第 1 章

质点运动学

物体之间或同一物体各部分之间相对位置的变动称为机械运动(简称运动)。机械运动是自然界中最简单、最普遍的一种运动形式,物理学中把研究机械运动的规律及其应用的学科称为力学。力学成为一门科学理论是从17世纪伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)论述物体的惯性运动开始的,继而牛顿(Isaac Newton,1643—1727)提出了三个运动定律,以牛顿定律为基础的力学称为牛顿力学或经典力学。

质点是力学中的理想模型之一,是为了研究问题的方便,突出主要矛盾、忽视次要矛盾而抽象出来的理想模型。它是有质量而无线度的物体。任何物体都有一定的大小,但当其线度对所讨论的问题影响很小,且物体内部运动状态差别可忽略时,可把物体看作质点。描述质点运动状态变化的物理量有:位置矢量、位移、速度和加速度等。本章主要研究这4个物理量之间的相互关系及如何用它们来描述物体的机械运动。研究物体位置随时间的变化或运动轨道的问题,而不涉及物体发生运动变化的原因的学科称为运动学。

1.1 位置矢量和位移

1.1.1 参考系与坐标系

物体的机械运动是指它的位置随时间的改变。位置总是相对的,这就是说任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。这个其他的物体或物体系就叫做确定运动物体位置的参考系。简而言之:被选做参考的物体或物体系称为参考系。

例如:确定车辆的位置时,我们用固定在地面上的一些物体,如房子或路牌作参考系,这样的参考系通常称为地面参考系。在物理实验中,确定某一物体的位置时,我们就用固定在实验室内的物体,如周围的墙壁或固定的实验桌作参考系,这样的参考系就称为实验室参考系。

经验告诉我们,相对于不同的参考系,同一物体的同一运动会表现为不同的运动形式。例如:一自由落体的运动,在地面参考系中观察时,它是竖直向下的直线运动;如果在近旁驶过的车厢内观察,即以一行进的车厢为参考系,则物体将作曲线运动。物体的运动形式随参考系的不同而不同,这个事实就是运动的相对性。由于运动的相对性,当我们确定一个物

体的运动时就必须指明是相对于哪个参考系来说的。宇宙中的所有物体都处于永不停止的运动中,这就是与之相对应的运动的绝对性。

当确定了参考系后,为了确切地、定量地说明一个质点相对于此参考系的位置,就得在此参考系上固结一个坐标系。最常见的是笛卡儿(René Descartes,1596—1650)直角坐标系,但有时为了研究问题的方便还选用平面极坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系等。对于笛卡儿直角坐标系而言,称一固结点为坐标原点,记作 O,从此原点沿三个相互垂直的方向引三条固定的且有刻度和方向的直线作为坐标轴,通常记作 x、y、z 轴,如图 1-1 所示。于是在这样的坐标系中,一个质点在任意时刻的位置将会准确给出,如 P 点就可以用坐标 $P(x,y,z)$来表示。

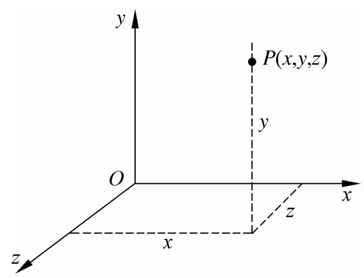

图 1-1　质点的位置表示

1.1.2　位置矢量(即运动方程)

由于运动与时间有关,在不同的时刻,质点的位置不同,也就是说位置是随时间而变化的,用数学函数的形式来表示,即

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1-1}$$

这样的一组函数称为质点的运动方程。将质点的运动方程消去时间参数 t,得到坐标相关的方程称为质点的轨道方程

$$f(x,y,z) = 0 \tag{1-2}$$

在坐标系中可画出相应的函数曲线即质点运动的运动轨迹。

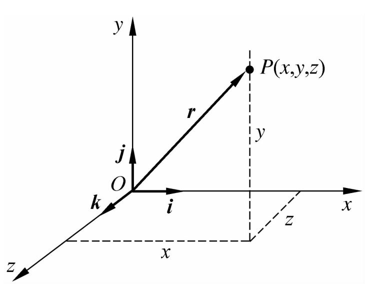

图 1-2　位置矢量

为了确定质点在空间的位置,我们可以使用位置矢量这一更简洁、更清楚的概念。图 1-2 中质点 P 的位置,可以用笛卡儿坐标系中的三个坐标 x、y、z 确定,如果从原点 O 向 P 作有向线段 $\boldsymbol{r}$,显然,有向线段 $\boldsymbol{r}$ 与 P 点的位置(x,y,z)有一一对应的关系,因此可以借用从参考点 O 到 P 的有向线段 $\boldsymbol{r}$ 来表示 P 点的位置,我们称 $\boldsymbol{r}$ 为 P 点的位置矢量,若以 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 轴的单位矢量,则在笛卡儿坐标系中,P 点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

式(1-1)中各函数表示质点位置的各坐标值随时间的变化情况,可以看作是质点沿各个坐标轴的分运动表示式。质点的实际运动由式(1-1)中的三个函数的总体式(1-3)表示。同时式(1-3)也表明:质点的实际运动是各分运动的矢量和,这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系称为运动叠加原理。

在国际单位制(SI)①中,位置矢量的量纲单位为 m(米),大小和方向分别用其模和方向余弦来表示,即

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i})=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j})=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

如:若质点 P 的位置为(2,3,4),则质点 P 的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

质点 P 的位置矢量大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}\,(\mathrm{m})$$

质点 P 的位置矢量的方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i})=\frac{2}{\sqrt{29}},\quad \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j})=\frac{3}{\sqrt{29}},\quad \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

1.1.3　位移矢量

从运动质点初始时刻所在位置指向运动质点任意时刻所在位置的有向线段称为在对应时间内的位移矢量(简称位移)。如图 1-3 所示,质点 P 沿图中曲线运动,t 时刻位于 P_1 点,$t+\Delta t$ 时刻位于 P_2 点。P_1,P_2 两点的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$,在时间 Δt 内质点的空间位置变化可用矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 来表示,其关系式为

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\Delta\boldsymbol{r} \tag{1-4}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 是描述质点空间位置变化的物理量,它同时也表示了质点位置变化的距离和方向。

位移不同于位置矢量。在质点运动过程中,位置矢量表示某时刻质点的位置,它描述该时刻质点相对于坐标原点的位置状态,是描述状态的物理量。位移则表示某段时间内质点位置的变化,它描述该段时间内质点状态的变化,是与运动过程相对应的物理量。

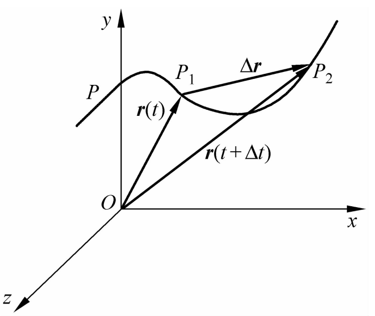

图 1-3　位移矢量

位移也不同于路程。质点从 P_1 运动到 P_2 所经历的路程 Δs 是图 1-3 中从 P_1 到 P_2 的一段曲线长。路程是标量,恒取正值。在一般情况下,路程 Δs 与位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$(图 1-3 中 P_1 和 P_2 之间的弦长)并不相等。只有当质点作单向的直线运动时,路程和位移的大小才是相等的。此外,在时间间隔 $\Delta t\to 0$ 的极限情况下,P_2 无限靠近 P_1,弦 P_1P_2 与曲线 P_1P_2 的长度无限接近,这时,路程 $\mathrm{d}s$ 与位移的大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 才相等,即 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$。在

---

① 国际单位制(SI)见附录 B。

笛卡儿坐标系中,位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\ &=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\ &=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta x\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

如:若 P_1 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,$P_2$ 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,则 P_1 与 P_2 间的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$。

在实际应用中,常用坐标系还有平面极坐标系和自然坐标系等。平面极坐标系是在描述点 A 的位置由该点与选取的坐标原点 O 的距离 $r(r=|\boldsymbol{r}|)$ 及位矢 $\boldsymbol{r}$ 与某选定的射线矢量 $\overline{Ox}$(极轴)的有向 θ(幅角)共同决定。自然坐标系是在质点运动轨迹已知的情况下,选定轨迹上任意一点 O 为原点,并沿轨迹规定一个正方向,于是点 P 的位置可由该点到原点的轨迹长度 s(再加上正、负号)来确定。在讨论圆周运动时,由于质点运动轨迹是已知的圆周,因此选用自然坐标系就比较方便。

1.2 速度与加速度

1.2.1 速度

质点的位置随着时间变化产生了位移,而位移一般也是随时间变化的。那么位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和产生这段位移所用的时间 Δt 之间有怎样的关系呢? $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ 是一个怎样的物理量呢?

从物理意义上来看,它描述的是质点位置变化的快慢和位置变化的方向。由于它对应的是时间间隔而不是某一时刻或位置,所以我们称其为在 Δt 时间内的平均速度,以 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示,即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-5}$$

平均速度是矢量,它的方向就是相应位移的方向,如图 1-4 所示。

实际上当 Δt 趋近于零时,式(1-5)的极限就是质点位置矢量对时间的变化率,将其定义为质点在 t 时刻的瞬时速度(简称速度),以 $\boldsymbol{v}$ 表示,即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

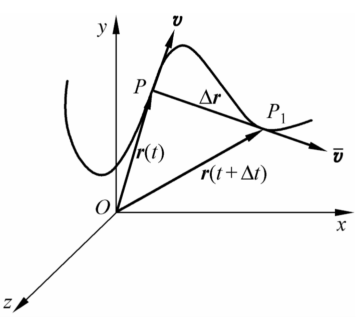

图 1-4 平均速度与速度

速度的方向就是 Δt 趋近于零时 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向,如图 1-4 所示。当 Δt 趋近于零时 P_1 点向 P 点趋近,而 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向最后将与质点运动轨迹在 P 点的切线方向一致。因此质点在时刻 t 的速度方向沿着该时刻质点所在处运动轨迹的切线指向运动的前方。可见它能够反映某一时刻或某一位置时质点的运动快慢和运动方向。这就是速度与平均速度的区别所在。

速度的大小定义为速率,以 v 表示,即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} \tag{1-6a}$$

以 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨迹所经历的路程。当 Δt 趋近于零时，由于 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 和 Δs 将趋于相同，因此可以得到

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-6b}$$

这就是说速度的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率(即速率)。因此以后对速率和速度的大小不再区别。

注意：位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr 是有区别的，一般来讲

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

若将式(1-3)代入式(1-6)，由于三个坐标轴上的单位矢量都不随时间变化，所以有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1-6c}$$

从式(1-6c)可以看出：质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 是各分速度的矢量和，这一关系式是式(1-3)的直接结果，也由空间几何性质所决定，这一关系式称为速度叠加原理(一般来讲，各分速度不一定相互垂直)。

由式(1-6c)知各分速度相互垂直，所以 $\boldsymbol{v}$ 的大小和方向由下式决定：

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

在国际单位制(SI)中速度的单位为 m/s。

1.2.2　加速度

当质点的运动速度随时间改变时，常常要搞清速度的变化情况，速度的变化情况常以另一个物理量加速度来表示。若以 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ 分别表示质点在 t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻的速度，如图 1-5 所示，则在 Δt 时间内的平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 由下式来定义：

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-7}$$

当 Δt 趋近于零时，此平均加速度的极限，即速度对时间的变化率，称为质点在 t 时刻的瞬时加速度(简称加速度)，以 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

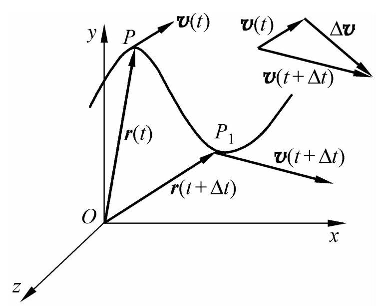

图 1-5　平均加速度矢量

加速度也是矢量，由于它是速度对时间的变化率，所以不管是速度的大小发生变化，还是速度的方向发生变化，都有不为零的加速度存在。利用式(1-6)，则有

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-8a}$$

将式(1-6c)代入式(1-8a)可得加速度的分量表示式如下：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \\ &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1-8b}$$

加速度的大小和方向分别为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

在国际单位制(SI)中加速度的单位为 $\mathrm{m/s^2}$。

在定义速度和加速度时，都用到了求极限的方法。这种做法在物理学中经常用到。求极限是人类对物质和运动作定量描述时在准确程度上的一次重大飞跃。实际上极限概念是牛顿在 17 世纪对物体的运动作定量研究时提出的，可见微积分学的创立是与对物体运动的定量研究分不开的。微积分学是数学的一个重要分支，也是研究物理学不可缺少的重要工具。

例 1-1 已知一质点的运动方程为 $x=2t$，$y=18-2t^2$，其中 x、y 以 m 计，t 以 s 计。求：(1)质点的轨道方程并画出其轨道曲线；(2)质点的位置矢量；(3)质点的速度；(4)前 2s 内的平均速度；(5)质点的加速度。

解 (1) 将质点的运动方程消去时间参数 t，得质点轨道方程为 $y=18-\dfrac{x^2}{2}$，质点的轨道曲线如图 1-6 所示。

(2) 质点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (18 - 2t^2)\boldsymbol{j}$$

(3) 质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

(4) 前 2s 内的平均速度为

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{v}} &= \frac{\boldsymbol{r}(2) - \boldsymbol{r}(0)}{2-0} = \frac{1}{2}\{[2 \times 2\boldsymbol{i} + (18 - 2 \times 2^2)\boldsymbol{j}] - 18\boldsymbol{j}\} \\ &= 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m/s}) \end{aligned}$$

(5) 质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -4\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m/s^2})$$

例 1-2 如图 1-7 所示，A、B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上滑行。若物体 A 以确定的速率 v 沿 x 轴正向滑行，α 为杆与 y 轴的夹角，当 $\alpha=\pi/6$ 时，物体 B 沿 y 轴滑行的速度是多少？

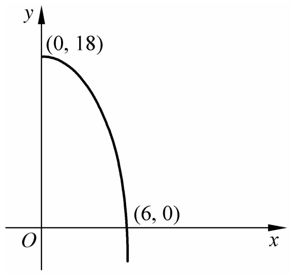

图 1-6　质点的轨迹曲线

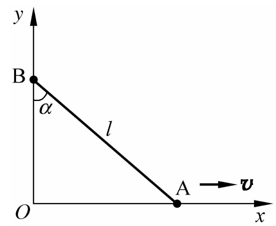

图　1-7

解　根据题意，得

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} = v\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

因为

$$x^2(t) + y^2(t) = l^2$$

所以

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

故

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -v\tan\alpha\boldsymbol{j}$$

当 $\alpha=\pi/6$ 时，

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = -v\tan\frac{\pi}{6}\boldsymbol{j} = -\frac{\sqrt{3}}{3}v\boldsymbol{j}$$

1.3　直线运动

质点在一条确定的直线上的运动称为直线运动。作直线运动的质点，其位置以坐标 x 来表示，如图 1-8 所示。因为研究质点的直线运动，总是以该直线作为坐标轴来讨论的。

图 1-8　直线运动

于是质点 P 的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}$$

质点 P 的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i}$$

质点 P 的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

质点 P 的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$$

由于质点在 Ox 直线上运动，上述矢量中的每一个矢量只能取两个方向：或者与 x 轴

的正向相同,或者与 x 轴的负向相同。例如,当质点速度的方向与 Ox 轴的正向相同时,$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$,相反时 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0$;当加速度的方向与 Ox 轴的正向相同时,$a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}>0$,相反时 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}<0$。由此可见,沿一直线运动时的矢量 $\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的方向,可以用相应的代数量 x、Δx、v 和 a 的正负符号来表示。即,这些代数量的绝对值表示其大小,正负号表示其方向。如果 v 和 a 同号,则质点作加速直线运动;如果 v 和 a 异号,则质点作减速直线运动。

假定质点沿 x 轴作匀加速直线运动,加速度 a 不随时间变化,初位置为 x_0,初速度为 v_0,则 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,所以

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$$

对上式两边取定积分可得

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t,\quad v = v_0 + at \tag{1-9}$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + at$$

所以

$$\mathrm{d}x = (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

对上式两边再取定积分可得

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t,\quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1-10}$$

式(1-9)和式(1-10)消去时间参数可得

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{1-11}$$

式(1-9)～式(1-11)正是中学学过的匀变速直线运动公式。

可见:如果知道了质点的运动方程,我们就可以根据速度和加速度的定义用求导数的方法求出质点在任何时刻(或任何位置)的速度和加速度。然而在许多实际问题中,往往先知道质点的加速度,而且要求在此基础上求出质点在各时刻的速度和位置。求解此类问题可采用积分法。

例 1-3 一质点沿 x 轴正向运动,其加速度为 $a=kt$,若采用国际单位制(SI),当 $t=0$ 时,$v=v_0$,$x=x_0$,试求质点的速度和质点的运动方程。

解 因为 $a=kt$,$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=kt$,所以有

$$\mathrm{d}v = kt\,\mathrm{d}t$$

作定积分有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_0^t kt\,\mathrm{d}t,\quad v = v_0 + \frac{1}{2}kt^2$$

而

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + \frac{1}{2}kt^2$$

所以有

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t \left(v_0 + \frac{1}{2}kt^2\right)\mathrm{d}t$$

得

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6}kt^3$$

1.4　平面曲线运动

质点在确定的平面内作曲线运动，称为平面曲线运动。常见的实例有抛体运动和圆周运动。

1.4.1　抛体运动

从地面上某点向空中抛出一物体，它在空中的运动称为抛体运动。物体被抛出之后，若忽略风力及空气阻力的影响，它的运动轨迹总是被限制在通过抛射点的抛出方向和竖直方向所确定的平面内，因此描述这种运动时，就可以把抛出点作为坐标原点，把水平方向和竖直方向分别作为 x 轴和 y 轴，如图 1-9 所示。若从抛出时刻开始计时，则 $t=0$ 时，物体的初位置在原点即(0,0)。以 v_0 表示物体的初速度，以 θ 角表示抛射角，即初速度与 x 轴的夹角，则 v_0 沿 x 轴和 y 轴的分量分别为

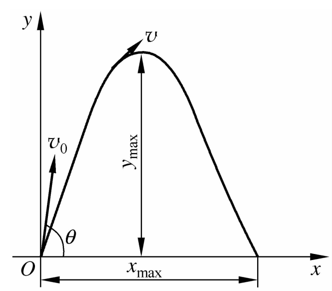

图 1-9　抛体运动

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases}$$

物体在空中的加速度分别为

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_x = -g \end{cases}$$

其中负号表示加速度的方向与 y 轴的方向相反。利用这些条件，可以方便地得出物体在空中任意时刻的速度为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \tag{1-12}$$

也可以得出物体在空中任意时刻的位置坐标为

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\theta)t \\ y = (v_0 \sin\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1-13}$$

式(1-12)和式(1-13)就是在中学已熟知的抛体运动的有关公式。由这两式也可以求出物体在空中飞行回落到抛出点高度时所用的时间为

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

飞行中的最大高度(即高出抛射点的最大距离)为

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

飞行的射程(即回落到与抛出点的高度相同时所经过的水平距离)为

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

由上面的公式可以看出:

若 $\theta=0$,则 $y_{\max}=0$,此时为平抛运动;

若 $\theta=\frac{\pi}{4}$,则 $x_{\max}=\frac{v_0^2}{g}$,此时射程最大;

若 $\theta=\frac{\pi}{2}$,则 $x_{\max}=0$,此时为竖直抛体运动。

消去式(1-13)中的时间参数后可以得到抛体运动的轨迹方程为

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

对于一定的 v_0 和 θ,此方程表示一条通过原点的二次曲线。这一曲线就是数学上的“抛物线”。

必须特别注意,以上关于抛体运动的公式都是在忽略空气阻力的情况下得出的。只有在初速较小的情况下,它们的计算结果才比较符合实际。实际中子弹和炮弹在空中飞行的规律和上述公式的计算结果有很大的差别。子弹和炮弹的飞行规律,在军事技术中由专门的学科“弹道学”进行研究。对于射程和射高极大的抛射体,如洲际导弹,弹头在大部分时间内都在大气层以外的空间飞行,所受的空气阻力是很小的。但是由于在这样大的范围内飞行,重力加速度的大小和方向都有明显的变化,因而以上公式也不能适用。

1.4.2 圆周运动

在确定的平面上质点的运动轨迹为圆周的运动称为圆周运动。下面从加速度的定义出发,进一步分析研究质点作圆周运动时的加速度。如图 1-10 所示,设 t 时刻质点位于 P 点,其速度为 $\boldsymbol{v}_P$;$t+\Delta t$ 时刻质点位于 Q 点,其速度为 $\boldsymbol{v}_Q$。则在 Δt 这一段时间内,速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_Q-\boldsymbol{v}_P$,于是在由矢量 $\boldsymbol{v}_P$、$\boldsymbol{v}_Q$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}$ 组成的△CPQ 中取 CP' 的长度等于 CP 的长度,那么速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 就可以分解为两个矢量 $\Delta\boldsymbol{v}_n$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ 之和,即 $\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}_n+\Delta\boldsymbol{v}_\tau$。所以加速度

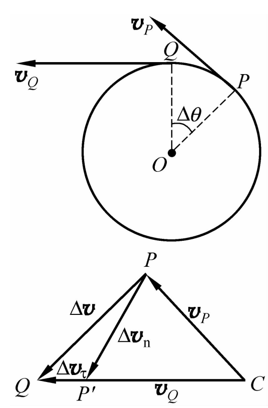

图 1-10　圆周运动

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}$$

令

$$\boldsymbol{a}_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{a}_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}$$

则

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau$$

下面分析 $\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小、方向和物理意义。

当 $\Delta t\to 0$ 时，Q 点无限趋近于 P 点，OQ 与 OP 之间的夹角 $\Delta\theta\to 0$。$\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ 的极限方向与 $\boldsymbol{v}_P$ 相同，是 P 点处圆周的切线方向；$\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{n}$ 的极限方向与 $\boldsymbol{v}_P$ 垂直，沿半径指向圆心。可见质点在 P 点处的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的两个分量 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 和 $\boldsymbol{a}_\tau$ 恰好分别指向圆周上 P 点处的法向和切向这两个特殊方向。顾名思义，我们将 P 点处的 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 称为该点处的法向加速度(对于圆周运动即为向心加速度)，将 P 点处的 $\boldsymbol{a}_\tau$ 称为该点处的切向加速度。

平移 $\boldsymbol{v}_P$ 和 $\boldsymbol{v}_Q$ 矢量于 C 点，由图 1-10 可以看出，$|\Delta\boldsymbol{v}_\tau|$ 是速度大小的增量(即速率的增量 Δv)，于是切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小为

$$a_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{v}_\tau|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

又因为 $\triangle OPQ\backsim\triangle CPP'$，所以

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{v_P}=\frac{\overline{PQ}}{R}$$

故法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 的大小为

$$a_\mathrm{n}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{\Delta t}=\frac{v_P}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{PQ}}{\Delta t}=\frac{v_P^2}{R}$$

由于 P 点是圆周上的任意一点，所以质点在圆周上的法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 的大小为

$$a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{R}$$

其中 v 为对应点的速度大小(即速率)。

通过上面的分析和研究，我们发现：切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与质点运动的速度改变相联系，法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 与质点运动的方向改变相联系。于是将其归纳为

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\mathrm{n}+\boldsymbol{a}_\tau\\ a_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{R},\quad a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\ a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_\mathrm{n}^2+a_\tau^2}\\ \tan(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})=\dfrac{a_\mathrm{n}}{a_\tau}\end{cases}\tag{1-14}$$

质点作圆周运动，通常还可以用角量来描述，如图 1-11 所示。

质点作圆周运动时，在某一时刻 t 位于 P 点，质点的位置可由其半径 OP 与过圆心 O 的参考线 Ox 的夹角 θ 唯一地确定，θ 角称为质点的角位置。角位置不断地随时间变化，它是时间的函数，即 $\theta=\theta(t)$。它被称为质点作圆周运动时的角量运动方程。

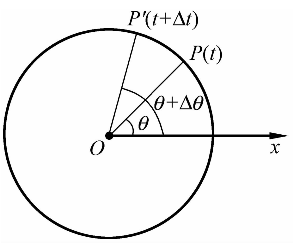

图 1-11 角量描述

在时刻 $t+\Delta t$，质点运动到达 P' 点时其角位置为 $\theta+\Delta\theta$，在 Δt 时间内，质点转过的角度 $\Delta\theta$ 称为角位移。质点沿圆周运动的绕行方向不同，角位移的转向也不同。一般情况下，规定质点沿逆时针方向绕行时角位移取正值，质点沿顺时针方向绕行时角位移取负值。

角位移 $\Delta\theta$ 与对应时间之比 $\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 称为 Δt 时间内的平均角速度。当 $\Delta t\to 0$ 时，平均角速度的极限称为质点在 t 时刻对应的瞬时角速度(简称角速度)，即

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{1-15}$$

同样的道理,质点的角加速度为

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1-16}$$

在国际单位制(SI)中,角位置、角位移的单位为 rad(弧度),角速度的单位为 rad/s(弧度每秒),角加速度的单位为 rad/s^2(弧度每二次方秒)。当然目前工程上还在继续使用每分绕行的转数(r/min)来表示转速,其换算关系为

$$1r/min = \frac{\pi}{30} rad/s$$

质点作圆周运动时,如果角速度 ω 不随时间变化,即角加速度 α 为零,则质点作匀速圆周运动;如果角加速度 α 不随时间变化且不等于零,则质点作匀加速圆周运动。对于匀加速圆周运动而言,可以用与研究匀变速直线运动一样的方法得到

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

如图 1-11 所示,因为质点在圆周上所经历的路程,即弧长为 $\Delta s = R\Delta\theta$,两边同除以质点运动所经历的时间 Δt,得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$,两边取极限,得

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}, \quad 即 \quad v = R\omega$$

等式 $v = R\omega$ 两边对时间求一阶导数,得

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}, \quad 即 \quad a_\tau = R\alpha$$

对于法向加速度,有

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

综上所述,对于圆周运动其线量和角量之间的关系为

$$\begin{cases} v = R\omega \\ a_\tau = R\alpha \\ a_n = R\omega^2 \end{cases} \tag{1-17}$$

需要指出,以上关于加速度的讨论及结果,也适用于任何二维(即平面上的)曲线运动,这时有关公式中的半径应是曲线上所涉及点处的曲率半径(即该点曲线的内接圆或曲率圆的半径)。其曲率半径为 $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$。

例 1-4 一人乘摩托车跳越一个大矿坑,他以与水平面成 22.5°夹角的初速度 65m/s 从西边起跳,准确地落在坑的东边。已知坑东边比西边低 70m,忽略空气阻力,且取 $g = 10m/s^2$。问:(1)矿坑有多宽,他飞越的时间有多长?(2)他在东边落地时的速度多大?速度与

水平面的夹角多大？

解　据题意建立坐标系如图1-12所示。

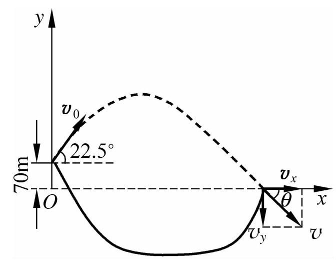

图　1-12

(1) 若以摩托车和人作为一质点，则其运动方程为

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\theta_0)t \\ y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

运动速度为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta_0 \\ v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \end{cases}$$

当到达东边落地时 $y=0$，有

$$y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

将 $y_0=70\text{m}$，$g=10\text{m/s}^2$，$v_0=65\text{m/s}$，$\theta_0=22.5°$ 代入解之，得到飞越矿坑的时间为 $t=7.0\text{s}$（另一根舍去），矿坑的宽度为 $x=420\text{m}$。

(2) 在东边落地时 $t=7.0\text{s}$，其速度为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta_0 = 60.1(\text{m/s}) \\ v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt = -44.9(\text{m/s}) \end{cases}$$

预示落地点速度的量值为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 75.0(\text{m/s})$$

此时落地点速度与水平面的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = 37°$$

例1-5　一质点沿半径为 R 的圆周运动，其角位置与时间的函数关系式（即角量运动方程）为 $\theta=\pi t+\pi t^2$，取SI制，则质点的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度各是什么？

解　因为

$$\theta = \pi t + \pi t^2$$

所以质点的角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pi + 2\pi t$$

质点的角加速度为

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\pi$$

质点的切向加速度为

$$a_\tau = R\alpha = 2\pi R$$

质点的法向加速度为

$$a_n = \omega^2 R = (\pi + 2\pi t)^2 R$$

1.5　相对运动

研究力学问题时常常需要从不同的参考系来描述同一物体的运动。对于不同的参考系，同一质点的位移、速度和加速度都可能不同。图 1-13 中，xOy 表示固定在水平地面上的坐标系（以 E 代表此坐标系），其 x 轴与一条平直马路平行。设有一辆平板车 V 沿马路行进，图中 $x'O'y'$ 表示固定在这个行进的平板车上的坐标系。在 Δt 时间内，车在地面上由 V_1 移到 V_2 位置，其位移为 $\Delta \boldsymbol{r}_{VE}$。设在同一 Δt 时间内，一个小球 S 在车内由 A 点移到 B 点，其位移为 $\Delta \boldsymbol{r}_{SV}$。在这同一时间内，在地面上观测，小球是从 A_0 点移到 B 点的，相应的位移是 $\Delta \boldsymbol{r}_{SE}$。（在这三个位移符号中，下标的前一字母表示运动的物体，后一字母表示参考系。）很明显，同一小球在同一时间内的位移，相对于地面和车这两个参考系来说是不相同的。这两个位移和车厢对于地面的位移有下述关系：

$$\Delta \boldsymbol{r}_{SE} = \Delta \boldsymbol{r}_{SV} + \Delta \boldsymbol{r}_{VE} \tag{1-18}$$

以 Δt 除此式，并令 $\Delta t \to 0$，可以得到相应的速度之间的关系，即

$$\boldsymbol{v}_{SE} = \boldsymbol{v}_{SV} + \boldsymbol{v}_{VE} \tag{1-19}$$

以 $\boldsymbol{v}$ 表示质点相对于参考系 xOy 的速度，以 $\boldsymbol{v}'$ 表示同一质点相对于参考系 $x'O'y'$ 的速度，以 $\boldsymbol{u}$ 表示参考系 $x'O'y'$ 相对于参考系 xOy 平动的速度，则上式可以一般地表示为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \tag{1-20}$$

同一质点相对于两个相对作平动的参考系的速度之间的这一关系叫做伽利略速度变换。

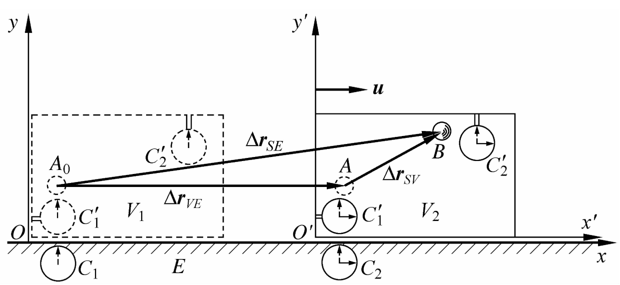

图 1-13　相对运动

要注意，速度的合成和速度的变换是两个不同的概念。速度的合成是指在同一参考系中一个质点的速度和它的各分速度的关系。相对于任何参考系，它都可以表示为矢量合成的形式，如式(1-20)。速度的变换涉及有相对运动的两个参考系，其公式的形式和相对速度的大小有关，而伽利略速度变换只适用于相对速度比真空中的光速小得多的情形。这一点将在第 4 章（狭义相对论）中作详细的说明。

如果质点运动速度是随时间变化的，则求式(1-20)对 t 的导数，就可得到相应的加速度之间的关系。以 $\boldsymbol{a}$ 表示质点相对于参考系 xOy 的加速度，以 $\boldsymbol{a}'$ 表示质点相对于参考系 $x'O'y'$ 的加速度，以 $\boldsymbol{a}_0$ 表示参考系 $x'O'y'$ 相对于参考系 xOy 平动的加速度，则由式(1-20)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 \tag{1-21}$$

这就是同一质点相对于两个相对作平动的参考系的加速度之间的关系。

如果两个参考系相对作匀速直线运动，即 $\boldsymbol{u}$ 为常量，则

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$$

于是有

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$

这就是说，在相对作匀速直线运动的参考系中观察同一质点的运动时，所测得的加速度是相同的。

例 1-6 雨天一辆客车 V 在水平马路上以 20m/s 的速度向东开行，雨滴 R 在空中以 10m/s 的速度竖直下落。求雨滴相对于车厢的速度的大小与方向。

解 如图 1-14 所示，以 xOy 表示地面(E)参考系，以 $x'O'y'$表示车厢参考系，则 $v_{VE}=20\mathrm{m/s}$，$v_{RE}=10\mathrm{m/s}$。以 v_{RV} 表示雨滴对车厢的速度，则根据伽利略速度变换 $\boldsymbol{v}_{RE}=\boldsymbol{v}_{RV}+\boldsymbol{v}_{VE}$，这三个速度的矢量关系如图 1-14 所示。由图形的几何关系可得雨滴对车厢的速度的大小为

$$\begin{aligned} v_{RV} &= \sqrt{v_{RE}^2 + v_{VE}^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 20^2} \\ &= 22.4(\mathrm{m/s}) \end{aligned}$$

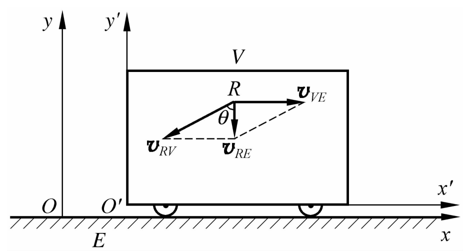

图 1-14

这一速度的方向用它与竖直方向的夹角 θ 表示，则

$$\tan\theta = \frac{v_{VE}}{v_{RE}} = \frac{20}{10} = 2$$

由此得

$$\theta = 63.4°$$

即向下偏西 63.4°。

阅读材料 1 物理学方法简述

1. 数学方法

物理学是一门实验科学。但是仅由观察和试验获取的原始数据并不代表物理规律，数学方法则是用来分析、处理数据的重要手段。在本章中已采用数学所提供的字母、符号（如矢量）和运算规则（如微分、积分）等数学语言，对质点运动规律进行了定量描述。显然，没有微分与导数这些数学语言，人们就无法准确、全面、深刻地了解质点运动速度、加速度；没有积分这种数学语言，人们也无法求得可以描述质点运动全貌的运动学方程。物理学作为一门独立的学科，有着它自己特殊的物理语言（如速度、加速度、力、动量等），但在物理定律、定理、原理的表达及推导、论证等方面，数学也是表达物理规律最为简练、准确的语言。从某种意义上说，物理学就是要解读隐藏在物理现象中的数与形的定量规律。因此，掌握与运用一定的数学语言，对学习质点力学乃至整个物理学都是非常重要的。但要注意以下两点。

(1) 在运用微分与积分运算时,需理解无限小、无穷多与极限思想在力学中的应用。如定积分就是一种和式的极限,定积分是无穷多个无限小之和,定积分的基础就是极限的概念而不是其他。

(2) 笛卡儿用具有固定夹角(不一定是直角)的三根不共面的有向数轴构成了笛卡儿坐标系。坐标方法的出现成功地为代数与几何之间架起了一座可以互通的桥梁,人们称它为数学发展史上的一次革命。

在物理学中,与参考物体固连在一起的坐标系叫做参考系。参考物体大小有限,但固连在物体上的坐标系可以延伸到空间的无限远处。因此,坐标系可以理解为与参考系相固连的整个空间(一个理论上抽象的三维空间)。或者说一个空间(如点、线、面等)都可由坐标定量地表示出来,但同一个空间,坐标系并非唯一(如极坐标、球坐标、自然坐标等),且彼此可以转换。因此,同一空间内的同一对象在不同坐标系下,有着在数学运算上的繁简和难易不同的表述形式。在大学物理以及相关后续课程中,既要学习坐标系的构造,也要善于利用它的功能。不管什么坐标系,它的坐标变元(如 x,y,z)个数应与所表示空间的维数相同,而且用代数语言来说,这些变元是线性无关的。

2. 理想模型方法

物理学中的每一研究对象(客体)都有许多方面的属性,如大小、形状、质量、……这些属性都统一于客体之中。人们对客体的属性,是从一个侧面一个侧面地分别去认识的。为了认识某一侧面的属性,都要暂时避开其他方面的属性,这样才便于获取对所关注的属性的认识。

实际上,自然界发生的一切物理现象和物理过程一般都是比较复杂的,影响它们的因素也是多种多样的,如果不分主次地考虑一切因素,不仅会增加认识的难度,而且也不能得出准确的结果;相反,还会导致对最简单的物理图像的分析也无从下手。因此,在物理学的研究中,需要把复杂问题转换为理想化的简单问题,也就是采用理想化的方法。理想化方法主要包括建立理想模型方法、理想过程与设计理想实验等三个方面。例如本章中以质点为讨论对象就是应用理想模型方法。质点模型是相对物体模型而言的,在忽略物体形状、大小等次要因素后,保留了物体在运动过程中起决定作用的两个主要特征:质量和空间位置。

在质点动力学中,以牛顿第二定律为基础,由力引出了冲量、功和力矩,由质量、位矢、速度引出了动量、动能和角动量等概念。可以说,牛顿力学是以质点力学为基础。当然,质点作为理想模型,实际生活中没有任何一个物体与它完全等价。但是,在描述诸如地球绕太阳公转这样的运动时,由于地球半径(约为 6400km)比地球与太阳的距离(约 1.49×10^{8} km)小得多,把地球视作质点是相当好的近似。一般来说,只要当物体在空间运动的尺度远大于物体本身的线度,或者在不考虑物体的转动和内部运动时,都可以采用质点模型。在研究刚体、弹性体、流体等质量连续分布的物体的运动时,我们会把它们分割成无限多个质点进行讨论,这也是质点模型的一种实际应用。

3. 逻辑推理方法

1) 演绎推理

演绎方法是从一般到特殊(或个别)、由共性推出个性的方法。在经典力学中,牛顿运动

三定律是一般规律,它通过分析力的时间积累与空间积累、运用微分与积分的数学手段,得出描述特定物理问题的质点运动三定理。由于数学有一套严格的公理系统,是一门基本前提很明确的学科,而物理学中越来越广泛地使用数学语言,所以,数学中的演绎推理在解决物理问题中的作用日益明显。

2)归纳推理

物理学家几乎从来不单纯地对孤立的个别事物或事件进行研究,而是通过观察若干个别事物的特性,从中找出整个类别的普遍特性,这就是归纳推理法(简称归纳法)。如人们通过长期的天文观测,发现在行星绕太阳运动中,行星在任一位置对日位矢的大小与行星在该处的动量值,以及位矢和动量两矢量夹角的正弦这三者的乘积总保持常数。在此基础上引入了一个新物理量——角动量,并猜测它是一个守恒量。由此可以看出,归纳法是从一些个别的经验事实和感性材料中概括出理论性的一般原理的一种逻辑推理和认识方法。与演绎法相反,归纳法是从特殊(或个体)事物概括出一般规律的方法。就人类总的认识过程而言,总是先认识某些特殊现象,然后过渡到对一般现象的认识。所以,归纳法是科学发现的一种常用思维方法。具体来说,归纳推理方法有以下特点。

(1)归纳是依据特殊现象推断一般现象,因而,由归纳得的结论,超越了前提所包含的内容。

(2)归纳是依据若干个已知的不尽完整的现象推断尚属未知的现象,因而结论具有猜测的性质。

(3)归纳的前提是单个事实和特殊的情况,所以,归纳要立足于观察、经验或实验的基础之上。

本章要点

1. 描述质点运动的4个物理量

位置矢量:描述质点在空间的位置情况。

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

位移:描述质点位置的改变情况。

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

速度:描述质点位置变化的快慢和方向。

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

加速度:描述质点速度的变化情况。

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

上述4个物理量均具有矢量性、瞬时性和相对性。

2. 圆周运动的速度和加速度

1)线量描述

线速度$\boldsymbol{v}$:方向沿切向,大小为其运动的速率,$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。

切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$：方向沿切向($a_\tau>0$，$\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向，加速；$a_\tau<0$，$\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反向，减速)，大小为 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。

法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$：方向指向圆心，大小为 $a_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{R}$。

线加速度 $\boldsymbol{a}$：方向指向轨迹凹的一侧。

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_\mathrm{n},\quad a=\sqrt{a_\tau^2+a_\mathrm{n}^2},\quad \tan(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v})=\frac{a_\mathrm{n}}{a_\tau}$$

2）角量描述

角位置：$\theta(t)$

角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度：$\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

3）线量与角量的关系

$$s=R\theta,\quad v=R\omega,\quad a_\tau=R\alpha,\quad a_\mathrm{n}=R\omega^2$$

3. 伽利略速度变换

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

4. 运动学的两类问题

1）已知运动学方程求轨道方程、速度及加速度

解这类问题时，消去运动方程中的参量 t 得轨道方程；由运动方程对 t 求导数，可得质点的速度和加速度。

2）已知加速度和初始条件求速度及运动方程

这类问题是微分法的逆运算，需要用积分的方法求解，积分可采用定积分或不定积分，要注意初始条件的正确使用。

习题 1

一、选择题

1. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为(　　)。

A. $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　B. $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$　　C. $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$　　D. $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

2. 一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\boldsymbol{r}=at^2\boldsymbol{i}+bt^2\boldsymbol{j}$(其中 a、b 为常量)，则该质点作(　　)。

A. 匀速直线运动　　B. 变速直线运动　　C. 抛物线运动　　D. 一般曲线运动

3. 某质点的速度为 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-8t\boldsymbol{j}$，已知，$t=0$ 时，它过点(3，−7)，则该质点的运动方程为(　　)。

A. $2t\boldsymbol{i}-4t^2\boldsymbol{j}$　　B. $(2t+3)\boldsymbol{i}-(4t^2+7)\boldsymbol{j}$

C. $-8\boldsymbol{j}$　　D. 不能确定

4．以初速 v_0 将一物体斜向上抛，抛射角为 θ，不计空气阻力，则物体在轨道最高点处的曲率半径为(　　)。

A. $\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$　　B. $\dfrac{g}{v_0^2}$　　C. $\dfrac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$　　D. 不能确定

5．质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动，每 T 秒转一圈。在 $2T$ 时间间隔中，其平均速度大小与平均速率大小分别为(　　)。

A. $2\pi R/T$，$2\pi R/T$　　B. 0，$2\pi R/T$

C. 0，0　　D. $2\pi R/T$，0

6．某物体的运动规律为 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-kv^2t$，式中的 k 为大于零的常量。当 $t=0$ 时，初速为 v_0，则速度 v 与时间 t 的函数关系是(　　)。

A. $v=\dfrac{1}{2}kt^2+v_0$　　B. $v=-\dfrac{1}{2}kt^2+v_0$

C. $\dfrac{1}{v}=\dfrac{kt^2}{2}+\dfrac{1}{v_0}$　　D. $\dfrac{1}{v}=-\dfrac{kt^2}{2}+\dfrac{1}{v_0}$

7．一个质点在作匀速率圆周运动时，(　　)。

A. 切向加速度改变，法向加速度也改变

B. 切向加速度不变，法向加速度改变

C. 切向加速度不变，法向加速度也不变

D. 切向加速度改变，法向加速度不变

8．一小球沿斜面向上运动，其运动方程为 $x=5+4t-t^2$(SI)，则小球运动到最高点的时刻是(　　)。

A. $t=4\mathrm{s}$　　B. $t=2\mathrm{s}$　　C. $t=8\mathrm{s}$　　D. $t=5\mathrm{s}$

9．质点沿曲线运动，t_1 时刻速度为 $\boldsymbol{v}_1=6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$(m/s)，$t_2$ 时刻速度为 $\boldsymbol{v}_2=-6\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$(m/s)，那么，其速度增量的大小 $|\Delta\boldsymbol{v}|$ 和速度大小的增量 Δv 分别为(　　)。

A. $|\Delta\boldsymbol{v}|=0$，$\Delta v=20\mathrm{m/s}$　　B. $|\Delta\boldsymbol{v}|=20\mathrm{m/s}$，$\Delta v=0$

C. 均为 20m/s　　D. 均为零

二、填空题

1．某质点从静止出发沿半径为 $R=1\mathrm{m}$ 作圆周运动，其角加速度随时间的变化规律是 $\alpha=12t^2-6t$，则质点的角速度大小为________，切向加速度大小为________。

2．质点 P 在一直线上运动，其坐标 x 与时间 t 有如下关系：$x=-A\sin(\omega t)$ (SI)(A 为常数)。(1)任意时刻 t，质点的加速度 $a=$________；(2)质点速度为零的时刻 $t=$________。

3．两辆车 A 和 B 在笔直的公路上同向行驶，它们从同一起始线上同时出发，并且由出发点开始计时，行驶的距离 x 与行驶时间 t 的函数关系式为：$x_A=4t+t^2$，$x_B=2t^2+2t^3$(SI)。(1)它们刚离开出发点时，行驶在前面的一辆车是________；(2)出发后，两辆车行驶距离相同的时刻是________；(3)出发后，B 车相对 A 车速度为零的时刻是________。

4．一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间的变化关系为 $a=3+2t$(SI)，如果初始时质点的速度 v_0 为 5m/s，则当 t 为 3s 时，质点的速度 $v=$________。

5．一质点沿直线运动，其运动学方程为 $x=6t-t^2$(SI)，则在 t 由 0～4s 的时间间隔内，质点的位移大小为 ________，在 t 由 0～4s 的时间间隔内质点走过的路程为________。

6. 一质点从坐标原点出发沿 x 轴运动,其速度随时间变化关系为 $\boldsymbol{v}=(6t-6t^2)\boldsymbol{i}$(m/s)。在最初 2s 内质点的平均速度大小为________,平均速率为________。

三、计算题

1. 某质点在平面上作曲线运动,t_1 时刻位置矢量为 $\boldsymbol{r}_1=-2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$,$t_2$ 时刻的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$。求:(1)在 $\Delta t=t_2-t_1$ 时间内质点的位移矢量式;(2)该段时间内位移的大小和方向;(3)在坐标图上画出 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 及 $\Delta\boldsymbol{r}$。(题中 $\boldsymbol{r}$ 以 m 计,t 以 s 计。)

2. 某质点作直线运动,其运动方程为 $x=1+4t-t^2$,其中 x 以 m 计,t 以 s 计。求:(1)第3s 末质点的位置;(2)头 3s 内的位移大小;(3)头 3s 内经过的路程。

3. 已知某质点的运动方程为 $x=2t$,$y=2-t^2$,式中 t 以 s 计,x 和 y 以 m 计。

(1)计算并图示质点的运动轨迹;(2)求出 $t=1$s 到 $t=2$s 这段时间内质点的平均速度;(3)计算 1s 末和 2s 末质点的速度;(4)计算 1s 末和 2s 末质点的加速度。

4. 湖中有一小船,岸边有人用绳子跨过离河面高 H 的滑轮拉船靠岸,如图 1-15 所示。设绳子的原长为 l_0,人以匀速 v_0 拉绳,试描述小船的运动轨迹并求其速度和加速度。

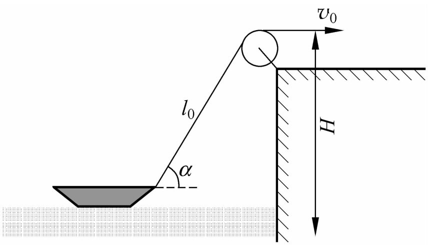

图 1-15

5. 大马哈鱼总是逆流而上,游到乌苏里江上游去产卵,游程中有时要跃上瀑布。这种鱼跃出水面的垂直速度可达 32km/h。它最高可跃上多高的瀑布?和人的跳高纪录相比如何?

6. 某质点作圆周运动的方程为 $\theta=2t-4t^2$(θ 以 rad 计,t 以 s 计)。在 $t=0$ 时开始逆时针旋转,问:(1)$t=0.5$s 时,质点以什么方向转动?(2)质点转动方向改变的瞬间,它的角位置 θ 等于多大?

7. 质点从静止出发沿半径 $R=3$m 的圆周作匀变速运动,切向加速度 $a_\tau=3\text{m/s}^2$。问:(1)经过多少时间后质点的总加速度恰好与半径成 45°角?(2)在上述时间内,质点所经历的角位移和路程各为多少?

8. 汽车在半径为 $R=400$m 的圆弧弯道上减速行驶。设某一时刻,汽车的速率为 $v=10$m/s,切向加速度的大小为 $a_\tau=0.2\text{m/s}^2$。求汽车的法向加速度和总加速度的大小和方向。

9. 由楼窗口以水平初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 射出一发子弹,取枪口为原点,沿 $\boldsymbol{v}_0$ 方向为 x 轴,竖直向下为 y 轴,并取发射时刻 t 为 0。试求:

(1) 子弹在任一时刻 t 的位置坐标及轨迹方程;

(2) 子弹在 t 时刻的速度、切向加速度和法向加速度的大小并作图标注方向。

10. xOy 平面内一粒子在 $t=0$ 时以速度 $8.0\boldsymbol{j}$m/s 和恒定加速度$(4.0\boldsymbol{i}+2.0\boldsymbol{j})\text{m/s}^2$ 从