

第 1 章

分 块 法

分块法的主要思想是为了证明两个图形的面积相等, 先将两个图形分割成一些数目相同的图块, 然后证明每组对应的图块面积相等, 即可证明两个图形的总面积相等.

在证明两个不规则的子图块全等时, 往往需要用到下面的多边形全等判定条件. 它可以看作是判断两个三角形是否全等的角边角定理在多边形中的推广.

定理 1.1 如图 1.1 所示, 设两个多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 同时满足如下条件, 则它们全等.

- (1) 两个多边形的边数都为 n .
- (2) 各内角对应相等, 即 $\angle A_1 = \angle B_1, \angle A_2 = \angle B_2, \cdots, \angle A_n = \angle B_n$.
- (3) 有 $n-2$ 条连续边对应相等, 即 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_{n-2} = b_{n-2}$.

证 如图 1.1 所示, 由 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \angle A_2 = \angle B_2$ 可知 $\triangle A_3A_2A_1 \cong \triangle B_3B_2B_1$, 故 $\angle 1 = \angle 1', A_1A_3 = B_1B_3$, 又已知 $\angle A_4A_3A_2 = \angle B_4B_3B_2$, 所以 $\angle 2 = \angle 2'$, 于是由边角边定理知 $\triangle A_1A_3A_4 \cong \triangle B_1B_3B_4$, 同理可证 $\triangle A_1A_4A_5 \cong \triangle B_1B_4B_5$, 依次类推直到 $A_1A_{n-2}A_{n-1} \cong \triangle B_1B_{n-2}B_{n-1}$. 于是可知 $A_1A_{n-1} = B_1B_{n-1}, \angle \alpha = \angle \alpha', \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n = \angle B_{n-2}B_{n-1}B_n$.

再由 $\angle 3 = \angle 3', \angle 4 = \angle 4', \cdots, \angle \alpha = \angle \alpha'$ 可知 $\angle A_2A_1A_{n-1} = \angle B_2B_1B_{n-1}$, 再从 $\angle A_2A_1A_n = \angle B_2B_1B_n$ 可知 $\angle \beta = \angle \beta'$. 然后根据角边角定理知 $\triangle A_1A_{n-1}A_n \cong \triangle B_1B_{n-1}B_n$. 故 $A_{n-1}A_n = B_{n-1}B_n, A_nA_1 = B_nB_1$. 从而 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 对应角相等, 对应边也相等, 因此它们全等.

在应用定理 1.1 时, 条件 (1) 和条件 (2) 往往是容易验证的. 所以本书中在判定两个图块全等时, 一般只需证明它们满足条件 (3) 即可. 参见后面的证法 1 和证法 4.

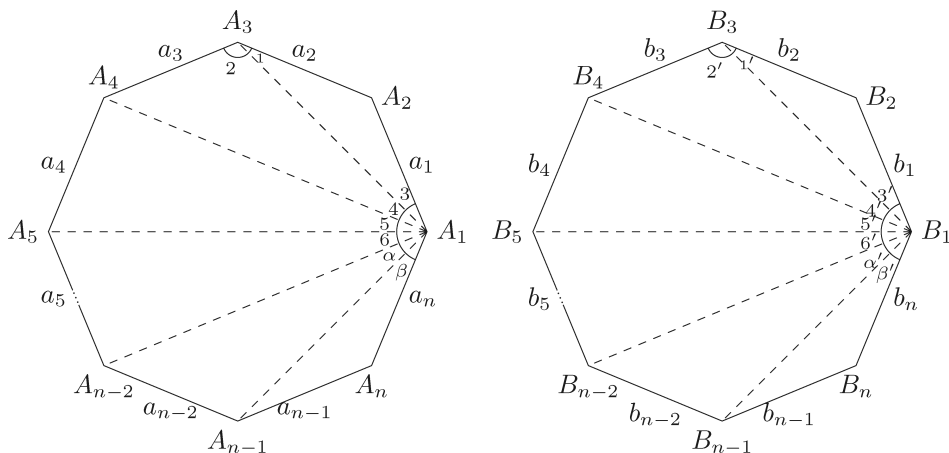


图 1.1

1.1 分块对应法

分块对应法是最直观的分块法，它的要点是将两个图形分解成对应全等的子图块，并为每组对应的图块进行相同的编号，从而得到两个图形面积相等的结论。在参考文献 [2] 中有很多用分块对应法证明勾股定理的例子，比如下面的证法 1～证法 7，它们都非常有代表性，都可以看成弦图（见第 6 章“拼摆法”中的图 6.1）的变种。请读者自行体会其中的演变。

证法 1 如图 1.2(a) 所示。显然四边形 $SMCF$ 和 $LHBR$ 的四个角对应相等，以及 $BH = AB = MC$, $BR = AC = FC$ ，由定理 1.1 知这两个四边形全等。再截取 $AX = GM = b - a$ ($AM = BC = a$)，易证 $\text{Rt}\triangle AXT \cong \text{Rt}\triangle MGS$ 。故 $XP = b - (b - a) = a = BE$ ($AP = BR = AC = b$)，再由 $KP = BC$ 和定理 1.1 可知两个直角梯形 $TXPK$ 和 $NEBC$ 全等。

综上所述，可知子图 (b) 中编号相同的图块各自对应全等，即大正方形面积为两个小正方形面积之和，于是立得 $c^2 = a^2 + b^2$ 。□

证法 2 如图 1.3 所示，仿照证法 1 易证各同编号的图块对应全等，于是立得 $c^2 = a^2 + b^2$ 。□

证法 3 如图 1.4 所示，其中图块 4 为直角梯形，高和下底均为 a 。仿照证

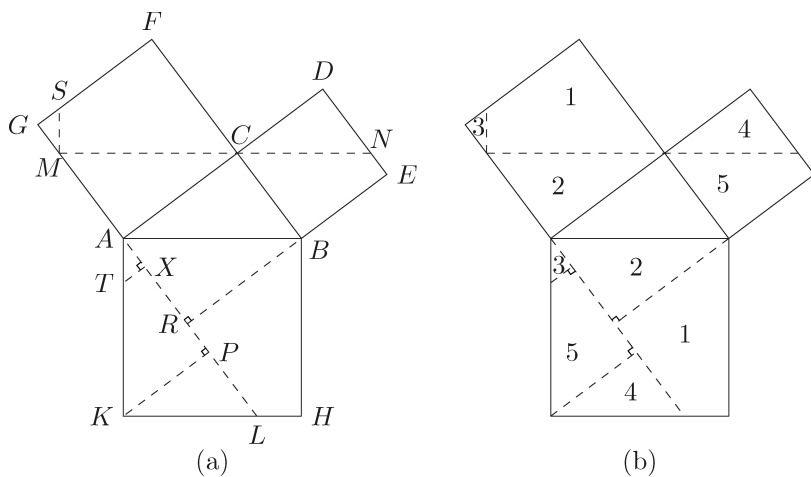


图 1.2

法 1 易证各同编号的图块对应全等, 于是立得

$$S_{ABHK} = \sum_{i=1}^8 S_i = a^2 + b^2 = S_{BCDE} + S_{ACFG}. \quad \square$$

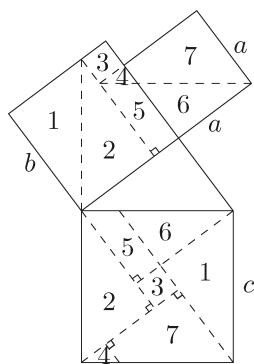


图 1.3

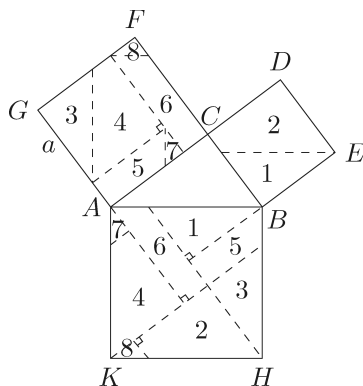


图 1.4

证法 4 如图 1.5(a) 所示, 截取 $PW = CL$, 则有 $BW = XL \implies \text{Rt}\triangle BZW \cong \text{Rt}\triangle XBL$, 故 $WZ = BL = RH$. 再截取 $XU = VZ$. 作 $UQ \perp XY$, 则 $\text{Rt}\triangle XUQ \cong \text{Rt}\triangle VZE$. 于是有 $UQ = ZE, XQ = VE \implies$

$QY = VD$. 又易知 $BZ = BX = CP$, 故 $BE - BZ = CD - CP$, 得 $ZE = PD \Rightarrow \text{Rt}\triangle ZEV \cong \text{Rt}\triangle PDJ \Rightarrow PJ = VZ = XU$. 再考虑到 $BJ = AB = LR$, 于是可得 $LR - LX - XU = BJ - BW - PJ \Rightarrow UR = PW$.

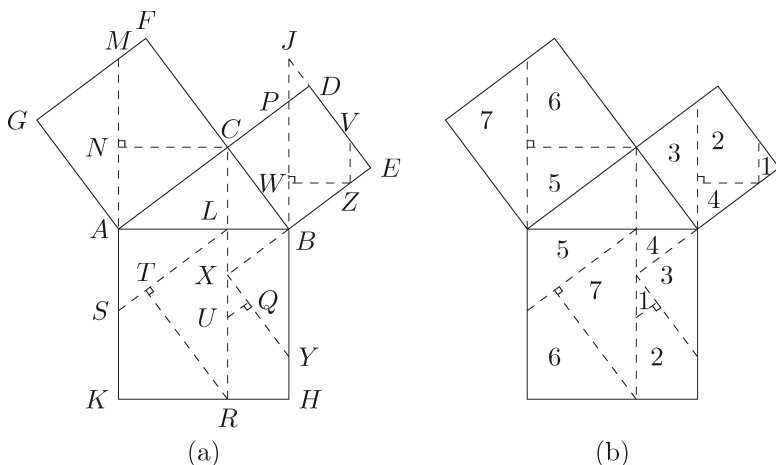


图 1.5

现在可知两五边形 $PDVZW$ 和 $UQYHR$ 有三组连续边对应相等: $RU = WP, UQ = PD, QY = DV$, 又显然可以看出这两个五边形的对应角相等, 于是根据定理 1.1 知它们全等.

类似可证子图 (b) 中其他编号相同的图块对应全等, 最后可得 $c^2 = a^2 + b^2$. $\square$

证法 5 如图 1.6(a) 所示, 截取 $BU = CP, SZ = QU$, 仿照证法 4 可知 $BP + QU = c$, 于是 $LZ = BP$, 再考虑到 $ZV = UE = PD, LW = CP = BU$, 便可根据定理 1.1 知五边形 $LZVYW$ 和 $BPDQU$ 全等.

易证 $TL = AC = CF, KL = RC$, 根据定理 1.1 知四边形 $KLTX$ 和 $RCFM$ 全等. 又易证子图 (b) 中其他同编号的图块对应全等, 故 $c^2 = a^2 + b^2$. $\square$

证法 6 如图 1.7(a) 所示, 作 $KP \parallel AC$ 交 CR 于 X , 显然 $CX = AK = BH$, 于是 $CXHB$ 是平行四边形, 故 $XH \parallel BC \parallel AN$. 从而 $\angle PXH = \angle CAN = 90^\circ$. 再考虑到 $PX = CT$, 可知 $\text{Rt}\triangle PXH \cong \text{Rt}\triangle TCB$.

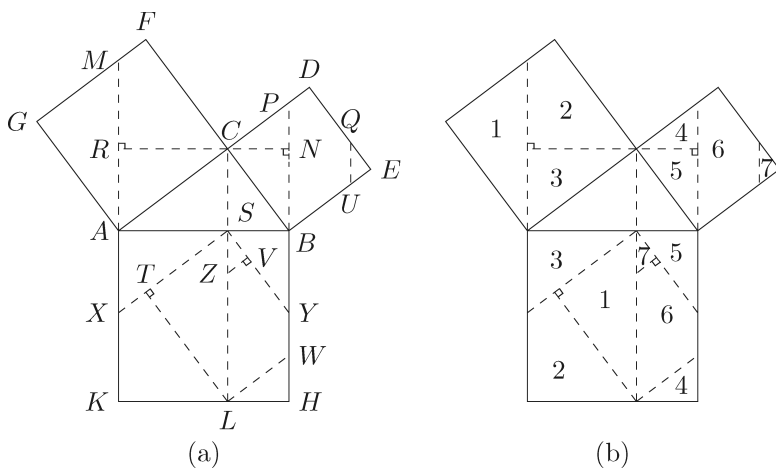


图 1.6

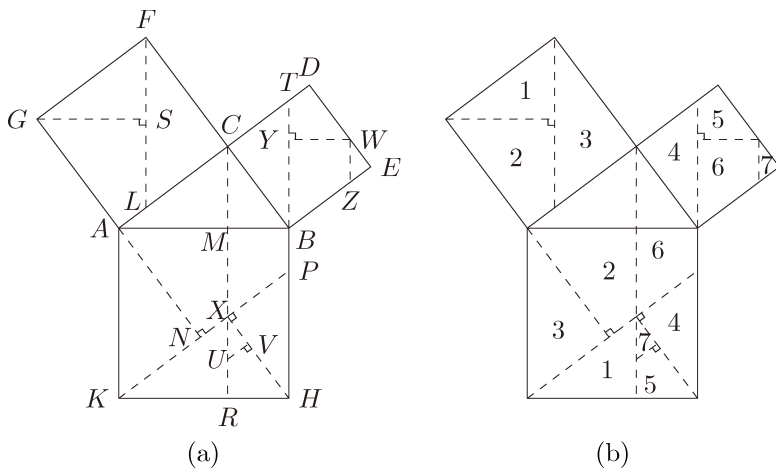


图 1.7

现在截取 $BZ = CT$, $XU = WZ$, 再仿照证法 4 可证子图 (b) 中其他同编号的图块对应全等. 于是可得

$$S_{ABHK} = \sum_{i=1}^7 S_i = S_{ACFG} + S_{BCDE}. \quad \square$$

证法 7 如图 1.8(a) 所示, 截取 $KL = CT$, $BP = CN$, 并将两直角边上的正方形按子图 (b) 进行分块和编号. 然后在子图 (c) 中作内正方形 $ABHK$, 截

取 $AX = KM$, $CI = HN$. 再将正方形 $ABHK$ 按子图 (d) 进行分块和编号.

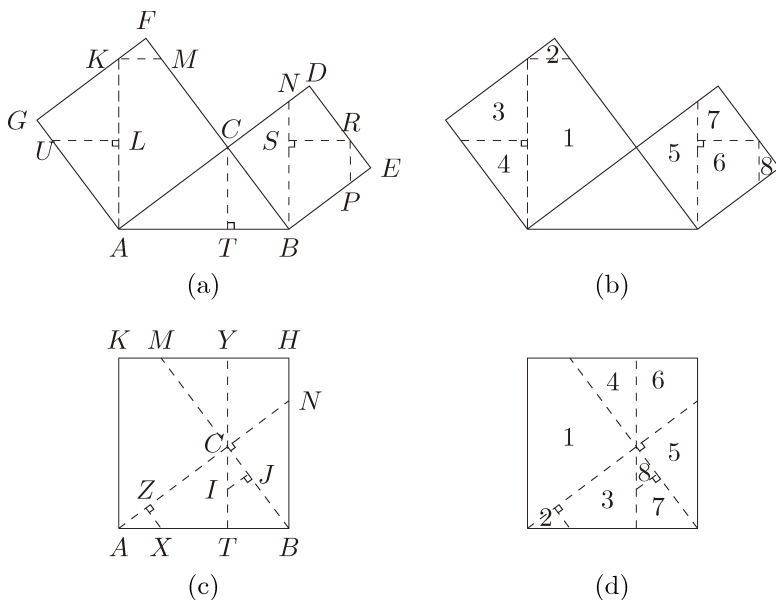


图 1.8

容易验证子图 (b) 和 (d) 中相同编号的图块对应全等, 故

$$S_{ABHK} = \sum_{i=1}^8 S_i = S_{ACFG} + S_{BCDE}. \quad \square$$

下面的证法 8 利用角分线进行分块, 别有一番情趣.

证法 8 如图 1.9(a) 所示, 作 AB 的三条平行线 GY , RP 和 EX . 易知 $\angle 10 = \angle 4$, $\angle 6 = \angle 9$, 再由 $AC = FG$ 可知 $\triangle GFY \cong \triangle CAR$.

现在作 CL 平分 $\angle ACB$, 则 $CL \parallel AF \parallel BD$. 且 $\angle 5 = 45^\circ = \angle 7 \implies CA = AM$, 再考虑到 $\angle 1 = \angle 3$, $AK = AB$, 可知 $\triangle AKM \cong \triangle ABC$, 于是 $\angle AMK$ 为直角, 同理可证 $NH \perp BN$. 设 SM 和 NT 分别为 $\angle AMK$ 和 $\angle BNH$ 的平分线, 则由 $\angle 8 = 45^\circ = \angle 4$, $\angle 6 = \angle 3 = \angle 1$, $AM = AC$ 可知 $\triangle AMS \cong \triangle CAR$. 同理可证 $\triangle HNT \cong \triangle CAR$.

综上所述, 我们就证明了子图 (b) 中所有编号为 1 的三角形彼此全等. 类似可证子图 (b) 中其他同编号的三角形彼此全等, 于是由子图 (a) 和 (b) 立得

$$S_{ABHK} = 2 \sum_{i=1}^4 S_i = S_{ACFG} + S_{BCDE}. \quad \square$$

历史上还出现过和图 1.9(b) 类似的另外两个分块方案, 即参考文献 [2] 中的第 19 个和第 24 个几何证法, 我们把它们集中到图 1.9 的子图 (c) 和 (d) 中, 使读者有一个更全面的了解.

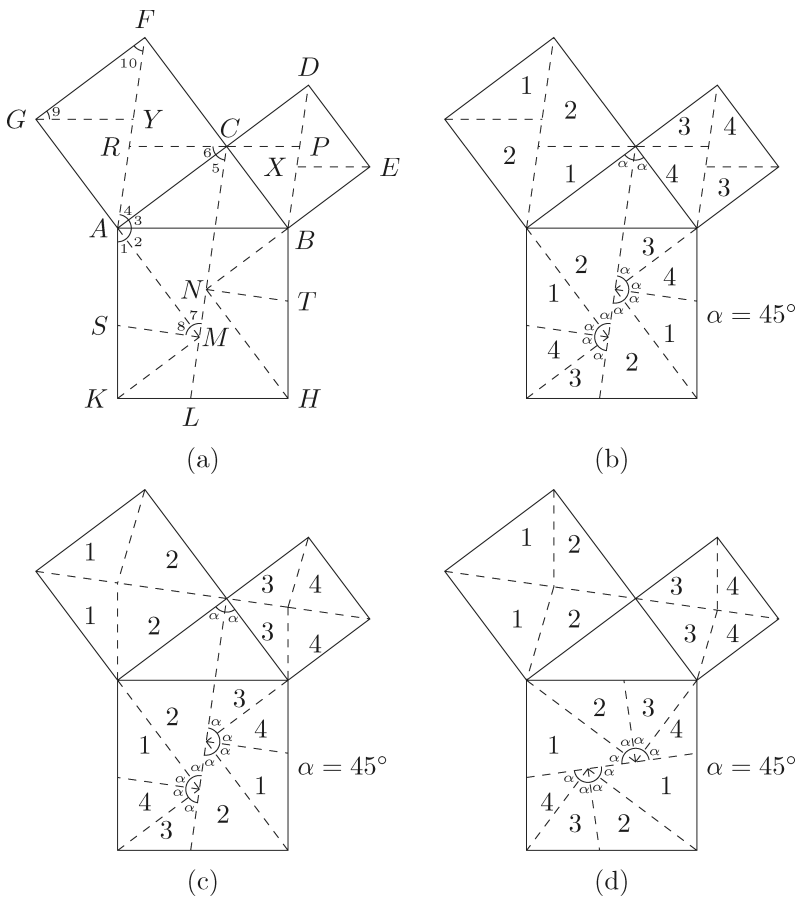


图 1.9

下面看一个利用正方形的对角线 (其实也是角分线) 进行分块的例子, 即证法 9.

证法 9 如图 1.10(a) 所示, 截取 $GM = CL = a$. 易证 $ALNM$ 和 $XZYW$ 都是边长为 $b - a$ 的正方形, 所以它们面积相等. 再从 $\angle 2 = \angle 4 = \angle 5$ 和

$\angle 2 + \angle 1 = 90^\circ$, $\angle 5 + \angle 6 = 90^\circ$ 可知 $\angle 1 = \angle 6$. 现在截取 $KS = b - a = MN$, 再由 $MF = AB = KH$ 及 $\angle MNF = 135^\circ = \angle KSH$ 可知 $\triangle FMN \cong \triangle HKS$. 再截取 $BR = b - a$, 同理可证 $\triangle ABR \cong \triangle FLN$.

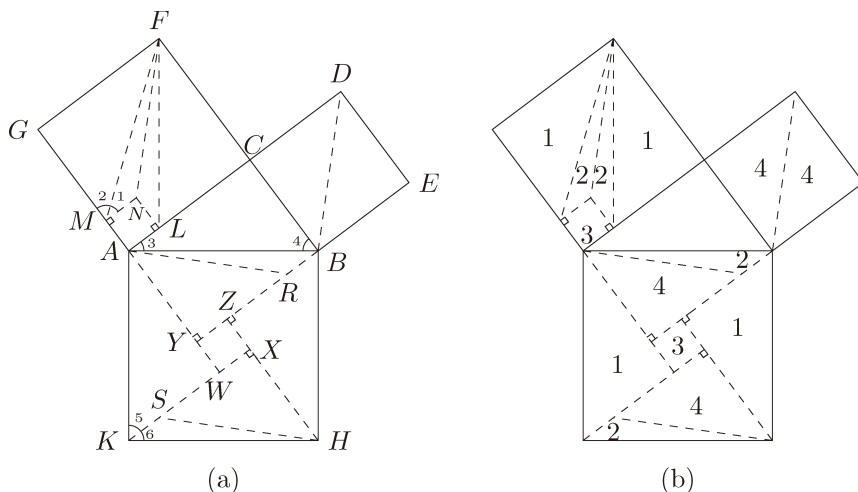


图 1.10

综上所述, 我们证明了子图 (b) 中所有编号为 2 的三角形彼此全等. 类似可证子图 (b) 中其他同编号的图块对应全等, 于是由子图 (a) 和 (b) 立得

$$S_{ABHK} = 2(S_1 + S_2 + S_4) + S_3 = S_{ACFG} + S_{BCDE}. \quad \square$$

1.2 镶嵌法

前一节介绍的分块方案都是历史上比较经典的案例, 体现了数学爱好者的智慧. 到了 21 世纪, 随着计算机技术的发展, 人们又发现了用计算机批量生成勾股定理证明方法的途径.

在参考文献 [6] 中就描述了这样一个新颖的思路: 构造两种不同的正方形瓷砖, 边长分别为 a 和 b . 把它们按图 1.11 所示的方式进行摆放, 显然可以铺满一个无穷平面. 现在再构造一个边长为 c 的瓷砖, 把它随机地放到平面上的任意位置, 那么随着瓷砖 c 每放到任何一个不同的位置, 都可以得到一个不同的分块证法. 这个思路的英文原名是 “Tessellation”, 中文可以理解为 “镶嵌”, 这即是本节名称的来源.

在参考文献 [4] 对应的网址中有一个镶嵌法的计算机动画程序. 下面的图 1.11 ~ 图 1.19 介绍了该程序的不同演示效果.

证法 10 如图 1.11 所示, W 、 X 、 Y 、 Z 分别是四个大正方形的对称中心, 将它们连接起来, 显然 $LX = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$, $LW = WP - LP = \left(a + \frac{b}{2}\right) - \frac{b}{2} = a$. 故 $XW = c$. 类似可知 $MY = b = LX$, $MX = a = LW$, 故 $\text{Rt}\triangle YXM \cong \text{Rt}\triangle XWL$. 得 $YX = XW$, $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = 90^\circ$, 知 $XY \perp XW$.

类似可证 $WZ = YZ = XY$. 故 $WXYZ$ 是边长为 c 的正方形. 易知^① $S_1 = \frac{1}{4}b^2$. 于是立得

$$c^2 = S_{WXYZ} = S_2 + 4S_1 = a^2 + b^2.$$

□

下面将图 1.11 中的正方形 c 向右平移, 使其两条边分别过最右侧的小正方形的两个相邻顶点, 即可得到图 1.12 的分块方案, 详见证法 11.

证法 11 如图 1.12(a) 所示, A 、 B 、 C 、 M 分别是三个小正方形的顶点, AB 交 CM 于 W 点. 然后截取 $NL = a$, TN 交 BL 于 Z 点. 用类似过程可作出 X 点和 Y 点, 易证

$$\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle CMB \cong \text{Rt}\triangle BLN.$$

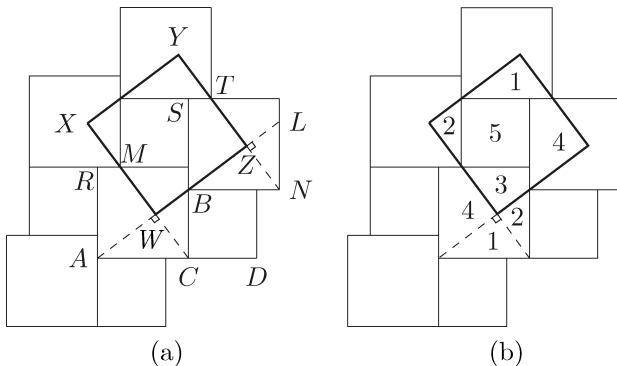


图 1.12

^① 从正方形的对称中心作两条相互垂直的直线, 必四等分正方形的面积.

由此可知 AB 和 BL 在同一条直线上, 且 $CM \perp AB$. 再由 $\text{Rt}\triangle ACW \cong \text{Rt}\triangle BNZ$ 可知 $AW = BZ$, 于是有 $ZW = BW + BZ = BW + AW = AB$. 同理可证 $WXYZ$ 另外三边的长度也等于 AB , 故它是边长为 c 的正方形.

又 $RM = b - a = ST$, $AR = b = BS$, 根据定理 1.1 可知四边形 $ARMW$ 和 $BSTZ$ 全等, 于是根据子图 (b) 中的编号方案知

$$c^2 = \sum_{i=1}^5 S_i = a^2 + b^2. \quad \square$$

我们将图 1.12 中的斜正方形沿直线 WA 向左下平移, 使 W 点和 A 点重合, 就可以得到图 1.13 所示的分块方案. 然后将图 1.13 中的斜正方形向右平移到不同的位置, 又可以得到图 1.14 ~ 图 1.16 所示的证法.

证法 12 如图 1.13 所示, W 、 X 、 Y 、 Z 分别是 4 个小正方形的顶点, 仿照证法 10 可证 $WXYZ$ 是边长为 c 的正方形. 又显然有 $S_1 + S_3 = a^2$, $S_2 + S_4 + S_5 = b^2$. 于是立得

$$c^2 = \sum_{i=1}^5 S_i = a^2 + b^2. \quad \square$$

证法 13 如图 1.14 所示, 仿照证法 10 可证图中加粗的四边形是边长为 c 的正方形, 且编号相同的子图块对应全等, 于是立得

$$c^2 = \sum_{i=1}^6 S_i = a^2 + b^2. \quad \square$$

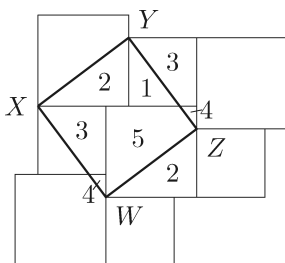


图 1.13

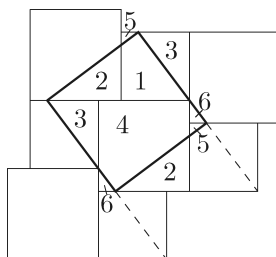


图 1.14