预备知识

数域

线性代数所研究的问题，都与一个事先规定的数集有关，同一个问题对不同的数集，其结果常常是不同的. 这一点，大家在中学数学中已经有所了解. 例如，二次方程 $x^2+1=0$，在复数集上有解，但在实数集上就没有解. 再如在整数集上，4 除以 3 是没有意义的，但是在有理数集上，任何两个整数，只要除数不为零，除法总是可以做的，等等. 因此，在开始学习线性代数之前，先来讨论一下数域这个最基本的概念.

我们熟悉的数集，如全体有理数的集合$\mathbb{Q}$，全体实数的集合$\mathbb{R}$ 及全体复数的集合$\mathbb{C}$，它们都含有无穷多个非零元，而且对加、减、乘、除运算都具有一个共同的特征，即对集合中任意两个数，作加、减、乘或除运算(除数不能为零)时，其结果仍属于这个集合，这个性质也称为对加、减、乘、除运算封闭. 具有这样性质的数集对问题的研究是重要的，而且具有这样性质的数集远不止这三个，为此，引入一般的数域概念.

定义 *设 F 为复数集$\mathbb{C}$ 的一个子集. 若 F 满足：*

(1) F 中至少含有一个不等于零的数；

(2) 对 $\forall a,b\in F$，$a+b,a-b,ab\in F$，并且，当 $b\neq 0$ 时，$\dfrac{a}{b}\in F$.

*则称 F 为一个*数域(number field).

显然，有理数集$\mathbb{Q}$，实数集$\mathbb{R}$，复数集$\mathbb{C}$ 都是数域，它们分别称为**有理数域**、**实数域**和**复数域**. 数域不只有这三个，而且有无穷多个. 我们举一个例子.

例 令 $F=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$，证明 F 是一个数域，通常将此数域记作$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

证 显然 $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，故满足定义的条件(1). $\forall a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，则

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

这是因为 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$，而$\mathbb{Q}$ 为数域，故 $a\pm c,b\pm d\in\mathbb{Q}$. 又$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}$，因为 $ac+2bd,bc+ad\in\mathbb{Q}$，故$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

再设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$，则有 $c-d\sqrt{2}\neq 0$. 这是因为若 $c-d\sqrt{2}=0$，则在 $d=0$ 时推出 $c=0$，即 $c+d\sqrt{2}=0$，矛盾. 当 $d\neq 0$ 时，推出 $\frac{c}{d}=\sqrt{2}$，由 $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$，推出 $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. 矛盾. 因而

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

综上所述，即知 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 为一个数域. ■

最后，给出数域的一个重要性质.

定理 所有的数域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

证 设 F 为一数域. 由定义中的条件(1)，即 $\exists a\in F$ 且 $a\neq 0$，再由定义中的条件(2)，有 $\frac{a}{a}=1\in F$，接下来，有 $a-a=0\in F$. 用 1 与它自己重复相加，可得 $\mathbb{N}\subseteq F$. 再由 F 对减法的封闭性可知，对 $\forall b\in\mathbb{N}$ 均有 $0-b=-b\in F$. 故 F 又含有全体整数，即 $\mathbb{Z}\subseteq F$. 由于任一有理数都可以表示成两个整数的商(分母不为 0)，故再由 F 对除法的封闭性，可知 F 必含有有理数域 $\mathbb{Q}$. ■

由此定理可知，有理数域是最小的数域. 因此，整数集 $\mathbb{Z}$，自然数集 $\mathbb{N}$ 均不是数域.

在本书中，如果没有特别说明，我们总是取一个固定的数域 F，所涉及的数都是这个数域的数.

第1章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具,不但在数学中有广泛的应用,而且在其他学科中也经常会碰到它.在初等代数中,为求解二元和三元线性方程组,引入了二阶和三阶行列式.本章的目的是在二阶和三阶行列式的基础上,进一步建立 n 阶行列式的理论,并且讨论 n 阶行列式对求解 n 元线性方程组的应用.

1.1 n 阶行列式的定义

在本节中,我们将先对二阶和三阶行列式的定义以及如何利用它们求解二元和三元线性方程组,作一简单的回顾,然后介绍排列的概念及其基本性质,最后给出 n 阶行列式的定义.

1.1.1 二阶行列式与三阶行列式

对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1, \\ a_2x+b_2y=d_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

进行消元,可得

$$(a_1b_2-b_1a_2)x=d_1b_2-b_1d_2, \quad (a_1b_2-b_1a_2)y=a_1d_2-d_1a_2.$$

若 $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$,则线性方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x=\dfrac{d_1b_2-b_1d_2}{a_1b_2-b_1a_2}, \\ y=\dfrac{a_1d_2-d_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆这些解的公式,我们引入**二阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

其中 a_{ij} 叫做行列式的**元素**，用两个下标表示该元素的位置，第一个下标 i 叫行指标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫列指标，表示位于第 j 列. 利用二阶行列式，(1.2)式可表示为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

其中分母是由线性方程组(1.1)的系数按原来位置排列成的行列式，称为线性方程组(1.1)的**系数行列式**. 于是可以把线性方程组(1.1)的解法总结为：若线性方程组(1.1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.4}$$

则线性方程组(1.1)有唯一解 $x=\frac{D_1}{D}$，$y=\frac{D_2}{D}$，其中

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

它们是将系数行列式(1.4)中的第 1 列和第 2 列分别换成线性方程组(1.1)中的常数项 d_1，d_2 所得到的行列式.

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 5x-7y=29. \end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-31\neq 0,$$

所以此线性方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix}=-93,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=62,$$

故线性方程组的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-93}{-31}=3, \\ y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{62}{-31}=-2. \end{cases}$$

■

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

的类似解法,我们引入**三阶行列式**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

这是一个包括六项的代数和,每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积,其中前三项前面带正号,后三项前面带负号.

通过类似于对线性方程组(1.1)所做的讨论,可以得到线性方程组(1.5)的下述解法.若线性方程组(1.5)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.7}$$

则线性方程组(1.5)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D},\quad z=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

它们是将系数行列式(1.7)中第 1,2,3 列分别换成线性方程组(1.5)中的常数项所得到的行列式.

例 1.2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解　由于线性方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1) \\ &\quad +1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1 \\ &=-5\neq0, \end{aligned}$$

所以此线性方程组有唯一解.经计算可得

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5.$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1. \quad ■$$

从上面的例子可以看出，对于未知量个数与方程个数相等的线性方程组(1.1)和线性方程组(1.5)，如果它们的系数行列式不等于0，用行列式求解是方便的.

在实际应用中，遇到的线性方程组所包含的未知量常常多于三个，而且在某些理论研究中往往需要考虑 n 个未知量的线性方程组的求解问题，我们自然希望能把上面二元和三元线性方程组的解法推广到包含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组.为此首先要把二阶和三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 排列

n 阶行列式的定义和研究，需要用到排列的某些事实.作为预备知识，本小节介绍排列的概念及其基本性质.

把 n 个不同的元素按一定顺序排成一行，叫做这 n 个元素的一个**排列**.为了方便起见，用 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 代表 n 个不同的元素来讨论有关排列的性质.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列**(permutation).通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

如2341是一个四阶排列，25134是一个五阶排列.n 阶排列共有 $n!$ 个.$12\cdots n$ 是一个 n 阶排列，它具有自然顺序，称为**自然排列**，在这个排列中的任何两个数，小的数总排在大的数的前面.

定义 1.2 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**.一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**.以后用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例 1.3 在四阶排列2341中，共有逆序21,31,41，即 $\tau(2341)=3$，所以2341是奇排列.

在五阶排列25134中，共有逆序21,51,53,54，即 $\tau(25134)=4$，所以25134是偶排列. ■

例 1.4 自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数 $\tau(12\cdots n)=0$，所以 $12\cdots n$ 是偶排列，而 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

所以当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots21$ 是偶排列，而当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots21$ 是奇排列. ■

在一个排列中，对换其中某两个数，而保持其余的数不动，就得到另一个排列. 这种操作称为一个**对换**.

例 1.5 五阶偶排列 25134 经过 2,5 对换变成排列 52134，容易计算 $\tau(52134)=5$，所以 52134 是奇排列. ■

关于对换对排列奇偶性的影响，有下述一般性结论.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 先考虑一种特殊情形，即对换的两个数在排列中是相邻的，设排列

$$\cdots jk\cdots \tag{1.8}$$

经对换 j,k 变成排列

$$\cdots kj\cdots, \tag{1.9}$$

这里"…"表示那些在对换下保持不动的数. 显然，这些数之间以及这些数与 j,k 之间是否构成逆序的情况在排列(1.8)和排列(1.9)中是相同的. 故只需考虑数对 j,k. 若 j,k 在排列(1.8)中构成逆序，则它们在排列(1.9)中不构成逆序；反之，若 j,k 在排列(1.8)中不构成逆序，则它们在排列(1.9)中构成逆序. 由此可知，无论是哪种情形，排列(1.8)和排列(1.9)的逆序数总相差 1. 因而排列(1.8)和排列(1.9)有相反的奇偶性.

再考虑一般情形. 设排列

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \tag{1.10}$$

经对换 j,k 变成排列

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots, \tag{1.11}$$

不难看出，这样的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻两数的对换来实现. 例如

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \xrightarrow{s+1\text{ 次相邻两数的对换}} \cdots kji_1i_2\cdots i_s\cdots$$

$$\xrightarrow{s\text{ 次相邻两数的对换}} \cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots.$$

由于 $2s+1$ 是奇数，且相邻两数的对换改变排列的奇偶性，因此排列(1.10)和排列(1.11)也有相反的奇偶性. ■

定理 1.2 在全部 n 阶排列中($n\geqslant 2$)，奇偶排列各占一半.

证 设在全部 n 阶排列中有 s 个奇排列和 t 个偶排列，须证$s=t$.

将 s 个奇排列的前两个数对换，则这 s 个奇排列全变成偶排列，并且它们彼此不同，所以 $s\leqslant t$. 若将 t 个偶排列的前两个数对换，则这 t 个偶排列全变成奇排列，并且它们彼此不同，于是又有$t\leqslant s$. 故必有 $s=t$. ■

定理 1.3 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

证 对排列的阶数 n 作数学归纳法，当 $n=1$ 时，结论显然成立. 设对 $n-1$ 阶排列结论成立，现在考虑 n 阶排列的情形.

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是任意一个 n 阶排列. 分两种情形讨论.

(1) 若 $j_n=n$，则 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是一个 $n-1$ 阶排列. 根据归纳假设，排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经过一系列对换变为自然排列. 因而排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 可经过一系列对换变为自然排列.

(2) 若 $j_n\neq n$，则在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中先对换 j_n 和 n，使排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $j_1'j_2'\cdots j_{n-1}'n$，这就归结为前面的情形. 根据前面的结论可知排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 也可经过一系列对换变成自然排列.

根据归纳法原理，对任意自然数 n，结论成立.

由于 $12\cdots n$ 是偶排列，且对换改变排列的奇偶性，所以将一个偶(奇)排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变为自然排列需要作偶(奇)数次对换. 即将排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成自然排列所作对换次数的奇偶性与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同. ■

1.1.3 n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先考察一下二阶和三阶行列式的定义是有益处的. 回顾(1.3)式和(1.6)式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

我们看到二阶和三阶行列式都是一些项的代数和. 现在来看一下这些代数和中各项的构成以及各项前所带的正负号的确定有什么规律性. 以三阶行列式为例，通过对展开式(1.6)的仔细观察，不难发现：

(1) 三阶行列式的展开式(1.6)中共有 $3!=6$ 项，其中的每一项都是行列式中位于不同行不同列的三个元素的乘积，并且每个这样的乘积都出现在展开式(1.6)中.

(2) 在展开式(1.6)中，前面带正号的项和带负号的项各占一半. 不难直接验证，展开式(1.6)中各项前所带的符号是由下述方式确定的. 将展开式(1.6)的一般项写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1.12}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 $1,2,3$ 的一个排列. 于是，在行指标构成自然排列的情况下，当列指标所成的排列 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，项(1.12)的前面带正号；而当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，项(1.12)的前面

带负号.

根据这些观察,三阶行列式的展开式(1.6)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三阶排列求和[①].类似地观察可知,二阶行列式的展开式(1.3)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对所有二阶排列求和.

以上对二阶和三阶行列式定义的分析,启发我们引入如下的 n 阶行列式(determinant)的定义.

---

① $\sum$ 是总和符号,$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,其中 i 称为总和的指标,它是个虚拟变量,可由其他字母替代,因此 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.例如,$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$,则 $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$.又有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

容易证明,总和符号满足下列性质:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n} k(a_i x_i) = k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right).$$

此外,还有双重总和的形式 $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$,表示先对 i 求和,再对 j 求总和,例如

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3} (a_{1j} + a_{2j}) = (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}),$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{2} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}).$$

不难证明下列一般式子成立,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

这个式子可以这样解释,先把 mn 个数 a_{ij} 排成 n 行 m 列的矩形表,$\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$ 表示把表中的元素先按列相加,再把每列的和加起来得到表中所有元素的总和.$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$ 则表示先按行相加,再把行和加起来,得到的也是表中所有元素的总和,显然它们应该相等.

定义 1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.14}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.每个项(1.14)的前面带有正负号.当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,项(1.14)的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,项(1.14)的前面带负号.上述定义可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.15}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.式(1.15)称为 n 阶行列式(1.13)的完全展开式.

由定义可以看出,直接利用定义计算 n 阶行列式,首先必须找出所有可能的由位于行列式中不同行不同列的 n 个元素构成的乘积,它们总共有 $n!$ 项;其次,要把每个乘积中的 n 个元素按行指标的自然顺序排好,然后由列指标所成的排列的奇偶性来决定这一项前面所带的符号.

例 1.6 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 上三角行列式是指主对角线(从左上角到右下角的对角线)以下的元素全为 0 的行列式.n 阶行列式的项的一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

对于上三角行列式,第 n 行中当 $j_n\neq n$ 时,$a_{nj_n}=0$,故只需考虑 $j_n=n$ 的项即可.又因为在第 $n-1$ 行中,当 $j_{n-1}\neq n-1,n$ 时 $a_{n-1,j_{n-1}}=0$,故只需考虑 $j_{n-1}=n-1$ 和 n 两种情形.但是 $j_n=n$,并且 $j_{n-1}\neq j_n$,故必有 $j_{n-1}=n-1$.以此类推,可知在展开式中只有唯一的项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

可能不为 0.这一项行指标已按自然顺序排好,列指标所成的排列是 $1,2,\cdots,n$,所以