

采样数据系统

教学目标

系统中若既包含连续信号又包含离散信号,则该系统为采样数据系统。连续信号与离散信号是通过输入输出通道联系起来的。本章主要介绍输入输出通道中模数转换与采样对信号的影响,以及数模转换中零阶保持对信号的影响。包括采样数据分析、采样信号频谱分析、数据重构技术、零阶保持对信号的影响、采样数据系统的结构图分析以及对象的离散模型等。通过对本章内容的学习,希望读者能够:

- 熟练掌握采样与保持模型的建立;
- 熟练掌握采样信号的表达方式与特性;
- 熟练掌握采样信号频谱的分析方法;
- 熟练掌握信号重构的理想恢复方法与非理想恢复方法;
- 熟练掌握采样数据系统的结构图表达方式;
- 熟练掌握基于多项式 z 变换方式的对象离散模型建立方法;
- 熟练掌握基于对状态变量采样方式的对象离散模型建立方法。

3.1 采样与保持

3.1.1 对采样数据的分析

1. 模数转换与采样

在第2章中讨论了用差分方程描述的离散时间系统。而在图2-1中,我们会发现其数字控制器是离散时间系统,但被控对象一般都是连续时间系统。因此,在如图2-1所示的闭环控制系统中,既有连续信号,也有离散信号,将这种既有连续信号又有离散信号的系统称为采样数据系统。在采样数据系统中,联系连续信号与离散信号的环节或通道是模数转换器和数模转换器。这里我们先讨论模数转换器环节对信号的影响。

模数转换器是能将模拟信号成正比地转换成对应的数字信号的装置。模数转换可以用不同的电路技术来实现,包括计数型模数转换、逐次逼近型模数转换、并行型模数转换以及双积分型模数转换等。不论采用哪种电路技术实现模拟信号对数字信号的转换,都必须包含图3-1中介绍的采样、保持、量化和编码几个环节。基于并行比较电路技术的模数转换器如图3-1所示。

由图3-1可见,电路中有一驱动电路驱动采样开关对模拟信号进行采样。采样是指将随时间连续变化的模拟量信号 $e(t)$ 转换为在时间上离散的模拟量信号 $e_s(k)$ 。采样的频率越高,所采得的信号经低通滤波器后越能真实地复现输入信号。合理的采样频率由采样定理确定。如果采样信号的频率为 f_s ,输入模拟信号 $e(t)$ 的最高频率分量的频率为 $f_{\max}$,只有当 $f_s \geq 2f_{\max}$ 时,才能从采样信号中无失真地恢复原信号,这就是香农采样定理。

将采样采得的模拟信号转换为数字信号在具体电路实现时都需要一定的时间,为了给后续的量化编码过程提供一个稳定的值,在取样电路后要求将所采样的模拟信号保持一段

时间,这就是保持。图 3-1 中采用电容器实现对采样信号的保持。另外一种使后续电路获取信号的办法是适当地延长采样开关闭合的时间,这段闭合时间也称为孔径时间。由于采样开关在这段闭合时间内,输入信号有可能会发生改变,这也会给后续的转换带来误差,因此实际电路中更多的是采用保持方式。

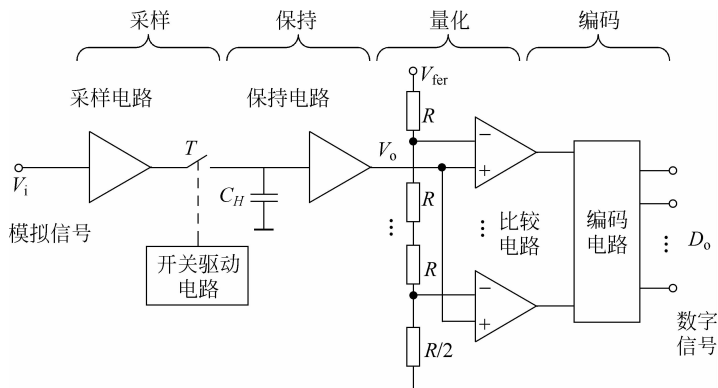


图 3-1 模数转换器电路原理图

数字信号在数值上是离散的。采样-保持电路的输出电压还需按某种近似方式归一化到与之相应的离散电平上。图 3-1 是利用运算放大器构成的多位并联比较电路,以实现同时对不同位上的模拟量信号对参考信号(即离散电平)的比较。任何一种转换电路都有一定的分辨率,分辨率就是电路或仪器能够计量的最小单位。因此任何数字量只能是能够分辨的某个最小数量单位的整倍数,这就是量化,即

$$e_{sq}(k) = \left[\frac{e}{q} \right] \quad (3-1)$$

式中, $e_{sq}(k)$ 为量化所得的数字量;

e 为被量化的离散模拟信号幅值;

q 为分辨率,符号 $[]$ 表示取整数。按照对尾数的不同处理方式,取整方法分为截断法和舍入法。截断法是把小于 q 的尾数一律忽略不计,舍入法是将不小于 $q/2$ 的尾数当作处理,对小于 $q/2$ 的尾数则忽略不计。在量化过程中由于所采样电压不一定能被整除,所以量化前后一定存在误差,此误差称为量化误差。模数转换器的位数越多,各离散电平之间的差值越小,量化误差越小。

量化后的数值最后还需通过编码技术(比如 ASCII 码等),用一个代码表示出来。因此还需采用编码电路来实现这一过程。经编码后得到的代码就是模数转换器输出的数字量 $e_{sqe}(t)$ 。信号的上述转换过程如图 3-2 所示。

2. 对采样数据的分析

信号进行模数转换时,在量化与编码环节,信号的成分不会受到影响,而经过采样与保持环节时,信号的成分会发生变化,因此特对采样与保持过程对信号的影响进行分析。

如果连续信号为 $e(t)$,经采样后得到的是一串以采样周期为间隔的脉冲信号,即

$$\begin{aligned} e(k) &= \cdots + e(-1T)\delta(t+T) + e(0)\delta(0) + e(1T)\delta(t-T) \\ &\quad + e(2T)\delta(t-2T) + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \end{aligned} \quad (3-2)$$

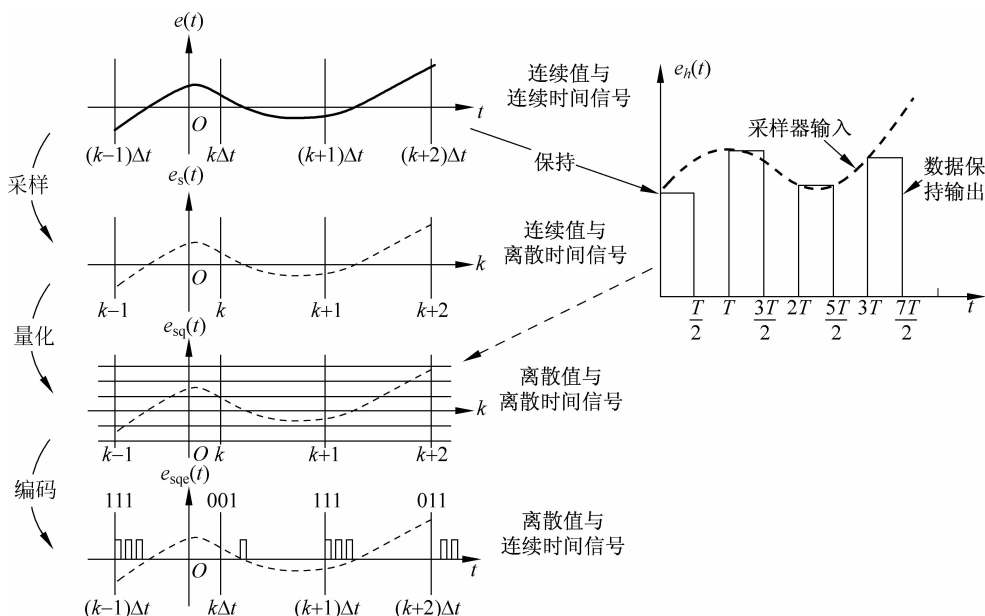


图 3-2 模数转换器中信号转换的原理图

为了分析方便,可先假设

$$e(t)=0, \quad t < 0$$

在图 3-2 中,对采样信号进行保持后,图中信号的保持效果可用图 3-3 来等效。这样对保持信号的描述可由下式表达

$$\begin{aligned} e_h(t) = & e(0)[u(t) - u(t - T)] + e(T)[u(t - T) - u(t - 2T)] \\ & + e(2T)[u(t - 2T) - u(t - 3T)] + \dots \end{aligned} \quad (3-3)$$

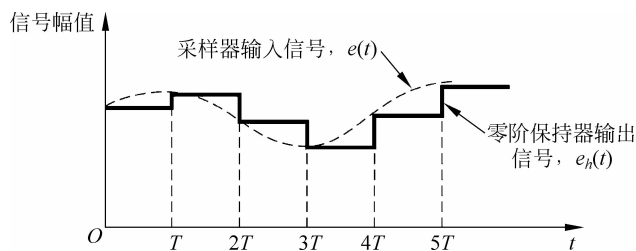


图 3-3 采样器与数据保持器的输入输出信号图

由于对系统的分析多在 s 域进行,因此有必要将系统采样与保持模型转化为 s 域中的传递函数,以便用同一工具进行分析。由此,对式(3-3)做拉氏变换有

$$\begin{aligned} E_h(s) &= e(0) \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right) + e(T) \left(\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-2Ts}}{s} \right) + e(2T) \left(\frac{e^{-2Ts}}{s} - \frac{e^{-3Ts}}{s} \right) + \dots \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} [e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2Ts} + \dots] \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} \right] \end{aligned} \quad (3-4)$$

式(3-4)中的第二项是输入信号 $e(t)$ 的函数,且其采样周期为 T 。第一项则是独立于输入信号 $e(t)$ 的。这样可以将第一项单独考虑为一个传递函数,整个采样与保持算法可以表达为如图 3-4 所示的系统。注意到第二项实际上就是式(2-21)的表达形式,也即 z 变换的定义。也将其定义为信号的星号标识型,即

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs} \quad (3-5)$$

能够实现式(3-5)功能的器件为理想采样器。而式(3-4)中第一项传递函数表达的是数据保持器,即

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3-6)$$

$G_{h0}(s)$ 即为数据保持器的传递函数,它是一个零阶保持器(可参见 3.2.1 节)。

这里有几点需要注意:

- 数据保持器是独立于输入信号 $e(t)$ 的;
- 采样器是不能用传递函数来表达的;
- 星号标识型信号 $E^*(s)$ 在实际的物理系统中是不存在的,它只是数学上的一种表达;
- 不同的输入信号 $e(t)$ 可能会得到相同的输出信号 $e^*(t)$ 。

例如有两个信号, $e_1(t) = \cos\omega_1 t$ 和 $e_2(t) = \cos 3\omega_1 t$, 如果用 $\omega_s = \omega_1$ 采样频率对它们进行采样,则将得到相同的输出信号 $e^*(t)$, 即两个信号在采样点上的值相同,如图 3-5 所示。

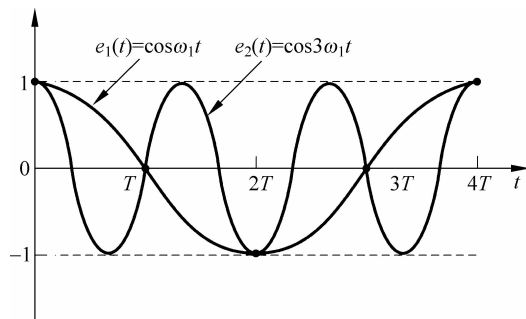


图 3-5 两个不同输入信号 $e(t)$ 得到相同输出信号 $e^*(t)$ 示意图

3. 理想采样器

理想采样器也称冲激采样器,实际上就是图 3-4 中的左边部分,将其重画如图 3-6 所示。但要说明的是这是一种虚拟的采样器,引入这个概念是为了方便数学分析,在实际中是不存在的。

在理想采样器中,如果假设其输出是从 $t=0$ 时刻开始的,采样周期为 T ,每一个冲激强度等于连续信号在相应采样瞬间的采样值的冲激序列。也即在 $t=kT$ 时,冲激是 $e(kT)\delta(t-kT)$ 。通常用 $e^*(t)$ 表示冲激采样的输出,即

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(0)\delta(t) + e(1T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\delta(t-kT) \end{aligned} \quad (3-7)$$

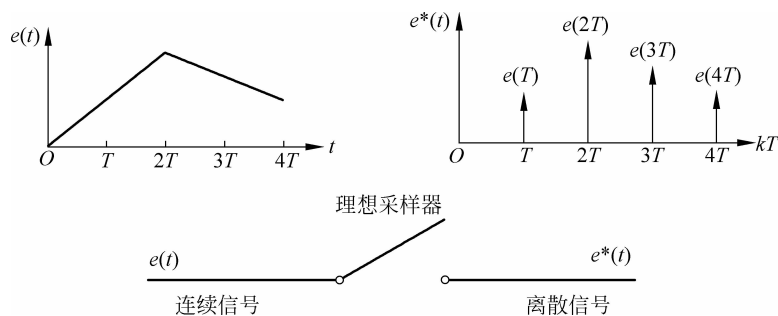


图 3-6 理想采样器示意图

如果定义单位冲激序列为

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

冲激采样器的输出等于连续时间输入信号 $e(t)$ 和单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 的乘积。虽然在 s 域中无法用传递函数对理想采样器进行描述,但在时间域中,可以用一个结构图,将理想采样器视为一个调制器,输入信号 $e(t)$ 是调制信号,单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 是载波,如图 3-7 所示。

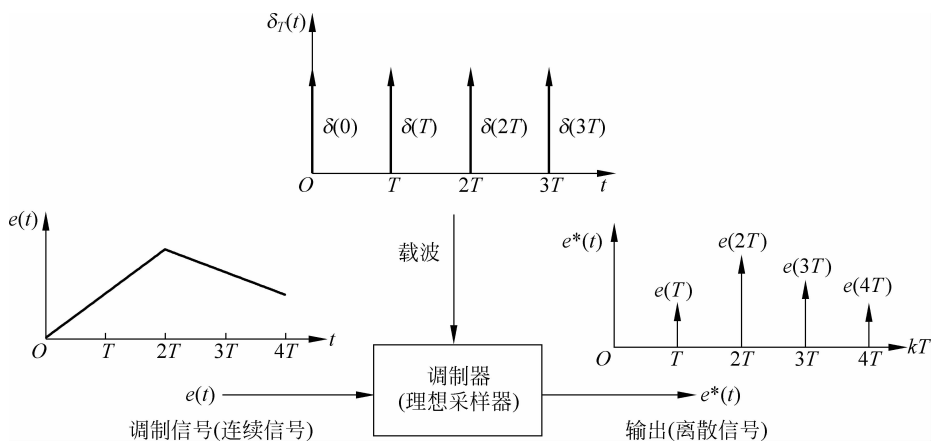


图 3-7 作为调制器的冲激采样器示意图

对式(3-7)进行拉氏变换,即可得到式(3-5)。如果定义

$$e^{Ts} = z$$

即

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

式(3-5)变为

$$E^*(s) \Big|_{s=(1/T)\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k} \quad (3-8)$$

式(3-8)与式(2-21)相同,即 $e(t)$ 在 $t=kT(k=0,1,2,\dots)$ 时刻产生的采样信号序列 $e(0), e(T), e(2T), \dots$ 的变换。因此,式(3-8)又可写为

$$E^*(s) \Big|_{s=(1/T)\ln z} = E^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{-k} = E(z) \quad (3-9)$$

或

$$E(z) \Big|_{z=e^{Ts}} = E(e^{Ts}) = E^*(s) \quad (3-10)$$

例 3-1 求 $e(t)=u(t)$ (即单位阶跃) 的星号标识型信号 $E^*(s)$ 。

解 对于单位阶跃有 $e(nt)=1, n=0,1,2,\dots$

由式(3-5)有

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs} = e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2Ts} + \dots$$

或

$$E^*(s) = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots$$

注意到式(2-31), 即

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

则有

$$E^*(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}, \quad |e^{-Ts}| < 1$$

例 3-2 用 z 变换的方法求取例 3-1 中星号标识型信号 $E^*(s)$ 。

解 对单位阶跃函数做 z 变换有

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

由式(3-10)有

$$E^*(s) = E(z) \Big|_{z=e^{Ts}} = \frac{z}{z-1} \Big|_{z=e^{Ts}} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

3.1.2 采样信号的频谱

在对系统进行分析 and 求取系统响应时, 应用傅里叶变换的方法也是一种非常重要的方法。这种方法的基础是基于信号的频域分析, 这种方法对周期性的信号尤为有效。它把信号看作一系列正弦波的叠加, 而以频谱的不同区分不同的信号。

式(3-7)表示的采样信号中, $\sum \delta(t-kT)$ 部分就是周期性的信号。因此用傅里叶变换的方法来分析 $e^*(t)$ 信号可以使更加深入地理解采样过程。

首先将周期性的信号 $\sum \delta(t-kT)$ 用傅里叶级数表达

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(2\pi n/T)t} \quad (3-11)$$

式中

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{j(2\pi n/T)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{j(2\pi n/T)t} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi n/T)t}$$

同样

$$e^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \frac{1}{T} e^{j(2\pi n/T)t} \quad (3-12)$$

注意到 $2\pi/T = \omega_s$, 且 $\pi/T = \omega_s/2$ 为奈奎斯特频率。对式(3-12)做拉氏变换有

$$\begin{aligned} E^*(s) &= L\{e^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_s t} \right] e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-jn\omega_s t} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-(s-jn\omega_s)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s - jn\omega_s) \end{aligned} \quad (3-13)$$

如果将式(3-13)中的 s 换成 $j\omega$, 则为其频率响应特性。

$$\begin{aligned} E^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j\omega - jn\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} [E(j\omega) + E(j\omega - j\omega_s) + E(j\omega - j2\omega_s) + \cdots \\ &\quad + E(j\omega + j\omega_s) + E(j\omega + j2\omega_s) + \cdots] \end{aligned} \quad (3-14)$$

式(3-14)也称为周期序列的频谱, 其幅值为幅频谱, 相角为相频谱, 即

$$E^*(j\omega) = |E^*(j\omega)| e^{j\theta(j\omega)} = |E^*(j\omega)| \angle \theta(j\omega)$$

当 $n=0$ 时,

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} E(j\omega)$$

上式即为采样前连续信号的频谱, 也称主值区间内的频谱, 幅频谱如图 3-8 所示。图中表明该连续信号的最高频率为 $\omega_{\max}$ 。这个概念在时域中的解释则如图 3-9 所示。

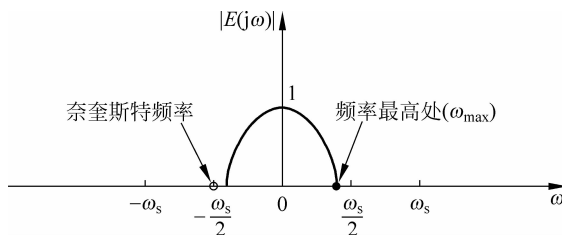


图 3-8 连续信号 $E(j\omega)$ 的频谱图

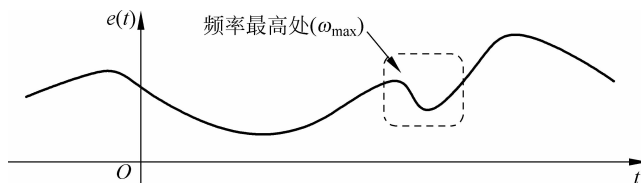


图 3-9 连续信号的频率变化图

当 $n=1$ 时,

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} E[j(\omega - \omega_s)]$$

当 $n=-1$ 时,

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} E[j(\omega + \omega_s)]$$

同样也可有 $n=-1, n=1, n=-2, n=2$, 等等, 其幅频谱如图 3-10(a) 所示。

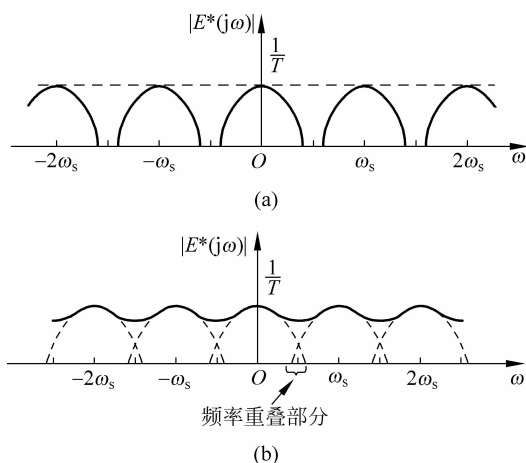


图 3-10 信号 $E^*(j\omega)$ 的频谱图

这就是说, 如果连续信号 $e(t)$ 的频谱如图 3-8 所示, 对连续信号 $e(t)$ 采样后 $e^*(t)$ 信号的频谱则会如图 3-10(a) 所示。关于这一点, 再看看 $E^*(j\omega)$ 信号的一些性质。

性质 1: $E^*(j\omega)$ 信号是周期性的, 即 $E^*(s) = E^*(s + j\omega_s)$ 。

要证明这一点, 可回顾星号标识型信号的定义, 即式(3-8)。

$$E^*(s + j\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) e^{-kT(s + j\omega_s)} \quad (3-15)$$

注意到 $2\pi/T = \omega_s$,

$$e^{-jkT\omega_s} = e^{-jkT2\pi/T} = e^{-jk2\pi} = 1 \angle k2\pi = 1$$

由欧拉公式有

$$e^{-jk2\pi} = \cos 2k\pi - j\sin 2k\pi$$

再由式(3-15)得

$$E^*(s + j\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) e^{-kTs} e^{-jkT\omega_s} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) e^{-kTs} = E^*(s) \quad (3-16)$$

性质 2: 如果函数 $E(s)$ 在 $s=s_1$ 有一个极点, 则 $E^*(s)$ 会在 $s=s_1 + jm\omega_s$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的位置有极点。这个性质可由式(3-14)直接有

$$\begin{aligned} E^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s - jn\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \left[E(s) + E(s - j\omega_s) + E(s - j2\omega_s) + \dots \right. \\ &\quad \left. + E(s + j\omega_s) + E(s + j2\omega_s) + \dots \right] \end{aligned} \quad (3-17)$$

例 3-3 求例 3-1 中星号标识型信号 $E^*(s)$ 的极点。

解 由性质 2 有

$$\begin{aligned} E^*(s + j\omega_s) &= \frac{1}{1 - e^{-T(s+j\omega_s)}} = \frac{1}{1 - e^{-Ts} e^{-jT2\pi/T}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Ts} e^{-j2\pi}} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} = E^*(s) \end{aligned}$$

上式的极点就是其分母为零的点, 因此

$$e^{-Ts} = 1 = \cos 2m\pi - j\sin 2m\pi = e^{-j2m\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

可见

$$Ts = j2m\pi$$

从中解得 s 有

$$s = \frac{jm2\pi}{T} = jm\omega_s, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

例 3-4 有一信号 $e(t) = \cos \omega_1 t$, 其中 $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ 。现用 $\omega_s = 8 \text{ rad/s}$ 的频率对其采样, 求 $E(s)$ 和 $E^*(s)$ 的极点。

解 对 $e(t)$ 做拉氏变换有

$$E(s) = \frac{s}{s^2 + 3^2}$$

$E(s)$ 的极点为

$$s = \pm j3$$

由性质 2 可得 $E^*(s)$ 的极点为

$$\begin{aligned} \pm j\omega_1 &= \pm j3 \\ \pm j\omega_1 \pm j\omega_s &= \pm j3 \pm j8 = \pm j5, \pm j11 \\ \pm j\omega_1 \pm j2\omega_s &= \pm j3 \pm j16 = \pm j13, \pm j19 \\ \pm j\omega_1 \pm j3\omega_s &= \pm j3 \pm j24 = \pm j21, \pm j27 \\ &\dots \end{aligned}$$

另外, 再回顾一下采样定律。如果采样信号的频率为 f_s , 当用弧度单位表达时为 ω_s , 输入模拟信号 $e(t)$ 的最高频率分量的频率为 $f_{\max}$, 或 $\omega_{\max}$, 只有当 $f_s \geq 2f_{\max}$, 或 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$, 才能从采样信号中无失真地恢复原信号。这里 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$, 也即 $\omega_{\max} \leq \omega_s/2$, 如图 3-8 所示。 $\omega_s/2$ 为奈奎斯特频率。如果 $\omega_{\max} \leq \omega_s/2$ 的条件不能满足, 即 $\omega_{\max} > \omega_s/2$, 就会出现如图 3-10(b) 所示的情况, 从图中可以看出, 将有频率重叠部分出现。如果出现这种情况, 将在 3.2 节中看到, 无法用一个滤波器将图 3-10(b) 的信号还原成图 3-8 的低频连续信号。

另外, 当采样频率偏低时, 模拟信号 $e(t)$ 中的高频成分将被丢失, 这一点可从如图 3-11 所示的时域信号采样情况看出。当采样频率较高时, 连续信号的信息可以较完整地反映, 如图 3-11(a) 所示。若采样频率较低时, 连续信号的高频信息部分可能将被丢失, 如图 3-11(b) 所示。

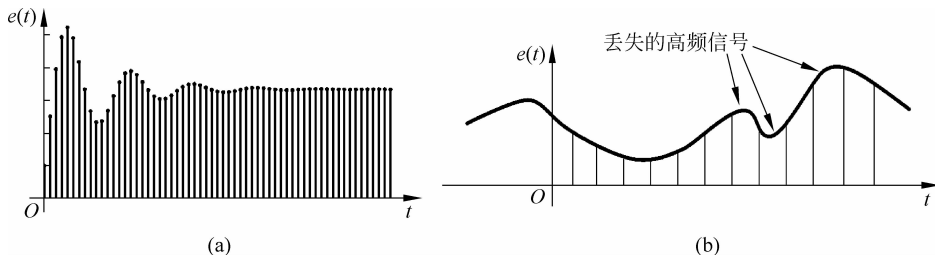


图 3-11 用不同采样频率对连续信号采样图

当采样频率较低时,还有可能出现假频(或混叠)现象。假频就是在采样过程中出现新的频率的现象。例如用 50Hz 采样频率对 60Hz 的连续信号进行采样,采样后将得到一个 10Hz 的采样信号,如图 3-12 所示。只有满足采样定律的要求时,上述现象才能避免。

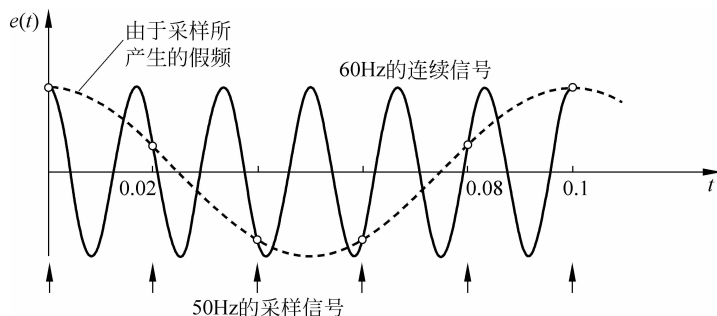


图 3-12 产生假频示意图

假频对数字控制系统的影响是很大的。在连续系统中,频率远高于系统带宽的噪声成分对系统的影响一般很小,因为系统不响应高频信号。然而,在数字系统中,噪声的频率可能会潜在地混叠在系统带宽附近的频率中,以至于闭环系统对噪声进行响应。解决这个问题的方法是在输入通道采样器前端串联一个模拟的预滤波器。一般简单的一阶低通滤波器即可。滤波器通常可设计为

$$L_p(s) = \frac{a}{s+a}$$

其中拐点 a 选择时应低于奈奎斯特频率 $\omega_s/2$,这样任何高于 $\omega_s/2$ 频率的噪声都能被预滤波器衰减。但要注意的是,拐点频率不能选择得太低,否则会减小控制系统的带宽。

3.2 信号重构

这一节要讨论的是数模转换器。数模转换器是能将数字信号成正比地转换成对应的模拟信号的装置。数模转换同样可以用不同的电路技术来实现,常用的数模转换器主要包括电阻网络数模转换器和集成数模转换器等。T 形电阻网络数模转换器如图 3-13 所示。转换的基本原理就是数字量是用代码按数位组合而成的,对于有权码,每位代码都有一定的权值,若能将每一位代码按其权的大小转换成相应的模拟量,然后,将这些模拟量相加,即可得到与数字量成正比的模拟量,从而实现数字量对模拟量的转换。

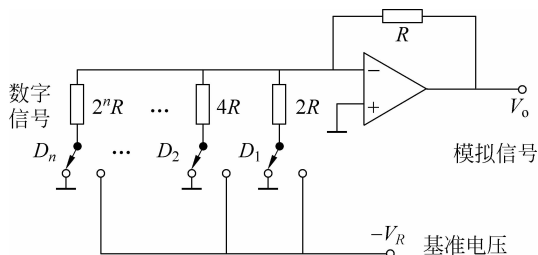


图 3-13 T 形电阻网络数模转换器原理图

从图 3-13 可见,由基准电源 $-V_R$ 经权电阻 $2^n R$ 产生权电流,由输入数据决定开关 D_n 的位置,输入为 0 时,开关接地,输入为 1 时开关接通参考电位,将权电流引向求和电路。

从数模转换器的电路原理可以看出,转换器只能实现对某一时刻信号的转换。例如 k 时刻的二进制数字信号在转换器可转换成十进制的模拟信号,但在 $k+1$ 时刻到来之前的一段时间(即 $k < t < k+1$)内的信号信息是没有的,如图 3-14 所示。

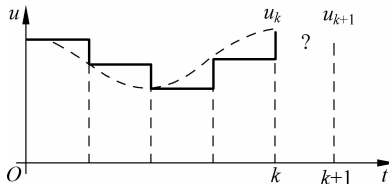


图 3-14 数模转换器中的信号图

要得到 $k < t < k+1$ 这段时间内的控制器输出信息,就要进行数据外推或信号重构。

3.2.1 数据外推技术

数据外推或信号重构,是指通过已知的信号或数据,推算出与这些已知数据有关的未知数据和信息,然后将其插入已知数据之中。也就是将星号标识型信号 $e^*(t)$,通过内插处理得到原信号 $e(t)$ 的过程。

另外,对数据外推也可以从频率响应的角度来理解。在模数转换过程中,由于采样,如图 3-8 所示的低频连续信号被采样成如图 3-10 所示的具有许多高频成分的离散信号。数模转换就是要将如图 3-10 所示的具有许多高频成分的离散信号,通过一个低通滤波器 $L(j\omega)$,将其中的高频成分滤掉,得到如图 3-8 所示的低频连续信号。这一过程则如图 3-15(a)所示。

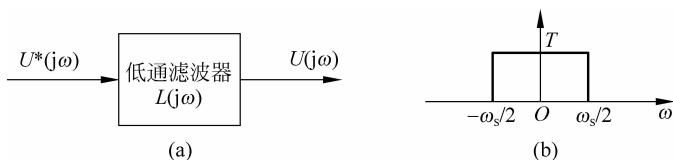


图 3-15 低通滤波器示意图

1. 理想恢复过程

如果采用理想的低通滤波器即可实现理想恢复过程,即在 $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ (或 $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$) 的频率范围内,滤波器的增益为 T ,而在低于 $-\pi/T$ 与高于 π/T 的频率范围内,滤波器的增益为 0,如图 3-15(b)所示。由图 3-15(a)有

$$U(j\omega) = L(j\omega)u^*(j\omega) \quad (3-18)$$

由于时域信号 $u(t)$ 就是 $U(j\omega)$ 的拉氏反变换, $u(t)$ 的拉氏反变换就是 $l(t)$ 与 $u^*(t)$ 的卷积分。

$$u(t) = \int u^*(\tau)l(t-\tau)d\tau$$

如图 3-15(b)所示的理想低通滤波器传递函数为

$$L(j\omega) = \begin{cases} T, & -\pi/T \leq \omega \leq \pi/T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$L(j\omega)$ 的拉氏反变换可由拉氏反变换的定义有

$$\begin{aligned}
l(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \frac{e^{j\omega t}}{jt} \Big|_{-\pi/T}^{\pi/T} \\
&= \frac{T}{2\pi jt} (e^{j\pi t/T} - e^{-j\pi t/T}) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \\
&\triangleq \text{sinc} \frac{\pi t}{T}
\end{aligned} \tag{3-19}$$

这里, $l(t)$ 就是外推信号。因此

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau) l(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(\tau-kT) \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{T} (t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau-kT) \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{T} (t-\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) \cdot \text{sinc} \frac{\pi}{T} (t-kT)
\end{aligned} \tag{3-20}$$

式中, sinc 函数为插补器, 它可以实现在两个采样信号之间, 用一个不高于 π/T 的频率的信号进行插补。

2. 非理想恢复过程

理想的低通滤波器是难以物理实现的。实际中一种常用的方法是用泰勒幂级数展开式来表达连续信号两个点之间的值, 即

$$u_t(t) = u(kT) + u'(kT)(t-kT) + \frac{1}{2!} u''(kT)(t-kT)^2 + \dots \tag{3-21}$$

式中, 记 $u_t(t) \approx u(t)$, $kT \leq t < (k+1)T$, 或记 $t_k < t < t_{k+1}$, $T = (k+1)T - kT$ 。另外式中的微分也是用差分来近似的, 若用反向差分即

$$u'(kT) = \frac{1}{T} [u(kT) - u(k-1)T] \tag{3-22}$$

$$\begin{aligned}
u''(kT) &= \frac{1}{T} [u'(kT) - u'(k-1)T] \\
&= \frac{1}{T^2} [u(kT) - 2u(k-1)T + u(k-2)T]
\end{aligned} \tag{3-23}$$

在式(3-21)中, 取泰勒幂级数展开式的第一项, 就是零阶保持器。如果采用省略 T 的记法, 有

$$u_t(t) = u_k, \quad t_k < t < t_{k+1} \tag{3-24}$$

零阶保持器可用来替代理想的低通滤波器。零阶保持器的传递函数就是对式(3-22)的拉氏变换, 也即式(3-6), 其频率响应特性为

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-Tj\omega}}{j\omega} = 2 \frac{1 - e^{-Tj\omega}}{2j\omega} e^{+Tj\omega/2} e^{-Tj\omega/2} = T \frac{\sin(T\omega/2)}{T\omega/2} e^{-Tj\omega/2} \tag{3-25}$$

其幅值特性和相位特性分别为

$$|G_{h0}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(T\omega/2)}{T\omega/2} \right| = T \left| \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right|$$

$$\angle G_{h0}(j\omega) = -\frac{T\omega}{2} + \theta = -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \theta, \quad \theta = \begin{cases} 0, & \sin(\pi\omega/\omega_s) > 0 \\ -\pi, & \sin(\pi\omega/\omega_s) < 0 \end{cases}$$

当 ω 从 0 向无穷方向变化时上面两式的图形就是零阶保持器的幅值特性和相位特性，如图 3-16 所示。

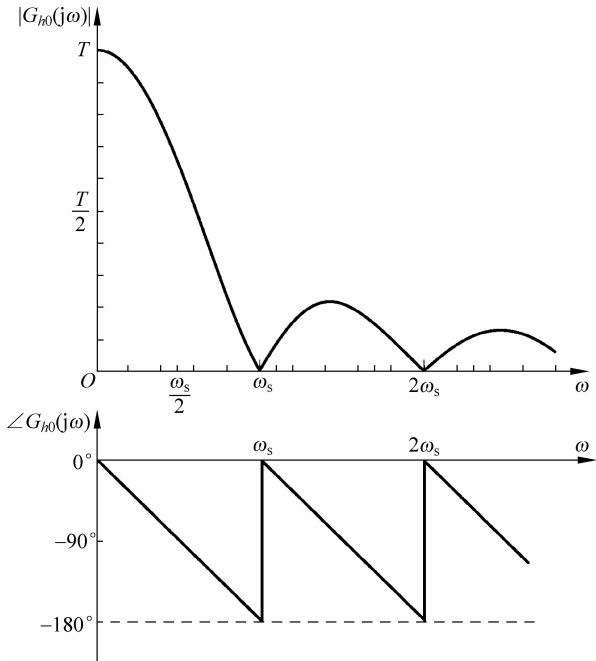


图 3-16 零阶保持器的幅相特性图

如果在式(3-21)中，取泰勒幂级数展开式的前两项，就是一阶保持器。如果采用省略 T 的记法，有

$$u_t(t) = u_k + u'_k(t - t_{k-1}) = u_k + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(u_k - u_{k-1}), \quad t_k < t < t_{k+1} \quad (3-26)$$

对式(3-26)的含义，通过如图 3-17 所示的表达更容易理解。

为求一阶保持器的传递函数，假设输入是单位脉冲，则系统脉冲响应的拉氏变换就是传递函数。脉冲响应如图 3-18 所示，脉冲响应的数学表达为

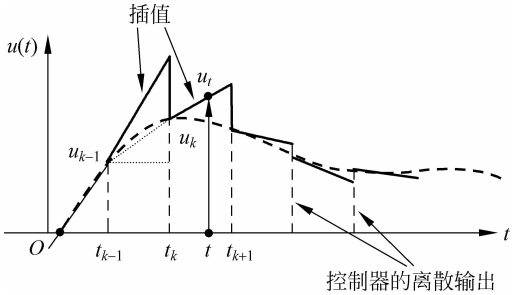


图 3-17 一阶保持原理图

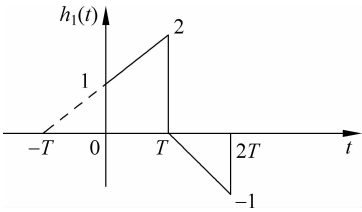


图 3-18 一阶保持器的脉冲响应示意图

$$u_t(t) = u(t) + \frac{1}{T}tu(t) - 2u(t-T) - \frac{2}{T}(t-T)u(t-T) \\ + u(t-2T) + \frac{1}{T}(t-2T)u(t-2T)$$

其拉氏变换为

$$G_{h1}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-Ts}}{s} + \frac{e^{-2Ts}}{s} + \frac{1}{Ts^2}(1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts})$$

即

$$G_{h1}(s) = \frac{1+Ts}{T} \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \right]^2 \quad (3-27)$$

其频率响应特性为

$$G_{h1}(j\omega) = \frac{1+Tj\omega}{T} \left[\frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega} \right]^2 \quad (3-28)$$

其幅值特性和相位特性分别为

$$|G_{h1}(j\omega)| = T \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_s^2} \left[\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right]^2} \\ \angle G_{h1}(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{2\pi\omega}{\omega_s} \right) - \frac{2\pi\omega}{\omega_s}$$

取 ω 为变量时,上面两式的图形就是一阶保持器的幅值特性和相位特性,如图 3-19 所示。

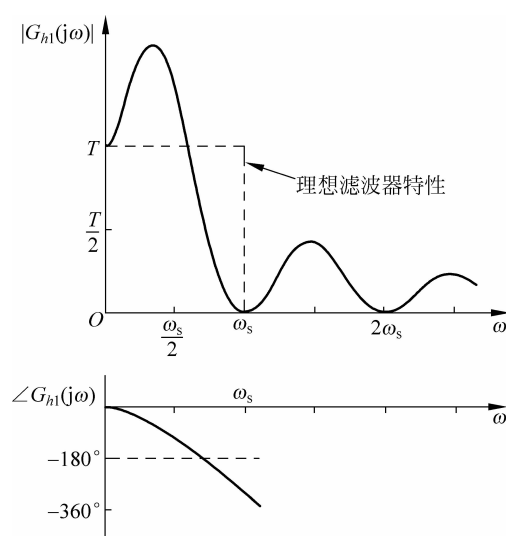


图 3-19 一阶保持器的幅相特性图

上面介绍的两种保持器在高频附近,信号都会有些失真,关于这一点会在第4章的控制器设计中看到。适当提高采样频率可有效地解决这类问题,图3-20给出了几种采样频率下,数字控制器输出效果的比较。需要说明的是,保持器的阶数越高,其精度也越高。但用到过去的采样值越多,因此,滞后也就越严重。工程中最常用的是零阶保持器。

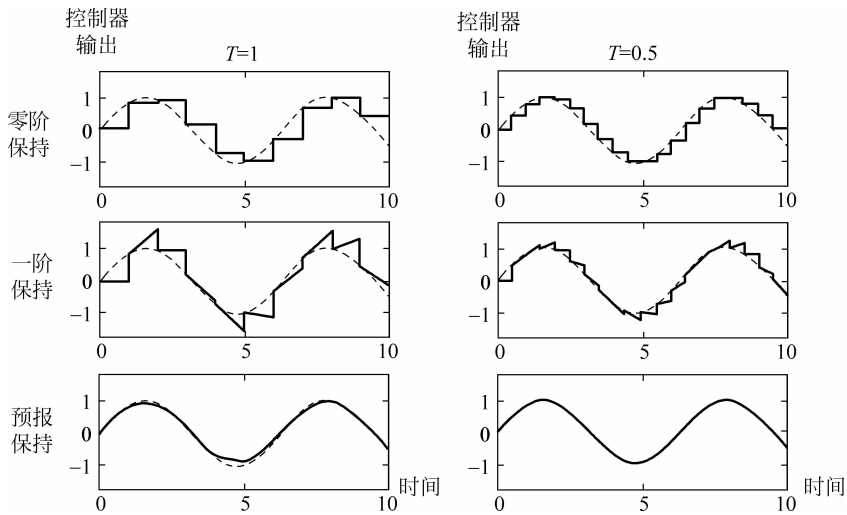


图 3-20 几种保持器的输出效果图

* 3.2.2 零阶保持对输出信号的影响

零阶保持器在工程实现上非常方便,也是工程中最常用的一种保持器。但是控制器在 kT 时刻的输出将一直保持到 $kT+T$ 时刻,这样连续控制器的输出 $u(t)$ 在数字控制器中就是一些由阶梯信号组成的输出,阶梯信号的平均值相对连续信号而言会有一定时长的延时,这种延时大约为 $T/2$ 。延时的传递函数表达为 e^{-Ts} 。最常用的近似方法是由 H. Pade 提出的,它是使用一个有理函数的级数展开和超越函数 e^{-Ts} 的级数展开的系数匹配方法。对带零阶保持输出的数字控制器的一阶佩达(Pade)近似表达为

$$G_h(s) = \frac{2/T}{s + 2/T} \tag{3-29}$$

式中 T 为采样周期。

式(3-29)的延时效果如图 3-21 所示。从式(3-29)也可看出,只要采样频率足够高,也即采样周期足够小,会有 $G_h(s) \approx 1$ 。

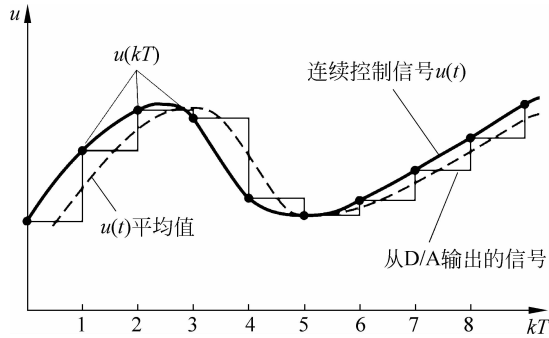


图 3-21 由保持器引起的控制输出滞后示意图

另外,由于带零阶保持输出的数字控制器输出会有约 $T/2$ 的延时,在频率响应分析时这种影响同样存在。在频率响应分析中的这种影响会使相应的相位裕量减少,其减少量为

$$\delta\phi = -\frac{\omega T}{2} \quad (3-30)$$

式中, ω 为频率, T 为采样周期, 负号表示是减少量。

这样用频率响应方法进行控制器设计时, 在穿越频率处的相位裕量也应按式(3-30)有相应的减少, 如图 3-22 所示。从式(3-30)也可看出, 只要采样频率足够高, 也即采样周期足够小, 也会有 $\delta\phi \approx 0$ 。

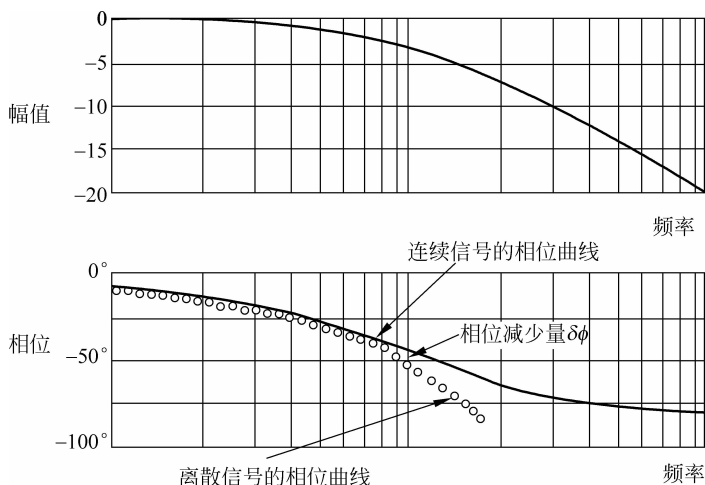


图 3-22 在波特图上由保持器引起的相位减少示意图

3.3 采样数据系统的结构图分析

采样数据系统中, 既有离散信号, 也有连续信号。而且, 采样点可以出现在不同的位置, 如在反馈通道位置上、给定值位置上或前向通道位置上等。对于这类系统, 借助于结构图可以使系统分析大为简化。也只要把纯连续系统或纯离散系统的结构图分析法加以简单推广即可。例如, 对如图 3-23 所示的串联采样器与滤波器, 可以导出

$$U(s) = E^*(s)D(s)$$

$$Y(s) = U^*(s)G(s)$$

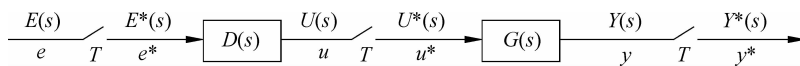


图 3-23 采样器与滤波器串联系统图

上面式中, 带星号的变量是周期性的。而且希望得到的是 $Y^*(s)$, 这样被采样的信号的变换式是一个是周期性的变换 (即 $U^*(s)$) 和一个非周期性的变换 (即 $G(s)$) 的积。周期性的变换将作为结果中的一个因子提到采样运算的外面。这是采样数据系统结构图分析法的一个重要关系式, 即

$$Y^*(s) = [U^*(s)G(s)]^* = U^*(s)G^*(s) \quad (3-31)$$

对式(3-31)的证明可以在频域中用式(3-13)进行, 也可在时域中用式(3-7)和卷积积分进行。在此用频域法来证明。

如果 $Y(s) = U^*(s)G(s)$, 则

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^*(s - jn\omega_s)G(s - jn\omega_s) \quad (3-32)$$

因为 $U^*(s)$ 为

$$U^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(s - jk\omega_s)$$

$$U^*(s - jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(s - jk\omega_s - jn\omega_s) \quad (3-33)$$

在式(3-33)中令 $k = l - n$ 可得

$$U^*(s - jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(s - jl\omega_s) = U^*(s) \quad (3-34)$$

由于已经是周期性的, 将其位移一个整数周期, 仍将保持不变。将式(3-34)代入式(3-32)中, 可得

$$Y^*(s) = U^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s - jn\omega_s) = U^*(s)G^*(s)$$

应该特别注意的是, 如果 $Y(s) = U(s)G(s)$, 因为 $U(s)$ 和 $G(s)$ 都不是周期性的, 因此 $Y(s) \neq U^*(s)G^*(s)$, 而是 $Y(s) = (UG)^*(s)$, 或记为 $Y^*(s) = \overline{UG}(s)$ 。

例 3-5 求如图 3-24 所示的闭环采样数据系统的离散输出表达 $Y^*(s)$ 。

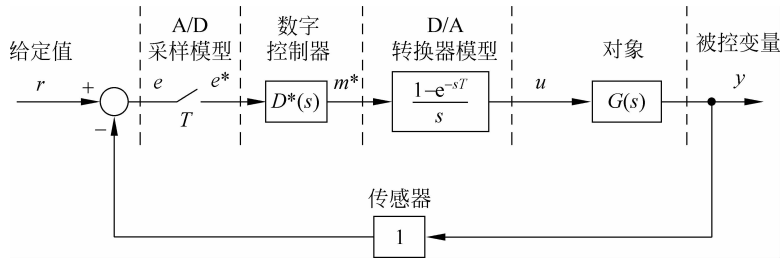


图 3-24 例 3-5 图

解 首先写出如图 3-24 所示的信号的拉氏变换关系。

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (3-35)$$

$$M^*(s) = E^*(s)D^*(s) \quad (3-36)$$

$$U(s) = M^*(s) \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right] \quad (3-37)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3-38)$$

为了求出 $Y^*(s)$ 与 $R^*(s)$ 之间的关系, 对上面的式子采样, 也即使其变成星号标识型信号, 则有

$$E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s) \quad (3-39)$$

$$M^*(s) = E^*(s)D^*(s) \quad (3-40)$$

$$U^*(s) = M^*(s) \quad (3-41)$$

$$Y^*(s) = [G(s)U(s)]^* \quad (3-42)$$

在式(3-42)中, 为了计算 $Y^*(s)$, 需要 $U(s)$ 而不是 $U^*(s)$, 因此需将式(3-37)代入式(3-42)。

$$Y^*(s) = \left[G(s)M^*(s) \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right) \right]^* \quad (3-43)$$

取出式中周期性的部分,即 s 以 e^{-Ts} 的形式出现的项和 $M^*(s)$,可得

$$Y^*(s) = (1 - e^{-Ts})M^*(s) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* \quad (3-44)$$

将式(3-40)代入上式有

$$Y^*(s) = (1 - e^{-Ts})E^*(s)D^*(s) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* \quad (3-45)$$

将式(3-39)代入上式有

$$Y^*(s) = (1 - e^{-Ts})[R^*(s) - Y^*(s)]D^*(s) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* \quad (3-46)$$

若令

$$H^*(s) = (1 - e^{-Ts})D^*(s) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* \quad (3-47)$$

可解出 $Y^*(s)$ 为

$$Y^*(s) = \frac{H^*(s)}{1 + H^*(s)} R^*(s) \quad (3-48)$$

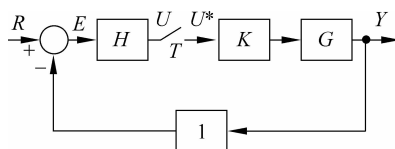


图 3-25 例 3-6 图

例 3-6 求如图 3-25 所示的闭环采样数据系统的离散输出表达 $Y^*(s)$, 图中 K 为常数。

解 由结构图可得

$$\begin{cases} E = R - Y & (a) \\ U = HE & (b) \\ Y = KGU^* & (c) \end{cases} \quad (3-49)$$

对上式采样得

$$\begin{cases} E^* = R^* - Y^* & (a) \\ U^* = (HE)^* & (b) \\ Y^* = KG^* U^* & (c) \end{cases} \quad (3-50)$$

将式(3-49(a))代入式(3-50(b))有

$$U^* = (H(R - Y))^* = (HR)^* - (HY)^*$$

将式(3-49(c))代入上式有

$$U^* = (HR)^* - (HKGU^*)^* = (HR)^* - KU^* (HG)^*$$

所以

$$U^* = \frac{(HR)^*}{1 + K(HG)^*} \quad (3-51)$$

将式(3-51)代入式(3-50(c))有

$$Y^* = \frac{(HR)^*}{1 + K(HG)^*} KG^*$$

3.4 离散模型

在如图 2-1 所示的闭环采样数据系统中,既有连续信号,也有离散信号。站在数字控制器的视角来看待外部对象,它获得的输入信号是经采样后的离散信号,它输出的信号也是离

散信号,如图 3-26(a)所示。因此,外部对象对数字控制器而言,也可以看作一个离散的模式,如图 3-26(b)所示,这里要注意的是,最常用的 D/A 转换器是零阶保持器。

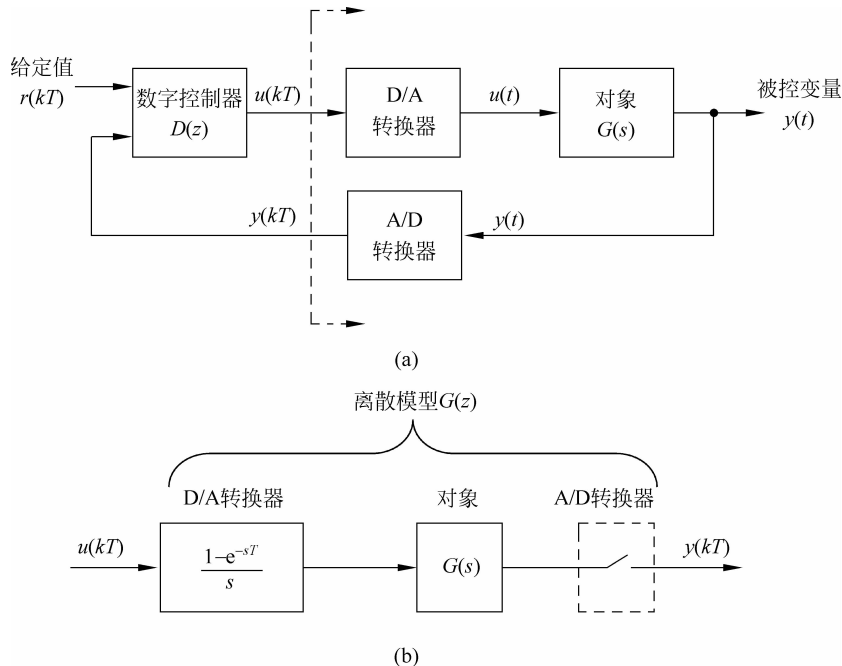


图 3-26 离散模型示意图

离散后的对象模型与数字控制器一道便构成一个纯离散闭环系统,如图 3-27 所示。这种纯离散闭环系统在第 4 章离散系统的直接分析与设计时非常有用。

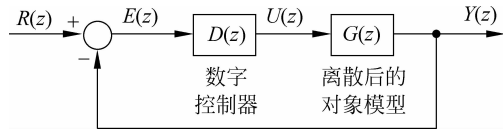


图 3-27 闭环离散系统图

对对象的描述可以基于高阶微分方程的多项式形式,也可以基于一阶微分方程的状态空间形式。因此对象的离散模型分为对多项式的 z 变换方式和对状态变量采样的方式。

3.4.1 基于多项式的 z 变换的离散模型

对多项式的 z 变换方式可以基于 3.3 节中介绍的结构图技术。在例 3-5 的图 3-24 中,可以将零阶保持器合并到对象中,如图 3-28(a)所示,以构成一个带零阶保持器(Zero-Order-Hold, ZOH)的广义对象,如图 3-28(b)所示。

在图 3-28(b)中,其开环传递关系为

$$Y(s) = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \right) G_p(s) U^*(s) \quad (3-52)$$

对式(3-52)进行采样,则其离散输出表达 $Y^*(s)$ 为

$$Y^*(s) = \left\{ \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right) G_p(s) U^*(s) \right\}^* = (1 - e^{-Ts}) U^*(s) \left[\frac{G_p(s)}{s} \right]^* \quad (3-53)$$

或

$$\frac{Y^*(s)}{U^*(s)} = (1 - e^{-Ts}) \left[\frac{G_p(s)}{s} \right]^* \quad (3-54)$$

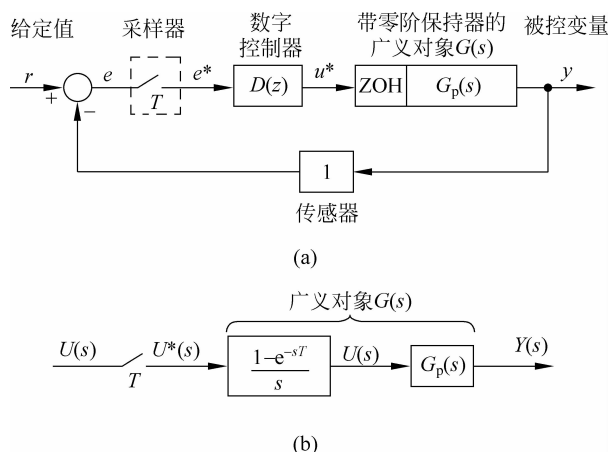


图 3-28 离散模型示意图

注意到式(3-10),即 z 变换的定义与星型标识信号的关系有

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] \quad (3-55)$$

式中 $z = e^{Ts}$,也即 z 变换的实平移性质(见 2.2.1 节)。

式(3-55)就是信号 $U^*(s)$ 与信号 $Y^*(s)$ 之间的关系。换句话说,就是用零阶保持器处理的对象 $G_p(s)$ 的离散模型。

同样,如果对图 3-28(a)闭环系统也按上面的方法推导其传递关系,拉氏变换后有

$$Y(s) = G(s) D^*(s) E^*(s)$$

对上式采样有

$$Y^*(s) = G^*(s) D^*(s) E^*(s)$$

由于

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s) = R^*(s) - E^*(s) D^*(s) G^*(s)$$

所以

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + D^*(s) G^*(s)} R^*(s)$$

$$Y^*(s) = \frac{D^*(s) G^*(s)}{1 + D^*(s) G^*(s)} R^*(s)$$

所以

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) G(z)}{1 + D(z) G(z)} \quad (3-56)$$

式(3-56)就是图 3-28(a)闭环系统的离散传递函数,也即脉冲传递函数。当中 $G(z) =$

$G^*(s)$, 就是式(3-55)表达的对象离散模型。

例 3-7 若 D/A 转换器是由零阶保持器处理的, 求下列对象的离散模型。

$$\textcircled{1} G_p(s) = \frac{a}{s+a};$$

$$\textcircled{2} G_p(s) = \frac{1}{s^2}。$$

解 ① 由式(3-55)可得

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] \\ &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right] = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \end{aligned}$$

②

$$G(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{z-1}{z} \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{T^2}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)^2}$$

例 3-8 在例 3-5 的闭环采样数据系统中, 如果在 A/D 转换器选取采样周期使 $e^{-aT} = 1/2$, D/A 转换器为零阶保持, 对象为

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

控制器为

$$u(kT) = u(kT-T) + K_0 e(kT)$$

求系统的离散输出表达 $Y^*(s)$ 。

解 控制器的离散传递函数为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K}{1-z^{-1}} = \frac{Kz}{z-1}$$

对应的星型标识信号的拉氏变换表达(注意: $z=e^{Ts}$)为

$$D^*(s) = \frac{Ke^{sT}}{e^{sT}-1} \quad (3-57)$$

对象离散模型的星型标识信号的拉氏变换表达为

$$(1-e^{-Ts}) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* = (1-e^{-Ts}) \left[\frac{a}{s(s+a)} \right]^* = (1-e^{-Ts}) \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right]^*$$

注意到星型标识信号实质就相当于对信号的 z 变换

$$(1-e^{-Ts}) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* = (1-e^{-Ts}) \left(\frac{1}{1-e^{-Ts}} - \frac{1}{1-e^{-aT}e^{-Ts}} \right)$$

因为 $e^{-aT} = 1/2$, 则对象离散模型为

$$(1-e^{-Ts}) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* = \frac{(1/2)e^{-Ts}}{1-(1/2)e^{-Ts}} = \frac{1/2}{e^{-Ts}-(1/2)} \quad (3-58)$$

将式(3-57)和式(3-58)代入式(3-48)有

$$Y^*(s) = \frac{H^*(s)}{1+H^*(s)} R^*(s)$$

其中

$$H^*(s) = (1-e^{-Ts}) D^*(s) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* = \frac{0.5K}{e^{-Ts}-0.5}$$

例 3-9 求如图 3-29 所示的开环对象的单位阶跃响应,其中控制器为 $u(kT)=2e(kT)-e[(k-1)T]$,对象为 $G_p(s)=1/(s+1)$ 。

解 对控制器做 z 变换有

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 2 - z^{-1} = \frac{2z-1}{z}$$

广义对象的离散模型为

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

单位阶跃信号的 z 变换表达为

$$E(z) = \frac{z}{z-1}$$

所以

$$Y(z) = D(z)G(z)E(z) = \frac{2z-1}{z} \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \frac{z}{z-1} = \frac{(2z-1)(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

为对上式进行 z 反变换,先做一个替代。

$$Y(z) = z^{-1} z Y(z) = z^{-1} F(z) = z^{-1} \frac{(2z-1)(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

用部分分式法对上式展开得

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{(2z-1)(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})} = \frac{1}{z-1} + \frac{1-2e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

所以

$$F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{(1-2e^{-T})z}{z - e^{-T}}$$

反变换后有

$$f(k) = 1 + (1-2e^{-T})e^{-kT}$$

因此

$$y(k) = y(k-1)u(k-1) = [1 + (1-2e^{-T})e^{-(k-1)T}]u(k-1)$$

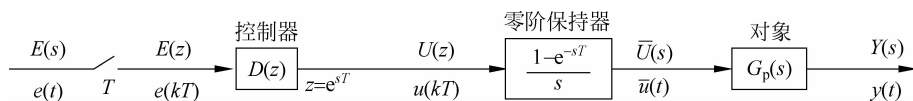


图 3-29 例 3-9 图

例 3-10 对如图 3-30 所示的系统,如果给定输入为单位阶跃 $r(t)=u(t)$,求输出响应 $y(kT)$ 。

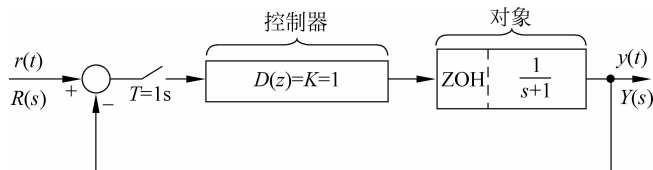


图 3-30 例 3-10 图

解 用 z 变换的方法来求解输出响应。首先,对象的离散模型为

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} = \frac{0.632}{z - 0.368}$$

闭环离散系统传递函数为

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{0.632}{z + 0.264}$$

给定输入为单位阶跃 $r(t) = u(t)$, 其 z 变换为

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

所以

$$Y(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} R(z) = \left(\frac{0.632}{z + 0.264}\right) \left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z - 0.264}$$

先检验初值与终值。

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z - 0.264} \approx 0.5$$

所以

$$\begin{array}{r} 0z^0 + 0.632z^{-1} + 0.4626z^{-2} + 0.5073z^{-3} + \dots \\ z^2 - 0.736z - 0.264 \overline{) 0.632z} \\ \underline{0.632z - 0.4626z^0 - 0.1668z^{-1}} \\ 0.4626z^0 + 0.1668z^{-1} \\ \underline{0.4626z^0 - 0.3405z^{-1} - 0.122z^{-2}} \\ 0.5073z^{-1} + 0.122z^{-2} \dots \\ \vdots \end{array}$$

即

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(T) &= 0.632 \\ y(2T) &= 0.4626 \\ y(3T) &= 0.5073 \\ &\vdots \end{aligned}$$

其响应曲线如图 3-31 所示。

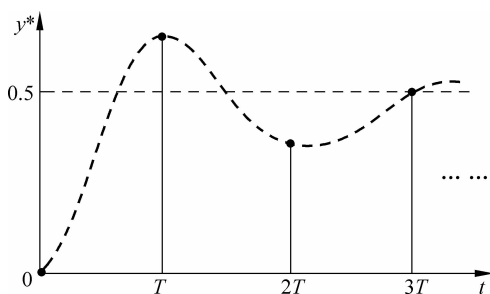


图 3-31 例 3-10 响应曲线图

* 3.4.2 基于状态空间表达的离散模型

连续时间系统的状态空间模型可由式(1-8)来表达。要得到该系统的离散模型,必须考虑 D/A 转换器的零阶保持作用,如图 3-32 所示。

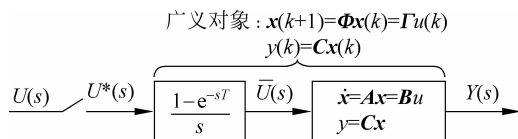


图 3-32 状态空间系统离散模型示意图

得到其离散模型的方法之一是先利用式(1-9),将状态空间型表达转换为传递函数型表达,用 3.4.1 节的方法得到传递函数型的离散模型,再将离散传递函数表达转换为离散状态空间表达。

离散传递函数表达对离散状态空间表达的转换方式与连续系统一样。首先画出传递函数的能控标准型方框图,在图中的每一个单位延时输出设置为状态变量,基于单位延时输入的表达式和系统输出表达式便可建立起来。

例 3-11 对如图 3-32 所示的状态空间系统,如果,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

采样周期 T 为 1s 时,求离散模型。

解 将状态空间表达转换为传递函数表达

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s(s+1)} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{s(s+1)} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{s(s+1)} \end{aligned}$$

按式(3-55)求取离散模型。

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right]$$

查附录 A 可得

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]_{T=1} = \frac{z[(1-1+e^{-1})z + (1-e^{-1}-e^{-1})]}{(z-1)^2(z-e^{-1})} = \frac{z[e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}]}{(z-1)^2(z-e^{-1})}$$

因此

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{(z-1)}{z} \frac{z[e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}]}{(z-1)^2(z-e^{-1})} = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} \\ &= \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2}} \end{aligned}$$

直接画出上式的能控标准型方框图如图 3-33 所示,在图中标出状态变量,即可推得离散状态空间表达式如下:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.368 & 1.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0.264 \quad 0.368] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

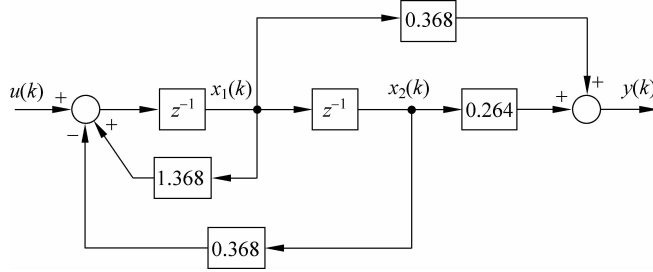


图 3-33 例 3-11 图

得到状态空间系统离散模型的另一种方法是对式(1-8)进行求解。先将式(1-8)写为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t)$$

等式两边同乘 $e^{\mathbf{A}t}$, 有

$$e^{\mathbf{A}t} \left[\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \right] = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}u(t)$$

即

$$\frac{d}{dt} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t)] = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}u(t)$$

对上式从 t_k 至 t 积分(参见图 3-34)得

$$e^{\mathbf{A}(t-t_k)} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_k) = \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

因此

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

当积分积至 t_{k+1} 时,这段时间内零阶保持器的输出保持不变, $u(\tau) = u_k, t_k < \tau < t_{k+1}$ 。因此

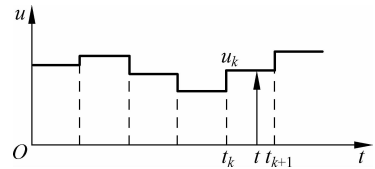


图 3-34 零阶保持器输出信号图

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau u_k$$

考虑到每个采样周期都有同样的特性, 以及 $t_{k+1} - t_k = T$, 有

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{AT} \mathbf{x}(t_k) + \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau u_k$$

上式也可简写为

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (3-59)$$

式中

$$\Phi = e^{AT} \quad (3-60)$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau \quad (3-61)$$

式(3-59)~式(3-61)就是式(1-8)表达的状态空间系统的离散模型。关于式(3-59)与式(3-60)中 Φ 和 Γ 的计算一般都比较困难, 只有低阶系统或特殊结构的系统, 可采用手工计算。通常可采用以下几种方法计算 Φ 和 Γ :

- 用 MATLAB 程序进行计算;
- 用矩阵指数的级数展开方式进行计算;
- 用拉氏变换的方法进行计算 (e^{At} 的拉氏变换为 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$);
- 用凯莱-哈密尔顿 (Cayley-Hamilton) 定律进行计算;
- 将其转换成对角型或约旦型矩阵进行计算。

例 3-12 对如图 3-32 所示的状态空间系统, 如果采样周期为 T ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

求离散模型。

解 用矩阵指数的级数展开方式进行计算, 于是

$$\Phi = e^{AT} = \mathbf{I} + AT + \mathbf{A}^2 \frac{T^2}{2} + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

因此离散模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

例 3-13 对例 3-12 的状态空间系统, 用拉氏变换的方法计算其离散模型。

解

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(k)$$

例 3-14 有一阶差分方程

$$\mathbf{x}(k+1) = \alpha \mathbf{x}(k) + \beta u(k)$$

求其对应的连续时间系统。

解 由式(3-60)和式(3-61),并注意到方程只有一阶,故有

$$\Phi = \alpha = e^{AT}$$

$$\Gamma = \beta = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau$$

因此

$$A = \frac{1}{T} \ln \alpha$$

$$B = \frac{1}{T} \ln \alpha \cdot \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

这里只有当 α 为正时,才能得到一个具有实系数的连续时间系统。

这里,只有当 Φ 在负实轴上没有特征值时采样系统的逆系统才唯一存在。为了说明这一结论,可对式(3-60)和式(3-61)求导:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = A \Phi(t) = \Phi(t) A$$

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = \Phi(t) B$$

矩阵 Φ 和 Γ 满足方程

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi(t) & \Gamma(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(t) & \Gamma(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

此处 $\mathbf{I}$ 为一个维数等于输入数目的单位矩阵。在采样周期为 T 时,矩阵 Φ 和 Γ 可由下面的方阵得到:

$$\begin{bmatrix} \Phi(T) & \Gamma(T) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T \right) \quad (3-62)$$

要得到一般情况下的采样系统的逆系统,从式(3-62)可得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \ln \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3-63)$$

此处的 $\ln(\cdot)$ 为矩阵对数函数。式(3-63)表明,连续时间系统可由对一个方阵取它的对数函数得到。对于矩阵对数的计算,由凯莱-哈密尔顿定律可知,只有当 Φ 在负实轴上没有特征值时该对数才唯一存在。

3.5 本章小结

本章主要讨论了采样数据分析、采样信号频谱分析、数据重构技术、零阶保持对信号的影响、采样数据系统的结构图分析以及对象的离散模型等。通过本章读者主要学习了以下内容：

- A/D 转换包含采样、保持、量化和编码几个环节。其中采样与保持环节对信号特性或成分有影响。
- 连续信号经采样后会得到一串以采样周期为间隔的脉冲信号，通常也将其定义为星号标识型信号。
- 不同的连续信号可能会得到相同的采样输出信号。
- 连续信号经采样后会得到许多周期性的信号。
- 采样信号的频率为模拟信号的最高频率分量的两倍时，才能从采样信号中无失真地恢复原信号。
- 将星号标识型信号通过内插处理得到原来连续信号的过程为信号的重构。
- 信号重构方法包括理想恢复方法和非理想恢复方法，常用的非理想恢复方法是零阶保持。
- 零阶保持会使控制器的输出有一定时长的延时。
- 借助于结构图可以使对采样数据系统的分析大为简化。在结构图分析时，若需对信号进行采样时，信号中周期性的变量将作为结果中的一个因子提到采样运算的外面。
- 通常将零阶保持器合并到对象中，以构成一个带零阶保持器的广义对象。对广义对象做 z 变换，即可得到其离散模型。
- 对象的离散模型分为多项式 z 变换的离散模型和状态空间离散模型两种。

习题 3

3.1 写出下列函数的星型标识型信号的拉氏变换 $E^*(s)$ 。

(1) $e(t) = e^{-at}$

(2) $e(t) = e^{a(t-2T)} u(t-2T)$

(3) $e(t) = e^{a(t-T/2)} u(t-T/2)$

(4) $E(s) = e^{-2Ts} / (s-a)$

3.2 指出题 3.1 的 s 平面上的 $E^*(s)$ 的极点位置。

3.3 对于 $e(t) = e^{-3t}$ ，写出

(1) $E^*(s)$ 的非闭合式表达；

(2) $E^*(s)$ 的闭合式表达。

3.4 假设 $E^*(s) = [e(t)]^* = 1$ ，求

(1) 对于所有 k 的 $e(kT)$ 。

(2) 能否找到 $e(t)$ ？为什么？

(3) 画出能满足(1)的两个时域函数图。

(4) 写出(3)中图所对应的方程。

76 数字控制系统分析与设计

3.5 有一信号是 $e(t) = 3\sin 4t + 2\sin 7t$ 。

(1) 信号中所有比 $\omega = 50\text{rad/s}$ 低的频率值有哪些？

(2) 若用 $\omega_s = 50\text{rad/s}$ 频率对其采样, 信号 $e^*(t)$ 中所有比 $\omega = 50\text{rad/s}$ 低的频率值有哪些？

(3) 若将 $e^*(t)$ 送入零阶保持器, 零阶保持器输出信号比 $\omega = 50\text{rad/s}$ 低的频率值有哪些？

3.6 在采样周期 $T = 1\text{s}$ 时, 如果采用零阶保持器输出表达为 $E(s) = (e^{-2Ts} - e^{-3Ts})/s$ 。

(1) 画出 $e(t)$ 的图形；

(2) 求 $e(kT)$ ；

(3) 从上面的信息能否得到 $e(t)$ ？为什么？

3.7 有一采样数据系统如图 3-35 所示。

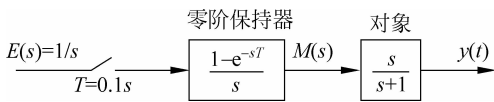


图 3-35 习题 3.7 图

(1) 对于阶跃输入时, 求系统在采样时刻的输出响应；

(2) 如果先求出 $m(t)$, 再用连续数据求取系统的输出响应 $e(t)$ 。

3.8 求如图 3-36 所示系统的输出采样变换式 $Y^*(s)$ 。

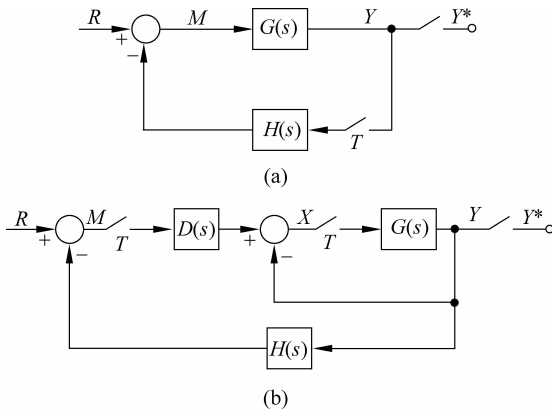


图 3-36 习题 3.8 图

3.9 如果图 3-37 中的 $G(s)$ 如(1)、(2)和(3), 计算其离散传递函数。

(1) K/s ；

(2) $3/[s(s+3)]$ ；

(3) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 3u$ 。

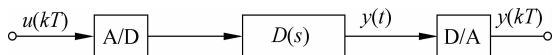


图 3-37 习题 3.9 图

3.10 对以下状态空间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [-5 \quad -3] \mathbf{x}(k)$$

求其脉冲传递函数与差分方程表达。

3.11 有系统

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = -a\mathbf{x} + bu$$

$$y = c\mathbf{x}$$

假设输入在采样周期 T 内是常数。试对该系统进行采样,并讨论离散时间系统的极点如何随采样周期变化?

3.12 如果 D/A 转换器为零阶保持,求下列连续系统对应的离散时间系统。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

3.13 下列差分方程描述的是经零阶保持电路采样的连续时间系统,其采样周期为 T 。如果可能,求它们对应的连续时间系统。

$$(1) \quad y(k) - 0.5y(k-1) = 6u(k-1);$$

$$(2) \quad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = [1 \quad 1] \mathbf{x}(k);$$

$$(3) \quad y(k) + 0.5y(k-1) = 6u(k-1)。$$

3.14 对下列系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(k)$$

式中 T 为采样周期。若当 $T = \pi/2$ 时,计算 $0, T, 2T$ 等时刻的阶跃响应。

3.15 有一两水箱系统如图 3-38 所示。系统的输入信号是第一个水箱的输入流量,输出信号是第二个水箱的液位。选择两水箱的液位作为状态变量,可得系统描述

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.0197 & 0 \\ 0.0178 & -0.0129 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] \mathbf{x}$$

(1) 用 $T=12$ 的采样周期对其进行采样;

(2) 求其脉冲传递函数。

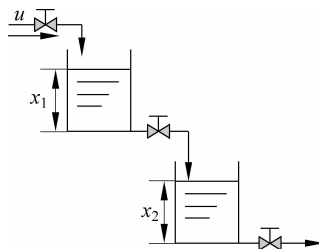


图 3-38 习题 3.15 图

参 考 文 献

- [1] Gene F Franklin,等. 动态系统的数字控制[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社,2006.
- [2] Charles L Phillips,等. 反馈控制系统[M]. 5 版. 北京: 科学出版社,2012.
- [3] Charles L Phillips,等. 数字控制系统分析与设计[M]. 3 版. New Jersey: Prentice-Hall,1995.
- [4] 冯培悌. 计算机控制技术[M]. 杭州: 浙江大学出版社,2002.
- [5] 徐丽娜. 数字控制——建模与分析、设计与实现 [M]. 北京: 科学出版社,2014.
- [6] Katsuhiko Ogata. 离散时间控制系统[M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社,2006.
- [7] Karl J Astrom,等. 计算机控制系统——原理与设计[M]. 3 版. 北京: 电子工业出版社,2001.