第一章　函数与极限

第一节　函　　数

一、教学基本要求

1. 掌握一元函数的概念.

2. 了解函数的特性.

3. 了解反函数的概念.

二、答疑解惑

1. 单调函数必存在反函数，不单调的函数是否一定不存在反函数?

解答　不是. 函数单调只是它存在反函数的一个充分条件，并不是必要条件. 从映射的角度来说，函数 f 是否存在反函数，取决于 f 是否为其定义域 D 到值域 $f(D)$ 上的单射，如果是的话，那么 f 就存在反函数，否则就不存在反函数. 不单调的函数，也可能是 D 到 $f(D)$ 上的单射，这时它就存在反函数. 例如 $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上并不单调，但它是从 $[-1,1]$ 到 $[0,2]$ 上的单射，所以存在反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \sqrt{x-1}, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-a,a]$ 上的任意函数，$F(x)=f(x)+f(-x)$ 一定是偶函数吗?

解答　是. 因为 $F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=F(x)$，所以 $F(x)$ 是偶函数.

3. 如果函数 $f(x),g(x)$ 在数集 X 上都无界，那么 $f(x)\cdot g(x)$ 也在 X 上无界吗?

解答　不一定. 例如 $f(x)=\tan x, g(x)=\cot x$ 都在 $X=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界，但是 $f(x)\cdot g(x)\equiv 1, x\in X$, 即 $f(x)\cdot g(x)$ 在 X 上是有界的.

4. 两个单调增加(或减少)的函数之积一定还是单调增加(或减少)的函数吗？

解答　不一定. 如 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}, g(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ 皆为单调增加的函数，而 $f(x)\cdot g(x)=-\mathrm{e}^{x}$ 却是单调减少的函数.

5. 周期函数是否一定有最小正周期?

解答　不一定. 例如函数 $f(x)=C$ (其中 C 为常数)，对于任意的非零实数 l，都有 $f(x+l)=f(x)=C$，所以它是周期函数，但实数中是没有最小正数的，因此周期函数 $f(x)=C$ 没有最小正周期. 再如狄利克雷函数 $D(x)$，可以证明任何非零的有理数均为该函数的周期，但它没有最小正周期.

三、经典例题解析

题型一　判断函数的等价性

例 1　在下列各组函数中，找出两个函数等价（相等）的一组：

（1）$y=x^0$ 与 $y=1$；　　　　（2）$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$；　　　　（4）$y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$.

分析　当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数或称两个函数等价（相等），否则表示两个不同的函数.

解　（1）由于 $y=x^0$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，$y=1$ 的定义域为全体实数，所以该组的两个函数不等价.

（2）由于 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant 0\}$，$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为全体实数，所以该组的两个函数不等价.

（3）由于两个函数的定义域均为 $\{x|x\neq 0\}$，且对应法则相同，所以该组的两个函数等价.

（4）由于函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为 $[3,+\infty)$，函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 的定义域为 $(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$，所以该组的两个函数不等价.

题型二　有关函数的几何性质

例 2　函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内 (　　).

（A）有上界且无下界　　　　（B）有下界且无上界

（C）有界且 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$　　　　（D）有界且 $|f(x)|\leqslant 2$

解　选（C）正确. 因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$，所以 $|f(x)|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$.

例 3　设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有定义，$x_1>0$，$x_2>0$，求证：

（1）若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减少，则 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$；

（2）若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调增加，则 $f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2)$.

证明　（1）不妨设 $x_1<x_2$，由于已知 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减少，所以 $\dfrac{f(x_2)}{x_2}<\dfrac{f(x_1)}{x_1}$，即 $x_1f(x_2)<x_2f(x_1)$. 类似地，当 $x_1<x_2<x_1+x_2$ 时，有 $\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}<\dfrac{f(x_2)}{x_2}<\dfrac{f(x_1)}{x_1}$，从而 $x_2f(x_1+x_2)<\left(x_1+x_2\right)f(x_2)$ 成立，即 $x_2f(x_1+x_2)<x_1f(x_2)+x_2f(x_2)<x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$，所以 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

（2）不妨设$x_1<x_2$，由于$\dfrac{f(x)}{x}$单调增加，所以$\dfrac{f(x_2)}{x_2}>\dfrac{f(x_1)}{x_1}$，即$x_1f(x_2)>x_2f(x_1)$，类似地，当$x_1<x_2<x_1+x_2$时，$\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}>\dfrac{f(x_2)}{x_2}>\dfrac{f(x_1)}{x_1}$，从而$x_2f(x_1+x_2)>(x_1+x_2)f(x_2)$成立，即$x_2f(x_1+x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$，所以$f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2)$.

四、习题选解

1. 指出下列各函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^2\cos x$； （2）$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$； （4）$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

解 （1）因为$f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数.

（2）因为$f(-x)=\dfrac{1-\cos(-x)}{1+\sin^2(-x)}=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数.

（3）因为$f(-x)=\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(-x)}\right]=-\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数.

（4）因为
$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\ln\left[-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right]=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\\
&=\ln\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\
&=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x),
\end{aligned}
$$
所以$f(x)$为奇函数.

2. 下列函数中哪些是有界的？

（1）$y=2\sin(\omega x+\varphi)$； （2）$y=\dfrac{1}{1+x^2}$； （3）$y=\dfrac{1}{1-x^2}$； （4）$y=x\cos x$.

解 （1）因为$|2\sin(\omega x+\varphi)|\leqslant 2$，所以函数$y=2\sin(\omega x+\varphi)$有界.

（2）因为$1+x^2\geqslant 1$，所以$0<\dfrac{1}{1+x^2}\leqslant 1$，故函数$y=\dfrac{1}{1+x^2}$有界.

（3）对任意的$M>1$，当$\sqrt{1-\dfrac{1}{M}}<|x|<\sqrt{1+\dfrac{1}{M}}$时，有$1-\dfrac{1}{M}<x^2<1+\dfrac{1}{M}$，则$\left|1-x^2\right|<\dfrac{1}{M}$，从而$\left|\dfrac{1}{1-x^2}\right|>M$，所以函数$y=\dfrac{1}{1-x^2}$无界，如图 1-1 所示.

（4）对任意的$M>0$，存在正整数k使得$2k\pi>M$. 因为当$x=2k\pi$时，$|y|=|2k\pi\cos(2k\pi)|=2k\pi>M$，所以函数$y=x\cos x$无界，如图 1-2 所示.

3. 设$f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{3},\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}, & |x|>\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$求$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right),f(0)$和$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，并作出$y=f(x)$的图形.

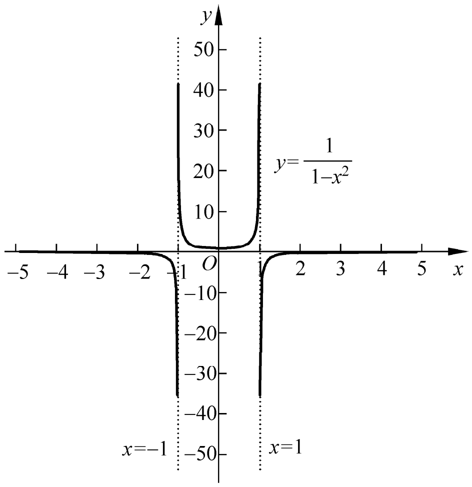

图　1-1

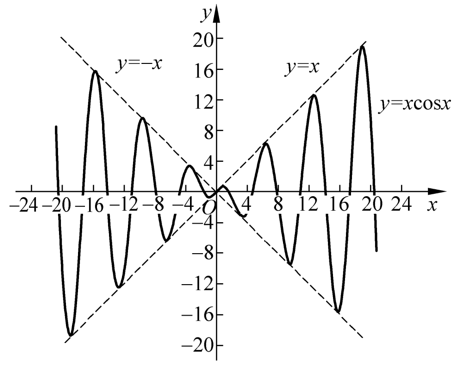

图　1-2

解　$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$f(0)=|\sin 0|=0$；$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$．$y=f(x)$ 的图形如图 1-3 所示.

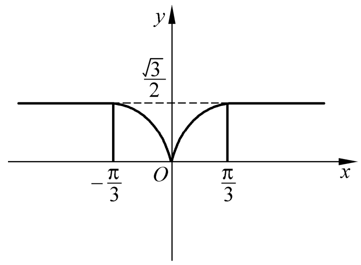

图　1-3

4. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，证明 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解　设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in X$，亦即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M，有下界 $-M$．

反之，设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1，有下界 K_2，即 $K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1$，$x\in X$，取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，则有 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，即 $f(x)$ 在 X 上有界.

第二节　初 等 函 数

一、教学基本要求

1. 掌握基本初等函数的性质.
2. 理解复合函数的概念.
3. 掌握初等函数的概念.
4. 会建立简单实际问题的函数关系.

二、答疑解惑

1. 设 $f(x)$ 为奇函数，$\varphi(x)$ 为偶函数，且 $\varphi[f(x)]$ 有意义，那么 $\varphi[f(x)]$ 一定是偶函数吗?

解答　一定是. 因为 $\varphi[f(-x)]=\varphi[-f(x)]=\varphi[f(x)]$，所以 $\varphi[f(x)]$ 是偶函数.

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是什么?

解答 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，所以对于复合函数 $f[\varphi(x)]$ 来说，应有 $0<\varphi(x)\leqslant 1$，即 $0<1-\ln x\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x<\mathrm{e}$，因此 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $[1,\mathrm{e})$.

3. 分段函数一定不是初等函数吗?

解答 不一定. 绝大多数分段函数不是初等函数，但有些函数形式上是分段函数，而实质上是初等函数.例如，函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 1, & x<0\end{cases}$ 和 $h(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 因为在 $[0,2]$ 上，$f(x)=1-|x-1|=1-\sqrt{(x-1)^2}$，所以 $f(x)$ 是初等函数.又因为当 $x\neq 0$ 时，$g(x)=\dfrac{-|x|}{x}=\dfrac{-\sqrt{x^2}}{x}$，所以 $g(x)$ 也是初等函数. 而 $h(x)$ 在其定义域内不能用一个式子表示，所以 $h(x)$ 不是初等函数.

三、经典例题解析

题型一 求初等函数的定义域

例 1 求下列各函数 $f(x)$ 的定义域:（1）$f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$；（2）$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$.

分析 求初等函数的定义域时，一般要利用基本初等函数和复合函数的定义域来确定其定义域，如分母不能为零，对数的真数大于零，反三角函数的取值范围，被开方数的符号与开方次数有关等.

解 （1）要使函数有意义，须满足 $\begin{cases}\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1,\\ 1+x\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}|2x|\leqslant|1+x|,\\ x\neq -1,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$，所以函数的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

（2）求含有抽象函数 $f(x)$ 的定义域时，一般先求出 $f(x)$ 的解析式. 将所给的解析式变形得

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+x}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2},$$

所以有 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$，因此，要使函数 $f(x)$ 有意义，须 $x^2-2\neq 0$，即 $x\neq\pm\sqrt{2}$. 所以函数的定义域为 $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

题型二 有关初等函数的性质

例 2 判断下列各函数的奇偶性:

（1）$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$；（2）$f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；（3）$f(x)=x^4\sin x-x\cos x^2+1$.

分析 先检验函数的定义域是否对称，然后按定义判断函数的奇偶性.

解　（1）函数在$(-\infty,+\infty)$内有定义，因为$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$是奇函数.

（2）函数在$(-\infty,+\infty)$内有定义，因为

$$f(-x)=-x\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=-x\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})=f(x),$$

所以$f(x)$为偶函数.

（3）函数在$(-\infty,+\infty)$上有定义，因为$f(-x)=-x^4\sin x+x\cos x^2+1$，而$f(-x)=f(x)$和$f(-x)=-f(x)$都不能对所有的$x\in(-\infty,+\infty)$成立，所以$f(x)$为非奇非偶的函数.

例 3　指出下列函数是否有界：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\ (a\leqslant x\leqslant 1,0<a<1)$；　　（2）$f(x)=(\operatorname{sgn} x)\cdot\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0;$

（3）$f(x)=\dfrac{[x]}{x},x>0;$　　（4）$f(x)=x\cos x\ \ (-\infty<x<\infty)$.

分析　根据函数有界性的定义进行判断.

解　（1）因为$a\leqslant x\leqslant 1$，所以$a^2\leqslant x^2\leqslant 1$，从而有$1\leqslant\dfrac{1}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{a^2}$，这里$\dfrac{1}{a^2}>1$，所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$是有界函数.

（2）因为$|\operatorname{sgn} x|\leqslant 1,\ \left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以$|f(x)|\leqslant 1$，从而函数$f(x)=(\operatorname{sgn} x)\cdot\sin\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$是有界函数.

（3）因为当$x>0$时，$0\leqslant[x]\leqslant x,$所以$0\leqslant\dfrac{[x]}{x}\leqslant 1$，从而函数$f(x)=\dfrac{[x]}{x}\ \ (x>0)$是有界函数.

（4）对任意的正数$M>0$，取$x=(2[M]+1)\pi$，则$\cos(2[M]+1)\pi=-1$，因为

$$|f(x)|=\left|(2[M]+1)\pi\cos\left[(2[M]+1)\pi\right]\right|=(2[M]+1)\pi>M,$$

所以函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内无界.

题型三　复合函数的求法

例 4　设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

分析　将函数$y=f(u)$中的变量u看做一个整体$u=\varphi(x)$，代入$y=f(u)$即得$y=f[\varphi(x)]$.

解　将$f(x)$中的x用$f(x)$代替得$f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}\quad(x\neq 0)$，

同理得

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}\quad(x\neq 0).$$

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -2x, & x<0,\end{cases}$ 当 $x\leqslant 0$ 时，求 $f[g(x)]$.

分析　分段函数在各开区间内要分段处理，然后再单独讨论分段点的取值.

解　因为当 $x<0$ 时，$g(x)=-2x>0$，所以 $f\left[g(x)\right]=\left[g(x)\right]^2=\left(-2x\right)^2=4x^2$．又当 $x=0$ 时，$g(0)=0$，所以 $f\left[g(0)\right]=f\left(0\right)=0$．综上所述，当 $x\leqslant 0$ 时，$f[g(x)]=4x^2$.

例 6　设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ \ln\left(1-x\right), & x<0,\end{cases}$ 且 $\Delta x>0$，求 $\dfrac{f\left(\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}$ 和 $\dfrac{f\left(-\Delta x\right)-f\left(0\right)}{-\Delta x}$.

解　由于 $f\left(0\right)=0$，且当 $\Delta x>0$ 时，$f\left(\Delta x\right)=\sqrt{\Delta x}, f\left(-\Delta x\right)=\ln\left(1+\Delta x\right)$，所以

$$\frac{f\left(\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{\Delta x}},\quad \frac{f\left(-\Delta x\right)-f\left(0\right)}{-\Delta x}=-\frac{\ln\left(1+\Delta x\right)}{\Delta x}.$$

四、习题选解

1. 求下列各函数的定义域：

（1）$y=\tan(x-2)$；（2）$y=\sqrt{x^2-3x-10}+\ln(1+x)$.

解　（1）要使函数有意义，须使 $x-2\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k$ 为整数），所以定义域为所有 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}+2$ 的实数构成的集合，其中 k 为整数.

（2）要使函数有意义，须使 $x^2-3x-10\geqslant 0$，且 $1+x>0$，所以定义域为 $[5,+\infty)$.

2. 指出下列各函数的复合过程：

（1）$y=\sin^2 x$；　（2）$y=\sin x^2$；　（3）$y=\mathrm{e}^{\sqrt{\sin x}}$；　（4）$y=\ln[\ln(\ln x)]$.

解　（1）$y=u^2$，$u=\sin x$.

（2）$y=\sin u$，$u=x^2$.

（3）$y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\sin x$.

（4）$y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=\ln x$.

注　分解后的每个函数应为基本初等函数或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f\left[g(x)\right]$ 和 $g\left[f(x)\right]$，并分别作出它们的图形.

解　$f\left[g(x)\right]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1,\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1,\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1,\end{cases}$ 即 $f\left[g(x)\right]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0,\end{cases}$ 其图形如图 1-4 所示.

$g\left[f(x)\right]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^1, & |x|<1,\\ \mathrm{e}^0, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$ 即 $g\left[f(x)\right]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$ 其图形如图 1-5 所示.

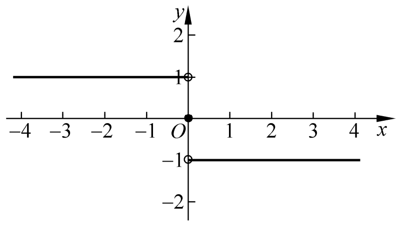

图　1-4

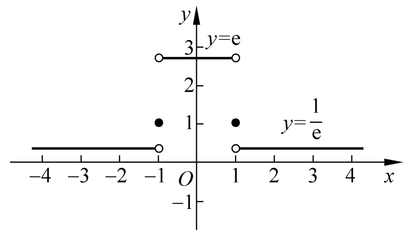

图　1-5

4. 设 $f(x)$ 满足 $3f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+1$，求 $f(x)$.

解　由已知条件可知 $3f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x}+1$，与原方程联立解得 $f(x)=\frac{3x}{5}+\frac{2}{5x}+1$.

第三节　数列的极限

一、教学基本要求

1. 理解数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的概念.

2. 了解数列极限的几何意义.

二、答疑解惑

1. 若 n 越大，$|x_n-a|$ 越小，则数列 $\{x_n\}$ 就以 a 为极限吗?

解答　不一定. 随着 n 的增大，$|x_n-a|$ 越来越小并不意味着 $|x_n-a|$ 一定趋向于零. 例如 $x_n=\frac{1}{n},\quad a=-1$，$|x_n-a|=\left|\frac{1}{n}+1\right|=1+\frac{1}{n}$. 虽然当 n 越大时，$1+\frac{1}{n}$ 越小，但数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 并不以 -1 为极限.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+m}=a$ (m 为正整数)，对吗?

解答　对. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.现在要使 $|x_{n+m}-a|<\varepsilon$，只要 $n+m>N$，即 $n>N-m$，于是可取 $N'=\max\{N-m,1\}$，则当 $n>N'$ 时，就有 $|x_{n+m}-a|<\varepsilon$，由数列极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+m}=a$.

3. 在数列极限的定义中，N 与 ε 是否存在函数关系?

解答　一般来说，N 与 ε 有关，但不能说它们存在函数关系. 因为对于任意给定的 $\varepsilon>0$，如果存在一个满足定义要求的 N_0，那么任何大于 N_0 的正整数都可以作为满足定义要求的 N. 这就是说，N 的值并不是由 ε 所唯一确定的，根据函数的定义，N 与 ε 不存在函数关系.

4. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 吗？

解答　不一定. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$. 如果 $a\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$. 如果 $a=0$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在，即使极限存在也未必等于1.例如 $x_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$ 不存在. 又如 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$.

5. 如何证明一个数列是发散的？

解答　要证明数列 $\{x_n\}$ 发散，即数列 $\{x_n\}$ 不收敛，通常采用以下两种方法:

（1）找出数列 $\{x_n\}$ 的一个发散的子列；（2）找出数列 $\{x_n\}$ 的两个有不同极限的子列.

三、经典例题解析

题型一　用定义证明数列极限的存在性

例 1　求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 a 为常数，且 $a>1$.

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，即 $\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$，亦即 $\dfrac{1}{n}<\log_a(\varepsilon+1)$，只要 $n>\dfrac{1}{\log_a(\varepsilon+1)}$ 即可，于是取 $N=\left[\dfrac{1}{\log_a(\varepsilon+1)}\right]$，则当 $n>N$ 时，都有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

例 2　求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2+n-4}=0$.

分析　求 N 时，在“放大”的过程中，有时还需要添加一定的限制条件.

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$，限制 $n>4$，要使 $\left|\dfrac{2n-1}{n^2+n-4}-0\right|<\dfrac{2n}{n^2}=\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$ 即可，于是取 $N=\max\left\{4,\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时，都有 $\left|\dfrac{2n-1}{n^2+n-4}-0\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2+n-4}=0$.

四、习题选解

1. 填空题：

（1）数列有界是它收敛的___________条件；

（2）对于数列 $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$，当 n 最小为_______时，可使 $\left|\dfrac{n-1}{n+1}-1\right|<10^{-3}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$____；　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{4^n}=$____；　（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{n}}=$____（$a$ 为任意实数）.

解　（1）应填“必要但不充分”.

（2）应填 2000. 因为要使 $\left|\dfrac{n-1}{n+1}-1\right|=\left|\dfrac{2}{n+1}\right|<10^{-3}$，只要 $n+1>2000$，即 $n>1999$，且 n 为正整数，所以 n 最小为 2000.

（3）应填 1.　　（4）应填 0.　　（5）应填 0.

2. 根据数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 即可，取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，都有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明　因为数列 $\{x_n\}$ 有界，所以存在 $M>0$，使得对于一切 n 都有 $|x_n|\leqslant M$. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|y_n|<\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$，从而有

$$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4. 对于数列 $\{x_n\}$，如果 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$ 且 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明　对于任意的 $\varepsilon>0$，因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，所以存在正整数 K_1，使得当 $k>K_1$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；又因为 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$，所以存在正整数 K_2，使得当 $k>K_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{2K_1-1,2K_2\}$，则当 $n>N$ 时，若 n 为奇数，即 $n=2k-1$，则 $k>K_1$，从而 $|x_n-a|=|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；若 n 为偶数，即 $n=2k$，则 $k>K_2$，从而 $|x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon$. 所以只要 $n>N$，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

第四节　函数的极限

一、教学基本要求

1. 理解函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的概念，了解左右极限与极限之间的关系，了解其几何意义.
2. 理解函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的概念，了解其几何意义.
3. 了解极限的性质和数列极限与函数极限之间的关系.
4. 会求曲线的水平渐近线.

二、答疑解惑

1. 为什么在极限的定义中，ε 要任意给定？

解答　以 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A 为例. 因为 ε 是刻画函数 $f(x)$ 与常数 A 接近程度的量，所以只有 ε 的任意性（无论它多么小）才能表明函数 $f(x)$ 与 A 的无限接近. 这