第一章　三 角 函 数

高考数学中，三角函数的考点有三角函数的概念、图像、性质、三角恒等变换与解三角形. 其中核心考点有三角恒等变换、三角函数图像与性质及解三角形. 为什么说它们是核心考点呢？因为在许多省市的高考试题中都是以这些内容为载体去考查学生基础知识的掌握及运算能力与化归能力的.

核心考点一　三角函数的图像和性质

方向一：三角恒等变换及性质讨论

解法突破： 用公式把已知函数化成同一个角的同种类型的三角函数(简称同角同函)，常见方法有：

(1)用同角关系或诱导公式统一函数名或角；

(2)用倍角公式(降幂、升幂)变换次数或角；

(3)用两角和与差公式(辅助角公式)化 $a\sin x+b\cos x$ 为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $A\cos(\omega x+\varphi)$ 的形式.

【例 1.1】 设函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin^2 x$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 的值.

解析 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin^2 x=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-(1-\cos 2x)$

$$=\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-1=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1.$$

(1)因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，

故当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f(x)_{\max}=f(\frac{\pi}{12})=\sqrt{3}-1$.

评注 求解三角函数的值域(最值)、周期、单调性、奇偶性、对称性等性质的问题，首先要考虑将所给函数进行变形，但未必能变为上述 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的形式，有时可能会化简为 $y=a\sin^2 x+b\sin x+c$ 或 $y=a\cos^2 x+b\cos x+c$ 型函数，参见变式 2. 一般地，三角函数问题需要转换到“双同”问题，而“双同”问题指的是“同一个角的同一个三角函数值”问题.

变式 1 (2014 福建理 16)已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$.

(1)若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $f(\alpha)$ 的值；

(2)求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

变式 2 已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x-4\cos x$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$的值;

(2)求 $f(x)$的最大值和最小值.

方向二:对函数图像的研究,“知图求式”,即已知三角函数图像的一部分,求函数解析式

解法突破:对 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$中“$A$”,“$\omega$”,“$\varphi$”的确定. (1)由最大(小)值,可推出 $A(A>0)$; (2)由周期,可推出 ω 的值或范围; (3)由特征点,可形成三角方程,以求 φ 的值.

【例 1.2】 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$的一段图像如图 1-1 所示,求函数的解析式.

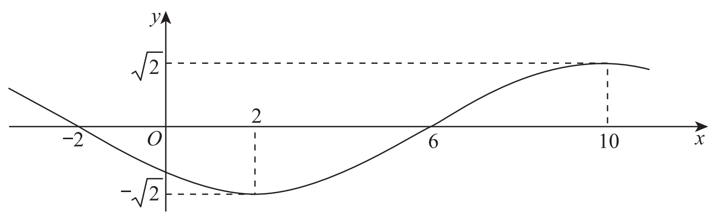

图 1-1

分析 从振幅与最大(小)值的关系求 A,从五点作图法的逆过程求 ω,φ.

解析 由图 1-1 得 $T=16=\frac{2\pi}{\omega},\omega=\frac{\pi}{8},A=\sqrt{2}$,则 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$,

代入点$(2,-\sqrt{2})$,得$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=-\sqrt{2}$,则$\frac{\pi}{4}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

得 $\varphi=2k\pi-\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,又 $\varphi\in(-\pi,\pi)$,得 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

故函数的解析式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

评注 (1)注意数与形的结合及 A,ω,φ 在图像中的作用.

(2)若将点$(6,0)$代入 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$中,求取的结果是不是一致的呢?

由$\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=0$,得$\frac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=k\pi-\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,又$-\pi<\varphi<\pi$,则 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$或$\frac{\pi}{4}$.

而本题中求解得 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$,为什么要舍去 $\varphi=\frac{\pi}{4}$呢?大家要注意,点$(6,0)$位于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$图像的增区间,据“五点描图法”知$\frac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$,又$-\pi<\varphi<\pi$,则$\varphi=-\frac{3\pi}{4}$,故函数的解析式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

(3)一般地,我们把函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 图像上从左到右的五个关键点依次称为"第一上零点"、"最大值点"、"下零点"、"最小值点"、"第二上零点(在不同时出现两个上零点的情形下,不区分第一和第二上零点)". 它们所对应的相位值 $\omega x+\varphi$ 分别为 $0+2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\pi+2k\pi$, $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $2\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 利用它们解题时应注意这种对应性,故评注(2)中的点(6,0)应为"第一上零点",其对应的相位值应为 $\frac{\pi}{8}\times 6+\varphi=0+2k\pi$,而不是 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

变式 1 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图像如图 1-2 所示,求函数 $f(x)$ 的解析式.

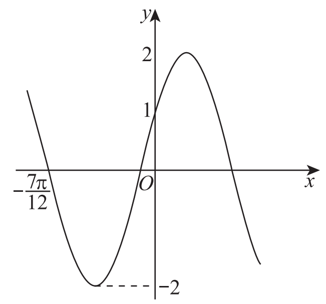

图 1-2

变式 2 已知函数 $f(x)=\cos^2(\omega x+\varphi)$($\omega,\varphi$ 为常数),如果存在正整数 ω 和实数 φ 使得函数 $f(x)$ 的图像经过点(1,0),如图 1-3 所示,求 ω 的值.

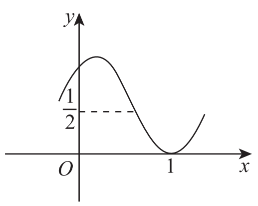

图 1-3

方向三:给出函数的性质(如奇偶性、单调性、对称性、最值)求解函数解析式(即 A,ω,φ 值的确定)

解法突破:设想函数解析式为已知,利用函数性质列方程(组)或不等式(组)求解.

【例 1.3】 (2012 重庆理 18)设 $f(x)=4\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos(2\omega x+\pi)$,其中 $\omega>0$.

(1)求函数 $f(x)$ 的值域;

(2)若 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数,求 ω 的最大值.

分析 把参数作为已知,对所给解析式进行恒等变形,直到能确定函数性质为止.

解析 (1) $f(x)=4\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos(2\omega x+\pi)=4\left(\cos\omega x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\omega x\cdot\frac{1}{2}\right)\sin\omega x+\cos 2\omega x=(2\sqrt{3}\cos\omega x+2\sin\omega x)\sin\omega x+\cos 2\omega x=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\sin^2\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{3}\sin 2\omega x+1-\cos 2\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{3}\sin 2\omega x+1$.

因为 $\sin 2\omega x\in[-1,1]$,所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$.

(2)**解法一**:$f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+1$,由 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数得,

$[-3\omega\pi,\omega\pi]\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right](\omega>0)$，故$\begin{cases}-3\omega\pi\geqslant-\frac{\pi}{2}\\ \omega>0\\ \omega\pi\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$，得 $0<\omega\leqslant\frac{1}{6}$，则 ω 的最大值为$\frac{1}{6}$.

解法二：$f(x)=\sqrt{3}\sin2\omega x+1(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上为增函数，由含原点的增区间的对称性可知函数$f(x)$在$\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上也为增函数，故$\frac{T}{4}\geqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $T\geqslant6\pi$，

得$\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}\geqslant6\pi$，故 $0<\omega\leqslant\frac{1}{6}$，$\omega$ 的最大值为$\frac{1}{6}$.

评注 一般地，若 $f(x)(x\in\mathbf{R})$为奇函数，在$[\theta_1,\theta_2]$上为增函数，其中 $\theta_1<0<\theta_2$，若 $\max\{|\theta_1|,|\theta_2|\}=\theta$，则 $\theta\leqslant\frac{T}{4}$，即可求出 ω 的范围.

变式 1 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi<\pi)$为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其中点$\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$是一个对称中心，且在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上为单调函数，求函数 $f(x)$的解析式.

方向四：图像变换问题

解法突破：$f(x)=\sin x$ 变换成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，有以下两种变换方式：

①函数 $f(x)=\sin x\xrightarrow{\text{向左平移}\varphi(\varphi>0)\text{个单位}}y=\sin(x+\varphi)\xrightarrow{\text{横坐标缩短(或伸长)到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}(\omega>0)}$
$y=\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{横坐标不变，纵坐标伸长(或缩短)到原来的}A\text{倍}(A>0)}y=A\sin(\omega x+\varphi)$；

②函数 $f(x)=\sin x\xrightarrow{\text{横坐标缩短(或伸长)到原来的}\frac{1}{\omega}(\omega>0)\text{倍}}y=\sin\omega x\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\varphi}{\omega}\text{个单位，纵坐标不变}}y=$
$\sin\left[\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right]=\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow{\text{横坐标不变，纵坐标伸长(或缩短)到原来的}A\text{倍}(A>0)}y=A\sin(\omega x+\varphi)$.

注：无论函数图像变换的次序如何，相位或周期变换只针对自变量“x”而进行.

【例 1.4】 (2012 山东理 17)已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin x,1)$，$\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3}A\cos x,\frac{A}{2}\cos2x\right)(A>0)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 的最大值为 6.

(1)求 A；

(2)将函数 $y=f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，再将所得图像上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$的图像，求 $g(x)$在$\left[0,\frac{5\pi}{24}\right]$上的值域.

分析 根据题中所要求的问题，逐个对照进行相应的变换，左右平移是相位变换，横坐标伸缩是周期变换.

解析 (1)$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}A\sin x\cos x+\frac{A}{2}\cos 2x=A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $A>0$,$f(x)$的最大值为 6,所以 $A=6$.

(2)由(1)得 $f(x)=6\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,将函数 $f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到 $y=6\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=6\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图像,再将得到的图像上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $y=6\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{24}\right]$,所以$\frac{\pi}{3}\leqslant 4x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,得 $\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,

故 $g(x)$在$\left[0,\frac{5\pi}{24}\right]$上的值域为$[-3,6]$.

评注 特别注意相位变换是针对自变量而进行的,确定函数值域要注意定义域.

变式 1 (2014 山东理 16)已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos 2x)$,$\boldsymbol{b}=(\sin 2x,n)$,函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,且 $y=f(x)$的图像过点$\left(\frac{\pi}{12},\sqrt{3}\right)$和点$\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$.

(1)求 m,n 的值;

(2)将 $y=f(x)$的图像向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$个单位后得到函数 $y=g(x)$的图像,若 $y=g(x)$图像上各最高点到点$(0,3)$的距离的最小值为 1,求 $y=g(x)$的单调递增区间.

方向五:与平面向量的综合

【例 1.5】 (2013 辽宁理 17)设向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3}\sin x,\sin x)$,$\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(1)若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,求 x 的值;

(2)设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,求 $f(x)$的最大值.

分析 抓住模相等的条件构造三角恒等式,再求角,根据数量积的定义及三角公式将函数表达式化为同名三角函数式,再求最值.

解析 (1)由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,得$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$,即 $3\sin^2x+\sin^2x=1$,$4\sin^2x=1$,$\sin^2x=\frac{1}{4}$,因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\sin x=\frac{1}{2}$,得 $x=\frac{\pi}{6}$.

(2)$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$,当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时,$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时,即 $x=\frac{\pi}{3}$时,函数 $f(x)$取得最大值$\frac{3}{2}$.

评注 在向量与三角函数的综合应用中,向量往往起到构建三角函数式的作用. 纵观历年的真题,向量是工具,变为函数式后化为三角问题,用三角知识求解.

变式 1 (2012 湖北理 17)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x,\sin\omega x)$,$\boldsymbol{b}=(-\cos\omega x-\sin\omega x,2\sqrt{3}\cos\omega x)$,设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda(x\in\mathbf{R})$的图像关于直线 $x=\pi$ 对称,其中 ω,λ 为常数,且 $\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)若 $y=f(x)$ 的图像经过点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$，求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{5}\right]$ 上的取值范围.

核心考点二　解三角形

方向一：三角形中的三角恒等变形问题

解法突破：本类题主要考虑三角形知识. 根据题设条件合理选取正弦定理、余弦定理将边角进行互化，并要注意三角形的内角和 $A+B+C=\pi$.

【例 1.6】　(2013 新课标全国卷Ⅰ理 17)如图 1-4 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle BPC=90°$.

(1)若 $PB=\frac{1}{2}$，求 PA；

(2)若 $\angle APB=150°$，求 $\tan\angle PBA$.

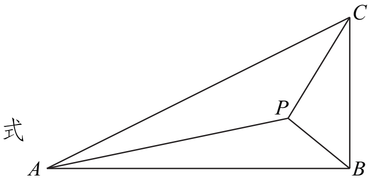

图 1-4

分析　合理选择正、余弦定理将边、角互化，再运用两角和(差)三角公式进行变换.

解析　(1)依题意，$\angle BPC=90°$，$PB=\frac{1}{2}$，$BC=1$，

则 $\sin\angle BCP=\frac{1}{2}$，$\angle BCP=30°$，所以 $\angle PBC=60°$，则 $\angle ABP=30°$，在 $\triangle ABP$ 中，

据余弦定理知 $AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos30°=3+\frac{1}{4}-2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{4}$，故 $AP=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(2)设 $\angle PBA=\alpha$，由已知得 $PB=\sin\alpha$，在 $\triangle PBA$ 中，由正弦定理得 $\frac{\sqrt{3}}{\sin150°}=\frac{\sin\alpha}{\sin(30°-\alpha)}$，

化简得 $\sqrt{3}\cos\alpha=4\sin\alpha$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即 $\tan\angle PBA=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

评注　求解本类题首先要根据条件考虑如何将边、角进行互换，然后选择正、余弦定理，避免走弯路.

变式 1　(2014 北京理 15)如图 1-5 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$AB=8$，点 D 在 BC 边上，且 $CD=2$，$\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$.

(1)求 $\sin\angle BAD$；

(2)求 BD，AC 的长.

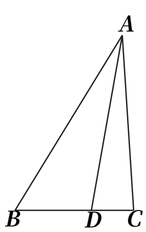

图 1-5

变式2 (2014 湖南理 18)如图 1-6 所示,在平面四边形 $ABCD$ 中,$AD=1$,$CD=2$,$AC=\sqrt{7}$.

(1)求 $\cos\angle CAD$ 的值;

(2)若 $\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$,$\sin B=\frac{\sqrt{21}}{6}$,求 BC 的长.

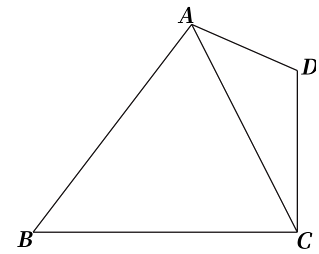

图 1-6

【例 1.7】 在△ABC 中,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 所对的边分别是 a,b,c,已知 $c=2$,$\angle C=\frac{\pi}{3}$.

(1)若△ABC 的面积等于$\sqrt{3}$,求 a,b;

(2)若 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$,求△$ABC$ 的面积.

分析 (1)由面积公式及余弦定理列方程组求解;(2)由三角恒等变换化简已知条件,找到边角关系,再进一步求解.

解析 (1)由余弦定理及已知条件,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=4$,

且 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\sqrt{3}$,得 $ab=4$,

故$\begin{cases}a^2+b^2-ab=4\\ab=4\end{cases}$,所以 $a=b=2$.

(2)由 $\sin C+\sin(B-A)=\sin[\pi-(A+B)]+\sin(B-A)=\sin(A+B)+\sin(B-A)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin B\cos A-\cos B\sin A=2\cos A\sin B$,由 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$,

得 $2\cos A\sin B=4\sin A\cos A$,

因此 $\cos A(\sin B-2\sin A)=0$,得 $\cos A=0$ 或 $\sin B=2\sin A$.

当 $\cos A=0$ 时,得$\angle A=\frac{\pi}{2}$,又 $c=2$,$\angle C=\frac{\pi}{3}$,此时为直角三角形,

则$\frac{2}{b}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,得 $b=\frac{2}{\sqrt{3}}$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

当 $\sin B=2\sin A$ 时,得 $b=2a$,又 $a^2+b^2-ab=4$,

所以 $3a^2=4$,$a^2=\frac{4}{3}$,得 $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$,故 $b=\frac{4}{\sqrt{3}}$,

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上所述,△ABC 的面积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

变式1 在△ABC 中,$a=3$,$b=2\sqrt{6}$,$\angle B=2\angle A$.

(1)求 $\cos A$ 的值;

(2)求 c 的值.

方向二:解三角形中的最值问题

解法突破:首先要合理选择正、余弦定理对边、角进行互化,其次列所求量的函数式,求函数最值.

【例 1.8】 在$\triangle ABC$中,$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边分别是$a,b,c$,且满足$a^2-2bc\cos A=(b+c)^2$.

(1)求$\angle A$的值;

(2)若$a=3$,求$\triangle ABC$周长的取值范围.

分析 (1)利用余弦定理求出$\angle A$;(2)求三角形周长的取值范围时,可以由余弦定理和基本不等式转化为"$b+c$"的形式,但要注意"$=$"成立的条件;或将边转化为角,利用三角函数的有界性来解决.

解析 (1)由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,代入条件$a^2-2bc\cos A=(b+c)^2$,

$4bc\cos A=-2bc$,即$\cos A=-\dfrac{1}{2}$,又$\angle A$是$\triangle ABC$的内角,所以$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)**解法一:**由正弦定理可得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{3}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}$,

即$b=2\sqrt{3}\sin B$,$c=2\sqrt{3}\sin C$,

则$\triangle ABC$周长为$a+b+c=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)$

$=3+2\sqrt{3}\left(\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B\right)=3+2\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

因为$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$,所以$\dfrac{\pi}{3}<B+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$,即$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,

从而可得$6<3+2\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 3+2\sqrt{3}$,即$a+b+c\in(6,3+2\sqrt{3}]$,

故$\triangle ABC$周长的取值范围是$(6,3+2\sqrt{3}]$.

解法二:由余弦定理得$9=b^2+c^2-2bc\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc\geqslant(b+c)^2-\dfrac{1}{4}(b+c)^2$

$=\dfrac{3}{4}(b+c)^2$,即$(b+c)^2\leqslant 12$,解得$b+c\leqslant 2\sqrt{3}$(当且仅当$b=c$时,等号成立),

又$b>0,c>0$,由三角形三边关系$b+c>a=3$,即$3<b+c\leqslant 2\sqrt{3}$,所以$a+b+c\in(6,3+2\sqrt{3}]$,

故$\triangle ABC$周长的取值范围是$(6,3+2\sqrt{3}]$.

评注 利用正、余弦定理解决与三角形有关的问题,也可能出现向量与三角函数综合命题.如本题第(2)问变为"若$a=3$,求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最小值."在本质上是求$bc$的最大值,利用余弦定理与基本不等式联合求解.

变式 1 (2011 西城一模理 15)设△ABC 的内∠A,∠B,∠C 所对的边分别为 a,b,c,且 $\cos B=\frac{4}{5}$,$b=2$.

(1)当 $a=\frac{5}{3}$时,求∠A 的度数;

(2)求△ABC 面积的最大值.

变式 2 (2012 海淀一模理 15)在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,且 A,B,C 成等差数列.

(1)$b=\sqrt{13}$,$a=3$,求 c 的值;

(2)设 $t=\sin A\sin C$,求 t 的最大值.

变式 3 (2014 陕西理 16)△ABC 的内角∠A,∠B,∠C 所对的边分别为 a,b,c.

(1)若 a,b,c 成等差数列,求证:$\sin A+\sin C=2\sin(A+C)$;

(2)若 a,b,c 成等比数列,求 $\cos B$ 的最小值.

三角函数核心预测题

【预测题一】

已知函数 $f(x)=\sin x-a\cos x$ 的一个零点是$\frac{\pi}{4}$.

(1)求实数 a 的值；

(2)设 $g(x)=f(x)\cdot f(-x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x$，求 $g(x)$的单调递增区间.

【预测题二】

已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$(其中 $\omega>0$)的图像上两个相邻的最低点的距离为 4.

(1)求函数 $f(x)$的单调递减区间；

(2)若函数 $f(x)$图像上的两点 A,B 的横坐标分别为-1,2,O 为坐标原点，求$\triangle ABO$ 的面积.

【预测题三】

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+a$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期及单调递增区间；

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，函数 $f(x)$有最大值 4，求实数 a 的值.

【预测题四】

已知函数 $f(x)=2-(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$的值和 $f(x)$的最小正周期;

(2)求函数 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上的最大值和最小值.

【预测题五】

如图 1-7 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,$\angle\alpha$ 的顶点在原点,始边与 x 轴的正半轴重合,终边交半个单位圆于点 A,且 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,将$\angle\alpha$ 的终边绕原点逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$,交单位圆于点 B,过 B 作 $BC\perp y$ 轴于点 C.

(1)若点 A 的纵坐标为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,求点 B 的横坐标;

(2)求$\triangle AOC$ 的面积 S 的最大值.

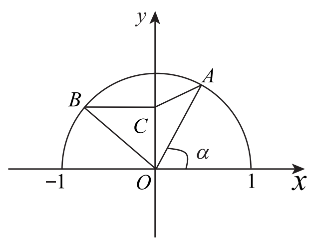

图 1-7

【预测题六】

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(x\in\mathbf{R},\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图像如图 1-8 所示.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)求函数 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$的单调递增区间.

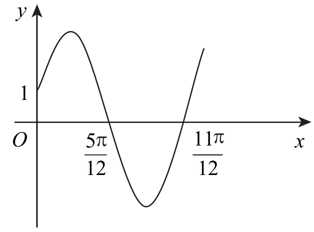

图 1-8

【预测题七】

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)(0<\varphi<\pi,\omega>0)$为偶函数，且函数 $y=f(x)$的图像的两相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$的值；

(2)将函数 $y=f(x)$的图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位后，再将得到的图像上各点的横坐标伸长到原来的4倍，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$的图像，求 $g(x)$的单调递减区间.

【预测题八】

设向量 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{3}\sin x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,2\sqrt{3}\sin x)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(1)若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，求 x 的值；

(2)设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求 $f(x)$的最大值.

【预测题九】

在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c，且$\angle C=\frac{3\pi}{4}$，$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 $\sin B$ 的值；

(2)若 $c-a=5-\sqrt{10}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

【预测题十】

在$\triangle ABC$中,a,b,c分别是$\angle A,\angle B,\angle C$的对边,且满足$(2a-c)\cos B=b\cos C$.

(1)求$\angle B$的大小;

(2)若$b=\sqrt{7}$,$a+c=4$,求$\triangle ABC$的面积.

【预测题十一】

在$\triangle ABC$中,$\angle A,\angle B,\angle C$的对边分别为$a,b,c$,且满足$\dfrac{2c-b}{a}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$.

(1)求$\angle A$的大小;

(2)若$a=2\sqrt{5}$,求$\triangle ABC$面积的最大值.

【预测题十二】

在$\triangle ABC$中,$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边分别是$a,b,c$,已知$\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$.

(1)求$\angle B$的大小;

(2)若$a+c=1$,求b的取值范围.