



# 第 1 章 绪 论

波浪是海洋工程和海岸工程中的主要环境载荷,关于波浪理论的研究有很多。深水波浪理论中,关于规则波的研究,有一阶 Stokes(斯托克斯)波浪理论、二阶 Stokes 波浪理论、……、五阶 Stokes 波浪理论;关于不规则波的研究,主要使用线性叠加波浪理论。浅水中常用的波浪理论有椭圆余弦波理论、孤立波理论。流函数波浪理论,可以准确描述规则的大幅浅水波和深水波。浅水和有限水深下波浪研究中,Boussinesq 模型应用极为广泛。关于这些方面的研究,请参考其他著作。

本书主要对层析波浪模型进行介绍,这里的层析并不是密度分层,而是拉格朗日物质面或者欧拉曲面意义上的流体运动学分层,概念源于连续介质力学的 Cosserat 理论,最早由 Green 和 Naghdi 用于水波分析,后续多用欧拉场垂直分层,称为 GN 波浪模型。海底和水面可以看做流体层的上下两个表面,我们在流体层中引入沿水深方向上的速度分布假设,然后不抛弃任何项,建立层析波浪模型。只要引入的速度假设的形式合理,层析波浪模型的计算结果就足够准确,逼近欧拉方程的数值解。

## 1.1 浅水层析波浪模型发展现状

Green-Naghdi 波浪模型(简称 GN 模型),最先由 Green 等(1974)提出并用来分析一些水波问题。GN 模型中并没有引入任何的小参数,它只是引入了对垂直方向上不同流层间的速度变化的假设。本书中介绍的层析波浪模型主要是 GN 模型和 IGN 模型(无旋 GN 模型)。

在 GN 模型中,流体速度可以分解为一系列两项乘积的和,即  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$   
$$= \sum_{n=0}^K \mathbf{u}_n(x, y, t) \lambda_n(z)$$
。第一项  $\mathbf{u}_n(x, y, t)$  是系数,它是两个水平坐标和时间

的函数。第二项  $\lambda_n(z)$  是形状函数,只是垂直坐标的函数。形状函数  $\lambda_n(z)$  其实是描述速度沿水深方向是如何变化的,它对于 GN 模型至关重要。如果应用于浅水波浪问题,一般取该形状函数为  $\lambda_n(z) = z^n$ 。根据速度假设  $u = \sum_{n=0}^K u_n \lambda_n$  中  $K$  取值的不同,将 GN 模型分为不同的级别。浅水中,  $K = 1, 2, 3, \dots$  的情况分别称为浅水 GN-1、GN-2、GN-3、……模型。如果应用于深水问题,一般取该形状函数为  $\lambda_n(z) = e^{az^n}$  ( $a$  是特征波数)。深水中,  $K = 0, 1, \dots, N$  的情况分别称为深水 GN-1、GN-2、GN-3、……模型。

GN 模型中,质量守恒方程是准确满足的,自由面边界条件、海底边界条件都是准确满足的,动量守恒方程是近似满足的,因为 GN 模型对动量守恒方程沿水深方向进行了积分,将二维问题简化为一维问题,将三维问题简化为二维问题,从而具有较高的计算效率。GN 模型中没有引入小幅波假定,它是一种强非线性波浪模型。

Green 和 Naghdi(1976)正式提出流体层的概念,并对 GN-1 模型进行了研究,给出了 GN-1 模型的色散性关系式。Green 和 Naghdi(1986, 1987)还对有限水深和无限水深水波问题进行了研究。

Ertekin(1984)、Ertekin 等(1986)使用 GN-1 模型对浅水中运动船体兴波问题进行了研究,后来国内的吴健康和陈波(2003)、陈波和吴健康(2005)也采用 GN-1 模型和有限元法对浅水中的船波问题进行了研究,由于使用弱色散性的 GN-1 模型,只能求解浅水问题。

Shields 和 Webster(1988)给出了无因次化的 GN 模型,首次对高级别的 GN 模型进行了研究,并给出了 GN-1、GN-2 和 GN-3 模型的线性色散关系式。Shields 和 Webster(1989)证明了 GN 模型还满足能量守恒和 Kelvin 环量定理。

Demirbilek 和 Webster(1992, 1999)使用 GN-2 模型对二维非线性浅水波进行了数值模拟,他们用另外一种方法推导了有因次的 GN 模型的控制方程,通过有限差分法实现了对二维 GN 模型的求解。然而由于三维 GN 模型的复杂性及算法问题,他们没有将 GN 模型应用到三维水波问题。

Zhao 等(2010)将 GN 模型应用于三维波浪传播变形问题。Zhao 等(2009)首次将 GN 模型应用于海底滑坡引发的海啸问题研究,Zhao 等(2011)使用 GN-2 模型对二维和三维地震引起的海啸问题进行了数值模拟。

Webster 等(2011)对 GN 模型的表达式进行了进一步的推导,使得其形式更为简单,便于编程使用。Zhao 和 Duan(2012)、Zhao 等(2014a)发展了高级别的 GN 模型(GN-3、GN-5 和 GN-7)并对由于海底不平整造成的波浪传播变形问题进行了分析,通过比较不同级别的 GN 模型计算结果,分析了 GN 模型的收敛性,证明 GN 模型对强非线性强色散性水波可以进行准确模拟。Duan 和 Zhao(2013)研究了 GN 模型在海底滑坡引发海啸问题上的收敛性问题,并将 GN 模型的数值结果与他人实验值进行了比较,表明 GN 模型可以对海底物体运动引发的波动问题进行准确模拟。

Zhao 和 Duan(2013)提出了两层 GN 模型,使用 GN 模型对两层流体间大幅内孤立波进行了研究。Zhao 等(2014b)比较了引入刚盖近似的两层 GN 模型和保留自由面的两层 GN 模型,上下两层流体密度相差较大时,自由面会受到内波的影响而发生明显的扰动,此时将自由面近似为刚性壁面是不准确的。

Bonneton 等(2011)对 GN-1 模型也进行了研究,提出了新的算法并应用于波浪爬坡、破碎问题的研究。Chazel 等(2011)对 GN-1 模型的色散性进行了改进,然而计算结果精度不如 Zhao 等(2014a)使用的高级别 GN 模型。Zhang 等(2013)提出了 Boussinesq-Green-Naghdi 模型,然而他们的计算结果也比 Zhao 等(2014a)使用的高级别 GN 模型的计算结果精度要差。

Kim 等(2011)基于 Hamilton 原理建立了无旋 GN 模型,即 IGN 模型(Irrotational Green-Naghdi model)。Kim 等(2003、2010)、Ertekin(2014)使用 IGN 模型对波浪传播变形问题和孤立波进行了研究,他们也使用多种不同级别的 IGN 模型进行对比分析,得到 IGN 模型的收敛结果,再将 IGN 模型的收敛结果与他人的数值结果或实验室结果比较,表明 IGN 模型是非常准确的。然而由于 IGN 模型引入了无旋假设,对于有旋流动问题,只能使用 GN 模型进行分析。

Zhao 等(2014c)针对二维波浪传播变形问题对比了 GN 模型和 IGN 模型的计算结果,表明对于无旋流动,IGN 模型的计算精度和 GN 模型的计算精度基本相同,IGN 模型的计算效率要明显高于 GN 模型。Zhao 等(2014d)使用 GN 模型计算了稳态的孤立波解,由于前三个级别 GN 模型关于速度场的解并不一致,Zhao 等(2014d)首次给出了 GN-4 模型的解,发现 GN-4 模型的解与 GN-3 模型的解基本一致,表明对于非线性较弱的孤立波,GN-3 模型

即可给出收敛的 GN 模型计算结果。对于非线性较强的孤立波和极限幅值的孤立波,GN-5 模型才能给出收敛的 GN 模型计算结果。Zhao 等(2014e)使用 IGN 模型计算了孤立波下流体质点的运动轨迹,与他人的实验值吻合很好。Zhao 等(2014f)给出了任意级别 GN 模型的三维算法,并将高级别的 GN-3 和 GN-4 模型首次应用于三维波浪问题的分析。

## 1.2 深水层析波浪模型发展现状

对深海大幅强非线性不规则波的准确模拟是海洋工程结构物生存海况波浪载荷估算的基础。关于深水 GN 模型方面,Webster 和 Kim(1991)将 GN-3 模型应用于深水非线性波的数值模拟,发现强非线性深水波波峰和波峰处流体速度的概率统计并不服从瑞利分布。Xu 等(1993)将深水 GN-2 模型扩展到三维问题的数值模拟,并对风压兴波问题进行了计算。Xu 等(1997)在 GN 模型中添加了阻尼项,为解决 GN 模型的波浪外传问题提供了另外一种有效方案。Kim 等(2000)使用深水 IGN 模型对非线性深水波进行了模拟。赵彬彬和段文洋(2009)首次对更高级别的 GN-4 模型进行了分析,给出了 GN-4 模型的线性解析解和色散关系式,验证了 GN 模型速度假设的合理性和关于非线性单色波计算结果的准确性,赵彬彬和段文洋(2014)使用 GN-4 模型对有义波高为 10m 的长峰波进行了数值模拟,根据波面时历曲线反推出的计算波谱与目标波谱吻合很好。

除深水 GN 模型以外的其他一些波浪模型,计算得到的波谱与目标波谱一致,但是它们给出的速度场描述和波浪特性的统计分布规律并不一定是正确的,这方面需要进一步的研究。而我们认为深水 GN 模型可以给出深水大幅不规则波的准确速度场描述和正确的统计分布特性,相关研究工作正在进行中。



## 第 2 章 GN 波浪模型

### 2.1 一般形式的 GN 模型

Demirbilek 和 Webster (1992)给出了 GN 模型的推导过程,但在动量方程的推导上过于复杂。本书给出另外一种较为简单的推导方法。首先假设流体不可压缩,忽略流体粘性。需要指出的是 GN 模型对流动有旋或无旋没有限制,下一章的 IGN 模型则引入了流动无旋假定。

本书使用的坐标系  $Oxyz$  建立在静水面上,其中坐标轴  $Oz$  竖直向上,用坐标  $(x, y, z)$  来描述空间某一点的位置。海底用  $z = \alpha(x, y, t)$  表示,注意,这里我们认为海底也是时间的函数,这样的好处在于本章推导的 GN 模型可以直接用于海底形状随时间变化的情况(如海底地震诱发的海啸问题、潜体贴海底运动兴波问题)。自由水面用  $z = \beta(x, y, t)$  表示。

流体流动应满足的基本方程包括质量守恒方程(又称连续性方程)、动量守恒方程。本书不考虑流体粘性的影响。

质量守恒方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-1)$$

动量守恒方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \quad (2-4)$$

其中,  $(u, v, w)$  表示流体质点三个方向的运动速度,  $\rho$  为流体密度,  $p$  为压力,  $g$  是重力加速度。

另外,流体流动还需满足一些边界条件,如底部和自由面边界条件。

自由面运动学边界条件:

$$\omega - \frac{\partial \beta}{\partial t} - u \frac{\partial \beta}{\partial x} - v \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0, \quad z = \beta \quad (2-5)$$

底部运动学边界条件:

$$\omega - \frac{\partial \alpha}{\partial t} - u \frac{\partial \alpha}{\partial x} - v \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad z = \alpha \quad (2-6)$$

除自由面的运动学边界条件外,还受到自由面动力学边界条件的限制,一般取瞬时水面上的压力  $\hat{p}(x, y, t)$  为零,海底上的压力  $\bar{p}(x, y, t)$  是未知数,需要求解得到。

GN 模型中,没有使用摄动展开,没有引入任何小参数,它只是引入下面的这个流体层速度假设:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^K u_n(x, y, t) \lambda_n(z) \\ v(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^K v_n(x, y, t) \lambda_n(z) \\ w(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^K w_n(x, y, t) \lambda_n(z) \end{cases} \quad (2-7)$$

其中,  $K$  是整数,它表示 GN 模型的级别,后面会具体讲述。

这个速度假设对于理解 GN 模型至关重要。它给出了沿垂向的速度变化。一旦给定  $\lambda_n(z)$  的具体表达式,相应的控制方程体系就可以建立起来,在这个过程中不会有任何项被忽略。因为没有引入任何尺度假定,所以 GN 水波模型并不倾向于某一种特定的环境流场,只要给出合理的  $\lambda_n(z)$ ,它可以适用于各种物理背景的流程模拟。

根据 Demirbilek 和 Webster (1992) 的研究,研究浅水或有限水深波浪问题时,一般取

$$\lambda_n(z) = z^n \quad (2-8)$$

即在浅水或有限水深波浪模拟时,速度沿水深方向按多项式的形式变化。多项式的系数是未知的,需要求解得到。

深水波浪问题时,取

$$\lambda_n(z) = e^{\alpha z} z^n \quad (2-9)$$

其中,  $\alpha$  表示特征波数, 在 2.3 节会详细讲述。

关于浅水和深水 GN 模型将在下两节中给出, 这里还是使用一般形式  $\lambda_n(z)$  进行 GN 模型的推导。

首先推导 GN 模型中的自由水面和海底运动学边界条件。

将式(2-7)代入式(2-5), 得到 GN 模型的自由面运动学边界条件为

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \sum_{n=0}^K \lambda_n(\beta) \left( w_n - \frac{\partial \beta}{\partial x} u_n - \frac{\partial \beta}{\partial y} v_n \right) \quad (2-10)$$

用类似的方法, 将式(2-7)代入式(2-6), 可以得到 GN 模型中的海底运动学边界条件, 即

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sum_{n=0}^K \lambda_n(\alpha) \left( w_n - \frac{\partial \alpha}{\partial x} u_n - \frac{\partial \alpha}{\partial y} v_n \right) \quad (2-11)$$

下面推导 GN 模型中的质量守恒方程。将式(2-7)代入式(2-1), 得到

$$\sum_{n=0}^K \frac{\partial u_n}{\partial x} \lambda_n(z) + \sum_{n=0}^K \frac{\partial v_n}{\partial y} \lambda_n(z) + \sum_{n=0}^K w_n \frac{d\lambda_n(z)}{dz} = 0 \quad (2-12)$$

即

$$\sum_{n=0}^K \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) \lambda_n(z) + \sum_{n=0}^K w_n \frac{d\lambda_n(z)}{dz} = 0 \quad (2-13)$$

在实际应用深水或浅水 GN 模型时, 引入  $\lambda_n(z)$  的具体形式后, 式(2-13)还能进一步简化。

关于 GN 模型中的动量守恒方程的推导, 需要一些技巧。Demirbilek 和 Webster (1992) 给出了一种推导方法, 但是稍显复杂。本书给出另外一种推导方法。以  $x$  方向上的动量守恒方程为例, 即以式(2-2)为例, 将速度假设式(2-7)代入式(2-2), 得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^K \left[ \frac{\partial u_m}{\partial t} \lambda_m + \sum_{r=0}^K \left( \frac{\partial u_m}{\partial x} u_r + \frac{\partial u_m}{\partial y} v_r \right) \lambda_m \lambda_r + \sum_{r=0}^K u_m w_r \frac{d\lambda_m}{dz} \lambda_r + \mu u_m \lambda_m \right] \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (2-14)$$

将上式两端都乘以  $\lambda_n(z)$ , 其中,  $n = 0, 1, 2, \dots, K$ 。然后沿  $z$  从水底  $\alpha(x, y, t)$  到自由面  $\beta(x, y, t)$  积分, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^K \left[ \frac{\partial u_m}{\partial t} S2_{mn} + \sum_{r=0}^K \left( \frac{\partial u_m}{\partial x} u_r + \frac{\partial u_m}{\partial y} v_r \right) S3_{mnr} + \sum_{r=0}^K u_m w_r S4_{mnr} \right] \\ &= -\frac{1}{\rho} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} \lambda_n(z) dz \end{aligned} \quad (2-15)$$

其中

$$S1_n = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_n dz \quad (2-16)$$

$$S2_{mn} = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_m \lambda_n dz \quad (2-17)$$

$$S3_{mnr} = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_m \lambda_r \lambda_n dz \quad (2-18)$$

$$S4_{mnr} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\lambda_m}{dz} \lambda_r \lambda_n dz \quad (2-19)$$

现在考虑式(2-15)的右端项,由于

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} \lambda_n(z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial [p \lambda_n(z)]}{\partial x} dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\beta} p \lambda_n(z) dz - \frac{\partial \beta}{\partial x} [p \lambda_n(z)]|_{z=\beta} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} [p \lambda_n(z)]|_{z=\alpha} \\ &= \frac{\partial P_n}{\partial x} - \hat{p} \lambda_n(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial x} + \bar{p} \lambda_n(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} \end{aligned} \quad (2-20)$$

其中,  $\hat{p}$  和  $\bar{p}$  分别是上、下表面的压力。 $P_n$  表示有关压力的积分,即

$$P_n = \int_{\alpha}^{\beta} p \lambda_n dz \quad (2-21)$$

$$\hat{p} = p|_{z=\beta} = p(x, y, \beta, t) \quad (2-22)$$

$$\bar{p} = p|_{z=\alpha} = p(x, y, \alpha, t) \quad (2-23)$$

最终,得到 GN 模型  $x$  方向上的动量守恒方程

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^K \left[ \frac{\partial u_m}{\partial t} S2_{mn} + \sum_{r=0}^K \left( \frac{\partial u_m}{\partial x} u_r + \frac{\partial u_m}{\partial y} v_r \right) S3_{mnr} + \sum_{r=0}^K u_m \tau_r S4_{mnr} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial P_n}{\partial x} + \hat{p} \lambda_n(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial x} - \bar{p} \lambda_n(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2-24)$$

将上式写成紧凑一些的形式,得到

$$E_n = \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial P_n}{\partial x} + \hat{p} \lambda_n(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial x} - \bar{p} \lambda_n(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right] \quad (2-25)$$

其中

$$E_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} S2_{mn} + \frac{\partial u_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial u_m}{\partial y} R_{mn} + u_m H_{mn} \right) \quad (2-26)$$

$$Q_{mn} = \sum_{r=0}^K u_r S 3_{mnr} \quad (2-27)$$

$$R_{mn} = \sum_{r=0}^K v_r S 3_{mnr} \quad (2-28)$$

$$H_{mn} = \sum_{r=0}^K \tau \omega_r S 4_{mnr} \quad (2-29)$$

采用类似的处理方法,可以得到  $y$  和  $z$  方向上的动量守恒方程。只有在处理  $z$  方向上的动量守恒方程的右端项时,需要注意下面这个积分:

$$\begin{aligned} & \int_a^\beta \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \lambda_n(z) dz \\ &= \int_a^\beta \left( \frac{\partial [p \lambda_n(z)]}{\partial z} - p \frac{d \lambda_n(z)}{dz} \right) dz + \rho g \int_a^\beta \lambda_n(z) dz \\ &= [p \lambda_n(z)]|_{z=\beta} - [p \lambda_n(z)]|_{z=a} - \int_a^\beta p \frac{d \lambda_n(z)}{dz} dz + \rho g \int_a^\beta \lambda_n(z) dz \\ &= \hat{p} \lambda_n(\beta) - \bar{p} \lambda_n(\alpha) - P_n^* + \rho g S 1_n \end{aligned} \quad (2-30)$$

其中

$$P_n^* = \int_a^\beta p \frac{d \lambda_n}{dz} dz \quad (2-31)$$

最终,GN模型的动量守恒方程为

$$E_n = \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial P_n}{\partial x} + \hat{p} \lambda_n(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial x} - \bar{p} \lambda_n(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right] \quad (2-32)$$

$$F_n = \frac{1}{\rho} \left[ -\frac{\partial P_n}{\partial y} + \hat{p} \lambda_n(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial y} - \bar{p} \lambda_n(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right] \quad (2-33)$$

$$G_n = \frac{1}{\rho} [P_n^* - \rho g S 1_n - \hat{p} \lambda_n(\beta) + \bar{p} \lambda_n(\alpha)] \quad (2-34)$$

其中,  $n = 0, 1, 2, \dots, K$ 。关于  $E_n$  的表达式见式(2-26),  $F_n$  和  $G_n$  的表达式如下:

$$F_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} S 2_{mn} + \frac{\partial v_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial v_m}{\partial y} R_{mn} + v_m H_{mn} \right) \quad (2-35)$$

$$G_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial \omega_m}{\partial t} S 2_{mn} + \frac{\partial \omega_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial \omega_m}{\partial y} R_{mn} + \omega_m H_{mn} \right) \quad (2-36)$$

这样,式(2-10)、式(2-11)、式(2-13)、式(2-32)、式(2-33)和式(2-34)就共同构成了一般形式的GN模型。

## 2.2 浅水/有限水深 GN 模型

应用 GN 模型求解浅水/有限水深波浪问题时,一般取形状函数  $\lambda_n(z)$  的形式为

$$\lambda_n(z) = z^n \quad (2-37)$$

一旦形状函数确定,就可以代入 2.1 节推导的 GN 模型,得到浅水/有限水深 GN 模型。质量守恒方程,即式(2-13),可以进一步化简。由于

$$\sum_{n=0}^K \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) z^n + \sum_{n=0}^K \omega_n n z^{n-1} = 0 \quad (2-38)$$

进一步整理,得到

$$\left( \frac{\partial u_K}{\partial x} + \frac{\partial v_K}{\partial y} \right) z^K + \sum_{n=0}^{K-1} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \omega_{n+1} (n+1) \right) z^n = 0 \quad (2-39)$$

由于式(2-39)需要在任意  $z$  处都能成立,因此要求下面两个式子同时成立:

$$\frac{\partial u_K}{\partial x} + \frac{\partial v_K}{\partial y} = 0 \quad (2-40)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + (n+1)\omega_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2-41)$$

针对式(2-40),Demirbilek 和 Webster (1992)给出了详细的讨论,这里仅给出实际应用时所采用的处理办法,即采用

$$u_K = 0 \quad (2-42)$$

$$v_K = 0 \quad (2-43)$$

采用上面两个式子的 GN 模型,称为 GN 限制模型。本书中使用的浅水/有限水深 GN 模型都是 GN 限制模型,为了简便,仍称其为 GN 模型。

将形状函数表达式(2-37)代入自由面和底部运动学边界条件,即式(2-10)、式(2-11),得到

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \sum_{n=0}^K \beta^n \left( \omega_n - \frac{\partial \beta}{\partial x} u_n - \frac{\partial \beta}{\partial y} v_n \right) \quad (2-44)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sum_{n=0}^K \alpha^n \left( \omega_n - \frac{\partial \alpha}{\partial x} u_n - \frac{\partial \alpha}{\partial y} v_n \right) \quad (2-45)$$

将式(2-37)代入动量守恒方程,即式(2-32)~式(2-34),得到

$$E_n = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P_n}{\partial x} + \hat{p}\beta^n \frac{\partial \beta}{\partial x} - \bar{p}\alpha^n \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad (2-46)$$

$$F_n = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P_n}{\partial y} + \hat{p}\beta^n \frac{\partial \beta}{\partial y} - \bar{p}\alpha^n \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \quad (2-47)$$

$$G_n = \frac{1}{\rho} (P_n^* - \rho g S 1_n - \hat{p}\beta^n + \bar{p}\alpha^n) \quad (2-48)$$

注意下面的这个关系式：

$$P_n^* = \int_{\alpha}^{\beta} \hat{p} \frac{d\lambda_n}{d\lambda} d\lambda = n \int_{\alpha}^{\beta} \hat{p} \lambda^{n-1} d\lambda = n P_{n-1} \quad (2-49)$$

因此,式(2-48)可写为

$$G_n = \frac{1}{\rho} (n P_{n-1} - \rho g S 1_n - \hat{p}\beta^n + \bar{p}\alpha^n) \quad (2-50)$$

将式(2-50)中的  $n$  取 0, 得到

$$G_0 = \frac{1}{\rho} (-\rho g S 1_0 - \hat{p} + \bar{p}) \quad (2-51)$$

这样,海底的压力  $\bar{p}$  可以由下式计算得到

$$\bar{p} = \rho G_0 + \rho g S 1_0 + \hat{p} \quad (2-52)$$

由于我们对  $P_n$  的值并不感兴趣,因此下一步将通过式(2-46)、式(2-47)和式(2-50)消去  $P_n$ 。具体的做法如下:首先通过式(2-50)给出  $P_n$  的表达式

$$P_n = \frac{1}{n+1} (\rho G_{n+1} + \rho g S 1_{n+1} + \hat{p}\beta^{n+1} - \bar{p}\alpha^{n+1}) \quad (2-53)$$

而由式(2-46)、式(2-47)可以给出  $\frac{\partial P_n}{\partial x}$  和  $\frac{\partial P_n}{\partial y}$  的表达式。通过对式(2-53)求  $x$  方向一阶偏导,结合式(2-46)可以消除  $\frac{\partial P_n}{\partial x}$ , 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\rho G_{n+1} + \rho g S 1_{n+1} + \hat{p}\beta^{n+1} - \bar{p}\alpha^{n+1}) \\ &= n+1 \left( -\rho E_n + \hat{p}\beta^n \frac{\partial \beta}{\partial x} - \bar{p}\alpha^n \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2-54)$$

整理后得

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho G_{n+1} + \rho g S 1_{n+1}) + (n+1)\rho E_n + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \beta^{n+1} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \alpha^{n+1} = 0 \quad (2-55)$$

利用推导的海底压力表达式,即式(2-52),我们可以将上式中的  $\bar{p}$  消去,得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(G_{n+1} + gS1_{n+1}) + (n+1)E_n - \alpha^{n+1} \frac{\partial}{\partial x}(G_0 + gS1_0) \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (2-56)$$

其中,  $n = 0, 1, \dots, K-1$ 。上式中  $n+1$  出现次数很多, 我们可以用下式来表示:

$$\frac{\partial}{\partial x}(G_n + gS1_n) + nE_{n-1} - \alpha^n \frac{\partial}{\partial x}(G_0 + gS1_0) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(\beta^n - \alpha^n) = 0 \quad (2-57)$$

其中,  $n = 1, 2, \dots, K$ 。

采用类似的方法, 通过对式(2-53)求  $x$  方向一阶偏导, 结合式(2-47)可以消去  $\frac{\partial P_n}{\partial y}$ , 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y}(G_n + gS1_n) + nF_{n-1} - \alpha^n \frac{\partial}{\partial y}(G_0 + gS1_0) \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}(\beta^n - \alpha^n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2-58)$$

这样, 式(2-41)~式(2-45)、式(2-57)、式(2-58)共同构成了 GN 模型。这几个式子分别提供了  $K+1+1+1+1+K+K=3K+4$  个方程。未知数包括速度系数  $u_n, v_n, \omega_n (n=0, 1, \dots, K)$  这  $3(K+1)$  个未知数, 再加上瞬时波面  $\beta$ , 未知数数目为  $3K+4$  个, 与方程数目相同。同时求解这么多的系数, 需要耗费较多的计算时间, 我们可以消去  $\omega_n (n=0, 1, \dots, K)$ , 这样求解效率将会提高。具体的做法是使用式(2-45)来表示  $\omega_0$ , 使用式(2-41)来表示  $\omega_n (n=1, 2, \dots, K)$ , 同时我们注意到式(2-42)、式(2-43)已经给出了  $u_K$  和  $v_K$  的值都取为零。因此, 最终求解 GN 模型时, 未知数只有  $u_n, v_n (n=0, 1, \dots, K-1)$  和波面  $\beta$ , 共  $2K+1$  个。最终得到的 GN 模型如下:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \sum_{n=0}^K \beta^n \left( \omega_n - \frac{\partial \beta}{\partial x} u_n - \frac{\partial \beta}{\partial y} v_n \right) \quad (2-59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(G_n + gS1_n) + nE_{n-1} - \alpha^n \frac{\partial}{\partial x}(G_0 + gS1_0) \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(\beta^n - \alpha^n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2-60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y}(G_n + gS1_n) + nF_{n-1} - \alpha^n \frac{\partial}{\partial y}(G_0 + gS1_0) \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}(\beta^n - \alpha^n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2-61)$$

其中

$$E_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} S2_{mn} + \frac{\partial u_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial u_m}{\partial y} R_{mn} + u_m H_{mn} \right) \quad (2-62)$$

$$F_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} S2_{mn} + \frac{\partial v_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial v_m}{\partial y} R_{mn} + v_m H_{mn} \right) \quad (2-63)$$

$$G_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial w_m}{\partial t} S2_{mn} + \frac{\partial w_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial w_m}{\partial y} R_{mn} + w_m H_{mn} \right) \quad (2-64)$$

$$S1_n = \int_{\alpha}^{\beta} z^n dz \quad (2-65)$$

$$S2_{mn} = \int_{\alpha}^{\beta} z^{m+n} dz \quad (2-66)$$

$$S3_{mnr} = \int_{\alpha}^{\beta} z^{m+r+n} dz \quad (2-67)$$

$$S4_{mnr} = m \int_{\alpha}^{\beta} z^{m+r+n-1} dz \quad (2-68)$$

$$Q_{mn} = \sum_{r=0}^K u_r S3_{mnr} \quad (2-69)$$

$$R_{mn} = \sum_{r=0}^K v_r S3_{mnr} \quad (2-70)$$

$$H_{mn} = \sum_{r=0}^K \tau w_r S4_{mnr} \quad (2-71)$$

$$u_K = 0 \quad (2-72)$$

$$v_K = 0 \quad (2-73)$$

$$w_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} u_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial y} v_0 - \sum_{n=1}^K \alpha^n \left( \omega_n - \frac{\partial \alpha}{\partial x} u_n - \frac{\partial \alpha}{\partial y} v_n \right) \quad (2-74)$$

$$\omega_n = -\frac{1}{n} \left( \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} \right), \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (2-75)$$

读者在最终编制 GN 模型的程序代码时,所需的所有公式参考式(2-59)~式(2-75)即可。

## 2.3 深水 GN 模型

应用 GN 模型求解深水波浪问题的时候,一般取形状函数  $\lambda_n(z)$  的形式为

$$\lambda_n(z) = e^{\alpha z^n} \quad (2-76)$$

其中,  $a$  是特征波数, 关于  $a$  的取值下面将会具体讲述。

与浅水 GN 模型的推导类似, 一旦形状函数确定以后, 我们可以得到深水 GN 模型。这里仅指出几个较为特殊的地方。

深水 GN 模型中, 认为水深为无穷, 则水底表示为  $z = \alpha = -\infty$ 。易知, 底部运动学边界条件, 即式(2-11)恒成立。

质量守恒方程式(2-13), 可以进一步化简, 得到

$$\sum_{n=0}^K \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) e^{\alpha z^n} + \sum_{n=0}^K \omega_n (e^{\alpha z^n} n z^{n-1} + a e^{\alpha z^n}) = 0 \quad (2-77)$$

进一步整理, 写作

$$\left( \frac{\partial u_K}{\partial x} + \frac{\partial v_K}{\partial y} + \alpha \omega_K \right) e^{\alpha z^K} + \sum_{n=0}^{K-1} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \alpha \omega_n + \omega_{n+1} (n+1) \right) e^{\alpha z^n} = 0 \quad (2-78)$$

由于质量守恒方程需要在任意  $z$  处都能成立, 因此要求下面两个式子同时成立:

$$\frac{\partial u_K}{\partial x} + \frac{\partial v_K}{\partial y} + \alpha \omega_K = 0 \quad (2-79)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \alpha \omega_n + (n+1) \omega_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2-80)$$

自由面运动学边界条件, 即式(2-10), 可写为

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \sum_{n=0}^K e^{\alpha \beta} \beta^n \left( \omega_n - \frac{\partial \beta}{\partial x} u_n - \frac{\partial \beta}{\partial y} v_n \right) \quad (2-81)$$

将形状函数代入动量守恒方程, 即式(2-32)~式(2-34), 得到

$$E_n = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P_n}{\partial x} + \hat{p} e^{\alpha \beta} \beta^n \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (2-82)$$

$$F_n = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P_n}{\partial y} + \hat{p} e^{\alpha \beta} \beta^n \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \quad (2-83)$$

$$G_n = \frac{1}{\rho} (P_n^* - \rho g S 1_n - \hat{p} e^{\alpha \beta} \beta^n) \quad (2-84)$$

注意到下面这个式子:

$$\begin{aligned} P_n^* &= \int_{-\infty}^{\beta} p \frac{d\lambda_n}{dz} dz = \int_{-\infty}^{\beta} p (a e^{\alpha z^n} + n e^{\alpha z^n} z^{n-1}) dz \\ &= a P_n + n P_{n-1} \end{aligned} \quad (2-85)$$

因此,式(2-84)可以写为

$$G_n = \frac{1}{\rho} (aP_n + nP_{n-1} - \rho g S1_n - \hat{p}e^{a\beta}\beta^n) \quad (2-86)$$

将式(2-86)中的  $n$  取 0, 得

$$P_0 = \frac{1}{a} (\rho G_0 + \rho g S1_0 + \hat{p}e^{a\beta}) \quad (2-87)$$

将式(2-86)中的  $n$  取 1, 再利用式(2-87)的结果, 可以得到  $P_1$  的表达式, 以此类推, 我们可以得到  $P_2, P_3, \dots$  的表达式, 写成递推的形式, 可将式(2-86)整理成下面的形式:

$$P_n = \frac{1}{a} (\rho G_n + \rho g S1_n - nP_{n-1} + \hat{p}e^{a\beta}\beta^n), \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (2-88)$$

而由式(2-82)、式(2-83), 可以分别得到  $\frac{\partial P_n}{\partial x}$  和  $\frac{\partial P_n}{\partial y}$  的表达式

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = -\rho E_n + \hat{p}e^{a\beta}\beta^n \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (2-89)$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial y} = -\rho F_n + \hat{p}e^{a\beta}\beta^n \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (2-90)$$

采用类似于浅水中的推导方式, 消去  $P_n$ , 最后可以得到只关于  $u_n, v_n$  ( $n = 0, 1, \dots, K$ ) 和波面  $\beta$  的方程。这里为了方便, 把深水 GN 模型的表达式整理如下:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \sum_{n=0}^K e^{a\beta}\beta^n \left( \omega_n - \frac{\partial \beta}{\partial x} u_n - \frac{\partial \beta}{\partial y} v_n \right) \quad (2-91)$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = -\rho E_n + \hat{p}e^{a\beta}\beta^n \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad n = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2-92)$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial y} = -\rho F_n + \hat{p}e^{a\beta}\beta^n \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad n = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2-93)$$

其中

$$P_0 = \frac{1}{a} (\rho G_0 + \rho g S1_0 + \hat{p}e^{a\beta}) \quad (2-94)$$

$$P_n = \frac{1}{a} (\rho G_n + \rho g S1_n - nP_{n-1} + \hat{p}e^{a\beta}\beta^n), \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (2-95)$$

$$E_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} S2_{mn} + \frac{\partial u_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial u_m}{\partial y} R_{mn} + u_m H_{mn} \right) \quad (2-96)$$

$$F_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial v_m}{\partial t} S2_{mn} + \frac{\partial v_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial v_m}{\partial y} R_{mn} + v_m H_{mn} \right) \quad (2-97)$$

$$G_n = \sum_{m=0}^K \left( \frac{\partial \omega_m}{\partial t} S2_{mn} + \frac{\partial \omega_m}{\partial x} Q_{mn} + \frac{\partial \omega_m}{\partial y} R_{mn} + \omega_m H_{mn} \right) \quad (2-98)$$

$$S1_n = \int_{-\infty}^{\beta} e^{ax} z^n dz \quad (2-99)$$

$$S2_{mn} = \int_{-\infty}^{\beta} e^{2ax} z^{m+n} dz \quad (2-100)$$

$$S3_{mrn} = \int_{-\infty}^{\beta} e^{3ax} z^{m+r+n} dz \quad (2-101)$$

$$S4_{mrn} = \int_{-\infty}^{\beta} e^{3ax} (az^{m+r+n} + mz^{m+r+n-1}) dz \quad (2-102)$$

$$Q_{mn} = \sum_{r=0}^K u_r S3_{mrn} \quad (2-103)$$

$$R_{mn} = \sum_{r=0}^K v_r S3_{mrn} \quad (2-104)$$

$$H_{mn} = \sum_{r=0}^K \omega_r S4_{mrn} \quad (2-105)$$

$$\omega_K = -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial u_K}{\partial x} + \frac{\partial v_K}{\partial y} \right) \quad (2-106)$$

$$\omega_n = -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + (n+1)\omega_{n+1} \right), \quad n = K-1, K-2, \dots, 1, 0 \quad (2-107)$$

深水 GN 模型中,  $K = 0, 1, 2, \dots$  的情况分别叫做 GN-1、GN-2、GN-3、……深水 GN 模型。

## 2.4 GN 模型的线性色散关系式

线性解析解的研究是非常必要的,一方面可以研究不同级别 GN 模型的色散关系式,以了解它们各自的适用范围;另一方面,进行时域数值模拟时需要给出造波边界条件,对于一般情况,可以将线性解析解作为造波边界条件。因此,需要对线性解析解进行研究。本节分为浅水和深水两个部分进行介绍。

### 2.4.1 浅水理论

以 GN-1 模型( $K = 1$ )为例,式(2-59)、式(2-60)和式(2-61)构成其求解

方程。取自由面上的压力  $\hat{p} = 0$ ，底部边界为  $z = \alpha = -d$ ， $d$  是常数，表示水深。如果认为波面  $\beta$ 、速度系数  $u_0$  和  $v_0$  都是一阶小量，将式(2-59)、式(2-60)和式(2-61)中的二阶及二阶以上的项抛弃，分别得到

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + d \frac{\partial v_0}{\partial y} + d \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (2-108)$$

$$-3 \frac{\partial u_0}{\partial t} - 3g \frac{\partial \beta}{\partial x} + d^2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y \partial t} + d^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (2-109)$$

$$-3 \frac{\partial v_0}{\partial t} - 3g \frac{\partial \beta}{\partial y} + d^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y \partial t} + d^2 \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2 \partial t} = 0 \quad (2-110)$$

如果假设波面  $\beta(x, y, t)$  按下式变化：

$$\beta(x, y, t) = A \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t] \quad (2-111)$$

其中， $A$  为波幅， $\theta$  为浪向角， $k$  为波数， $\omega$  为波浪频率。由式(2-109)和式(2-110)可以得到

$$u_0(x, y, t) = \frac{3g \cos \theta}{c(3 + d^2 k^2)} \beta(x, y, t) \quad (2-112)$$

$$v_0(x, y, t) = \frac{3g \sin \theta}{c(3 + d^2 k^2)} \beta(x, y, t) \quad (2-113)$$

其中， $c$  为波速。将上述两式代入式(2-108)，可以得到 GN-1 模型的线性色散关系式为

$$c^2 = \frac{3gd}{3 + d^2 k^2} \quad (2-114)$$

用类似的办法，可以得到其他各种级别浅水 GN 模型的线性解析解，这里主要讨论线性色散关系式，因为不同级别 GN 模型的色散性关系到模型的应用范围，色散性强的模型可以应用到水深较深的情况，而弱色散性模型仅适用于浅水区域波浪的模拟。下面给出 GN-1 至 GN-3 前 3 个级别 GN 模型的无因次化线性色散关系式(无因次化的方式为使用  $g$  和  $k$  对色散关系进行无因次化， $\bar{d} = kd$ ， $\bar{c} = c \sqrt{k/g}$ )。

(1) GN-1 模型：

$$\bar{c}^2 = \frac{3 \bar{d}}{3 + \bar{d}^2} \quad (2-115)$$

(2) GN-2 模型：

$$\bar{c}^2 = \frac{24 \bar{d}(10 + \bar{d}^2)}{240 + 104 \bar{d}^2 + 3 \bar{d}^4} \quad (2-116)$$

(3) GN-3 模型:

$$\bar{c}^2 = \frac{15 \bar{d} (420 + 52 \bar{d}^2 + \bar{d}^4)}{6300 + 2880 \bar{d}^2 + 135 \bar{d}^4 + \bar{d}^6} \quad (2-117)$$

线性 Stokes 波浪理论的色散关系式为

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (2-118)$$

使用  $g$  和  $k$  无因次化后, 得到线性 Stokes 波浪理论的无因次色散关系式为

$$\bar{c}^2 = \tanh \bar{d} \quad (2-119)$$

将 GN-1 至 GN-7 模型的线性色散关系与线性 Stokes 波浪理论的色散关系进行比较, 见图 2-1。

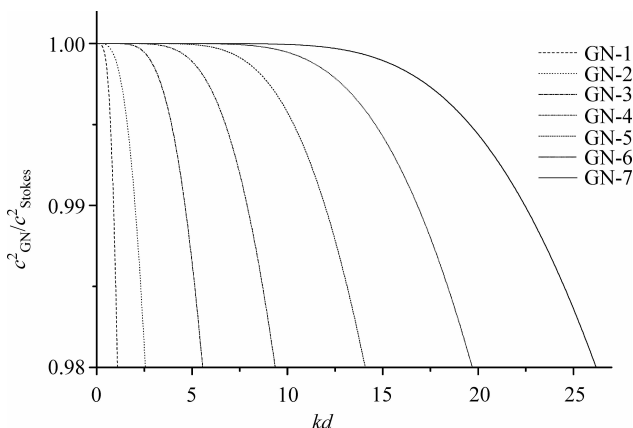


图 2-1 GN-1 至 GN-7 模型的线性色散关系

由图 2-1 可以看出, 随着 GN 模型级别的增加, GN 模型的色散性在提高。更高级别的 GN 模型可以应用于“水深更深” ( $kd$  更大) 的情况。这说明高级别的 GN 模型不仅可以应用于浅水波的模拟, 也可以应用于有限水深情况下非线性波的数值模拟。

Madsen 等(2006)提出的高阶 Boussinesq 模型可以模拟  $kd \leq 25$  的波浪, 它的线性色散关系式为

$$\frac{\omega^2}{gdk^2} = \frac{1 + \kappa^2 \mu_2 + \kappa^4 \mu_4 + \kappa^6 \mu_6 + \kappa^8 \mu_8}{1 + \kappa^2 \nu_2 + \kappa^4 \nu_4 + \kappa^6 \nu_6 + \kappa^8 \nu_8 + \kappa^{10} \nu_{10}} \quad (2-120)$$

其中

$$\kappa = kd$$

$$\mu_2 = \frac{1}{6} - \frac{\sigma^2}{9}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{120} - \frac{\sigma^2}{54} + \frac{4\sigma^4}{567}$$

$$\mu_6 = \frac{\sigma^2}{270} - \frac{\sigma^3}{72} + \frac{29\sigma^4}{1701} - \frac{\sigma^5}{135} + \frac{2\sigma^6}{2835}$$

$$\mu_8 = \frac{\sigma^4}{7560} - \frac{\sigma^5}{1620} + \frac{17\sigma^6}{17010} - \frac{11\sigma^7}{17010} + \frac{8\sigma^8}{59535}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{9}$$

$$\nu_4 = \frac{1}{24} - \frac{\sigma^2}{18} + \frac{4\sigma^4}{567}$$

$$\nu_6 = \frac{\sigma}{120} - \frac{5\sigma^2}{216} + \frac{\sigma^3}{54} - \frac{5\sigma^4}{1134} + \frac{\sigma^5}{945} - \frac{\sigma^6}{2835}$$

$$\nu_8 = \frac{\sigma^3}{1080} - \frac{\sigma^4}{252} + \frac{7\sigma^5}{1215} - \frac{\sigma^6}{315} + \frac{4\sigma^7}{8505} + \frac{\sigma^8}{59535}$$

$$\nu_{10} = \frac{\sigma^5}{113400} - \frac{\sigma^6}{22680} + \frac{2\sigma^7}{25515} - \frac{\sigma^8}{17010} + \frac{\sigma^9}{59535} - \frac{\sigma^{10}}{893025}$$

$$\sigma = -\frac{\tilde{z}}{d}$$

他们的高阶 Boussinesq 模型中,取任意水深  $\tilde{z}$  为自变量,则  $\sigma$  的取值范围为  $0 \leq \sigma \leq 1$ 。经过他们的研究,发现  $\sigma = 0.5$  是最优的选择。使用  $g$  和  $k$  将式(2-120)无因次化,得到的无因次线性色散关系式为

$$\bar{c}^{-2} = \frac{\bar{d}(1 + \bar{d}^2\mu_2 + \bar{d}^4\mu_4 + \bar{d}^6\mu_6 + \bar{d}^8\mu_8)}{1 + \bar{d}^2\nu_2 + \bar{d}^4\nu_4 + \bar{d}^6\nu_6 + \bar{d}^8\nu_8 + \bar{d}^{10}\nu_{10}} \quad (2-121)$$

其中,  $\bar{d} = \kappa = kd$ 。取最优选择  $\sigma = 0.5$ , 将 Madsen 等(2006)的高阶 Boussinesq 模型与 GN-7 模型在线性色散性上进行比较,比较结果见图 2-2。

从图 2-2 可以看出,GN-7 模型的线性色散关系式略优于 Madsen 等(2006)的高阶 Boussinesq 模型。另外,对于任意级别的 GN 模型,最终求解 GN 模型时出现的最高阶导数仅为 3 阶导数,而高阶 Boussinesq 模型中含有 4 阶导数和 5 阶导数,不利于保证计算精度。

## 2.4.2 深水理论

深水 GN 模型的线性解析解的求解方法与浅水 GN 模型基本一样,因此

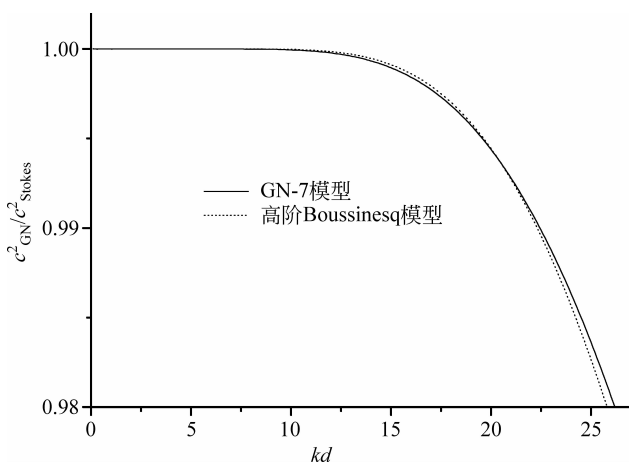


图 2-2 Level VII GN 模型与高阶 Boussinesq 模型线性色散关系比较

我们不再浪费篇幅重复这部分的内容。本书给出前四个级别深水 GN 模型在二维情况下的线性解析解。

不论是哪种级别的 GN 模型,推导线性解析解时,关于波面的表达式都采用下面这种形式:

$$\beta(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (2-122)$$

不同级别 GN 模型中速度假设不同,推导得到的速度系数也不同。下面给出前四个级别 GN 模型关于速度系数的解析解。

对于 GN-1 模型:

$$u_0(x, y, t) = \frac{2a^2 g}{c(a^2 + k^2)} \beta(x, y, t) \quad (2-123)$$

对于 GN-2 模型:

$$\begin{cases} u_0(x, t) = \frac{8a^2 g k^2}{c(a^4 + 6a^2 k^2 + k^4)} \beta(x, t) \\ u_1(x, t) = \frac{4a^3 g(-a^2 + k^2)}{c(a^4 + 6a^2 k^2 + k^4)} \beta(x, t) \end{cases} \quad (2-124)$$

对于 GN-3 模型:

$$\begin{cases} u_0(x, t) = \frac{2g(a^3 + 3ak^2)^2}{c(a^6 + 15a^4 k^2 + 15a^2 k^4 + k^6)} \beta(x, t) \\ u_1(x, t) = \frac{4a^3 g(a^4 - 6a^2 k^2 + 5k^4)}{c(a^6 + 15a^4 k^2 + 15a^2 k^4 + k^6)} \beta(x, t) \\ u_2(x, t) = \frac{4a^4 g(a^2 - k^2)^2}{c(a^6 + 15a^4 k^2 + 15a^2 k^4 + k^6)} \beta(x, t) \end{cases} \quad (2-125)$$