

第一部分 方法篇

方法一 推演法

方法概述



有些选择题、填空题是由计算题、应用题、证明题、判断题改编而成的.这类题型可直接从题设的条件出发,利用已知条件、相关公式、公理、定理、法则、特殊结论,通过准确的运算、严谨的推理、合理的验证得出正确的结论.

推演法就是将选择题、填空题作为解答题来解决的一种最常见的基本方法,低档选择题、填空题可用此法迅速求解.通过阅读条件主动地反映性质,再将得到的性质结合相关结论进行直截了当的推理与计算,然后将其推理和计算的结果作为答案.这一方法要求对于数学的概念、定义、定理和公式成立的充分条件和必要条件的理解要尽可能地全面、透彻、深入;对于数学公式的推导、应用、计算要尽可能地熟练、迅速、准确.



典例精讲

典例一 推演法在函数问题中的应用举例

例 1.1 设函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M+m =$ _____.

【分析】 本题重点考查了函数的奇偶性与最值之间的关系, 若奇函数在给定区间上有最大值, 则一定存在最小值, 且两者之和为 0, 用推演法求解本题.

【解析】 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 + \sin x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1}$, 令 $g(x) = \frac{2x + \sin x}{x^2 + 1} (x \in \mathbf{R})$, 则有 $g(-x) = \frac{-2x - \sin x}{x^2 + 1} = -g(x)$, 即 $g(x)$ 为奇函数, 显然 $g(x)_{\max} = -g(x)_{\min}$. 所以 $M+m = 1 + g(x)_{\max} + 1 + g(x)_{\min} = 2$. 故填 2.

【评注】 本题要求学生理解: 若奇函数在给定区间上存在最大值与最小值, 则其最大值与最小值互为相反数.

变式 1 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$, 则 $f(\lg 2) + f(\lg \frac{1}{2}) =$ ().

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

例 1.2 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 且 $f(1+m) + f(m) < 0$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

【分析】 本题为函数不等式的问题, 利用函数的性质(单调性, 奇偶性)求解, 同时应注意函数的定义域.

【解析】 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$,

所以 $-2 \leq m \leq 2, -2 \leq 1+m \leq 2$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(0) = 0$.

又 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减.

又 $f(1+m) + f(m) < 0$,

即 $f(m+1) < -f(m) = f(-m)$, 所以 $m+1 > -m$.

综上, 原不等式等价于
$$\begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ -2 \leq 1+m \leq 2 \\ 1+m > -m \end{cases}$$

解得 $-\frac{1}{2} < m \leq 1$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 1]$.

【评注】 求解本题中的函数不等式, 除注意定义域外, 主要是找到核心不等关系, 若奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $f(x_1) + f(x_2) < 0$, 则 $x_1 + x_2 > 0$; 同理, 若奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $f(x_1) + f(x_2) < 0$, 则 $x_1 + x_2 < 0$, 反之, $f(x_1) + f(x_2) \geq 0$, 则 $x_1 + x_2 \geq 0$.

变式 1 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数 $y = f(x)$ 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x^2 - 2x) \leq -f(2y - y^2)$ 均成立, 且 $y = f(x-1)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称, 则当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $\frac{y}{x}$ 的取值范围是 _____.

典例二 推演法在三角函数问题中的应用举例

例 1.3 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 60^\circ, AB = \sqrt{3}$, AB 边上的高为 $\frac{4}{3}$, 则 $AC+BC =$ _____.

【分析】 如图 1-1 所示, 设角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 由面积公式及正、余弦定理求解本题.

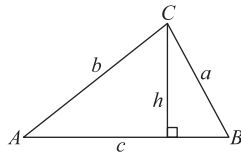


图 1-1

【解析】 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$, 得 $ab = \frac{8}{3}$. 又由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab = 3$, 所以 $a+b = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = \sqrt{3+3ab} = \sqrt{11}$.

【评注】 解三角形问题需熟练掌握正、余弦定理, 并且要求习惯三角恒等变换与代数的混合运算之间的相互转化.

变式1 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c ,若 $b+c=2a, 3\sin A=5\sin B$,则 $\angle C=(\quad)$.

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

典例三 推演法在不等式问题中的应用举例

例1.4 已知 $x, y, z \in (0, +\infty), x-2y+3z=0$,则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为_____.

【分析】由已知等式可知 y 与 x, z 的关系,利用均值不等式求解本题.

【解析】由 $x, y, z \in (0, +\infty), x-2y+3z=0$,得 $2y=x+3z \geq 2\sqrt{3xz}$,故 $y^2 \geq 3xz$,即 $\frac{y^2}{xz} \geq 3$,当且仅当 $x=3z$ 时,等号成立.故 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为3.

【评注】本题重点要抓住等式 $x-2y+3z=0, x, y, z \in (0, +\infty)$,

即 $2y=x+3z$,故所求 $\frac{y^2}{xz} = \frac{\left(\frac{x+3z}{2}\right)^2}{xz} \geq \frac{(\sqrt{3xz})^2}{xz} = 3$,降元是求解本题的关键.

变式1 设正实数 x, y, z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$,则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时, $x+2y-z$ 的最大值为 $(\quad)$.

- A. 0 B. $\frac{9}{8}$ C. 2 D. $\frac{9}{4}$

典例四 推演法在解析几何问题中的应用举例

例1.5 已知抛物线 $C: y^2=8x$ 与点 $M(-2, 2)$,过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点,若 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=0$,则 $k=(\quad)$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

【分析】设直线 AB 的方程,利用 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=0$ 的坐标运算直接求解.

【解析】依题意,设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$,

由题意知 $k \neq 0$,则 $x=\frac{1}{k}y+2$,令 $t=\frac{1}{k}$,则 $\begin{cases} x=ty+2 \\ y^2=8x \end{cases}$,

消去 x 得, $y^2-8ty-16=0$,显然 $\Delta=64t^2+64>0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,则 $y_1+y_2=8t, y_1y_2=-16$,

又 $\overrightarrow{MA}=(x_1+2, y_1-2), \overrightarrow{MB}=(x_2+2, y_2-2)$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (x_1+2)(x_2+2) + (y_1-2)(y_2-2) \\ &= x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 + y_1y_2 - 2(y_1+y_2) + 4 \\ &= \frac{y_1^2y_2^2}{64} + \frac{y_1^2+y_2^2}{4} + 4 - 16 - 16t + 4 \\ &= 4 + \frac{(y_1+y_2)^2 - 2y_1y_2}{4} - 8 - 16t \\ &= -4 - 16t + 16t^2 + 8 = 0, \end{aligned}$$

解得 $t=\frac{1}{2}$,故 $k=2$.故选D.

【评注】直线与圆锥曲线位置关系的选择题、填空题一般可借助图像,利用推演法求解.但为了更快地得到答案,也可以记忆一些常见的二级结论.

例如本题,如图1-2所示,直线 AB 过抛物线的焦点

F ,所以以 AB 为直径的圆与准线 $x=-2$ 相切,因为 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=0$,所以 M 为切点.过 A 作 $AA_1 \perp A_1M$,过 B 作 $BB_1 \perp B_1M$,则以 A_1B_1 为直径的圆与直线 AB 相切,切点为 F ,即 $MF \perp AB$.易知 $k_{MF}=-\frac{1}{2}$,所以 $k_{AB}=2$.

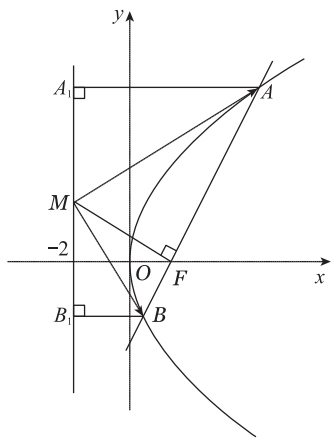


图 1-2

变式1 如图1-3所示, F_1, F_2 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点, A, B 分别是 C_1, C_2 在第二、四象限的公共点.若四边形 AF_1BF_2 为矩形,则 C_2 的离心率是 $(\quad)$.

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

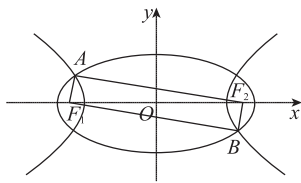


图 1-3



强化训练1

1. 复数 $\frac{i}{1+2i}$ (i 是虚数单位)的实部是 $(\quad)$.

- A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

2. 若 e_1, e_2 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量,且 $a=2e_1+e_2, b=-3e_1+2e_2$,则 $a \cdot b=(\quad)$.

- A. 1 B. -4 C. $-\frac{7}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $a_2=3, a_6=11$,则 $S_7=(\quad)$.

- A. 13 B. 35 C. 49 D. 63

4. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边 a, b, c 满足 $(a+b)^2 - c^2=4$,且 $C=60^\circ$,则 $ab=(\quad)$.

- A. $\frac{4}{3}$ B. $8-4\sqrt{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$

5. 已知曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点 $(-1, a+2)$ 处切线的斜率

为 8, 则 $a = (\quad)$.

- A. 9 B. 6 C. -9 D. -6

6. 已知函数 $f(x) = ax^3 + b\sin x + 4 (a, b \in \mathbf{R})$, $f(\lg(\log_2 10)) = 5$, 则 $f(\lg(\lg 2)) = (\quad)$.

- A. -5 B. -1 C. 3 D. 4

7. 阅读如图 1-4 所示的程序框图, 若输出的 S 值等于 16, 那么判断框内应填写的条件是 $(\quad)$.

- A. $i > 5?$ B. $i > 6?$ C. $i > 7?$ D. $i > 8?$

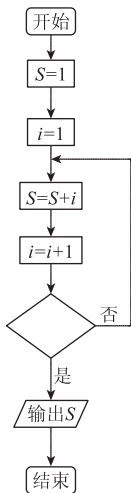


图 1-4

8. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 下列结论中错误的是 $(\quad)$.

- A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) = 0$
 B. 函数 $y = f(x)$ 的图像是中心对称图形
 C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 单调递减
 D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$

9. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与抛物线在第一、四象限分别交于 A, B 两点, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} = (\quad)$.

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

10. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2ax + 4 > 0$ 恒成立; $q: f(x) = (3-2a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 = 4, a_9 + a_{10} = 36$, 则 $S_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$, 若 $f(1) = -5$, 则 $f(f(5)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, B = 45^\circ, b = \sqrt{2}, a = 1$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若三个数 a_1, a_2, a_3 的方差为 1, 则 $3a_1 + 2, 3a_2 + 2, 3a_3 + 2$ 的方差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知 $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\frac{\tan x}{\tan 2x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设 $f(x) = \sin 3x + \cos 3x$, 若对任意实数 x 都有 $|f(x)| \leq a$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, M, N 是椭圆的左、右顶点, P 是椭圆上任意一点, 且直线 PM, PN 的斜率分别为 $k_1, k_2 (k_1 k_2 \neq 0)$, 若 $|k_1| + |k_2|$ 的最小值为 1, 则椭圆的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

方法二 图像法



图像法也叫图解法, 它体现了数形结合的思想. 图像法是利用函数图像或数学结果的几何意义, 将数的问题(如解方程、解不等式、求最值、求取值范围等)与某些图形结合起来, 利用几何图形的直观性, 再辅以简单计算, 确定正确答案的方法.

这种解法贯穿数形结合思想, 每年高考均有很多选择题、填空题(也有解答题)可以用数形结合思想解决, 既简捷又迅速. 如: ①借助集合中的韦恩图明确集合的交、并、补的关系; ②借助三角函数线和三角函数图像, 可以解决有关三角的问题; ③借助直线和曲线的位置关系, 通过作图求交点, 分清上下位置来解决某些方程、不等式的系列问题.



典例一 图像法在函数问题中的应用举例

例 2.1 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2, g(x) = -x^2 + 2(a-2)x - a^2 + 8$. 设 $H_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}, H_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($\max\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较大值, $\min\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较小值). 记 $H_1(x)$ 的最小值为 $A, H_2(x)$ 的最大值为 B , 则 $A - B = (\quad)$.

A. $a^2 - 2a - 16$ B. $a^2 + 2a - 16$
 C. -16 D. 16

【分析】 本题是一道新定义题, 考查函数的图像、性质.

【解析】 $f(x)$ 图像的顶点坐标为 $(a+2, -4a-4)$, $g(x)$ 图像的顶点坐标为 $(a-2, -4a+12)$, 并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像的顶点都在对方的图像上. 依题意, $H_1(x)$ 的图像如图 1-5 中的实线所示, $H_2(x)$ 的图像如图 1-5 中的虚线所示. 由图像得 $H_1(x)_{\min} = f(a+2) = -4a-4, H_2(x)_{\max} = g(a-2) = -4a+12$, 所以 $A - B = (-4a-4) - (-4a+12) = -16$. 故选 C.

【评注】 本题的新定义有如下的等价变化形式:

$$\max\{p, q\} = \begin{cases} p (p > q) \\ q (p \leq q) \end{cases} = \frac{1}{2}[p+q+|p-q|];$$

$$\min\{p, q\} = \begin{cases} p (p \leq q) \\ q (p > q) \end{cases} = \frac{1}{2}[p+q-|p-q|].$$

变式 1 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$. 若 $f(0) = f(4) > f(1)$, 则 $(\quad)$.

- A. $a > 0, 4a + b = 0$ B. $a < 0, 4a + b = 0$
C. $a > 0, 2a + b = 0$ D. $a < 0, 2a + b = 0$

例 2.2 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 不等式 $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$ 成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

【分析】 利用图像法求解本题, 不等式 $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$ 等价于函数

$y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 的图像在直线 $y = kx$ 上方(可有公共点).

【解析】 如图 1-6 所示, 作函数 $y_1 = \sin \frac{\pi x}{2}$ 与 $y_2 = x$ 的图像, 两个图像的交点恰好为 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 要使 $\sin \frac{\pi x}{2} \geq kx$, 需使 $k \leq 1$, 故 k 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

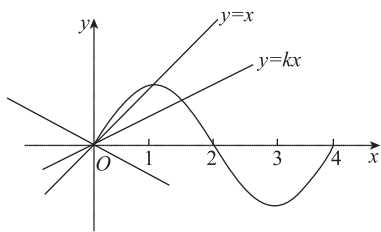


图 1-6

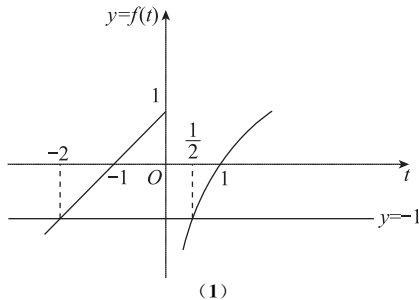
【评注】 本题可归结为不等式恒成立条件下求参数的取值范围问题, 利用数形结合思想求解这类问题特别奏效.

变式 1 如果对任意实数 x , 不等式 $|x+1| \geq kx$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

例 2.3 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f[f(x)] + 1$ 的零点个数是().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【分析】 对于复合函数的零点问题利用换元法与图像法综合求解.



(1)

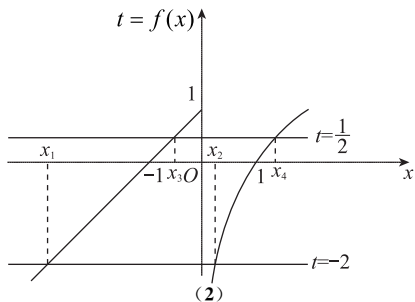


图 1-7

【解析】 令 $t = f(x) \in \mathbf{R}$, 则 $y = f(t) + 1$. 如图 1-7(1) 所示, 若 $f(t) = -1$, 得 $t = -2$ 或 $\frac{1}{2}$, 对应如图 1-7(2) 所示,

知 $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \sqrt{2}$.

因此函数 $y = f[f(x)] + 1$ 的零点个数是 4, 故选 A.

【评注】 本题通过换元后, 得到函数 $f(x) = t$ 与 $y = f(t) + 1$, 同时作出 $t = f(x)$ 与 $y = f(t)$ 的图像. 由 $f(t) = -1$ 得 t 的值(或范围), 再由 $t = f(x)$ 确定 x 的值(或范围), 这是复合函数求解零点个数问题的通法, 应该掌握.

变式 1 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 若 $f(x_1) = x_1 < x_2$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实根个数是().

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

典例二 图像法在平面向量问题中的应用举例

例 2.4 已知向量 $a \neq e, |e| = 1$ 满足: 对任意 $t \in \mathbf{R}$, 恒有 $|a - te| \geq |a - e|$ 成立, 则().

- A. $a \perp e$ B. $a \perp (a - e)$
C. $e \perp (a - e)$ D. $(a + e) \perp (a - e)$

【分析】 显然对 $|a - te| \geq |a - e|$ 进行平方处理会比较麻烦.

【解析】 设 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = e$, 则 $\vec{BA} = a - e$, 因为对任意的 $t \in \mathbf{R}$, $|a - te| \geq |a - e|$, 所以当 $t_1 > 1$ 时, 设 $\vec{OB}_1 = t_1 e$, 则 $a - t_1 e = \vec{B}_1 A$, 即 $|\vec{B}_1 A| \geq |\vec{BA}|$; 当 $t_2 < 1$ 时, 设 $\vec{OB}_2 = t_2 e$, 则 $a - t_2 e = \vec{B}_2 A$, 则 $|\vec{B}_2 A| \geq |\vec{BA}|$, 如图 1-8 所示, $|\vec{BA}|$ 是点 A 到直线 OB 的最短距离, 即 $BA \perp OB$, 所以 $e \perp (a - e)$. 故选 C.

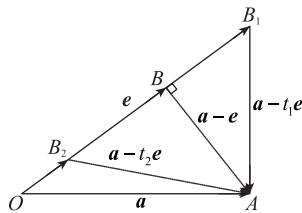


图 1-8

【评注】 利用向量运算的几何表示, 结合三角形法则、平行四边形法则, 可将代数运算转化为几何运算求解.

变式 1 已知平面向量 $a, b (a \neq 0, a \neq b)$ 满足 $|b| = 1$, 且 a 与 $b - a$ 的夹角为 120° , 则 $|a|$ 的取值范围是_____.

典例三 图像法在解析几何问题中的应用举例

例 2.5 点 P 在直线 $l: y = x - 1$ 上, 若存在过 P 的直线交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 两点, 且 $|PA| = |AB|$, 则称点 P 为“ τ 点”, 那么下列结论中正确的是().

- A. 直线 l 上的所有点都是“ τ 点”
B. 直线 l 上仅有有限个点都是“ τ 点”
C. 直线 l 上的所有点都不是“ τ 点”
D. 直线 l 上有无穷多个点(不是所有的点)是“ τ 点”

【分析】 由题意知直接法求解难度较大, 但可以通过分析其图像, 根据数据变化的规律, 利用极限(极端值)的思想处理.

【解析】 如图 1-9 所示, 在直线 l 上任取一点 P, 作 $y = x^2$ 的切线 PT, 切点为 T, 此时, 可记为 $|PA| = |PT|$, $|AB| = 0$, 再作交线 PAB, A 在 P, B 两点之间, 当直线 PAB 绕点 P 旋转时, 易知 $|AB|$ 的长度变化区间为 $(0, +\infty)$, 而 $|PA|$ 的长度从 $|PT|$ 连续变化, 故一定存在一

条直线 l' , 使得 $|PA| = |AB|$, 故直线 l 上的所有点都是“ τ 点”. 故选 A.

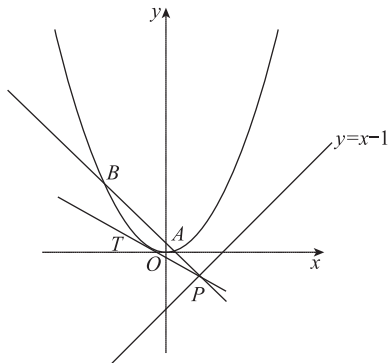


图 1-9

【评注】根据圆锥曲线的性质, 数形结合, 利用动态变换(取极限)可有效求解此类试题.

变式 1 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 若点 P 在椭圆上, 且满足 $|PO|^2 = |PF_1| \cdot |PF_2|$ (其中 O 为坐标原点), 则称点 P 为“ $\ast$ ”点, 则此椭圆上的“ $\ast$ ”点有 () 个.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

典例四 图像法在线性规划问题中的应用举例

例 2.6 设二元一次不等式组 $\begin{cases} x+2y-19 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ 2x+y-14 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域为 M , 使函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图像过区域 M 的 a 的取值范围是 ().

A. $[1, 3]$ B. $[2, \sqrt{10}]$ C. $[2, 9]$ D. $[\sqrt{10}, 9]$

【分析】目标函数中参数的取值范围问题, 先画出平面区域, 确定最优解, 从而求出 a 的范围.

【解析】作出不等式组表示的平面区域 M , 如图 1-10 所示,

由 $\begin{cases} x+2y-19=0 \\ 2x+y-14=0 \end{cases}$, 得 $A(3, 8)$. 由 $\begin{cases} x+2y-19=0 \\ x-y+8=0 \end{cases}$,

得 $B(1, 9)$. 由图知, 若 $y = a^x$ 的图像过区域 M , 则当 $y = a^x$ 的图像过点 $A(3, 8)$, 即 $a^3 = 8$, $a = 2$ 时, a 最小; 当 $y = a^x$ 的图像过点 $B(1, 9)$ 时, 即 $a = 9$ 时, a 最大. 所以 $2 \leq a \leq 9$. 故选 C.

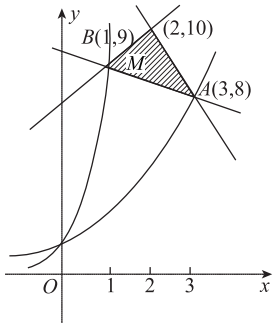


图 1-10

变式 1 设 O 为坐标原点, 点 $M(2, 1)$, 点 $N(x, y)$ 满足不

等式组 $\begin{cases} x \leq 3 \\ x-y+6 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围是 _____.



强化训练 2

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}, y = x\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 函数 $f(x) = 2^x + 3x$ 的零点所在的一个区间是 ().

A. $(-2, -1)$ B. $(-1, 0)$
C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(a) > f(-a)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

4. 下列区间中, 函数 $f(x) = |\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的区间是 ().

A. $(-\infty, 1]$ B. $[-1, \frac{3}{4}]$
C. $[0, \frac{3}{2})$ D. $[1, 2)$

5. 在直角坐标系 xOy 中, 如果两点 $A(a, b), B(-a, -b)$ 在函数 $y = f(x)$ 的图像上, 那么称 $[A, B]$ 为函数 $f(x)$ 的一组关于原点的中心对称点 ($[A, B]$ 与 $[B, A]$ 看作一组). 函数 $g(x) =$

$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x, & x \leq 0 \\ \log_4(x+1), & x > 0 \end{cases}$ 关于原点的中心对称点的组数为 ().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知 a, b 是单位向量, $a \cdot b = 0$. 若向量 c 满足 $|c - a - b| = 1$, 则 $|c|$ 的最大值为 ().

A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$

7. 函数 $y = f(x)$ 的图像如图 1-11 所示, 在区间 $[a, b]$ 上可找到 n ($n \geq 2$) 个不同的数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \dots = \frac{f(x_n)}{x_n}$, 则 n 的取值范围是 ().

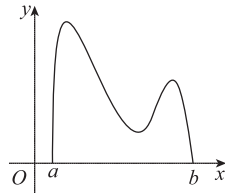


图 1-11

A. $\{2, 3\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{3, 4, 5\}$

8. 已知函数 $f(x) = x + 2^x$, $g(x) = x + \ln x$, $h(x) = x + \sqrt{x}$ 的零点分别为 x_1, x_2, x_3 , 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ().

A. $x_1 < x_2 < x_3$ B. $x_2 < x_1 < x_3$
C. $x_1 < x_3 < x_2$ D. $x_3 < x_2 < x_1$

9. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x^2 + bx$, 若 $y = f(x)$ 的图像

与 $y=g(x)$ 的图像有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则下列判断中正确的是().

- A. $x_1+x_2>0, y_1+y_2>0$ B. $x_1+x_2>0, y_1+y_2<0$
C. $x_1+x_2<0, y_1+y_2>0$ D. $x_1+x_2<0, y_1+y_2<0$

10. 已知函数 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $[a, b]$ ($a<b$), 值域为 $[1, 5]$, 则在平面直角坐标系内, 点 (a, b) 的运动轨迹与直角坐标轴围成的图形的面积为().

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

11. 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>b>0$) 上一点 P 向 x 轴作垂线, 垂足恰为左焦点 F_1 , A 是椭圆与 x 轴正半轴的交点, B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点, 且 $AB \parallel OP$ (O 是坐标原点), 则该椭圆的离心率是().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 设 A, B 是两个集合, 定义集合运算 $A-B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $M = \{x | |x+1| \leq 2\}$, $N = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M-N =$ _____.

13. 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - |\ln x|$ 的零点个数为 _____.

14. 若不等式 $\sqrt{4x-x^2} > (a-1)x$ 的解集为 A , 且 $A \subseteq \{x | 0 < x < 1\}$, 则实数 a 的取值范围为 _____.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, M 为不等式组 $\begin{cases} 2x+3y-6 \leq 0 \\ x+y-2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 所表示的区域上一动点, 则 $|OM|$ 的最小值是 _____.

16. 在直角坐标系 xOy 中, 设集合 $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 在区域 Ω 内任取一点 $P(x, y)$, 则满足 $x+y \leq 1$ 的概率等于 _____.

17. 抛物线 $y^2=2x$ 上的动点 A, B 满足 $|AB|=3$, 则 AB 中点横坐标的最小值为 _____.

18. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在非零实数 l 使得对任意 $x \in M$ ($M \subseteq D$), 有 $x+l \in D$, 且 $f(x+l) \geq f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 M 上的“ l 高调函数”. 如果定义域为 $[-1, +\infty)$ 的函数 $f(x)=x^2$ 是 $[-1, +\infty)$ 上的“ m 高调函数”, 那么实数 m 的取值范围是 _____; 如果定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = |x-a^2| - a^2$, 且 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的“4 高调函数”, 那么实数 a 的取值范围是 _____.

方法三 构造法

方法概述

在解决某些数学问题时, 我们常会采用这样的方法: 通过对条件和结论充分细致地分析, 抓住问题的本质特征, 联想熟知的数学模型, 然后变换命题, 恰当地构造辅助元素, 可以是一个图形、一个函数、一个方程、一个等价命题等, 以此架起一座连接条件和结论的桥梁, 从而使问题得以解决,

这种解题方法称为构造法.



典例精讲

典例一 构造法在平面向量问题中的应用举例

例 3.1 圆 $x^2+y^2=1$ 的任意一条切线 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, O 为坐标原点, 则 $x_1x_2 + y_1y_2 =$ _____.

【分析】 由题意知 $x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$, 利用向量数量积的几何意义求解本题.

【解析】 由 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$, 设圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 AB 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于点 C , 如图 1-12 所示, 易知 $OC=1, OA=OB=2$, 且 $OC \perp AB$, 则 $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \times 2 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -2$, 即 $x_1x_2 + y_1y_2 = -2$.

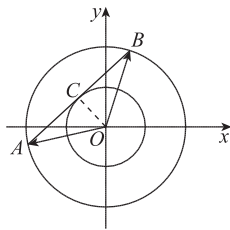


图 1-12

【评注】 由圆的性质知 $OC \perp AB$, 则点 C 为弦 AB 的中点, 向量的数量积 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 也可转化为 $\vec{OC}$ 和 $-\frac{\vec{AB}}{2}$ 相关的运算. 即 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\vec{OC} + \vec{CA}) \cdot (\vec{OC} + \vec{CB}) = (\vec{OC} - \vec{CB}) \cdot (\vec{OC} + \vec{CB}) = |\vec{OC}|^2 - |\vec{CB}|^2 = |\vec{OC}|^2 - \left|\frac{\vec{AB}}{2}\right|^2 = 1^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -2$.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中, 设 P_0 是边 AB 上一定点, 满足 $P_0B = \frac{1}{4}AB$, 且对于边 AB 上任意一点 P , 恒有 $\vec{PB} \cdot \vec{PC} \geq \vec{P_0B} \cdot \vec{P_0C}$, 则().

- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $\angle BAC = 90^\circ$
C. $AB = AC$ D. $AC = BC$

典例二 构造法在立体几何问题中的应用举例

例 3.2 某三棱锥的三视图如图 1-13 所示, 则该三棱锥的体积为().

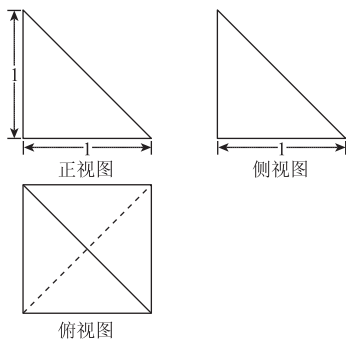


图 1-13

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【分析】本题直接还原几何体难度较大,故由三视图可构造特殊几何体(正方体)求解本题.

【解析】如图 1-14 所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,连接 A_1B , A_1C , A_1D , BD , 则三棱锥 A_1-BCD 即为所求,由三视图知正方体的棱长为 1,所以三棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^3 = \frac{1}{6}$. 故选 A.

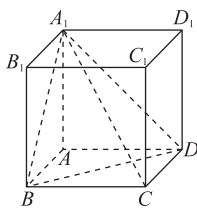
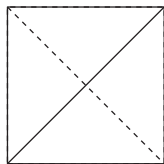


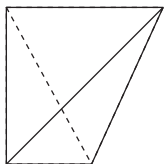
图 1-14

【评注】多面体的三视图可借助特殊的棱柱(长方体)处理.

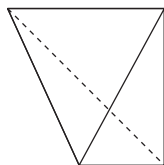
变式 1 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时,以 zOx 平面为投影面,则得到的正视图可以为().



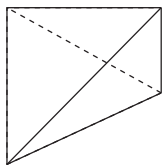
A.



B.



C.



D.

典例三 构造法在线性规划问题中的应用举例

例 3.3 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases} x-2y+4 \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x+y-2 \geq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 的取值范围是_____.

【分析】构造几何图形由 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 知,该目标函数表示可行域内的点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(-2, -1)$ 所在直线的斜率.

【解析】如图 1-15 所示的阴影部分为不等式组所表示的区域. 目标函数 $z = \frac{y+1}{x+2}$ 的几何意义是区域内的动点 $P(x, y)$ 与定点 $(-2, -1)$ 所在直线的斜率,由图可知斜率的最大

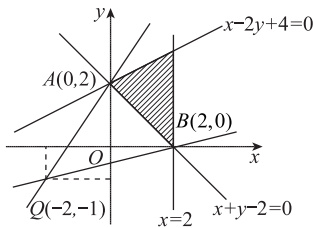


图 1-15

值为 $k_{QA} = \frac{3}{2}$, 最小值为 $k_{QB} = \frac{1}{4}$, 故目标函数 $z = \frac{y+1}{x+2}$

的取值范围为 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}]$.

【评注】在求解简单的线性规划问题时,常遇到一些目标函数,如截距 $(z = ax + by)$ 的形式,斜率 $(z = \frac{y-b}{x-a})$ 的形式,

还有距离 $(z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$ 的形式,解题时需要从目标函数的形式上构造相关的几何模型,从而求解.

变式 1 已知 $P(x, y)$ 的坐标满足 $\begin{cases} \sqrt{3}x - y < 0 \\ x - \sqrt{3}y + 2 < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则

$\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围是_____.

典例四 构造法在函数问题中的应用举例

例 3.4 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x) + x \cdot f'(x) > 0$, 若 $a > b$, 则().

- A. $af(b) > bf(a)$ B. $bf(a) > af(b)$
C. $af(a) > bf(b)$ D. $bf(b) > af(a)$

【分析】构造函数 $g(x) = xf(x)$, 利用函数的单调性比较大小.

【解析】令 $g(x) = xf(x)$, 则 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, 因为 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + x \cdot f'(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $a > b$, 则 $g(a) > g(b)$, 即 $af(a) > bf(b)$. 故选 C.

【评注】通过挖掘函数的形式,从而构造函数,再利用函数的单调性比较大小,是比较大小的常用方法.

变式 1 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数和偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, 且 $g(-3) = 0$, 则不等式 $f(x)g(x) < 0$ 的解集是().

- A. $(-3, 0) \cup (0, 3)$ B. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ D. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

典例五 构造法在数列问题中的应用举例

例 3.5 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $(a_2 - 1)^3 + 2015(a_2 - 1) = 1$, $(a_{2014} - 1)^3 + 2015(a_{2014} - 1) = -1$, 则 $S_{2015} =$ _____, a_2 _____ a_{2015} (填“>”、“<”或“=”).

【分析】构造函数 $f(x) = x^3 + 2015x$, $x \in \mathbf{R}$, 利用函数的奇偶性与单调性综合求解.

【解析】令 $f(x) = x^3 + 2015x$, $x \in \mathbf{R}$,

函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且为奇函数.

由题意知 $f(a_2 - 1) = 1$, $f(a_{2014} - 1) = -1$,

即 $f(a_2 - 1) + f(a_{2014} - 1) = 0$,

可得 $a_2 - 1 + a_{2014} - 1 = 0$, 即 $a_2 + a_{2014} = 2$,

故 $S_{2015} = \frac{2015(a_1 + a_{2015})}{2} = \frac{2015(a_2 + a_{2014})}{2} = 2015$.

又 $f(a_{2014} - 1) < f(a_2 - 1)$, 得 $a_2 > a_{2014}$,

所以等差数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 故 $a_2 > a_{2015}$.

变式 1 设函数 $f(x) = (x-3)^3 + x - 1$, $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_7) = 14$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_7 =$ ().

- A. 0 B. 7 C. 14 D. 21

例 3.6 若对任意 $x > 0$, $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} \leq a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

【分析】构造函数, 令 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$, 要使不等式恒成立, 则

需 $a \geq f(x)_{\max}$, 因此问题转化为求 $f(x)$ 的最大值问题.

【解析】 根据题意, 令 $f(x) = \frac{x}{x^2+3x+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}$,

当 $x > 0$ 时, 根据基本不等式可知 $x + \frac{1}{x} \geq 2$,

故 $f(x) \leq \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$. 当且仅当 $x=1$ 时, 取得最大值 $\frac{1}{5}$.

因此, 若不等式恒成立, a 的取值范围为 $[\frac{1}{5}, +\infty)$.

变式 1 已知点 P 在曲线 $y = \frac{4}{e^x+1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是().

- A. $[0, \frac{\pi}{4})$ B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ D. $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$



1. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-y+1 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是().

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

2. 已知 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, 则 $\sin(\alpha + \frac{7\pi}{6}) =$ ().

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

3. 已知 $a = \frac{\ln 2}{2}, b = \frac{\ln 3}{3}, c = \frac{\ln 5}{5}$, 则实数 a, b, c 的大小关系为().

- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

4. 若 $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 且 $a \sin \alpha - \beta \sin \beta > 0$, 则下列结论中正确的是().

- A. $\alpha > \beta$ B. $\alpha + \beta > 0$ C. $\alpha < \beta$ D. $\alpha^2 > \beta^2$

5. 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB = AC = 4$, 点 P 是边 AB 上异于 A, B 的一点, 光线从点 P 出发, 经 BC, CA 反射后又回到原点 P , 如图 1-16 所示. 若光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $AP =$ ().

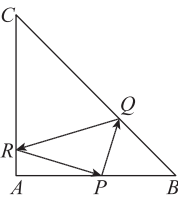


图 1-16

- A. 2 B. 1 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 3, BC = 10$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$ _____.

7. 设 $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\sin A - \sin B = \sin C, \cos A - \cos B = -\cos C$, 则 $A - B =$ _____.

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = t \cdot 5^n - 2$, 则实数 t 的值为 _____.

9. 正四面体的棱长为 2, 四个顶点在同一个球面上, 则该球的表面积为 _____.

10. 函数 $f(x) = 6x^3 + 9x + 1$ 满足 $f(a) + f(a-1) > 2$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

11. 不等式 $x^2 - 3 > ax - a$ 对一切 $3 \leq x \leq 4$ 恒成立, 则实数 a

的取值范围是 _____.

12. $\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 50^\circ =$ _____.

13. 若 x, y 为实数, 且 $4x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $2x + y$ 的最大值是 _____.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{3x-2}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$, 则 $f(\frac{1}{2012}) + f(\frac{2}{2012}) + \dots + f(\frac{2011}{2012}) =$ _____.

方法四 特例法



所谓特例法, 具体来说就是特殊情形: 如使用特殊的数值、向量、点、数列、函数、位置、图形来代替一般情形, 利用一个问题在某一特殊情况下不真, 则它在一般情况下也不真的原理, 由此判明选项的真伪, 从而达到快速解题的目的. 用特例法解选择题, 特例取得越简单、越特殊越好, 同时, 需要强调一点: 利用特例法求解选择题的作用不是“选择”出正确选项, 而是“排除”掉错误选项, 即特例不成立时, 一般性结论也不成立; 但特例即便成立, 一般性结论也不一定成立! 即如果我们使用一次特例无法排除掉全部伪项, 这就要求我们选择更多、更好的特例再次加以排除, 直到得到正确选项. 用特例法解填空题时, 首先要深入分析题设条件, 当填空题的结论唯一或题设中提供的信息暗示答案唯一时, 就可以把题中变化的不定量用特殊量代替, 从而得出正确的结果.



典例一 特殊数列的应用举例

例 4.1 设 $a_1, a_2, \dots, a_8$ 为各项都大于零的等差数列, 公差 $d \neq 0$, 则().

- A. $a_1 a_8 > a_4 a_5$ B. $a_1 a_8 < a_4 a_5$
C. $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$ D. $a_1 a_8 = a_4 a_5$

【分析】 本题用特殊数列法, 代入各选项中逐一检验, 因为对于特殊数列不成立的结论, 一般数列也不成立.

【解析】 依题意, 可取 $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_8 = 8. a_1 a_8 = 8, a_4 a_5 = 20$, 所以 $a_1 a_8 < a_4 a_5$. 故选 B.

【评注】 多思少算, 特值判断. 这里所谈到的特值不仅限于特殊值求解, 还包括特殊角度、特殊函数、特殊数列、特殊位置、特殊图形等.

变式 1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列, 则 $\frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_2 + a_4 + a_{10}} =$ _____.

典例二 特殊值的应用举例

例 4.2 若 $0 < a_1 < a_2, 0 < b_1 < b_2$, 且 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 1$, 则下列代数式中值最大的是().

- A. $a_1 b_1 + a_2 b_2$ B. $a_1 a_2 + b_1 b_2$

C. $a_1 b_2 + a_2 b_1$

D. $\frac{1}{2}$

【分析】不等式大小的比较,常可利用符合题意的特殊值判断.

【解析】令 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}, b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{3}{4}$, 则 $a_1 b_1 + a_2 b_2 =$

$$\frac{7}{12}, a_1 a_2 + b_1 b_2 = \frac{2}{9} + \frac{3}{16} = \frac{59}{144}, a_1 b_2 + a_2 b_1 = \frac{5}{12},$$

故 $a_1 b_1 + a_2 b_2$ 最大. 故选 A.

变式 1 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 定义运算“ $\wedge$ ”和“ $\vee$ ”如下:

$$a \wedge b = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}, a \vee b = \begin{cases} b, & a \leq b \\ a, & a > b \end{cases}.$$

若正数 a, b, c, d 满足 $ab \geq 4, c+d \leq 4$, 则 ().

A. $a \wedge b \geq 2, c \wedge d \leq 2$

B. $a \wedge b \geq 2, c \vee d \leq 2$

C. $a \vee b \geq 2, c \wedge d \leq 2$

D. $a \vee b \geq 2, c \vee d \leq 2$

典例三 特殊图形的应用举例

【例 4.3】 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 $O, AB=2, AC=\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

【分析】由向量数量积的几何意义知, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$, 再由圆的垂径定理知, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC}$ 只和 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的模长有关系, 和 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 的夹角无关. 故可用特殊三角形求解本题.

【解析】利用特殊图形. 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 C 为直角. 则 O 为 AB 的中点, 如图 1-17 所示.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$,

所以 $\cos \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{1}{2}$,

则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{BA}| \cos B =$

$-\frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|^2 = -\frac{1}{2}$.

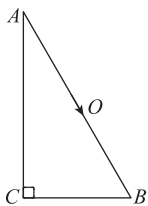


图 1-17

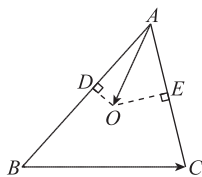


图 1-18

【评注】本题若利用数量积的几何意义(向量投影)理解并求解则更为简捷一些. 在直角三角形 ABC 中, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|^2 = -\frac{1}{2}$. 下面利用上面的观点

(向量投影)一般性求解本题. 如图 1-18 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D , 过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E . $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$$|\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - 1 \times 2 = -\frac{1}{2}.$$

变式 1 如图 1-19 所示, O, A, B 是平面上三点, 向量 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 在平面 AOB 上, P 是线段 AB 垂直平分线上任意一点, 向量 $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, 且 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 2$, 则 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 的值是 ().

A. 5

B. $\frac{5}{2}$

C. 3

D. $\frac{3}{2}$

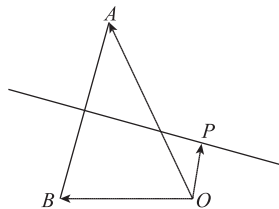


图 1-19

典例四 特殊位置的应用举例

【例 4.4】 如图 1-20 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB, AC 于不同的两点 M, N , 若 $\overrightarrow{AB} = m \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = n \overrightarrow{AN}$, 则 $m+n =$ _____.

【解析】用特殊位置法. 当 M 点与 B 点重合, N 点与 C 点重合, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$, 且 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN}$, 则 $m+n=2$.

【评注】推演法: 如图 1-21 所示, 连接 AO .

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{m}{2} \overrightarrow{AM} + \frac{n}{2} \overrightarrow{AN}.$$

又 M, O, N 三点共线, 则 $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} = 1$, 即 $m+n=2$.

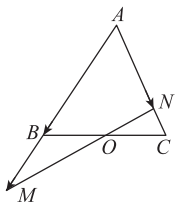


图 1-20

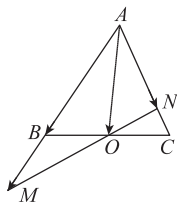


图 1-21

变式 1 如图 1-22 所示, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 点 P 在 AB 上, 点 Q 在 AC 上, 且 PQ 过 $\triangle ABC$ 的重心 $G, \overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = n \overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$ _____.

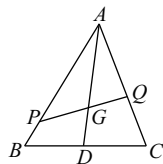


图 1-22

【例 4.5】 如图 1-23 所示, 抛物线 $C_1: y^2 = 2px$ 和圆 $C_2: (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}$, 其中

$p > 0$, 直线 l 经过 C_1 的焦点, 依次交 C_1, C_2 于 A, B, C, D 四点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ().

A. $\frac{p^2}{4}$

B. $\frac{p^2}{3}$

C. $\frac{p^2}{2}$

D. p^2

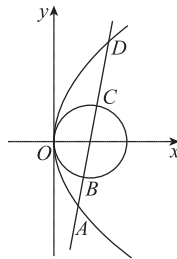


图 1-23

【分析】由选项知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的值为定值, 故满足一般情形下的定值, 即特殊位置下也为定值. 本题用特殊位置, 即直线 l

垂直于 x 轴进行计算得到 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的值.

【解析】若直线 l 垂直于 x 轴,则 $A(\frac{p}{2}, -p), D(\frac{p}{2}, p), B(\frac{p}{2}, -\frac{p}{2}), C(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$, 则 $\overrightarrow{AB} = (0, \frac{p}{2}), \overrightarrow{CD} = (0, \frac{p}{2})$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{p^2}{4}$. 故选 A.

【评注】利用特殊位置求解简捷,对“秒杀”选择题起到了事半功倍的作用.另外,本题中的特例使用还可以更为彻底,如取 $p=2$,同时使用直线 l 垂直于 x 轴,则各个点的坐标及计算更为简捷,此时四个选项变为:

- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4

而 $A(1, -2), B(1, -1), C(1, 1), D(1, 2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (0, 1), \overrightarrow{CD} = (0, 1)$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1$. 故选 A.

变式 1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, M, N 是椭圆的左、右顶点, P 是椭圆上任意一点,且直线 PM, PN 的斜率分别为 $k_1, k_2 (k_1 k_2 \neq 0)$, 则 $k_1 k_2 =$ _____.

变式 2 设直线 l 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点,若 $OA \perp OB$, 则直线 l 与 x 轴的交点为 ().

- A. $(\frac{p}{2}, 0)$ B. $(p, 0)$ C. $(2p, 0)$ D. $(4p, 0)$

典例五 特殊函数法应用举例

给定函数 $f(x)$ (不给出函数解析式或者无法求出解析式), 利用其具备的一些性质来研究其另外的一些性质时, 由于没有给出具体的解析式, 在解题时往往无从下手, 或者直接推理比较复杂; 由于选择题只要结果而不需要推导过程, 因此这类问题可以使用特殊代替一般的思路来解决, 往往可以根据题意找一个特殊函数 (有时候是一幅草图), 利用特殊函数 (或草图) 的性质来解题.

【例 4.6】 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) < f(x)$, 且对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 ().

- A. $e^{2015} \cdot f(-2015) < f(0), f(2015) > e^{2015} \cdot f(0)$
 B. $e^{2015} \cdot f(-2015) < f(0), f(2015) < e^{2015} \cdot f(0)$
 C. $e^{2015} \cdot f(-2015) > f(0), f(2015) > e^{2015} \cdot f(0)$
 D. $e^{2015} \cdot f(-2015) > f(0), f(2015) < e^{2015} \cdot f(0)$

【分析】本题考查导数的运算, 由题目给出的条件结合选项分析函数的解析式, 属于逆向思维, 有一定的难度.

【解析】解法一 (特殊函数法):

因为 $f'(x) < f(x)$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 故可取 $f(x) = e^{-x}$, 验证可知选 D.

解法二 (构造法):

令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} < 0$,

即 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

故有 $g(-2015) > g(0)$,

即 $\frac{f(-2015)}{e^{-2015}} > \frac{f(0)}{e^0}$, 即 $e^{2015} \cdot f(-2015) > f(0)$,

同理, $\frac{f(2015)}{e^{2015}} < \frac{f(0)}{e^0}$, 即 $f(2015) < e^{2015} \cdot f(0)$. 故选 D.

【评注】本题也可选用特殊函数 $f(x) = 1$, 更快地得到答案 D.

变式 1 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$. 满足 $f'(x) < f(x)$, 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(4) = 1$, 则不等式 $f(x) < e^x$ 的解集为 ().

- A. $(-2, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$
 C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

变式 2 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 关于点 $(2, 0)$ 对称, 且在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 如果 $x_1 + x_2 > 4$, 且 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0$, 则 $f(x_1) + f(x_2)$ 与 0 的大小关系是 ().

- A. $f(x_1) + f(x_2) > 0$ B. $f(x_1) + f(x_2) = 0$
 C. $f(x_1) + f(x_2) < 0$ D. 无法判断



强化训练 4

1. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 则下列结论中恒成立的是 ().

- A. $f(x) + |g(x)|$ 是偶函数
 B. $f(x) - |g(x)|$ 是奇函数
 C. $|f(x)| + g(x)$ 是偶函数
 D. $|f(x)| - g(x)$ 是奇函数

2. 若等比数列的各项均为正数, 前 n 项的和为 S , 前 n 项的积为 P , 前 n 项倒数的和为 M , 则有 ().

- A. $P = \frac{S}{M}$ B. $P > \frac{S}{M}$
 C. $P^2 = \left(\frac{S}{M}\right)^n$ D. $P^2 > \left(\frac{S}{M}\right)^n$

3. 若 $a > b > 1$, $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则 ().

- A. $R < P < Q$ B. $P < Q < R$
 C. $Q < P < R$ D. $P < R < Q$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, C 为钝角, 设 $\sin A + \sin B = m$, $\cos A + \cos B = n$, $\sin C = p$, 则 m, n, p 的大小关系是 ().

- A. $p < n < m$ B. $n < p < m$
 C. $p < m < n$ D. $m < p < n$

5. 已知 A, B, C, D 是抛物线 $y^2 = 8x$ 上的点, F 是抛物线的焦点, 且 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD} = \mathbf{0}$, 则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| + |\overrightarrow{FD}|$ 的值为 ().

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

6. 如果对于任意实数 x , $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如 $[3.27] = 3$, $[0.6] = 0$, 那么 “ $[x] = [y]$ ” 是 “ $|x - y| < 1$ ” 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 设整数 $n \geq 4$, 集合 $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. 令集合 $S = \{(x, y, z) | x, y, z \in X\}$, 且三条件 $x < y < z, y < z < x, z < x < y$ 恰有一个成立, 若 (x, y, z) 和 (z, w, x) 都在 S 中, 则下列选项中正确的是 ().

- A. $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \notin S$

- B. $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \in S$
 C. $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \in S$
 D. $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \notin S$

8. 已知事件“在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P , 使 $\triangle APB$ 的最大边是 AB ”发生的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{AD}{AB} = ()$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

9. 设 a, b, c 为实数, $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c)$, $g(x) = (ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S = \{x \mid f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $T = \{x \mid g(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $|S|, |T|$ 分别为集合 S, T 的元素个数, 则下列结论中不可能的是 $()$.

- A. $|S| = 1$ 且 $|T| = 0$ B. $|S| = 1$ 且 $|T| = 1$
 C. $|S| = 2$ 且 $|T| = 2$ D. $|S| = 2$ 且 $|T| = 3$

10. 已知 a, b, c 为等比数列, b, m, a 和 b, n, c 是两个等差数列, 则 $\frac{a}{m} + \frac{c}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 若 $\alpha \in \mathbf{R}$, 则 $\sin^2(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \sin^2(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \sin^2 \alpha$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知函数 $f(x) = 2 \cos^2 x + 2a \sin x \cos x - 1$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 8$, 那么此三角形最小角的余弦值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 在三棱锥 $O-ABC$ 中, 三条棱 OA, OB, OC 两两垂直, 且 $OA > OB > OC$, 分别经过三条棱 OA, OB, OC 作一个截面, 使其平分三棱锥的体积, 截面面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 则 S_1, S_2, S_3 的大小关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 如图 1-24 所示, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 若 E, F 分别为 AB, AC 的中点, 平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1, V_2 的两部分 ($V_1 > V_2$), 那么 $V_1 : V_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

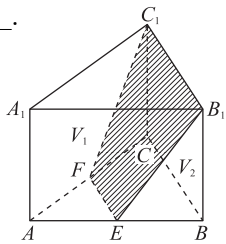


图 1-24

16. (1) 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} + a$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 函数 $f(x) = M \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[a, b]$ 上是增函数, 且 $f(a) = -M, f(b) = M$, 则给出函数 $g(x) = M \cos(\omega x + \varphi)$ 在区间 $[a, b]$ 上的以下结论:

- ①是增函数; ②是减函数; ③可以取得最大值 M ; ④可以取得最小值 $-M$; ⑤值域为 $[0, M]$. 其中正确结论的序号为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18. 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$, 其图像上任一点 $P(x, y)$ 满足 $x^2 + y^2 = 1$.

- ①函数 $y = f(x)$ 一定是偶函数;
 ②函数 $y = f(x)$ 可能既不是偶函数, 也不是奇函数;
 ③函数 $y = f(x)$ 可以是奇函数;
 ④函数 $y = f(x)$ 如果是偶函数, 其值域是 $[0, 1)$ 或 $(-1, 0]$;
 ⑤函数 $y = f(x)$ 值域是 $(-1, 1)$, 则一定是奇函数.

其中正确命题的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (填上所有正确的序号).

方法五 排除法



方法概述

数学选择题的解题本质就是去伪存真, 通过对试题的观察、分析, 将各选项逐个代入题中进行验证, 舍弃不符合题目要求的错误答案, 找到符合题意的正确结论.

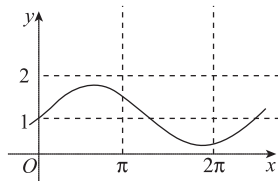
排除法就是充分运用选择题中单选题的特征——“答案唯一”, 即四个选项中有且只有一个答案正确, 从选项入手, 根据题设条件与各选项的关系, 通过分析、推理、计算、判断, 对选项进行筛选, 将其中与题设相矛盾的干扰项逐一排除, 缩小选择的范围, 再从其余的结论中求得正确的答案. 排除法的思维路径是: 阅读—反射—估算—判断—排除.



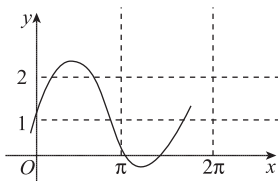
典例精讲

典例一 排除法在函数图像识别问题中的应用举例

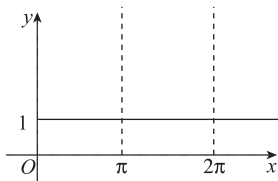
例 5.1 已知 a 是实数, 则函数 $f(x) = 1 + a \sin ax$ 的图像不可能是 $()$.



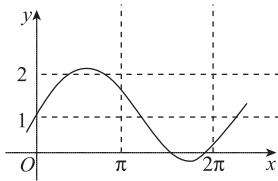
A.



B.



C.



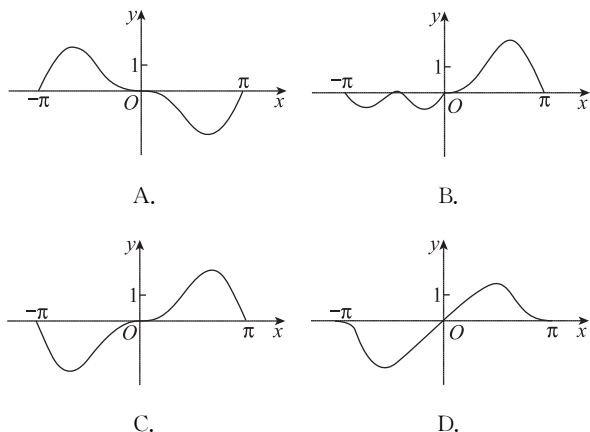
D.

【分析】 本题需要根据题设逐一对答案进行分析. 因此, 采用排除法最为合适.

【解析】 首先看最为特殊的 C 选项, 易知当 $a = 0$ 时, C 选项正确, 排除 C; 再看 A, B, D 之间最大的区别就是振幅与周期. 根据解析式可知, 振幅为 $|a|$, 周期为 $\frac{2\pi}{|a|}$, 当 $|a| > 1$ 时, $T < 2\pi$; 当 $|a| < 1$ 时, $T > 2\pi$. 故 A, B 选项正确, 排除 A, B. 故选 D.

【评注】 根据解析式确定函数图像, 解决此类问题的关键在于熟悉各类函数的周期及其性质.

变式 1 函数 $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为 $()$.



典例二 排除法在解三角方程问题中的应用举例

例 5.2 已知函数 $f(x) = \sin x, x \in (0, \frac{5\pi}{2})$, 若方程 $f(x) = a$ 有三个不同的实数根, 且三个根由小到大依次成等比数列, 则 a 的值是().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

【分析】 将各选项逐个代入题设中进行验证.

【解析】 选项 A, 将 $a = \frac{1}{2}$ 代入 $f(x) = a$ 中, 得 $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{13\pi}{6}$, 不满足 $x_2^2 = x_1 x_3$, 故排除选项 A;

选项 B, 将 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入 $f(x) = a$ 中, 得 $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{9\pi}{4}$, 满足 $x_2^2 = x_1 x_3$, 即三个根 x_1, x_2, x_3 成等比数列;

选项 C, 将 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入 $f(x) = a$ 中, 得 $x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{7\pi}{3}$, 不满足 $x_2^2 = x_1 x_3$, 故排除选项 C;

选项 D, 将 $a = 1$ 代入 $f(x) = a$ 中得 $x = \frac{\pi}{2}$, 在区间 $(0, \frac{5\pi}{2})$ 上只有一解不满足方程 $f(x) = a$ 有三个不同的实数根, 故排除选项 D. 故选 B.

【评注】 如图 1-25 所示, 函数 $f(x) = \sin x, x \in (0, \frac{5\pi}{2})$, 因为 $\alpha, \pi - \alpha, 2\pi + \alpha$ 成等比数列 (其中 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$), 所以 $(\pi - \alpha)^2 = \alpha(2\pi + \alpha)$, 解得 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 所以 $a = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

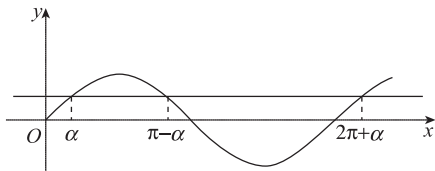


图 1-25

变式 1 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \tan \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha \in$ ().

- A. $(0, \frac{\pi}{6})$ B. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ C. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ D. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

典例三 排除法在平面向量问题中的应用举例

例 5.3 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点, 若 $\overrightarrow{A_1 A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1 A_2} (\lambda \in \mathbf{R}), \overrightarrow{A_1 A_4} = \mu \overrightarrow{A_1 A_2} (\mu \in \mathbf{R})$, 且 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$, 则称 A_3, A_4 调和分割 A_1, A_2 . 已知平面上的点 C, D 调和分割 A, B , 则下面说法中正确的是().

A. C 可能是线段 AB 的中点
B. D 可能是线段 AB 的中点
C. C, D 可能同时在线段 AB 上
D. C, D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

【分析】 将各选项逐个代入进行验证.

【解析】 依题意, 若 C, D 调和分割 A, B , 则有 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \mu \overrightarrow{AB}$, 且 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$; 若 C 是线段 AB 的中点, 则有 $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, 此时 $\lambda = \frac{1}{2}$. 又 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$, 所以 $\frac{1}{\mu} = 0$, 不可能成立, 排除 A; 同理选项 B 也排除. 对于选项 C, 当 C, D 同时在线段 AB 上时, $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1, \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} > 2$, 与条件 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$ 矛盾, 因此选项 C 不正确, 故排除 C. 故选 D.

【评注】 若 C, D 同时在线段 AB 的延长线上时, $\lambda > 1, \mu > 1, \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < 2$ 与已知条件 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$ 相矛盾, 故 C, D 不可能同时在线段 AB 的延长线上.

变式 1 设 a, b 是两个非零向量, 则下列说法中正确的是().

- A. 若 $|a+b| = |a| - |b|$, 则 $a \perp b$
B. 若 $a \perp b$, 则 $|a+b| = |a| - |b|$
C. 若 $|a+b| = |a| - |b|$, 则存在实数 λ , 使得 $b = \lambda a$
D. 若存在实数 λ , 使得 $b = \lambda a$, 则 $|a+b| = |a| - |b|$

典例四 排除法在立体几何问题中的应用举例

例 5.4 如图 1-26 所示, 在多面体 $ABCDEF$ 中, $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $EF \parallel AB, EF = \frac{3}{2}, EF$ 与面 $ABCD$ 的距离为 2, 则该多面体的体积是().

- A. $\frac{9}{2}$ B. 5 C. 6 D. $\frac{15}{2}$

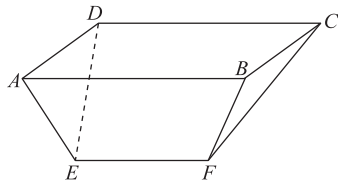


图 1-26

【分析】 本题采用排除法求解.

【解析】 计算 $V_{F-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{四边形}ABCD} \cdot d(EF, \text{面}AC) = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 2 = 6, V_{\text{多面体}ABCDEF} > V_{F-ABCD} = 6$.

观察 A, B, C, D 四个选项, 只有选项 D 满足大于 6. 排除 A, B, C. 故选 D.

【评注】 推演法: 如图 1-27 所示, 取 AB, CD 的中点 P, Q , 连

接 FP, FQ, PQ , 则 $V_{\text{多面体}ABCDEF} = V_{\text{棱柱}ADE-PQF} + V_{\text{棱锥}F-BCQP} =$
 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 3 \times 2 = \frac{15}{2}$.

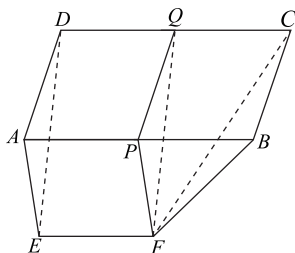


图 1-27

变式 1 如图 1-28 所示, 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 所有棱长都为 1, 点 E 是侧棱 SC 上一动点, 过点 E 垂直于 SC 的截面将正四棱锥分成上、下两部分, 记 $SE = x$ ($0 < x < 1$), 设截面下面部分的体积为 $V(x)$, 则函数 $y = V(x)$ 的图像大致为().

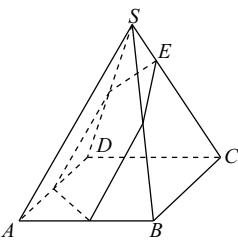
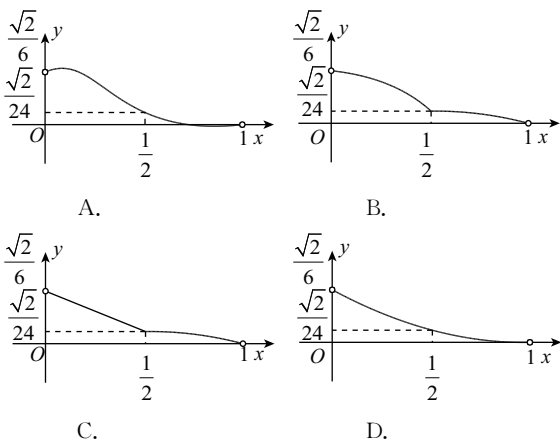


图 1-28



典例五 排除法在函数求值问题中的应用举例

例 5.5 某校召开学生代表大会, 规定各班: 每 10 人推选一名代表, 当各班人数除以 10 的余数大于 6 时, 再增选一名代表, 各班可推选的代表人数 y 与该班的人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y = [x] < [x]$ 表示不大于 x 的最大整数) 可以表示为().

- A. $y = \left[\frac{x}{10} \right]$ B. $y = \left[\frac{x+3}{10} \right]$
 C. $y = \left[\frac{x+4}{10} \right]$ D. $y = \left[\frac{x+5}{10} \right]$

【解析】 记 $y = f(x)$, 则 $f(36) = 3, f(37) = 4$, 由 $f(36) = 3$, 排除 C, D; 再由 $f(37) = 4$, 排除 A. 故选 B.

【评注】 本题解法也可理解为特例法.

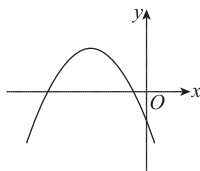
变式 1 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则对任意实数 x , 有().

- A. $[-x] = -[x]$ B. $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x]$
 C. $[2x] = 2[x]$ D. $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$

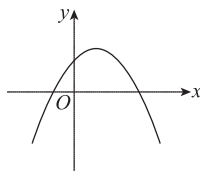


强化训练 5

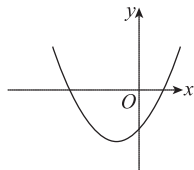
- 下列函数中, 既是偶函数, 又在区间 $(1, 2)$ 内是增函数的为().
 A. $y = \cos 2x, x \in \mathbf{R}$ B. $y = \log_2 |x|, x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0$
 C. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbf{R}$ D. $y = x^3 + 1, x \in \mathbf{R}$
- 设 $abc > 0$, 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像可能是().



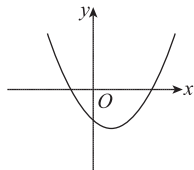
A.



B.

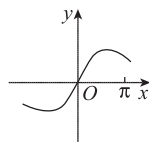


C.

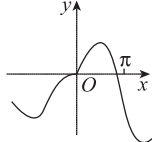


D.

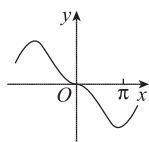
- 对于函数 $f(x) = a \sin x + b x + c$ ($a, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{Z}$), 选取 a, b, c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$, 所得出的正确结果一定不可能是().
 A. 4 和 6 B. 3 和 1 C. 2 和 4 D. 1 和 2
- 给出下列三个等式: $f(xy) = f(x) + f(y), f(x+y) = f(x)f(y), f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是().
 A. $f(x) = 3^x$ B. $f(x) = \sin x$
 C. $f(x) = \log_2 x$ D. $f(x) = \tan x$
- 函数 $f(x) = x \cos x + \sin x$ 的图像大致为().



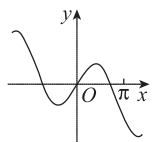
A.



B.



C.



D.

- 某几何体的正视图与侧视图都是边长为 1 的正方形, 且体积为 $\frac{1}{2}$, 则该几何体的俯视图可以是().



A.



B.



C.



D.

7. 若直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支交于不同的两点, 则 k 的取值范围是().

- A. $(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3})$ B. $(0, \frac{\sqrt{15}}{3})$
C. $(-\frac{\sqrt{15}}{3}, 0)$ D. $(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -1)$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$, 若 $|f(x)| \geq ax$, 则 a 的取值范围是().

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-2, 1]$ D. $[-2, 0]$

9. 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是().

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$
C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, 2]$

10. 已知函数 $f(x) = 2mx^2 - 2(4-m)x + 1$, $g(x) = mx$, 若对于任意实数 x , $f(x)$ 与 $g(x)$ 至少有一个为正数, 则实数 m 的取值范围是().

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 8)$ C. $(2, 8)$ D. $(-\infty, 0)$

11. 已知函数的图像如图 1-29 所示, 则其函数解析式可能是().

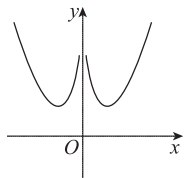


图 1-29

- A. $f(x) = x^2 + \ln|x|$ B. $f(x) = x^2 - \ln|x|$
C. $f(x) = x + \ln|x|$ D. $f(x) = x - \ln|x|$

12. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是().

- A. $\sin x < \frac{3}{\pi}x$ B. $\sin x > \frac{3}{\pi}x$
C. $\sin x < \frac{4}{\pi^2}x^2$ D. $\sin x > \frac{4}{\pi^2}x^2$

13. 在下列四个函数中, 满足性质“对于区间 $(1, 2)$ 上的任意 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$ 恒成立”的只有().

- A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = |x|$
C. $f(x) = 2^x$ D. $f(x) = x^2$

14. 若长度为定值的线段 AB 的两端点分别在 x 轴正半轴和 y 轴正半轴上移动, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的重心、内心、外心、垂心的轨迹不可能是().

- A. 点 B. 线段
C. 圆弧 D. 抛物线的一部分

15. 已知点 $P(3, -4)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 渐近线上的一点, E, F 是左、右两个焦点, 若 $\vec{EP} \cdot \vec{FP} = 0$, 则双曲线方程为().

- A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$
C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

16. 已知两点 $M(1, \frac{5}{4}), N(-4, -\frac{5}{4})$, 给出下列曲线方程: ① $4x+2y-1=0$; ② $x^2+y^2=3$; ③ $\frac{x^2}{2}+y^2=1$; ④ $\frac{x^2}{2}-y^2=1$. 在曲线上存在点 P 满足 $|MP|=|NP|$ 的所有曲线方程是().

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ②③④

方法六 信息迁移法



方法概述

所谓信息迁移法, 是根据题目给出的信息(可能是已经学过的知识, 也可能是没有学过的知识), 联系教科书中的基本原理或方法, 通过分析、转化, 概括出二者之间在本质上存在的共同因素, 进行知识的迁移, 从而使问题得以解决的一种解题方法。



典例精讲

典例一 信息迁移法在映射创新题中的应用举例

例 6.1 设 V 是全体平面向量构成的集合, 若映射 $f: V \rightarrow$

$\mathbf{R}$ 满足: 对任意向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1) \in V, \mathbf{b} = (x_2, y_2) \in V$, 以及任意 $\lambda \in \mathbf{R}$, 均有 $f(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda)f(\mathbf{b})$. 则称映射 f 具有性质 P . 先给出如下映射:

- ① $f_1: V \rightarrow \mathbf{R}, f_1(\mathbf{m}) = x - y, \mathbf{m} = (x, y) \in V$;
② $f_2: V \rightarrow \mathbf{R}, f_2(\mathbf{m}) = x^2 + y, \mathbf{m} = (x, y) \in V$;
③ $f_3: V \rightarrow \mathbf{R}, f_3(\mathbf{m}) = x + y + 1, \mathbf{m} = (x, y) \in V$.

其中, 具有性质 P 的映射的序号为 _____ (写出所有具有性质 P 的映射的序号).

【解析】 ①: $f_1(\mathbf{m}) = x - y, f_1(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) = f_1(\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)) = f_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \lambda(x_1 - y_1) + (1-\lambda)(x_2 - y_2) = \lambda f_1(\mathbf{a}) + (1-\lambda)f_1(\mathbf{b})$, 具有性质 P 的映射.

同理, ③: $f_3(\mathbf{m}) = x + y + 1, f_3(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) = f_3(\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)) = f_3(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \lambda(x_1 + y_1) + (1-\lambda)(x_2 + y_2) + 1 = \lambda(x_1 + y_1 + 1) + (1-\lambda)(x_2 + y_2 + 1) = \lambda f_3(\mathbf{a}) + (1-\lambda)f_3(\mathbf{b})$, 亦是具有性质 P 的映射. ②不符合. 综上, 填①③.

【评注】 本题所给的新概念为“具有性质 P ”, 也就是判断是否满足条件 $f(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda)f(\mathbf{b})$, 代入 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 坐标进行验证即可.

变式 1 设 S, T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y = f(x)$ 满足:

- (i) $T = \{f(x) | x \in S\}$; (ii) 对任意 $x_1, x_2 \in S$, 当 $x_1 < x_2$

时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么称这两个集合“保序同构”,现给出以下 3 对集合:

- ① $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{N}^*$;
 ② $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}, B = \{x | -8 \leq x \leq 10\}$;
 ③ $A = \{x | 0 < x < 1\}, B = \mathbf{R}$.

其中,“保序同构”的集合对的序号是 _____ (写出所有“保序同构”的集合对的序号).

典例二 信息迁移法在函数创新题中的应用举例

例 6.2 已知函数 $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2013}}{2013}$, 设 $g(x) = f(x+4)$, 且函数 $g(x)$ 的零点均在区间 $[a, b]$ ($a < b, a, b \in \mathbf{Z}$) 内, 圆 $x^2 + y^2 = b - a$ 的面积的最小值是 ().

- A. π B. 2π C. 3π D. 4π

【分析】 本题解题的关键在于确定函数 $f(x)$ 的零点所在区间.

【解析】 令 $f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2012}$ ($x \in \mathbf{R}$). 当 $x = 0$ 时, $f'(x) = 1 > 0$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x = 1$ 时, $f'(x) = 1 > 0$; 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f'(x) = \frac{1+x^{2013}}{1+x}$, $f'(x) > 0$. 综上, $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒为正, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $f(0) = 1 > 0$, $f(-1) = 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2013} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013}\right) < 0$. 故 $f(x)$ 的零点 $x_0 \in [-1, 0]$, 所以 $g(x) = f(x+4)$ 的零点 $x_0 - 4 \in [-5, -4]$. 依题意得 $[-5, -4] \subseteq [a, b]$, 即当 $b = -4, a = -5$ 时, $b - a$ 取最小值为 1. 所以圆 $x^2 + y^2 = 1$, 其面积为 π . 故选 A.

【评注】 利用求导解决本题的单调性是亮点之一.

变式 1 若以曲线 $y = f(x)$ 上任意一点 $M(x, y)$ 为切点作切线 l , 曲线上总存在异于 M 的点 $N(x_1, y_1)$, 以点 N 为切点作切线 l_1 , 且 $l \parallel l_1$, 则称曲线 $y = f(x)$ 具有“可平行性”, 下列曲线具有“可平行性”的编号为 _____.

- ① $y = x^3 - x$ ② $y = x + \frac{1}{x}$
 ③ $y = \sin x$ ④ $y = (x-2)^2 + \ln x$

典例三 信息迁移法在平面向量创新题中的应用举例

例 6.3 给定模长为 1 的平面向量 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$, 它们的夹角为 120° . 如图 1-30 所示, 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\widehat{AB}$ 上变动, 若 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 其中 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x + y$ 的最大值是 _____.

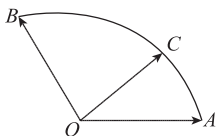


图 1-30

【解析】 如图 1-31 所示, 连接 AB 交 OC 于点 D , 由 A, B, D 三点共线, 则 $\vec{OD} = \lambda \vec{OA} + (1-\lambda)\vec{OB}$, 且 $0 < \lambda < 1$. 设 $\vec{OC} = k\vec{OD}$, 故 $\vec{OC} = k[\lambda \vec{OA} + (1-\lambda)\vec{OB}] = \lambda k \vec{OA} + (1-\lambda)k \vec{OB} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 则 $x + y = k$, 要求 $x + y$ 的最大

值, 即求 k 的最大值. $k = \frac{|\vec{OC}|}{|\vec{OD}|} = \frac{1}{|\vec{OD}|}$, 当 $OC \perp AB$ 时, 则 $|\vec{OD}|_{\min} = \frac{|\vec{OA}|}{2} = \frac{1}{2}$, 故 $k_{\max} = 2$, 因此 $x + y$ 的最大值为 2.

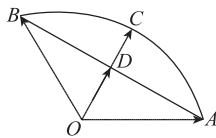


图 1-31

变式 1 已知扇形 AOB , 中心角为 60° , 点 C 为弧 $\widehat{AB}$ 上一动点, 且满足 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 其中 $x, y \in \mathbf{R}$, 如图 1-32 所示, 则 $x + 3y$ 的取值范围是 _____.

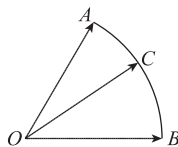


图 1-32

典例四 信息迁移法在解析几何创新题中的应用举例

例 6.4 已知点 $A(0, 2), B(2, 0)$, 若点 C 在函数 $y = x^2$ 的图像上, 则使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2 的点 C 的个数为 ().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【解析】 假设存在符合题意的点 C , 过 C 作 AB 的平行线 l , 因为 $k_{AB} = -1$, 则可设 $l: y = -x + m$, 又 $l_{AB}: y = -x + 2$, 则两直线间的距离为 $d = \frac{|m-2|}{\sqrt{2}}$, 又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = 2$, 所以 $d = \sqrt{2}$, 故 $|m-2| = 2$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 4$, 如图 1-33 所示, 易知 $l: y = -x$ 与 $y = -x + 4$ 分别与抛物线 $y = x^2$ 各有两个交点, 综上, $y = x^2$ 上有 4 个点 C . 故选 A.

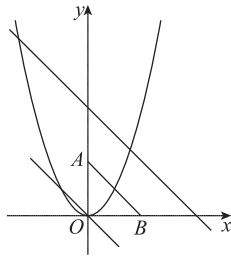


图 1-33

变式 1 已知抛物线 $W: y^2 = x$ 及直线 $m: y = x - 4$, 矩形 $ABCD$ 的顶点 A, B 在 m 上, CD 在 W 上, 经过 CD 的直线记为 l , 给出下列四个命题:

- ① $\exists S > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 不存在;
 ② $\exists S > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有一条;
 ③ $\exists S > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有两条;
 ④ $\exists S > 0$, 使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有三条.
 其中所有真命题的序号是 ().

- A. ①②④ B. ②③ C. ③④ D. ②③④



强化训练 6

1. 若函数 $f(x) = -x \cdot e^x$, 则下列命题中正确的是_____.

- ① $\forall a \in (-\infty, \frac{1}{e})$, $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) > a$;
 ② $\forall a \in (\frac{1}{e}, +\infty)$, $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) > a$;
 ③ $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists a \in (-\infty, \frac{1}{e})$, 都有 $f(x) > a$;
 ④ $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists a \in (\frac{1}{e}, +\infty)$, 都有 $f(x) > a$.

2. 给出下列命题:

- ①若 $\sin \alpha - \tan \alpha > 0$ 则 α 是第二或第四象限角;
 ②平面直角坐标系中有三个点 $A(4, 5)$, $B(-2, 2)$, $C(2, 0)$, 则 $\tan \angle ABC = \frac{4}{3}$;
 ③若 $a > 1, b > 1$, 且 $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$, 则 $\lg(a-1) + \lg(b-1)$ 的值为 1;
 ④设 $[m]$ 表示不大于 m 的最大整数, 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 那么 $[x+y] \geq [x] + [y]$.

其中, 所有正确命题的序号是_____.

3. 已知定义域为 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足: (i) 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $f(2x) = 2f(x)$ 成立; (ii) 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2-x$. 给出如下结论:

- ①对任意 $m \in \mathbf{Z}$, 有 $f(2^m) = 0$; ②函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$; ③存在 $n \in \mathbf{Z}$, 使得 $f(2^n + 1) = 9$; ④“函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减”的充要条件是“存在 $k \in \mathbf{Z}$, 使得 $(a, b) \subseteq (2^k, 2^{k+1})$ ”.

其中, 所有正确结论的序号是_____.

4. 设非空集合 $S = \{x | a \leq x \leq b\}$ 满足: 当 $x \in S$ 时, 有 $x^2 \in S$. 给出如下命题: ①若 $a = 1$, 则 $S = \{1\}$; ②若 $a = -\frac{1}{2}$,

则 $\frac{1}{4} \leq b \leq 1$; ③若 $b = \frac{1}{2}$, 则 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 0$.

其中, 所有正确的命题序号是_____.

5. 若两个函数的图像经过若干次平移后能够重合, 则称这两个函数为“同形”函数, 给出下列三个函数: ① $f_1(x) = \sin x + \cos x$; ② $f_2(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2}$; ③ $f_3(x) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$. 其中与函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin x$ 为“同形”函数的是_____ (填写你认为正确的所有结论的序号).

6. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 若对任意的 $x \in [a, b]$, 总有 $\left| 1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{10}$, 则称 $f(x)$ 可被 $g(x)$ “置换”. 下列函数中, 能置换函数 $f(x) = \sqrt{x}, x \in [4, 16]$ 的有_____.

- ① $g(x) = \frac{1}{5}(x+6), x \in [4, 16]$;
 ② $g(x) = x^2 + 6, x \in [4, 16]$;

③ $g(x) = x + 6, x \in [4, 16]$;

④ $g(x) = 2x + 6, x \in [4, 16]$.

7. 如果对任意一个三角形, 只要它的三边长 a, b, c 都在函数 $f(x)$ 的定义域内, 就有 $f(a), f(b), f(c)$ 也是某个三角形的三边长, 则称 $f(x)$ 为“保三角形函数”. 则下列函数是“保三角形函数”的有_____.

- ① $f(x) = 2x$; ② $f(x) = \sqrt{x}$; ③ $f(x) = x^2$;
 ④ $f(x) = \sin x (x \in (0, \pi))$.

8. 记函数 $[x]$ 叫做取整函数(也称高斯函数), 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[2] = 2, [3.3] = 3, [-2.4] = -3$, 设函数 $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2}$, 则函数 $y = [f(x)] + [f(-x)]$ 的值域为_____.

9. 给出定义: 若 $m - \frac{1}{2} < x \leq m + \frac{1}{2}$ (其中 m 为整数), 则 m 叫做离实数 x 最近的整数, 记作 $\{x\}$, 即 $\{x\} = m$. 在此基础上给出下列关于函数 $f(x) = |x - \{x\}|$ 的四个命题:

- ① $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域是 $[0, \frac{1}{2}]$; ② $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{k}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 对称; ③ 函数 $y = f(x)$ 是周期函数, 最小正周期是 1; ④ 函数 $y = f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上是增函数. 则其中真命题是_____.

10. 在平面直角坐标系中, 定义 $d(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 为两点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 之间的“折线距离”, 则坐标原点 O 与直线 $2x + y - 2\sqrt{5} = 0$ 上一点的“折线距离”的最小值是_____; 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点与直线 $2x + y - 2\sqrt{5} = 0$ 上一点的“折线距离”的最小值是_____.

11. 已知函数 $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$, 则 $f(0) + f(1) =$ _____, 若 $S_{k-1} = f(\frac{1}{k}) + f(\frac{2}{k}) + \dots + f(\frac{k-1}{k}) (k \geq 2, k \in \mathbf{Z})$, 则 $S_{k-1} =$ _____.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 对于 $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$有 a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 5, & a_n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n}{2^k}, & a_n \text{ 为偶数} (k \text{ 为使 } a_{n+1} \text{ 为奇数的正整数}) \end{cases}$$

(1) 当 $a_1 = 11$ 时, $a_{100} =$ _____;

(2) 若存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 当 $n > m$ 且 a_n 为奇数时, a_n 恒为常数 p , 则 p 的值为_____.

13. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y-1 \geq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \\ y-1 \leq k(x-1) \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$.

(1) 当 $k = 1$ 时, $\frac{y}{x^2}$ 的最大值为_____;

(2) 若 $\frac{y}{x^2}$ 的最大值为 1, 则实数 k 的取值范围是_____.