/(s^3+6s^2+11s+6)$ 的拉普拉斯逆变换($X(s)$ 的极点和零点(左)与相应的逆变换 $x(t)$ (右))

```
>>>> 零点 <<<<
z = -1.6667
      1.0000
>>>> 极点 <<<<
p = -3.0000
      -2.0000
      -1.0000
>>>> 留数 <<<<
r = 8.0000
      -3.0000
      -2.0000
>>>> 拉普拉斯逆变换 <<<<
```

$$x = 8 * \exp(-3 * t) - 3 * \exp(-2 * t) - 2 * \exp(-t)$$

3.5.2 包含指数项函数的逆变换

分子中的指数项 已知拉普拉斯变换为

$$X(s) = \sum_k \frac{N_k(s)e^{-\rho_k s}}{D_k(s)}$$

首先确定每一项 $\frac{N_k(s)}{D_k(s)}$ 的逆, 然后利用时移性得到每一项 $\frac{N_k(s)e^{-\rho_k s}}{D_k(s)}$ 的逆, 从而可求得逆变换 $x(t)$ 。

分母中的指数项 有两种情况:

(a) 已知拉普拉斯变换为

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)(1 - e^{-as})} = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{N(s)e^{-as}}{D(s)} + \frac{N(s)e^{-2as}}{D(s)} + \dots$$

如果 $f(t)$ 是 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 的逆变换, 那么

$$x(t) = f(t) + f(t - a) + f(t - 2a) + \dots$$

(b) 已知拉普拉斯变换为

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)(1 + e^{-as})} = \frac{N(s)}{D(s)} - \frac{N(s)e^{-as}}{D(s)} + \frac{N(s)e^{-2as}}{D(s)} - \dots$$

如果 $f(t)$ 是 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 的逆变换, 那么

$$x(t) = f(t) - f(t - a) + f(t - 2a) - \dots$$

指数项 $e^{-\rho s}$ 的出现与信号的时移以及信号中存在的无限多个奇异函数有关。若指数出现在分子中, 则可以先忽略指数项, 待求出每一项的逆变换之后再考虑它; 当由于存在 $1 - e^{-as}$ 或 $1 + e^{-as}$ 这样的项而出现无限多的极点时, 可以将拉普拉斯变换先表示成前面这种情况下的形式, 然后利用时移性质求逆变换。当出现无限多个极点的情况时, 不要试图对函数进行部分分式展开。

以下和式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ask} = \frac{1}{1 - e^{-as}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-ask} = \frac{1}{1 + e^{-as}}$$

可以通过交叉相乘得到验证。这些函数都有无限多个极点。事实上, $\frac{1}{1 - e^{-as}}$ 的极点是 $s_k = \pm j2\pi \frac{k}{a}$,

$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\frac{1}{1 + e^{-as}}$ 的极点是 $s_k = \pm j(2k+1)\pi/a, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 因此当函数为

$$X_1(s) = \frac{N(s)}{D(s)(1 - e^{-as})} = \frac{N(s)}{D(s)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ask} = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{N(s)e^{-as}}{D(s)} + \frac{N(s)e^{-2as}}{D(s)} + \dots$$

并且若 $f(t)$ 是 $N(s)/D(s)$ 的逆变换, 那么有

$$x_1(t) = f(t) + f(t - a) + f(t - 2a) + \dots$$

同理, 当

$$X_2(s) = \frac{N(s)}{D(s)(1+e^{-as})} = \frac{N(s)}{D(s)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-ask} = \frac{N(s)}{D(s)} - \frac{N(s)e^{-as}}{D(s)} + \frac{N(s)e^{-2as}}{D(s)} - \dots$$

并且若 $f(t)$ 是 $N(s)/D(s)$ 的逆变换, 那么有

$$x_2(t) = f(t) - f(t-a) + f(t-2a) - \dots$$

【例 3.19】

求出下列函数的因果逆变换:

$$(i) X_1(s) = \frac{1-e^{-s}}{(s+1)(1+e^{-2s})}; \quad (ii) X_2(s) = \frac{2\pi(1+e^{-s/2})}{(1-e^{-s/2})(s^2+4\pi^2)}$$

解 (i) 令

$$X_1(s) = F(s) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e^{-2s})^k$$

其中, $F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s+1}$, 由于 $F(s)$ 的逆变换为 $f(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-1)}u(t-1)$, 因此 $X_1(s)$ 的逆变换可表示为

$$x_1(t) = f(t) - f(t-2) + f(t-4) + \dots$$

(ii) $X_2(s)$ 是一个全波整流信号(见例 3.12)的拉普拉斯变换。如果令 $G(s) = 2\pi(1+e^{-s/2})/(s^2+4\pi^2)$, 那么有

$$X_2(s) = \frac{G(s)}{1-e^{-s/2}} = G(s)(1+e^{-s/2}+e^{-s}+e^{-3s/2}+\dots)$$

于是有

$$x_2(t) = g(t) + g(t-0.5) + g(t-1) + g(t-1.5) + \dots$$

其中

$$g(t) = [\sin(2\pi t) + \sin(2\pi(t-0.5))]u(t)$$

3.5.3 双边拉普拉斯变换的逆变换

求双边拉普拉斯变换的逆变换时, 需要密切关注收敛域以及极点相对于 $j\Omega$ -轴的位置。双边拉普拉斯变换有三种可能的收敛域:

- 若收敛域是位于所有极点右侧的平面, 则对应一个因果信号;
- 若收敛域是位于所有极点左侧的平面, 则对应一个反因果信号;
- 若收敛域是位于极点之间的平面区域, 即区域的右侧和左侧都有极点(但区域内部没有极点), 则对应一个双边信号。

若考虑的是一个转移函数 $H(s)$ 的逆变换, 如果它的 ROC 包括 $j\Omega$ -轴, 那么该 ROC 保证了系统是输入有界输出有界(BIBO)稳定的, 或者说系统的冲激响应是绝对可积的。此外, 具有这种收敛域的系统会有频率响应, 即冲激响应的傅里叶变换。因果分量和反因果分量的逆变换是利用单边拉普拉斯变换得到的。

【例 3.20】

求以下函数的非因果逆变换

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)(s-2)}, \quad \text{ROC: } -2 < \text{Re}(s) < 2$$

解 收敛域 $-2 < \text{Re}(s) < 2$ 等价于 $\{(\sigma, \Omega): -2 < \sigma < 2, -\infty < \Omega < \infty\}$ 。部分分式展开式为

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)(s-2)} = \frac{-0.25}{s+2} + \frac{0.25}{s-2}, \quad -2 < \operatorname{Re}(s) < 2$$

其中极点在 $s=-2$ 的第一项对应于一个因果信号,收敛域为 $\operatorname{Re}(s) > -2$,第二项对应于一个反因果信号,收敛域为 $\operatorname{Re}(s) < 2$,该判断可以得到确认,因为这两个收敛域的交集是

$$[\operatorname{Re}(s) > -2] \cap [\operatorname{Re}(s) < 2] = -2 < \operatorname{Re}(s) < 2$$

于是有

$$x(t) = -0.25e^{-2t}u(t) - 0.25e^{2t}u(-t)$$

【例 3.21】

考虑转移函数

$$H(s) = \frac{s}{(s+2)(s-1)} = \frac{2/3}{s+2} + \frac{1/3}{s-1}$$

其零点在 $s=0$,极点在 $s=-2$ 和 $s=1$ 。通过考虑所有可能的收敛域,找出与此 $H(s)$ 相关的不同冲激响应,并判断在哪种情况下系统是 BIBO 稳定的。

解 以下是所有可能的不同的冲激响应:

■ 如果 ROC 为 $\operatorname{Re}(s) > 1$,则冲激响应等于

$$h_1(t) = \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^t u(t)$$

该冲激响应是因果的,相应的系统是不稳定的,因为极点在 s 平面的右半平面,它使冲激响应随时间增长。

■ 如果 ROC 为 $-2 < \operatorname{Re}(s) < 1$,则冲激响应是非因果的,但系统是稳定的。冲激响应等于

$$h_2(t) = \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^t u(-t)$$

注意收敛域包含 $j\Omega$ -轴,这一点保证了稳定性(可以验证 $h_2(t)$ 是绝对可积的)以及 $h_2(t)$ 的傅里叶变换的存在性,该结论在后面的内容中将会看到。

■ 如果 ROC 为 $\operatorname{Re}(s) < -2$,这种情况下的冲激响应是反因果的,并且系统不稳定。冲激响应等于

$$h_3(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^t u(-t)$$

对于这个冲激响应,由于当 $t < 0$ 时其中的第一项是增长的,故 $h_3(t)$ 不绝对可积,即系统不是 BIBO 稳定的。

从以上例子可以归纳出两个重要结论:

(1) 转移函数为 $H(s)$,收敛域为 $\mathcal{R}$ 的 LTI 系统,若其收敛域包含 $j\Omega$ -轴,那么它是 BIBO 稳定的。

(2) 冲激响应为 $h(t)$ 或者转移函数为 $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ 的因果 LTI 系统,若以下等价条件能够满足,则它是 BIBO 稳定的:

(i) $H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{N(s)}{D(s)}$, $j\Omega$ -轴在 $H(s)$ 的 ROC 内;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$, 即 $h(t)$ 是绝对可积的;

(iii) $H(s)$ 的所有极点在 s 平面的左半开平面内(极点不在 $j\Omega$ -轴上)。

如果 LTI 系统的转移函数 $H(s)$ 具有一个包含 $j\Omega$ -轴在内的收敛域,那么不论系统是因果的还是非因果的,其 $H(j\Omega)$ 都存在,故而

$$|H(j\Omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

即冲激响应 $h(t)$ 绝对可积,这暗示了该系统是第 2 章所说的 BIBO 稳定的。

如果 LTI 系统是因果且 BIBO 稳定的,其转移函数的收敛域不仅包含 $j\Omega$ -轴,而且是 s 平面的一个右半平面。由于在收敛域中没有极点,所以系统的所有极点应该在 s 平面的左半开平面内(极点不在 $j\Omega$ -轴上)。

【例 3.22】

考虑几个因果 LTI 系统,冲激响应分别为:

(i) $h_1(t) = [4\cos(t) - e^{-t}]u(t)$;

(ii) $h_2(t) = [te^{-t} + e^{-2t}]u(t)$;

(iii) $h_3(t) = [te^{-t}\cos(2t)]u(t)$ 。

判断这些系统中哪个是 BIBO 稳定的,对于不是 BIBO 稳定的系统请说明原因。

解 检验这些冲激响应是否绝对可积可能会比较困难,一个更好的办法是求出它们的转移函数的极点位置:

(i) $H_1(s) = \frac{4s}{s^2+1} - \frac{1}{s+1} = \frac{N_1(s)}{(s^2+1)(s+1)}$, ROC: $\sigma > 0$

(ii) $H_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2} = \frac{N_2(s)}{(s+1)^2(s+2)}$, ROC: $\sigma > -1$

(iii) $H_3(s) = \frac{1}{[(s+1)^2+4]^2}$, ROC: $\sigma > -1$

转移函数为 $H_1(s)$ 的因果系统不是 BIBO 稳定的,因为它有极点在 $j\Omega$ -轴上: 它的极点是 $s = \pm j$ (在 $j\Omega$ -轴上) 和 $s = -1$, 而且它的 ROC 也不包含 $j\Omega$ -轴。另一方面, 转移函数为 $H_2(s)$ 和 $H_3(s)$ 的因果系统是 BIBO 稳定的, 因为它们都有极点在 s 平面的左半开平面内: $H_2(s)$ 的极点是 $s = -2$ 和 $s = -1$ (双重极点), 而 $H_3(s)$ 有双重极点在 $s = -1 \pm 2j$, 并且它们的 ROC 都包含 $j\Omega$ -轴。

3.6 LTI 系统的分析

动态线性时不变(LTI)系统一般是用常微分方程描述。利用单边拉普拉斯变换的微分性质(从而允许引入初始条件)和逆变换,常微分方程可转化成更容易求解的代数方程。

卷积积分作为另一种系统表示方法,不仅可以表示常微分方程所描述的系统,还可以表示其他系统,拉普拉斯变换为卷积积分的计算提供了一种非常高效的方法,更为重要的是,拉普拉斯变换的卷积性质引入了转移函数的概念,这是 LTI 系统的一个非常有效的表示方式,无论系统是否由常微分方程描述。第 6 章将提供本节内容在经典控制理论中的应用实例。

3.6.1 常微分方程描述的 LTI 系统

有两种方式刻画一个因果稳定 LTI 系统的响应:

- 零状态和零输入响应,它们与系统的输入和初始条件的作用有关;

■ 暂态和稳态响应,它们与响应在近期和长远的特性有关。

一个由 N 阶线性常系数微分方程

$$y^{(N)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^M b_l x^{(l)}(t), \quad N > M \quad (3.38)$$

描述的系统,其中, $x(t)$ 是系统的输入, $y(t)$ 是系统的输出。初始条件为

$$\{y^{(k)}(t), 0 \leq k \leq N-1\} \quad (3.39)$$

该系统的全响应 $y(t)$ 由对拉普拉斯变换

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}X(s) + \frac{1}{A(s)}I(s) \quad (3.40)$$

求逆而获得,其中, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, 且

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{k=0}^N a_k s^k, \quad a_N = 1 \\ B(s) &= \sum_{l=0}^M b_l s^l \\ I(s) &= \sum_{k=1}^N a_k \left(\sum_{m=0}^{k-1} s^{k-m-1} y^{(m)}(0) \right), \quad a_N = 1 \end{aligned}$$

即 $I(s)$ 依赖于初始条件。

符号 $y^{(k)}(t)$ 和 $x^{(l)}(t)$ 分别代表 $y(t)$ 和 $x(t)$ 的 k 阶导数和 l 阶导数(见到这种符号时要知道 $y^{(0)}(t) = y(t)$, 同理, $x^{(0)}(t) = x(t)$)。之所以假设 $N > M$ 是为了避免在解中出现 $\delta(t)$ 及其导数,因为这在实际中是不可能发生的。为了获得全响应 $y(t)$, 计算式(3.38)的拉普拉斯变换:

$$\underbrace{\left[\sum_{k=0}^N a_k s^k \right]}_{A(s)} Y(s) = \underbrace{\left[\sum_{l=0}^M b_l s^l \right]}_{B(s)} X(s) + \underbrace{\sum_{k=1}^N a_k \left(\sum_{m=0}^{k-1} s^{k-1-m} y^{(m)}(0) \right)}_{I(s)}$$

若 $A(s)$ 、 $B(s)$ 和 $I(s)$ 如前面定义的那样,则上式可写成

$$A(s)Y(s) = B(s)X(s) + I(s) \quad (3.41)$$

求解式(3.41)中的 $Y(s)$ 可得

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}X(s) + \frac{1}{A(s)}I(s)$$

再求其逆变换便得到全响应 $y(t)$ 。

令

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad \text{和} \quad H_1(s) = \frac{1}{A(s)}$$

系统的全响应 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ 是通过

$$Y(s) = H(s)X(s) + H_1(s)I(s) \quad (3.42)$$

求逆变换而得到的,并且等于

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) \quad (3.43)$$

其中

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)]$$

是系统的零状态响应，

$$y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_1(s)I(s)]$$

是系统的零输入响应。全响应用卷积积分来表示则为

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_0^t i(\tau)h_1(t-\tau)d\tau \quad (3.44)$$

其中, $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$, $h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_1(s)]$, 以及

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \sum_{k=1}^N a_k \left(\sum_{m=0}^{k-1} y^{(m)}(0) \delta^{(k-m-1)}(t) \right)$$

其中 $\{\delta^{(m)}(t)\}$ 表示冲激信号的 m 阶导数(如前所述 $\delta^{(0)}(t) = \delta(t)$)。

1. 零状态响应和零输入响应

尽管事实上线性常系数微分方程不代表 LTI 系统, 除非系统的初始条件为零并且输入是因果信号, 但线性系统理论是基于具有非零初始条件的线性常系数微分方程表示的。由于一般情况下输入都是因果信号, 因此出现以上所述方程不代表 LTI 系统的问题的原因是初始条件不是总等于零, 不过这可以通过换一种方式来看待初始条件而得到补救。实际上可以认为输入 $x(t)$ 和初始条件是系统的两个不同的输入, 这样就可以应用叠加原理求系统对这两个不同输入的响应, 如此一来就定义了两个响应, 一个完全由输入引起而初始条件等于零, 被称为**零状态解**, 全响应的另一个分量则仅仅由初始条件引起而假设输入等于零, 因此被称为**零输入解**, 如图 3.17 所示。

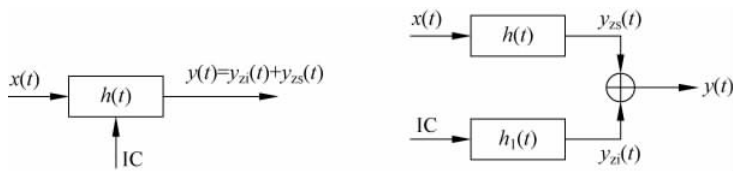


图 3.17 LTI 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$, 全响应 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

注:

(1) 根据式(3.42)计算系统的转移函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 需要零初始条件, 或者说 $I(s) = 0$, 认识到这一点很重要。

(2) 如果不存在极-零点抵消的情况, 那么 $H(s)$ 和 $H_1(s)$ 具有相同的极点, 因为二者的分母都是 $A(s)$, 并且当 $B(s) = 1$ 时有 $h(t) = h_1(t)$ 。

2. 暂态响应和稳态响应

对于因果稳定的 LTI 系统, 只要其输入的拉普拉斯变换的所有极点在 s 平面的左半闭平面(在 $j\Omega$ -轴上的极点是简单的), 那么其全响应一定是有界的。此外, 当 $t \rightarrow \infty$ 时的响应即稳态响应是否存在, 无须求出拉普拉斯逆变换便可作出判断。

LTI 系统的全响应 $y(t)$ 由一个暂态分量和一个稳态分量构成。暂态响应可被认为是系统对输入显示的惯性, 而稳态响应则是系统对持续性输入作出的反应。^①

^① 虽然一般情况下求稳态响应的值都是考虑 $t \rightarrow \infty$, 但稳态响应可以发生于早得多的时间。同理, 当我们求稳态响应时, 输入开始作用的时间既可以是个有限时间 $t = 0$, 然后趋于无穷大, $t \rightarrow \infty$, 也可以从 $-\infty$ 开始直到一个有限时间。

对于一个 LTI 系统而言, 如果其输出的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 的极点(既可以是简单极点也可以是多重极点, 既可以是实数极点也可以是复数极点)在 s 平面的左半开平面上(即在 $j\Omega$ -轴上没有极点), 那么其稳态响应等于

$$y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

实际上, 对于任意 m 重实数极点 $s = -\alpha, \alpha > 0, m \geq 1$, 有

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N(s)}{(s + \alpha)^m} \right] = \sum_{k=1}^m A_k t^{k-1} e^{-\alpha t} u(t)$$

其中 $N(s)$ 是一个 $m-1$ 阶多项式。显然, 对于任意的 $\alpha > 0$ 和阶数 $m \geq 1$, 当 t 增长时以上逆变换将趋于零, 且趋于零的速率取决于极点到 $j\Omega$ -轴的距离, 距离越远趋于零的速度越快。同理, 有着负实部的复共轭极点对也会产生出当 $t \rightarrow \infty$ 时趋于零的项, 而且与它们的阶数无关。对于阶数 $m \geq 1$ 的复共轭极点对 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega_0$, 有

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N(s)}{((s + \alpha)^2 + \Omega_0^2)^m} \right] = \sum_{k=1}^m 2 |A_k| t^{k-1} e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t + \angle(A_k)) u(t)$$

其中 $N(s)$ 是一个 $2m-1$ 阶多项式。由于衰减指数函数的缘故, 当 t 趋于无穷时这类响应将趋于零。

在 s 平面虚轴上的简单复共轭极点以及在 s 平面原点处的简单实数极点所引起的响应都是稳态响应。事实上, 如果 $Y(s)$ 的极点是 $s=0$, 可知其逆变换具有 $Au(t)$ 的形式; 如果极点是复共轭的 $\pm j\Omega_0$, 相应的逆变换是一个正弦, 无论哪个都不是暂态的。然而, $j\Omega$ -轴上的多重极点, 或 s 平面右半平面上的任意极点都将产生当 $t \rightarrow \infty$ 时增长的逆变换。对于位于 s 平面右半平面上的极点, 这个结论明显成立, 而对于 $j\Omega$ -轴上的双重或更高阶的极点, 它们的逆变换具有以下形式:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N(s)}{(s^2 + \Omega_0^2)^m} \right] = \sum_{k=1}^m 2 |A_k| t^{m-1} \cos(\Omega_0 t + \angle(A_k)) u(t), \quad m \geq 1$$

它是随 t 的增大而连续增长的。

总之, 当求解常微分方程时, 无论有没有初始条件, 利用拉普拉斯变换都可得:

(i) 全响应的稳态分量产生于 $Y(s)$ 的部分分式展开式中具有位于 $j\Omega$ -轴上的简单极点(实数或复共轭对)的那些项的拉普拉斯逆变换;

(ii) 全响应的暂态分量产生于部分分式展开式中具有位于 s 平面左半平面上的极点的那些项的拉普拉斯逆变换, 与极点是简单的还是多重的, 实数还是复数无关;

(iii) $j\Omega$ -轴上的多重极点以及 s 平面右半平面上的极点将产生随 t 增长而增长的那些项, 从而使全响应无界。

【例 3.23】

考虑二阶常微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

它表示一个输入为 $x(t)$ 输出为 $y(t)$ 的 LTI 系统。求系统的冲激响应 $h(t)$ 和单位阶跃响应 $s(t)$ 。

解 设初始条件为零, 令 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, 计算此方程两边的双边或单边拉普拉斯变换, 并利用微分性质, 有

$$Y(s)[s^2 + 3s + 2] = X(s)$$

为了求系统的冲激响应,即系统响应 $y(t)=h(t)$,令 $x(t)=\delta(t)$,且初始条件为零。由于 $X(s)=1$,于是 $Y(s)=H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$ 等于

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

可求得 $A=1, B=-1$,于是拉普拉斯逆变换为

$$h(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

可见它完全是暂态的。

用类似方法,设 $x(t)=u(t)$ 及初始条件为零,可以获得单位阶跃响应 $s(t)$ 。令 $Y(s)=S(s)=\mathcal{L}[s(t)]$,由于 $X(s)=1/s$,于是有

$$S(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

可求得 $A=1/2, B=-1, C=1/2$,故

$$s(t) = 0.5u(t) - e^{-t}u(t) + 0.5e^{-2t}u(t)$$

$s(t)$ 的稳态分量是 0.5,由于两个指数项均趋于 0,所以暂态分量是 $-e^{-t}u(t) + 0.5e^{-2t}u(t)$ 。

有趣的是,关系式 $sS(s)=H(s)$ 表明, $h(t)$ 可以通过计算 $s(t)$ 的导数而得到。事实也确实如此,

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= 0.5\delta(t) + e^{-t}u(t) - e^{-t}\delta(t) - e^{-2t}u(t) + 0.5e^{-2t}\delta(t) \\ &= [0.5 - 1 + 0.5]\delta(t) + [e^{-t} - e^{-2t}]u(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t) = h(t) \end{aligned}$$

注:

(1) 因为稳态响应的存在依赖于 $Y(s)$ 的极点,所以一个不稳定的因果系统(回顾一下,对于因果系统来说,BIBO 稳定性要求系统转移函数的所有极点都在 s 平面左半开平面内)是可能有稳态响应的,这完全取决于输入。例如,一个不稳定系统 $H(s)=\frac{1}{s(s+1)}$,由于极点 $s=0$ 的存在使得该系统不稳定。若系统的输入 $x_1(t)=u(t)$,即 $X_1(s)=1/s$,那么 $Y_1(s)=1/(s^2(s+1))$,由于双重极点 $s=0$ 的缘故,将不会有稳态响应;然而,若输入 $x_2(t)=(1-2t)e^{-2t}u(t)$,即 $X_2(s)=\frac{s}{(s+2)^2}$,那么

$$Y_2(s) = H(s)X_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{s}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

这将会产生一个零稳态,即使该系统不稳定,可见是由于零-极点抵消使稳态成为可能的。

(2) 稳态响应是从 $t=0$ 时算起的系统响应,可通过令 $t \rightarrow \infty$ 求得(即使在有限时间内可以达到稳态;至于是无限长时间内达到稳态还是有限长时间内达到稳态,则要取决于暂态趋于零的速度)。在上例中, $h(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$ 的稳态响应等于 0,该值在 $t=0$ 时即可获得,而对于 $s(t)=0.5u(t)-e^{-t}u(t)+0.5e^{-2t}u(t)$,其稳态响应等于 0.5,该值只能在某个 $t_0>0$ 时刻获得,且在 t_0 时刻应有 $-e^{-t_0}+0.5e^{-2t_0}=0$,由于指数是正的函数,故而 $t_0=\infty$ 。于是暂态响应分别等于 $h(t)-0=h(t), s(t)-0.5u(t)=-e^{-t}u(t)+0.5e^{-2t}u(t)$,它们最终会消失。

(3) 利用转移函数的定义即 $H(s)=Y(s)/X(s)$ 所求出的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $s(t)$ 之间的关系可以推广到更多情况中,这样响应 $Y(s)$ 就通过 $Y(s)=H(s)X(s)$ 与 $H(s)$ 联系了起来,并由此产生出 $y(t)$ 和 $h(t)$ 之间的关系。例如,如果 $x(t)=\delta(t)$,那么 $Y(s)=H(s)\times 1$,其逆变换为冲激响应。如果 $x(t)=u(t)$,那么 $Y(s)=\frac{H(s)}{s}=S(s)$,即阶跃响应的拉普拉斯变换,因而 $h(t)=ds(t)/dt$ 。如果 $x(t)=$

$r(t)$, 那么 $Y(s) = \frac{H(s)}{s^2} = \rho(s)$, 即斜变响应的拉普拉斯变换, 因而 $h(t) = \frac{d^2 \rho(t)}{dt^2} = \frac{ds(t)}{dt}$ 。

【例 3.24】

考虑前例中的二阶常微分方程:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

现在令初始条件为 $y(0)=1$, $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0}=0$, 以及 $x(t)=u(t)$, 求全响应 $y(t)$ 。可以从该响应求出冲激响应 $h(t)$ 吗? 该怎么做?

解 对常微分方程进行拉普拉斯变换得

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} \right] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) - (s + 3) = X(s)$$

将 $X(s) = \frac{1}{s}$ 代入后可得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{X(s)}{(s+1)(s+2)} + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1+3s+s^2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s+1} + \frac{B_3}{s+2} \end{aligned}$$

可求出 $B_1=1/2, B_2=1, B_3=-1/2$, 故全响应为 $y(t)=[0.5+e^{-t}-0.5e^{-2t}]u(t)$, 还可以验证该解同样满足初始条件 $y(0)$ 和 $\left. \frac{dy(0)}{dt} \right|$ (该结论特别有趣, 建议读者试试)。稳态响应为 0.5, 暂态响应为 $[e^{-t}-0.5e^{-2t}]u(t)$ 。

如果能求出转移函数 $H(s)=Y(s)/X(s)$, 则其逆变换就是冲激响应 $h(t)$, 然而在初始条件不等于零的情况下这是不可能的。如前所示, 若初始条件不等于零, 则得到的拉普拉斯变换是

$$Y(s) = \frac{X(s)}{A(s)} + \frac{I(s)}{A(s)}$$

在此例中, $A(s)=(s+1)(s+2)$, $I(s)=s+3$, 因此无法求出比值 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。如果能够使第二项等于零, 即

$I(s)=0$, 就能得到 $\frac{Y(s)}{X(s)}=H(s)=\frac{1}{A(s)}$ 以及 $h(t)=[e^{-t}-e^{-2t}]u(t)$ 。

【例 3.25】

考虑一个模拟平均器, 它由方程

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

描述, 其中 $x(t)$ 是输入, $y(t)$ 是输出。求 $y(t)$ 的导数可以得到一个一阶常微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{T} [x(t) - x(t-T)]$$

这是输入的一个有限差分。求该模拟平均器的冲激响应。

解 平均器的冲激响应可通过令 $x(t)=\delta(t)$ 以及初始条件为零而求得。对常微分方程两边进行拉普拉斯变换可得

$$sY(s) = \frac{1}{T} [1 - e^{-sT}]X(s)$$

代入 $X(s)=1$, 于是有

$$H(s) = Y(s) = \frac{1}{sT}[1 - e^{-sT}]$$

从而冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{T}[u(t) - u(t - T)]$$

3.6.2 卷积积分的计算

用信号处理的观点来看,卷积性质是拉普拉斯变换在系统上最重要的应用。卷积积分的计算很难,即使是简单的信号也是如此。第2章介绍了如何用解析和几何的方法计算卷积积分,在本节中将会看到,卷积性质不仅为卷积积分的计算提供了一种有效方法,而且通过它还引入了**转移函数**的概念。转移函数是LTI系统的一个重要描述方式,有了转移函数,一个系统就可以像一个信号那样,用转移函数的极点和零点来描述。不过应该知道的是,由转移函数不止能获得系统的极/零点表征,它的其他作用还包括:

- (i) 系统的冲激响应是由转移函数的极点和零点以及相应的收敛域唯一决定的;
- (ii) 系统对不同频率的响应方式能由转移函数获得;
- (iii) 系统的因果性和稳定性也同样能与转移函数相关联;
- (iv) 滤波器的设计依赖于转移函数。

卷积 $y(t)=[x * h](t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 通过以下乘积

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (3.45)$$

而得到。其中 $X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$, $H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$ 是系统的转移函数,或者说 $H(s)$ 将输入的拉普拉斯变换 $X(s)$ 转移成为输出的拉普拉斯变换 $Y(s)$

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.46)$$

一旦得到 $Y(s)$, 通过对其进行拉普拉斯逆变换便可求出 $y(t)$ 。

【例 3.26】

利用拉普拉斯变换计算下列卷积 $y(t)=[x * h](t)$:

- (i) 输入为 $x(t)=u(t)$, 冲激响应为脉冲 $h(t)=u(t)-u(t-1)$;
- (ii) 输入和系统的冲激响应均为 $x(t)=h(t)=u(t)-u(t-1)$ 。

解 (i) 拉普拉斯变换为 $X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=1/s$ 及 $H(s)=\mathcal{L}[h(t)]=(1-e^{-s})/s$, 于是

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

其逆变换为 $y(t)=r(t)-r(t-1)$, 其中 $r(t)$ 是斜变信号。此结果与第2章中用图形方法求得的结果一致。

(ii) 现在 $X(s)=H(s)=\mathcal{L}[u(t)-u(t-1)]=\frac{(1-e^{-s})}{s}$, 于是

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}$$

它对应于函数

$$y(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$$

即三角形脉冲,此结果与第2章中用作图法求得的结果一致。

【例 3.27】

考虑由以下常微分方程描述的 LTI 系统

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

其中 $y(t)$ 和 $x(t)$ 是系统的输出和输入。

(i) 求系统的冲激响应 $h(t)$;

(ii) 如果系统的输入为 $x(t) = (1-t)e^{-t}u(t)$, 利用卷积性质求相应的输出。

解 (i) 系统的转移函数可由常微分方程并令初始条件为零而得到

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = (1 + s)X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + s}{(s + 1)^2 + 1}$$

从而有冲激响应为 $h(t) = e^{-t} \cos(t)u(t)$ 。

(ii) 系统的输出等于卷积积分,即 $y(t) = (h * x)(t)$, 这个积分不容易求。但通过求 $x(t)$ 的拉普拉斯变换

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

并利用转移函数便可得

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)X(s) = \frac{1+s}{(s+1)^2+1} \times \frac{s}{(s+1)^2} \\ &= \frac{s}{(s^2+2s+2)(s+1)} = \frac{s}{s^3+3s^2+4s+2} \end{aligned}$$

$Y(s)$ 的极点是 $s_{1,2} = -1 \pm j1$ 和 $s_3 = -1$, 而零点是 $s_1 = 0$ 。以下脚本用于计算并画出 $Y(s)$ 的极点和零点, 然后计算其逆变换

$$y(t) = [e^{-t}(\cos(t) + \sin(t) - 1)]u(t)$$

并画出 $y(t)$ 的图形。图 3.18 显示了极点/零点分布情况和输出 $y(t)$ 。

```
% 例 3.27
% %
clear all; clf
syms s
num = [1 0];
den = [1 3 4 2];
figure(1)
subplot(211)
splane(num, den)
disp('====>>> Inverse Laplace <<<<')
x = ilaplace(s/(s^3+3*s^2+4*s+2))
subplot(212)
ezplot(x, [0, 12]);
axis([0 7 -0.15 0.25]); grid
```

% 拉普拉斯逆变换

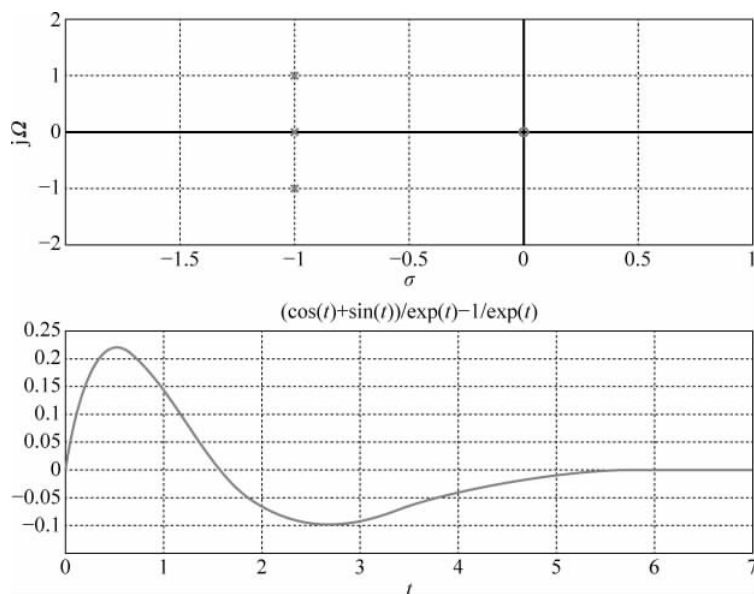


图 3.18 例 3.27 结果图

$Y(s)$ 的极点和零点(上图),利用拉普拉斯变换的卷积性质求得对输入 $x(t) = (1-t)e^{-t}u(t)$ 的响应,系统的常微分方程为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$ 。

【例 3.28】

考虑图 3.19 所示的 RLC 电路,其中输入是电压源 $x(t)$,输出是电容端电压 $y(t)$ 。令 $LC=1, \frac{R}{L}=2$ 。

- (1) 求电路的冲激响应 $h(t)$;
- (2) 利用卷积性质求阶跃响应 $s(t)$ 。

解 此 RLC 电路由一个二阶常微分方程描述。令 $i(t)$ 为电路中的电流,应用基尔霍夫电压定律可得

$$x(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t)$$

其中电容端电压由下式给出

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\sigma) d\sigma + y(0)$$

这里 $y(0)$ 代表电容的初始电压。以上两个方程被称为积分-微分方程,因为它是由一个积分方程和一个常微分方程构成。为了获得用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示的常微分方程,下面求 $y(t)$ 的一阶导数和二阶导数,得到

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{1}{C} i(t) \Rightarrow i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

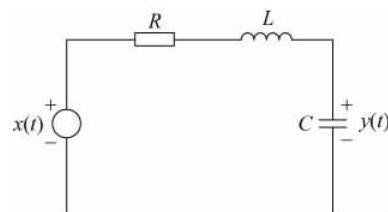


图 3.19 RLC 电路,输入是电压源 $x(t)$,输出是电容端电压 $y(t)$

当 KVL 方程中相应的项被替换之后可得

$$x(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) \quad (3.47)$$

这是一个二阶常微分方程,两个初始条件为:电容的初始电压 $y(0)$ 和电感的初始电流 $i(0) = Cdy(t)/dt|_{t=0}$ 。

(1) 为了求出该电路的冲激响应,设 $x(t) = \delta(t)$ 以及初始条件等于零。对式(3.47)进行拉普拉斯变换可得

$$X(s) = [LCs^2 + RCs + 1]Y(s)$$

系统的冲激响应 $h(t)$ 是以下转移函数的拉普拉斯逆变换:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

若 $LC=1, R/L=2$, 则转移函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

于是有相应的冲激响应为 $h(t) = te^{-t}u(t)$ 。

(2) 为了求出电路对 $x(t) = u(t)$ 的响应,可以计算卷积积分

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)(t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau = [1 - e^{-t}(1+t)]u(t) \end{aligned}$$

则阶跃响应为 $s(t) = [1 - e^{-t}(1+t)]u(t)$ 。

利用拉普拉斯变换的卷积性质可以更容易地求得以上结果:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \frac{1}{s}$$

以上是代入转移函数和输入 $x(t) = u(t)$ 的拉普拉斯变换表达式的结果,然后对 $Y(s)$ 进行部分分式展开有

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

在确定 $A=1, C=-1$ 和 $B=-1$ 之后便得到

$$y(t) = s(t) = u(t) - e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)$$

这与用卷积积分求得的结果一致,然而本例所用方法容易得多。

【例 3.29】

考虑第 2 章给出的由一个麦克风靠近一组扬声器(见图 3.20)所构成的正反馈系统。为简单起见,令 $\beta=1, \tau=1$ 及 $x(t)=u(t)$ 。

(1) 利用拉普拉斯变换求系统的冲激响应 $h(t)$,并用它以卷积的方式表示输出;

(2) 确定转移函数 $H(s)$,并由它求出输出 $y(t)$;

(3) 将转移函数的极点与系统的不稳定行为联系起来,证明此系统不是 BIBO 稳定的。

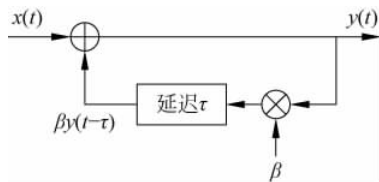


图 3.20 由一个麦克风靠近一组扬声器产生的正反馈

解 第2章曾指出反馈系统的冲激响应不能在时域中显式地获得,但现在利用拉普拉斯变换却能够做到。图3.20所示正反馈系统的输入-输出方程为 $y(t) = x(t) + \beta y(t - \tau)$ 。

若令 $x(t) = \delta(t)$, 则输出 $y(t) = h(t)$ 或 $h(t) = \delta(t) + \beta h(t - \tau)$, 由此方程无法获得 $h(t)$ 的表达式。

若令 $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$, 则以上方程的拉普拉斯变换为 $H(s) = 1 + \beta H(s)e^{-s\tau}$, 求解出 $H(s)$ 并将所给的 β 和 τ 的值代入后得

$$H(s) = \frac{1}{1 - \beta e^{-s\tau}} = \frac{1}{1 - e^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} = 1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots$$

冲激响应 $h(t)$ 等于 $H(s)$ 的拉普拉斯逆变换, 故有

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k)$$

如果 $x(t)$ 是输入, 那么输出就可用卷积积分写成为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\tau-k)x(t-\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-k)x(t-\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} x(t-k) \end{aligned}$$

将 $x(t) = u(t)$ 代入得

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(t-k)$$

可见随着 t 增大 $y(t)$ 趋于无穷大。

欲使系统 BIBO 稳定, 其冲激响应 $h(t)$ 必须绝对可积, 但该系统却不满足这个条件。实际上有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-k) dt = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \rightarrow \infty$$

从另一个角度来看, $H(s)$ 的极点是 $1 - e^{-s} = 0$ 的根, 就是使 $e^{-s_k} = 1 = e^{j2\pi k}$ 的 s 值, 即 $s_k = \pm j2\pi k$ 。因此, $H(s)$ 在 $j\Omega$ -轴上有无限多个极点, 这也说明该系统不是 BIBO 稳定的。

3.7 我们完成了什么, 我们向何处去

通过本章相信读者已经知道了拉普拉斯变换在连续时间信号和系统分析中的重要性。拉普拉斯变换提供的信号表示与信号的时域表示是互补的, 因此对于信号来说, 阻尼和频率、极点和零点, 还有收敛域一起形成了一个新的域。不止于此, 你将会看到这些概念在本书第2部分余下几章里的应用, 当讨论信号和系统的傅里叶分析时我们还将回到拉普拉斯变换上来。常微分方程的解以及不同类型的响应都可通过拉普拉斯变换用代数的方法获得, 同样地, 拉普拉斯变换为卷积积分的计算提供了一个简单然而却非常重要的解决方法。拉普拉斯变换还提供了转移函数的概念, 转移函数将是线性时不变系统分析和综合的基础。

在接下来两章的学习中需要明白一点, 那就是贯穿拉普拉斯变换和傅里叶变换的主线是 LTI 系统的特征函数性质, 理解该性质会为你提供洞察傅里叶分析所必需的能力。

3.8 本章练习题

3.8.1 基础题

3.1 求下列信号的拉普拉斯变换,并指出收敛域。

(a) 有限支撑信号:

- (i) $x(t) = \delta(t-1)$; (ii) $y(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$;
(iii) $z(t) = u(t+1) - u(t-1)$; (iv) $w(t) = \cos(2\pi t)[u(t+1) - u(t-1)]$

(b) 因果信号:

- (i) $x_1(t) = e^{-t}u(t)$; (ii) $y_1(t) = e^{-t}u(t-1)$;
(iii) $z_1(t) = e^{-t+1}u(t-1)$; (iv) $w_1(t) = e^{-t}(u(t) - u(t-1))$

答案: (a) $Y(s) = 2\sinh(s)$, ROC 是整个 s 平面;

$$W(s) = \frac{2s\sinh(s)}{(s^2 + 4\pi^2)}, \text{ROC 是整个 } s \text{ 平面。}$$

(b) $Y_1(s) = e^{-(s+1)}/(s+1)$, ROC: $\sigma > -1$ 。

3.2 求下列信号的拉普拉斯变换,并指出收敛域。

(a) 反因果信号:

- (i) $x(t) = e^t u(-t)$; (ii) $y(t) = e^t u(-t-1)$;
(iii) $z(t) = e^{t+1} u(-t-1)$; (iv) $w(t) = e^t (u(-t) - u(-t-1))$

(b) 非因果信号:

- (i) $x_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$;
(ii) $y_1(t) = e^{-t}u(t+1)$;
(iii) $z_1(t) = e^t[u(t+1) - u(t-1)]$

答案: (a) $Z(s) = \frac{e^s}{(1-s)}$, ROC: $\sigma < 1$;

(b) $Z_1(s) = \frac{2\sinh(s-1)}{(s-1)}$, ROC 为整个 s 平面。

3.3 考虑以下涉及正弦信号的问题:

(a) 求 $y(t) = \sin(2\pi t)[u(t) - u(t-1)]$ 的拉普拉斯变换及其收敛域。仔细画出 $y(t)$ 的图形,判断 $Y(s)$ 的收敛域。

(b) 一个非常光滑的脉冲是 $x(t) = 1 - \cos(2\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$, 否则为 0, 它被称为升余弦信号, 求此信号的拉普拉斯变换及相应的收敛域。

(c) 给出三种求 $\cos^2(t)u(t)$ 的拉普拉斯变换的可能方法, 并用其中两种计算它的拉普拉斯变换。

答案: $Y(s) = 2\pi(1 - e^{-s})/(s^2 + 4\pi^2)$; $x(t)$ 是有限支撑信号, ROC 是整个平面。

3.4 求下列信号的拉普拉斯变换,并确定每种情况下相应的收敛域:

(a) 信号 $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$, 当 (i) $a > 0$ 和 (ii) $a \rightarrow 0$ 时。

(b) 抽样信号

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2n} \delta(t-n)$$

(c) “通往天堂的台阶”信号

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$$

(d) 正弦信号 $v(t) = [\cos(2(t-1)) + \sin(2\pi t)]u(t-1)$ 。

(e) 信号 $y(t) = t^2 e^{-2t} u(t)$, 已知 $x(t) = t^2 u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s) = 2/s^3$ 。

答案: (a) 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $x(t) = u(t) - u(-t)$ 不存在拉普拉斯变换;

(b) ROC 是整个 s 平面; (c) $S(s) = 1/(s(1-e^{-s}))$; (e) $Y(s) = 2/(s+2)^3$ 。

3.5 在以下问题中运用拉普拉斯变换的性质。

(a) 证明 $x(t)e^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换是 $X(s+a)$, 其中 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, 然后利用它求出 $y(t) = \cos(t)e^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换。

(b) 信号 $x_1(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$X_1(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}$$

求 $X_1(s)$ 的极点和零点, 并根据极点的位置求出当 $t \rightarrow \infty$ 时的 $x_1(t)$ 。

(c) 信号 $z(t) = de^{-t}u(t)/dt$,

i. 计算导数 $z(t)$, 然后求出它的拉普拉斯变换 $Z(s)$ 。

ii. 利用微分性质求出 $Z(s)$, 将所得结果与之前得到的结果进行比较。

答案: (a) $Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}$; (b) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_1(t) \rightarrow 0$; (c) $Z(s) = s/(s+1)$ 。

3.6 考虑脉冲 $x(t) = u(t) - u(t-1)$, 求 $X(s)$ 的零点和极点并将它们画出来。

(a) 假设 $x(t)$ 是具有转移函数 $H(s) = Y(s)/X(s) = 1/(s^2 + 4\pi^2)$ 的 LTI 系统的输入, 求 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ 的零点和极点并将它们画出来, 其中 $y(t)$ 是系统的输出。

(b) 如果 LTI 系统的转移函数为

$$G(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + (2k\pi)^2}$$

输入为以上信号 $x(t)$, 计算输出 $z(t)$ 。

答案: $X(s)$ 在 $j\Omega$ -轴上有无限多个零点; $z(t) = \delta(t)$ 。

3.7 求下列信号的拉普拉斯变换及其收敛域。

(a) 单位阶跃信号的反褶是 $u(-t)$, 利用该结果以及 $u(t)$ 的拉普拉斯变换尝试能否得到一个常数即 $x(t) = u(t) + u(-t)$ 的拉普拉斯变换(假定 $u(0) = 0.5$, 这样在 $t=0$ 就没有间断点)。

(b) 非因果信号 $y(t) = e^{-|t|}u(t+1)$, 仔细画出它的图形, 通过将 $y(t)$ 分成一个因果信号 $y_c(t)$ 和一个反因果信号 $y_{ac}(t)$ 来求出它的拉普拉斯变换 $Y(s)$, 分别画出 $y_c(t)$ 和 $y_{ac}(t)$, 并求出 $Y(s)$ 、 $Y_c(s)$ 和 $Y_{ac}(s)$ 的收敛域。

答案: (a) $x(t)$ 不存在拉普拉斯变换; (b) $Y(s) = (e^{s-1}(s+1) - 2)/(s^2 - 1)$ 。

3.8 求信号 $x(t) = r(t) - 2r(t-1) + 2r(t-3) - r(t-4)$ 的拉普拉斯变换。

(a) 画出 $x(t)$ 的图形。计算 $dx(t)/dt$ 和 $d^2x(t)/dt^2$, 并画出它们的图形。

(b) 利用 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ 的拉普拉斯变换求 $X(s)$ 。

答案: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \delta(t) - 2\delta(t-1) + 2\delta(t-3) - \delta(t-4)$ 。

3.9 在下列问题中利用拉普拉斯逆变换以及 LTI 系统的输入和输出之间的关系。

(a) 一个系统,其输出的拉普拉斯变换为

$$Y_1(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 1} + \frac{(s+2)^2 + 2}{(s+2)^3}$$

求 $y_1(t)$, 假设它是因果的。

(b) 一个二阶系统,其输出 $y_2(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$Y_2(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

若此系统的输入为 $x_2(t) = u(t)$, 求描述该系统的常微分方程以及相应的初始条件 $y_2(0)$ 和 $dy_2(0)/dt$ 。

(c) 一个系统,其输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = \frac{1}{s((s+1)^2 + 4)}$$

假设 $y(t)$ 是因果的, 求稳态响应 $y_{ss}(t)$ 和暂态响应 $y_t(t)$ 。

答案: (a) $y_1(t) = \sin(t-2)u(t-2) + e^{-2t}u(t) + t^2 e^{-2t}u(t)$;

(b) $y_2(0) = -1, dy_2(0)/dt = 2$;

(c) 暂态响应 $y_t(t) = [- (1/5)e^{-t}\cos(2t) - (1/10)e^{-t}\sin(2t)]u(t)$ 。

3.10 系统由以下常微分方程描述

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

其中, $y(t)$ 是系统输出, $x(t)$ 是输入。

(a) 求系统的转移函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 。根据 $H(s)$ 的极点和零点判断系统是否是 BIBO 稳定的。

(b) 若 $x(t) = u(t)$, 并且初始条件等于零, 确定稳态响应 $y_{ss}(t)$ 。如果初始条件不等于零, 稳态响应又等于多少? 会得到相同的稳态响应吗? 请作出解释。

答案: $H(s) = 1/(s^2 + 3s + 2)$; BIBO 稳定; $y_{ss}(t) = 0.5$ 。

3.11 已知系统的输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换如下:

$$Y(s) = \frac{(s-1)X(s)}{(s+2)^2 + 1} + \frac{1}{(s+2)^2 + 1}$$

其中, $X(s)$ 为输入 $x(t)$ 的拉普拉斯变换。

(a) 如果 $x(t) = u(t)$, 求零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

(b) 求零输入响应 $y_{zi}(t)$ 。

(c) 确定稳态响应 $y_{ss}(t)$ 。

答案: $y_{zs}(t) = -(1/5)u(t) + (1/5)e^{-2t}\cos(t)u(t) + (7/5)e^{-2t}\sin(t)u(t)$ 。

3.12 LTI 系统的转移函数为

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)^2 + 1}$$

(a) 利用拉普拉斯变换求单位阶跃响应 $s(t) = (h * x)(t)$ 。

(b) 分别求出以下输入引起的响应:

(i) $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$; (ii) $x_2(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$; (iii) $x_3(t) = r(t)$

答案: $s(t) = e^{-t} \sin(t) u(t)$ 。

3.13 考虑一个 LTI 系统,其转移函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 4}{s((s+1)^2 + 1)}$$

- (a) 判断系统是否是 BIBO 稳定的。
- (b) 设输入为 $x(t) = \cos(2t)u(t)$, 求响应 $y(t)$ 以及相应的稳态响应。
- (c) 设输入为 $x(t) = \sin(2t)u(t)$, 求响应 $y(t)$ 以及相应的稳态响应。
- (d) 设输入为 $x(t) = u(t)$, 求响应 $y(t)$ 以及相应的稳态响应。
- (e) 请解释为什么以上结果看起来与有关稳定性的结论相矛盾。

答案: 对于 $x(t) = \cos(2t)u(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$; 若 $x(t) = u(t)$, 没有稳态响应。

3.14 考虑以下冲激响应函数

$$h_1(t) = \left[\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t \right] u(t),$$

$$h_2(t) = \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^t u(-t),$$

$$h_3(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^t u(-t)$$

- (a) 根据 $h_1(t)$ 的表达式判断系统是否是因果和 BIBO 稳定的, 并求它的拉普拉斯变换 $H_1(s)$ 和收敛域。
- (b) 根据 $h_2(t)$ 的表达式判断系统是否是非因果和 BIBO 稳定的, 并求它的拉普拉斯变换 $H_2(s)$ 和收敛域。
- (c) 根据 $h_3(t)$ 的表达式判断系统是否是反因果和 BIBO 稳定的, 并求它的拉普拉斯变换 $H_3(s)$ 和收敛域。
- (d) 根据以上结果, 确定系统 BIBO 稳定的一般条件。

答案: $h_1(t)$ 无界, 故它是不稳定的因果系统;

$H_3(s) = (2/3)/(s+2) - (1/3)/(-s+1)$, ROC 为 $\sigma < -2$, 不稳定的反因果系统。

3.15 系统的单位阶跃响应为 $s(t) = [0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t}]u(t)$ 。

- (a) 求系统的转移函数 $H(s)$ 。
- (b) 分别在时域和拉普拉斯域利用 $s(t)$ 求冲激响应 $h(t)$ 和斜变响应 $\rho(t)$ 。

答案: $H(s) = 1/(s+1)(s+2)$ 。

3.16 考虑一个冲激响应为 $h(t) = e^{-at}[u(t) - u(t-1)]$, $a > 0$ 的 LTI 系统。

- (a) 求转移函数 $H(s)$ 。
- (b) 求 $H(s)$ 的极点和零点。
- (c) $\lim_{a \rightarrow 0} H(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$ 是否正确?
- (d) 当 $a \rightarrow 0$ 时, $H(s)$ 的极点和零点怎样在 s 平面移动?

答案: $H(s) = (1 - e^{-(s+a)})/(s+a)$, ROC 为整个 s 平面, 极点被零点抵消了。

3.17 因果 LTI 系统的转移函数为

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

(a) 求联系该系统的输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$ 的常微分方程。

(b) 当初始条件为 $y(0)=0$ 和 $\frac{dy(0)}{dt}=1$ 时, 为使输出 $y(t)$ 恒等于 0, 求相应的输入 $x(t)$ 。

(c) 若希望输出 $y(t)$ 恒为 0, 如果令 $x(t)=\delta(t)$, 初始条件应该等于多少?

答案: (b) $x(t)=-\delta(t)$; (c) $y(0)=0, y'(0)=-1$ 。

3.18 因果 LTI 系统具有转移函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1-e^{-s}}$$

(a) 求 $H(s)$ 的极点和零点, 并据此判断该滤波器是否是 BIBO 稳定的。

(b) 画出此系统的一个方框图。

(c) 求该系统的冲激响应 $h(t)$, 并利用它来验证你对于此系统稳定性的结论。

答案: $h(t)$ 不是绝对可积的。

3.19 LTI 系统的冲激响应为 $h(t)=r(t)-2r(t-1)+r(t-2)$, 其输入是一个冲激序列

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

(a) 将 $x(t)$ 与 $h(t)$ 进行卷积积分从而求出系统的输出 $y(t)$, 分别画出 $T=1$ 和 $T=2$ 时的 $y(t)$ 。

(b) 在 $T=2$ 的情况下, 求 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 。

答案: $Y(s) = \frac{\cosh(s)-1}{s^2 \sinh(s)}$ 。

3.20 一个无线通信信道由方程 $y(t)=\alpha x(t-T)+\alpha^3 x(t-3T)$ 描述, 其中 $0<\alpha<1$ 是衰减系数, T 是延时, $x(t)$ 是输入, $y(t)$ 是输出。

(a) 求该信道的冲激响应 $h(t)$ 。

(b) 求转移函数 $H(s)$ 及其极点和零点, 判断该系统是否是 BIBO 稳定的。

答案: $h(t)=\alpha\delta(t-T)+\alpha^3\delta(t-3T)$; $H(s)$ 没有极点, 系统是 BIBO 稳定的。

3.21 考虑两个 LTI 系统的级联, 如图 3.21 所示, 其中级联连接的输入是 $z(t)$, 输出是 $y(t)$, 而 $x(t)$ 是第一个系统的输出、第二个系统的输入。该级联系统的输入等于 $z(t)=(1-t)[u(t)-u(t-1)]$ 。

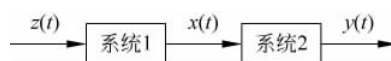


图 3.21 问题 3.21

(a) 若第一个系统的输入输出特性方程为 $x(t)=dz(t)/dt$, 求第一个系统相应的输出 $x(t)$ 。

(b) 对于第二个系统, 若已知当输入为 $\delta(t)$ 时相应的输出为 $e^{-2t}u(t)$, 当输入为 $u(t)$ 时相应的输出为 $0.5(1-e^{-2t})u(t)$, 利用这些信息, 计算当输入为以上所求出的 $x(t)$ 时, 第二个系统的输出 $y(t)$ 。

(c) 确定这个以 $z(t)$ 为输入、 $y(t)$ 为输出的级联系统的常微分方程。

答案: $x(t)=\delta(t)-(u(t)-u(t-1))$; $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dz(t)}{dt}$ 。

3.22 考虑以下有关不同类型响应的问题。

(a) LTI 系统的输入为 $x(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$, 相应输出的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = \frac{(s+2)(1-e^{-s})^2}{s(s+1)^2}$$

确定系统的冲激响应。

(b) 若函数

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

对应一个因果信号 $x(t)$, 无须计算拉普拉斯逆变换, 直接确定 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 。

(c) 若 LTI 系统输出的拉普拉斯变换为

$$Z(s) = \frac{1}{s((s+2)^2 + 1)}$$

那么稳态响应 $z_{ss}(t)$ 会等于什么?

(d) LTI 系统输出的拉普拉斯变换为

$$W(s) = \frac{e^{-s}}{s((s-2)^2 + 1)}$$

如何判断有没有稳态? 请作出解释。

(e) LTI 系统输出的拉普拉斯变换为

$$V(s) = \frac{s+1}{s((s+1)^2 + 1)}$$

确定相应于 $V(s)$ 的稳态响应和暂态响应。

答案: (a) $H(s) = (s+2)/(s+1)^2$, ROC: $\sigma > 0$;

(b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.1$; (c) $v_t(t) = -0.5e^{-t}\cos(t)u(t) + 0.5e^{-t}\sin(t)u(t)$ 。

3.23 考虑下面与卷积积分有关的问题。

(a) LTI 系统的冲激响应为 $h(t) = e^{-2t}u(t)$, 系统的输入是脉冲 $x(t) = u(t) - u(t-3)$, 分别用画图计算卷积积分的方法和拉普拉斯变换方法求系统的输出 $y(t)$ 。

(b) 已知模拟平均器的冲激响应为 $h_1(t) = u(t) - u(t-1)$, 若输入模拟平均器的信号为 $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$, 分别用画图计算卷积积分的方法和拉普拉斯变换方法求出相应的输出 $y_1(t) = [h_1 * x_1](t)$ 。 $y_1(t)$ 比输入信号 $x_1(t)$ 更光滑吗? 请作出解释。

(c) 假设将 3 个模拟平均器级联起来, 每个平均器的冲激响应均为 $h_i(t) = u(t) - u(t-1)$, $i=1, 2, 3$, 确定此系统的转移函数。如果输入到第一个平均器的信号持续时间为 Ms , 那么第 3 个平均器的输出信号会持续多长时间?

答案: (a) $Y(s) = (1 - e^{-3s})/(s(s+2))$; (c) 输出的支撑将为 $3Ms$ 。

3.24 在卷积问题中, 已知的是系统的冲激响应 $h(t)$ 和输入 $x(t)$, 要求的是系统输出 $y(t)$ 。而所谓“解卷积”问题是指给出 $x(t)$ 、 $h(t)$ 和 $y(t)$ 中的两个, 要去求第三个。举个例子, 已知输出 $y(t)$ 和系统的冲激响应 $h(t)$, 要求输入 $x(t)$ 。考虑以下情形:

(a) 假设系统的冲激响应为 $h(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$, 输出的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = \frac{4}{s((s+1)^2 + 1)}$$

那么输入 $x(t)$ 等于什么?

(b) LTI 系统的输出为 $y_1(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$, 其中 $r(t)$ 是斜变信号, 若已知输入为 $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$, 确定系统的冲激响应 $h_1(t)$ 。

答案: $x(t) = 4(1 - e^{-t})u(t)$; $h_1(t) = u(t) - u(t-1)$ 。

3.25 对于 BIBO 稳定的因果系统而言, 其转移函数的所有极点都在 s 平面的左半开平面 (不包含 $j\Omega$ -轴) 上。

(a) 设某个系统的转移函数为

$$H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

假设 $X(s)$ 的极点都在 s 平面的左半平面, 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, 判断系统是否是 BIBO 稳定的。如果不稳定, 说明导致系统不稳定的原因是什么。

(b) 设转移函数为

$$H_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$X(s)$ 的情形与 (a) 相同, 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ 。你能利用这个极限值来判断系统是否是 BIBO 稳定的吗? 如果不行, 该怎么做才能检验系统的稳定性?

答案: (a) 假定没有极点/零点相消, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow \infty$ 。

3.26 稳定系统的稳态响应是由来自于输入的位于 s 平面 $j\Omega$ -轴上的简单极点引起的。现在假设系统的转移函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)^2 + 4}$$

(a) 求 $H(s)$ 的极点和零点并在 s 平面上画出它们, 然后求出相应的冲激响应 $h(t)$ 。判断此系统的冲激响应是否能使系统 BIBO 稳定, 即是否绝对可积。

(b) 设输入 $x(t) = u(t)$, 并且初始条件为 0, 求 $y(t)$ 并根据它确定稳态响应。

(c) 设输入 $x(t) = tu(t)$, 并且初始条件为 0, 求 $y(t)$ 并根据它确定稳态响应。这种情况与前一种情况相比, 二者有什么区别?

(d) 为了解释在以上这种情况下的系统行为, 下面来考虑这些问题: 输入 $x(t) = tu(t)$ 是有界的吗? 即有没有一个有限值 M 使得对于所有 t 都有 $|x(t)| < M$? 如果知道系统是稳定的, 会得到什么样的输出?

答案: (a)~(b) 中的系统是 BIBO 稳定的; $y_{ss}(t) = 0.2$ 。

3.27 模拟平均器的输入/输出方程由卷积积分

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

给出, 其中 $x(t)$ 是输入, $y(t)$ 是输出。

(a) 改变以上方程从而确定冲激响应 $h(t)$ 。

(b) 利用联系输入和输出的卷积积分 (令 $T=1$), 画图确定对于输入脉冲 $x(t) = u(t) - u(t-2)$ 的输出 $y(t)$ 。仔细画出输入和输出的图形。(凭直觉也可以获得输出, 这来自于对平均器的深入理解。)

(c) 利用前面求出的冲激响应 $h(t)$, 现在用拉普拉斯变换法计算对于 $x(t) = u(t) - u(t-2)$ 的输出, 仍然令平均器的 $T=1$ 。

答案: $h(t) = (1/T)[u(t) - u(t-T)]$; $y(t) = r(t) - r(t-1) - r(t-2) + r(t-3)$ 。

3.28 为了明白零点对系统全响应的的影响, 现在假设有一个系统, 其转移函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 4}{s((s+1)^2 + 1)}$$

(a) 求出并画出 $H(s)$ 的极点和零点, 此系统是 BIBO 稳定的吗?

(b) 若要使已知系统的稳态输出为零, 确定输入 $x(t) = 2\cos(\Omega_0 t)u(t)$ 的频率 Ω_0 。解释为什么会出

现稳态输出为零的情况？

(c) 如果输入为 $x(t) = 2\sin(\Omega_0 t)u(t)$ ，会得到与上面相同的结果吗？请解释为什么相同或者不同。

答案： $h(t)$ 不绝对可积；余弦作为输入产生 $Y(s) = 2/((s+1)^2 + 1)$ 。

3.29 有两类反馈：负反馈和正反馈。在这个问题中我们要探究它们的差别。

(a) 考虑负反馈。假设有个转移函数为 $H(s) = Y(s)/E(s)$ 的系统，其中 $E(s) = C(s) - Y(s)$ ，且 $C(s)$ 和 $Y(s)$ 分别是反馈系统的参考信号 $c(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 的拉普拉斯变换。求整个系统的转移函数 $G(s) = Y(s)/C(s)$ 。

(b) 与负反馈相比，在正反馈中唯一改变的方程是 $E(s) = C(s) + Y(s)$ ，另一个方程保持不变。求整个反馈系统的转移函数 $G(s) = Y(s)/C(s)$ 。

(c) 假设 $C(s) = 1/s$ ， $H(s) = 1/(s+1)$ ，确定负反馈系统和正反馈系统的 $G(s)$ 。求出两类反馈系统的 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ ，并说明二者的差别。

答案：正反馈： $G(s) = H(s)/(1 - H(s))$ 。

3.30 以下问题研究的是将不稳定系统变成稳定系统的方法。

(a) 利用一个反馈环增益为 K 的负反馈可以使不稳定系统变成稳定系统。例如，考虑一个不稳定系统，其转移函数为

$$H(s) = \frac{2}{s-1}$$

它在 s 平面的右半平面有一个极点，这使得系统的冲激响应 $h(t)$ 随 t 的增大而增长。利用负反馈，反馈环增益为 $K > 0$ ，将 $H(s)$ 置于前向环中，画出系统的框图。求出反馈系统的转移函数 $G(s)$ ，并且确定能够使整个系统 BIBO 稳定，也就是使 $G(s)$ 的极点位于 s 平面左半开平面的 K 值。

(b) 另一个稳定化方法是将一个全通系统与不稳定的系统级联连接，从而消去位于 s 平面右半平面上的极点。考虑转移函数为

$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+2s+1)}$$

的系统，它有一个位于 s 平面右半平面上的极点 $s=1$ ，所以系统不稳定。

i. 全通滤波器的极、零点是这样的：若 $p_{12} = -\sigma \pm j\Omega_0$ 是滤波器的复共轭极点，那么 $z_{12} = \sigma \pm j\Omega_0$ 就是相应的零点；对于实数极点 $p_0 = -\sigma$ ，有一个相应的零点 $z_0 = \sigma$ 。全通滤波器的分子、分母多项式的阶数相等。写出全通滤波器转移函数的一般形式 $H_{ap}(s) = KN(s)/D(s)$ 。

ii. 求一个全通滤波器的 $H_{ap}(s)$ ，要使当它与已知的 $H(s)$ 级联时，整个系统的转移函数 $G(s) = H(s)H_{ap}(s)$ 的所有极点都在 s 平面的左半平面内。

iii. 求全通滤波器的 K 值，要使当 $s=0$ 时全通滤波器的增益为 1。整个系统的模 $|G(s)|$ 与不稳定滤波器的模 $|H(s)|$ 之间有什么关系？

答案：(a) $K > 0.5$ ；(b) $G(s) = -1/(s+1)^2$ 。

3.8.2 MATLAB 实践题

3.31 拉普拉斯逆变换 考虑以下拉普拉斯逆变换问题。

(a) 已知拉普拉斯变换

$$Y(s) = \frac{s^4 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

它不是一个真分式。确定其逆变换信号 $y(t)$ 中的 $\delta(t)$ 和 $d\delta(t)/dt$ 项的幅值。

(b) 求

$$Z(s) = \frac{s^2 - 3}{(s+1)(s+2)}$$

的拉普拉斯逆变换。能用初值定理检验前面求出的结果吗？请作出解释。

(c)
$$X(s) = \frac{3s-4}{s(s+1)(s+2)}$$

的拉普拉斯逆变换应该具有 $x(t) = [Ae^{-t} + B + Ce^{-2t}]u(t)$ 的形式，求 A 、 B 和 C 的值。用 MATLAB 函数 `ilaplace` 求出逆变换并画出 $x(t)$ 。

答案： $y(t) = -4\delta(t) + d\delta(t)/dt + \dots$ ； $z(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ 。

3.32 拉普拉斯逆变换 考虑以下拉普拉斯逆变换问题。

(a) 用 MATLAB 计算以下函数的拉普拉斯逆变换：

$$X(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s(s+1)(s^2 + 10s + 50)}$$

确定稳态中 $x(t)$ 的值。若不计算逆变换，如何获得该值？请作出解释。

(b) 求

$$X(s) = \frac{(1 - se^{-s})}{s(s+2)}$$

的逆变换 $x(t)$ 。再用 MATLAB 画出 $x(t)$ 来验证所得逆变换结果。

答案： (b) $x(t) = 0.5u(t) - 0.5e^{-2t}u(t) - e^{-2(t-1)}u(t-1)$ 。

3.33 极点和零点的影响 信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 的极点为 $p_{1,2} = -3 \pm j\pi/2$ 和 $p_3 = 0$ 。

(a) 给出信号 $x(t)$ 的一般表达形式，该表达式中包含某些常数。

(b) 令

$$X(s) = \frac{1}{(s+3-j\pi/2)(s+3+j\pi/2)s}$$

根据极点的位置获得 $x(t)$ 的表达式。用 MATLAB 求出 $x(t)$ 并画出它的图形。你对答案的猜测与 MATLAB 给出的结果接近程度如何？

答案： (a) $x(t) = Ae^{-3t} \cos((\pi/2)t + \theta)u(t) + Bu(t)$ 。

3.34 求解微分方程 拉普拉斯变换的一个应用是求解微分方程。

(a) 假设已知描述一个 LTI 系统的常微分方程为

$$y^{(2)}(t) + 0.5y^{(1)}(t) + 0.15y(t) = x(t), \quad t \geq 0$$

其中， $y(t)$ 是系统的输出， $x(t)$ 是系统的输入， $y^{(1)}(t)$ 和 $y^{(2)}(t)$ 是对 t 的一阶导数和二阶导数。输入是因果的，即 $x(t) = 0, t < 0$ 。要使系统是 LTI 的，初始条件应该等于多少？求出相应于这些初始条件的 $Y(s)$ 。

(b) 对于以上常微分方程，如果初始条件是 $y^{(1)}(0) = 1, y(0) = 1$ ，求 $Y(s)$ 。如果输入系统的信号加倍，即输入等于 $2x(t)$ ，那么 $Y(s)$ 也加倍从而使其逆变换 $y(t)$ 也加倍吗？该系统是线性的吗？

(c) 若输入分别为 $u(t)$ 和 $2u(t)$ ，初始条件如问题(b)，用 MATLAB 求出常微分方程的解。比较两个解，检验在问题(b)中求出的响应。

答案： (b) $Y(s) = X(s)/(s^2 + 0.5s + 0.15) + (s+1.5)/(s^2 + 0.5s + 0.15)$ ，不是 LTI 的。

3.35 微分方程、初始条件和稳定性 以下函数 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ 是对一个微分方程应用拉普拉斯

变换而得到的,该方程表示了一个具有非零初始条件的系统,该系统的输入为 $x(t)$,其拉普拉斯变换为 $X(s)$,

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2s + 3} + \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

(a) 确定表示系统的包含 $y(t)$ 和 $x(t)$ 的微分方程。

(b) 求初始条件 $y'(0)$ 和 $y(0)$ 。

(c) 用 MATLAB 确定该系统的冲激响应 $h(t)$,并画出它的图形。求转移函数 $H(s)$ 的极点并判断系统是否是 BIBO 稳定的。

答案: $d^2y(t)/dt^2 + 2dy(t)/dt + 3y(t) = x(t)$ 。

3.36 不同类型的响应 令 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ 为一个二阶微分方程的解的拉普拉斯变换,该方程表示的系统具有输入 $x(t)$ 以及某些初始条件,

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2s + 1} + \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

(a) 求对 $x(t) = u(t)$ 的零状态响应(初始条件为零,仅由输入引起的响应)。

(b) 求零输入响应(输入为零,由初始条件引起的响应)。

(c) 求当 $x(t) = u(t)$ 时的全响应。

(d) 求当 $x(t) = u(t)$ 时的暂态和稳态响应。

(e) 用 MATLAB 验证以上求得的各响应。

答案: 对于零状态, $x(t) = u(t)$, $y_{zs}(t) = [1 - te^{-t} - e^{-t}]u(t)$ 。

3.37 二阶系统的暂态响应 二阶系统暂态响应的类型取决于系统极点的位置。现在有二阶系统的转移函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + b_1s + b_0}$$

设输入为 $x(t) = u(t)$ 。

(a) 设 $H(s)$ 分母的系数为 $b_1 = 5, b_0 = 6$,求响应 $y(t)$ 。用 MATLAB 验证并画出 $y(t)$ 的图形。

(b) 假设 $H(s)$ 分母的系数变成 $b_1 = 2, b_0 = 6$,求响应 $y(t)$ 。用 MATLAB 验证并画出 $y(t)$ 的图形。

(c) 将求得的响应与 $H(s)$ 的极点位置联系起来,解释以上结果。

答案: (a) $y(t) = [(1/6) - (1/2)e^{-2t} + (1/3)e^{-3t}]u(t)$ 。

3.38 模拟平均器的零稳态响应 模拟平均器可由以下微分方程描述

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{T}[x(t) - x(t - T)]$$

其中, $y(t)$ 是其输出, $x(t)$ 是输入。

(a) 如果平均器的输入-输出方程为

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

说明如何得到以上微分方程,证明 $y(t)$ 是微分方程的解。

(b) 如果 $x(t) = \cos(\pi t)u(t)$,选取平均器的 T 值从而使稳态输出 $y(t) = 0$,对于所选取的 T ,画图说明怎样使输出 $y(t) = 0$ 成为可能。这样的 T 值是唯一的吗? 这与正弦的频率 $\Omega_0 = \pi$ 有什么关系?

(c) 利用平均器的冲激响应 $h(t)$ 和拉普拉斯变换,证明当 $x(t) = \cos(\pi t)u(t)$ 且 T 为上面所取的值得时,稳态输出等于零。用 MATLAB 求解微分方程并画出当 T 为所取值时的响应。

提示: 考虑输入为 $x(t)/T$, 利用叠加性和时不变性求由 $(x(t)-x(t-T))/T$ 引起的 $y(t)$ 。

答案: (c) 对输入 $\cos(\pi t)u(t)$, $y(t)=(0.5/\pi)(\sin(\pi t)u(t)-\sin(\pi(t-2))u(t-2))$ 。

3.39 部分分式展开 考虑以下函数 $Y_i(s)=\mathcal{L}[y_i(t)]$, $i=1,2$ 和 3 ,

$$Y_1(s)=\frac{s+1}{s(s^2+2s+4)}, \quad Y_2(s)=\frac{1}{(s+2)^2}, \quad Y_3(s)=\frac{s-1}{s^2((s+1)^2+9)}$$

其中 $\{y_i(t), i=1,2,3\}$ 是具有零初始条件的微分方程的全响应。

(a) 如果对应这些函数的输入均为 $x(t)=u(t)$, 确定每一种情况下的微分方程。

(b) 对于 $\{Y_i(s), i=1,2,3\}$ 中的每个函数, 求全响应 $\{y_i(t), i=1,2,3\}$ 的一般形式。用 MATLAB 画出 $\{Y_i(s)\}$ 中每个函数的极点和零点, 求出它们的部分分式展开式和全响应。

答案: $d^2 y_1(t)/dt^2 + 2dy_1(t)/dt + 4y_1(t) = x(t) + dx(t)/dt$ 。

3.40 迭代卷积积分 考虑脉冲 $x(t)=u(t+0.5)-u(t-0.5)$ 与其自身的多次卷积, 用 MATLAB 来计算和画图。

(a) 考虑 $N=2$ 时的卷积, 即 $y_2(t)=(x*x)(t)$ 的结果。用拉普拉斯变换的卷积性质求 $Y_2(s)=\mathcal{L}[y_2(t)]$, 并求出 $y_2(t)$ 。

(b) 考虑 $N=3$ 时的卷积, 即 $y_3(t)=(x*x*x)(t)$ 的结果。用拉普拉斯变换的卷积性质求 $Y_3(s)=\mathcal{L}[y_3(t)]$, 并求出 $y_3(t)$ 。

(c) 信号 $x(t)$ 可认为是对信号进行“平滑”的平均器的冲激响应。令 $y_1(t)=x(t)$, 画出当 $i=1,2,3$ 时的三个函数 $y_i(t)$, 比较这些信号的光滑程度, 指出它们的时间支撑(对 $y_2(t)$ 和 $y_3(t)$, 它们的支撑是怎样与被卷积的信号的支撑相关的?)。

答案: $y_3(t)=\phi(t+1.5)-3\phi(t+0.5)+3\phi(t-0.5)-\phi(t-1.5)$, $\phi(t)=t^3 u(t)/6$ 。

3.41 半波整流器 由交流电压产生直流的过程中, “半波”整流信号是一个重要部分。假设交流电压为 $x(t)=\sin(2\pi t)u(t)$, $y(t)$ 为半波整流信号。

(a) 设 $y_1(t)$ 为 $y(t)$ 在周期 $0 \leq t \leq 1$ 内的部分, 证明 $y_1(t)$ 可被等价地写为

$$y_1(t) = \sin(2\pi t)u(t) + \sin(2\pi(t-0.5))u(t-0.5)$$

或

$$y_1(t) = \sin(2\pi t)[u(t) - u(t-0.5)]$$

用 MATLAB 进行验证。求 $y_1(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y_1(s)$ 。

(b) 用 $y_1(t)$ 表示 $y(t)$, 并求出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 。

答案: (a) 用 $\sin(2\pi(t-0.5))=\sin(2\pi t-\pi)=-\sin(2\pi t)$; $Y(s)=Y_1(s)/(1-e^{-s})$ 。

3.42 多项式乘法运算 当分子或分母以因式分解的形式给出时, 需要将多项式相乘, 虽然该过程可以手工完成, 但 MATLAB 提供了函数 conv, 可以用它计算两个多项式相乘所产生的多项式的系数。

(a) 在 MATLAB 里用 help 查找 conv 的用法, 然后考虑以下两个多项式:

$$P(s) = s^2 + s + 1 \quad \text{和} \quad Q(s) = 2s^3 + 3s^2 + s + 1$$

首先手工计算两个多项式的乘积, 求出 $Z(s)=P(s)Q(s)$, 再用 conv 检验你的结果。

(b) 一个系统的输出具有以下的拉普拉斯变换

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+2)}{s^2(s+1)((s+4)^2+9)}$$

用 conv 求出分母多项式, 然后用 ilaplace 求出拉普拉斯逆变换。

答案: $Z(s)=P(s)Q(s)=2s^5+5s^4+6s^3+5s^2+2s+1$ 。

3.43 反馈误差 考虑一个负反馈系统,该系统用于控制转移函数为

$$G(s) = 1/(s(s+1)(s+2))$$

的设备,反馈系统的输出 $y(t)$ 通过一个转移函数为 $H(s)=1$ 的传感器与一个微分器相连,参考信号 $x(t)$ 也在此处接入。微分器的输出是反馈误差 $e(t)=x(t)-v(t)$,其中 $v(t)$ 是反馈传感器的输出。

(a) 仔细画出该反馈系统,并求出反馈误差 $e(t)$ 的拉普拉斯变换 $E(s)$ 的表达式。

(b) 对于所给设备来说,有两个可能的参考测试信号,分别是 $x(t)=u(t)$ 和 $x(t)=r(t)$,请从中选择一个会产生零稳态反馈误差的参考信号。

(c) 对两个误差函数,当 $x(t)=u(t)$ 时的 $E_1(s)$ 和当 $x(t)=r(t)$ 时的 $E_2(s)$,用数值 MATLAB 对它们进行部分分式展开,利用部分分式展开式求出 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$,从而验证前面得到的结果。

答案: $E(s)=X(s)/(1+H(s)G(s))$ 。