

# 第 **5** 章

## 时变电磁场

前面几章研究了静态电磁场(静电场、恒定电场、恒定磁场)。在静态电磁场中电场、磁场是独立存在的,电场是由电荷产生的,磁场是由电流产生的。若电荷、电流随时间变化,它们所产生的电场、磁场也随时间变化,我们知道变化的电场会在其周围空间激发变化的磁场,变化的磁场又会在其周围空间激发变化的电场,这样电场和磁场相互联系、相互转化,成为不可分割的整体,称为电磁场。

## 5.1 电磁感应定律

### 1. 法拉第定律

法拉第定律的内容为:穿过导体回路的磁通量发生变化时,回路中就会出现感应电动势,其数学表达式为

$$e_i = -\frac{d\psi}{dt} \quad (5.1)$$

其中  $\psi$  是穿过导体回路的磁链,对于密绕线圈  $\psi = N\Phi$ 。感应电动势的数值为  $e_i = \frac{d\psi}{dt}$ , 感应电动势的方向有两种判定方法。

方法 1: 规定  $e_i$  和  $\psi$  的正方向满足右手法则,如图 5.1 所示。首先由  $\psi$  的方向确定  $e_i$  的正方向,如果  $\frac{d\psi}{dt} > 0$ , 则  $e_i$  为负,如果  $\frac{d\psi}{dt} < 0$ , 则  $e_i$  为正。

方法 2: 根据楞次定律,感应电流产生的磁通,总是阻止引起感应电流的磁通的变化。首先设  $\Phi$  是穿过导体回路的原磁通,  $\Phi'$  是感应电流产生的穿过导体回路的磁通,如果  $\Phi$  增大,  $\Phi'$  与  $\Phi$  反方向,如果  $\Phi$  减少,  $\Phi'$  与  $\Phi$  同方向,这样就可以由  $\Phi$  的方向和变化确定  $\Phi'$  的方向,从而确定感应电动势和感应电流的方向。

由电动势的定义可以写出

$$e_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\psi}{dt} \quad (5.2)$$

### 2. 动生电动势和感生电动势

根据引起穿过导体回路的磁通量发生变化的原因不同,可以把导体回路中产生的感应电动势分为动生电动势和感生电动势。

#### 1) 动生电动势

磁场  $\mathbf{B}$  不变化,导体回路在磁场中运动,导体回路中产生的感应电动势称为动生电动势。产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力  $f = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ,由电动势的定义,动生电动势的表达式为

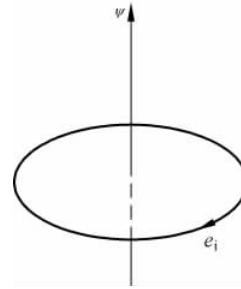


图 5.1  $e_i$  和  $\psi$  的正方向  
满足右手法则

$$e_i = \int_l (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.3)$$

计算动生电动势可以用式(5.3),也可以用法拉第定律(5.1)式。

## 2) 感生电动势

磁场  $\mathbf{B}$  变化, 导体回路不运动, 导体回路中产生的感应电动势称为感生电动势。产生感生电动势的非静电力是感应电场力(详见麦克斯韦关于感应电场的假说)。由电动势的定义, 感生电动势可以写为

$$e_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \quad (5.4)$$

其中  $\mathbf{E}_i$  是感应电场的场强。

计算感生电动势可以用式(5.4),也可以用法拉第定律

$$e_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.5)$$

## 3. 麦克斯韦关于感应电场(涡旋电场)的假说

麦克斯韦关于感应电场(涡旋电场)的假说基本思想是: 变化的磁场在其周围空间激发涡旋电场, 场方程可以写为

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\psi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.6)$$

变化的磁场  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  与涡旋电场  $\mathbf{E}_i$  之间满足左手关系, 如

图 5.2 所示。请注意, 涡旋电场的电力线是闭合曲线。

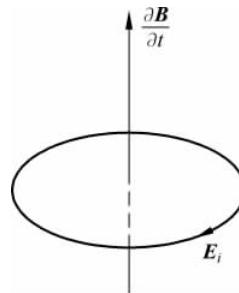


图 5.2 变化的磁场激发  
涡旋电场

## 4. 电磁感应定律的积分形式和微分形式

在电磁感应现象中,一般情况下磁场  $\mathbf{B}$  变化,导体回路也运动,回路中出现的感应电动势为

$$e_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_l (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.7)$$

式(5.7)中的  $\mathbf{E}_i$  是磁场的变化产生的,对于电荷激发的电场(库仑场),由式(2.18)

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{库}} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.8)$$

空间总的电场  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{库}} + \mathbf{E}_i$ , 所以

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{E}_{\text{库}} + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_l (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.9)$$

这就是电磁感应定律的积分形式。利用斯托克斯定理,式(5.9)可以写为

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S [\nabla \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{S}$$

所以

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.10)$$

这就是电磁感应定律的微分形式。讨论时变场,不考虑导体回路的运动,式(5.10)可以写为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.11)$$

**例 5.1** 一个  $h \times w$  的单匝矩形线圈放在时变磁场  $\mathbf{B} = e_y B_0 \sin \omega t$  中。开始时线圈面的法线  $\hat{n}$  与  $y$  轴成  $\alpha$  角,如图 5.3 所示。求:(1)线圈静止时的感应电动势;(2)线圈以角速度  $\omega$  绕  $x$  轴旋转时的感应电动势。

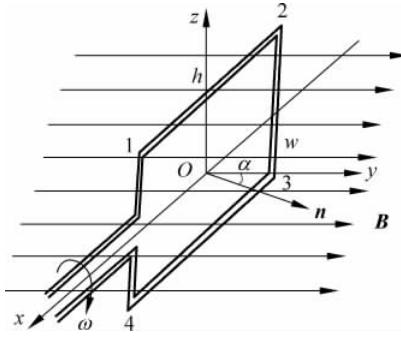


图 5.3 例 5.1 用图

解

(1) 线圈静止时,感应电动势是由磁场随时间变化引起的,用式(5.1)计算

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = e_y B_0 \sin \omega t \cdot \hat{n} h w \\ &= B_0 h w \sin \omega t \cdot \cos \alpha \\ e_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B_0 h w \cos \omega t \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

(2) 线圈以角速度  $\omega$  旋转时,感应电动势既有因磁场随时间变化引起的感生电动势,又有因线圈转动引起的动生电动势,可以用式(5.1)计算。此时线圈面的法线  $\hat{n}$  是时间的函数,表示为  $\hat{n}(t)$ ,所以

$$\begin{aligned}\Phi &= \mathbf{B}(t) \cdot \hat{n}(t) S = e_y B_0 \sin \omega t \cdot e_y h w \cos \alpha = B_0 h w \sin \omega t \cdot \cos \omega t \\ e_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B_0 h w \cos(2\omega t)\end{aligned}$$

也可以分别计算感生电动势和动生电动势

$$e_i = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

上式中的第一项与(a)中求得的静止时的感生电动势相同,第二项为

$$\oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_2^1 \hat{n} \frac{w}{2} \omega \times e_y B_0 \sin \omega t \cdot e_x dx + \int_4^3 \left( -\hat{n} \frac{w}{2} \omega \right) \times e_y B_0 \sin \omega t \cdot e_x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[ \frac{\omega}{2} \omega B_0 \sin \omega t \cdot \sin \alpha \right] h = \omega B_0 h \omega \sin \omega t \cdot \sin \omega t \\
 e_i &= -\omega B_0 h \omega \cos \omega t \cdot \cos \omega t + \omega B_0 h \omega \sin \omega t \cdot \sin \omega t \\
 &= -\omega B_0 h \omega \cos(2\omega t)
 \end{aligned}$$

## 5.2 位移电流

### 1. 麦克斯韦关于位移电流的假说

麦克斯韦发现了将恒定磁场中的安培环路定律应用于时变场时出现的矛盾,提出位

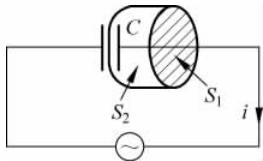


图 5.4 安培环路定律应用于时变场时出现的矛盾

移电流的假说,对安培环路定律作了修正。图 5.4 表示连接于交流电源上的电容器,电路中电流为  $i$ 。取一个闭合积分路径  $C$  包围导线,如果恒定磁场中的安培环路定律仍然成立,则沿此回路磁场强度  $\mathbf{H}$  的线积分将等于穿过该回路所张的任一个曲面的电流(瞬时关系)。在回路上张两个不同的曲面  $S_1$  和  $S_2$ ,使其中的  $S_1$  面和导线相截, $S_2$  面穿过电容器的两个极板之间。这时出现了矛盾:穿过  $S_1$  面的电流为  $i$ ,而穿过  $S_2$  面的电流为零。 $\mathbf{H}$  沿同一闭合路径的线积分却导出了两种不同的结果,这显然是不合理的。这种矛盾的结果说明安培环路定律的应用受到了限制。

麦克斯韦深入研究了这一问题,提出了位移电流的假说。他认为,在电容器的两极板间存在着另一种电流,其量值与传导电流  $i$  相等。因为对于由  $S_1$  和  $S_2$  构成的闭合面,利用电流连续性方程和高斯定理

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (5.12)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (5.13)$$

其中  $q$  为极板上的电荷量。利用以上两式可以导出

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} \quad (5.14)$$

其中

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.15)$$

麦克斯韦称之为位移电流密度,请读者验证  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  具有电流密度的量纲  $A/m^2$ 。考虑到由  $S_1$  和  $S_2$  构成的闭合曲面的法线方向向外,式(5.14)可以写为

$$\iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$$

所以穿过  $S_1$  面的传导电流与穿过  $S_2$  面的位移电流相等,这就消除了原来安培环路定理中的矛盾。

麦克斯韦关于位移电流假说的基本思想是：变化的电场在其周围空间激发涡旋磁场，这样变化的电场等效于一种电流，称为位移电流。场方程为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.16)$$

变化的电场  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  与涡旋磁场  $\mathbf{H}$  之间满足右手关系，如图 5.5 所示。

## 2. 全电流定律(安培环路定理)

引入位移电流的假说，安培环路定理写为(5.16)式，也称为全电流定律。利用斯托克斯定理可以写出全电流定律的微分形式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.17)$$

## 5.3 麦克斯韦方程组

静止媒质中的麦克斯韦方程组为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.18)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.19)$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.20)$$

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (5.21)$$

相应的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.25)$$

对于各向同性线性介质，描述介质性能的方程为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.28)$$

根据亥姆霍兹定理，一个矢量场的性质由它的旋度和散度唯一地确定，所以麦克斯

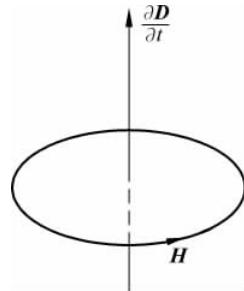


图 5.5 变化的电场激发  
涡旋磁场

麦方程组全面地描述了电磁场的基本规律。可以看出在时变电磁场中，磁场的场源包括传导电流和位移电流，电场的场源包括电荷和变化的磁场。

## 5.4 时变场的边界条件

### 1. 两种介质界面上的边界条件

图 5.6 是两种电介质的分界面，介电常数分别是  $\epsilon_1, \epsilon_2$ ，两种电介质中的电场强度分别是  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ ，与分界面法线的夹角分别是  $\theta_1, \theta_2$ 。在两种电介质的分界面上作一个极窄的矩形回路  $abcd a$ ， $ab = cd = \Delta l, bc = da = \Delta h \rightarrow 0$ ， $\hat{\mathbf{n}}$  是由介质 2 指向介质 1 的法线矢量， $\hat{\mathbf{n}}_1$  是矩形回路所围面积的法线矢量，如图 5.6 中所示。利用电磁感应定律

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.29)$$

式(5.29)左边对闭合环路的积分可以写为对四个边的线积分之和

$$\int_{ab} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

由于矩形回路极窄， $bc = da \rightarrow 0$ ，上式中第二项和第四项积分为零，第一项和第三项积分可以写为

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{ab} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} \\ &= E_1 \sin\theta_1 \cdot \Delta l - E_2 \sin\theta_2 \cdot \Delta l = (E_{1t} - E_{2t}) \Delta l \end{aligned} \quad (5.30)$$

由于矩形回路的面积很小，式(5.29)的右边可以写为

$$-\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left[ - \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{n_1} \Delta h \Delta l \right] = 0 \quad (5.31)$$

其中  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{n_1}$  是  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  在  $\hat{\mathbf{n}}_1$  方向的投影。把式(5.30)和式(5.31)代入式(5.29)可以得到  $\mathbf{E}$  的切向分量满足的边界条件

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (5.32)$$

用矢量可以表示为

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (5.33)$$

同理，由全电流定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (5.34)$$

式(5.34)的左侧

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{1t} - H_{2t}) \Delta l \quad (5.35)$$

式(5.34)的右侧

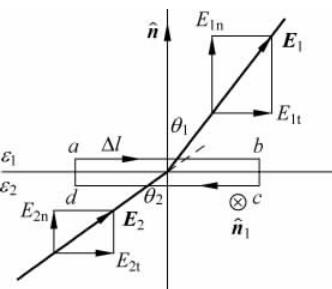


图 5.6  $\mathbf{E}$  切向分量的边界条件

$$\iint_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{I}{\Delta h \Delta l} \right)_{n_1} \Delta h \Delta l + \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_{n_1} \Delta h \Delta l \right] = J_s \Delta l \quad (5.36)$$

其中  $\left( \frac{I}{\Delta l} \right)_{n_1} = J_s$  是穿过矩形回路的面电流密度。把式(5.35)和式(5.36)代入式(5.34)可以得到  $\mathbf{H}$  的切向分量满足的边界条件

$$H_{1t} - H_{2t} = J_s \quad (5.37)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (5.38)$$

界面上没有面电流时上面两式可以写为

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (5.39)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (5.40)$$

用与讨论恒定磁场边界条件相同的方法,由磁场的高斯定理  $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  可以导出  $\mathbf{B}$  的法向分量满足的边界条件

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (5.41)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (5.42)$$

用与讨论静电场边界条件相同的方法,由电场的高斯定理  $\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$  可以导出  $\mathbf{D}$  的法向分量满足的边界条件

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (5.43)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (5.44)$$

界面上没有面电荷时上面两式可以写为

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (5.45)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \quad (5.46)$$

用与讨论静电场和恒定磁场边界条件相同的方法,可以导出时变电磁场中电力线和磁力线在介质分界面上发生的折射

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (5.47)$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (5.48)$$

## 2. 理想导体与介质界面上的边界条件(设理想导体的下标为 2, 介质的下标为 1)

由于理想导体的电导率  $\sigma \rightarrow \infty$ , 由欧姆定律  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , 在理想导体内,  $\mathbf{E}_2 = 0$ 。再由法拉第定律

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = - \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} = 0$$

所以  $\mathbf{B}_2$  为常数或为 0, 在时变场中,  $\mathbf{B}_2$  只能为 0。所以在理想导体内  $\mathbf{B}_2 = 0, \mathbf{H}_2 = 0$ 。下

面讨论理想导体与介质界面上的边界条件。

由式(5.32)可以得到理想导体表面(介质一侧)电场的切向分量满足的边界条件

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad (5.49)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = 0 \quad (5.50)$$

由式(5.37)可以得到理想导体表面(介质一侧)磁场的切向分量满足的边界条件

$$H_{1t} = J_s \quad (5.51)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s \quad (5.52)$$

式(5.52)常被用来计算导体表面的感应电流,如图 5.7 所示。

由式(5.41)可以得到理想导体表面(介质一侧)磁场的法向分量满足的边界条件

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 \quad (5.53)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (5.54)$$

所以在理想导体的表面,电场的切向分量为零,磁场的法线分量为零。由式(5.43)可以得到理想导体表面(介质一侧) $\mathbf{D}$  的法向分量满足的边界条件

$$D_{1n} = \rho_s \quad (5.55)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_s \quad (5.56)$$

真正的理想导体不存在,在实际问题中,金属可以看作是理想导体。一种材料能否被看成是理想导体还与频率有关(详见 6.5 节),在频率比较低的情况下,大地也可以看成是理想导体。

**例 5.2** 在两导体平板( $z=0$  和  $z=d$ )之间的空气中传播的电磁波,已知其电场强度为

$$\mathbf{E} = e_y E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x)$$

式中的  $k_x$  为常数。试求:(1) 磁场强度  $\mathbf{H}$ ; (2) 两导体表面的面电流密度  $\mathbf{J}_s$ 。

解

(1) 这是一个沿  $x$  方向传播的电磁波,电场沿  $e_y$  方向。

取如图 5.8 所示的坐标系,由  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  可得

$$-\mathbf{e}_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{1}{\mu_0} E_0 \left[ -\mathbf{e}_x \int \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) dt + \mathbf{e}_z \int k_x \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) dt \right] \\ &= \mathbf{e}_x \frac{\pi}{\omega \mu_0 d} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) + \mathbf{e}_z \frac{k_x}{\omega \mu_0} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) \end{aligned}$$

可以看出,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  都满足理想导体表面的边界条件,即在  $z=0$  和  $z=d$  处,  $E_t = E_y = 0$ ,

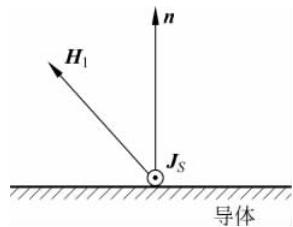


图 5.7 导体表面的感应电流

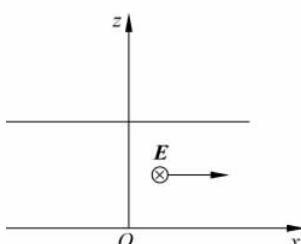


图 5.8 例 5.2 用图

$H_n = H_z = 0$ 。

(2) 导体表面的电流存在于两导体相向的一面,在  $z=0$  的表面上,法线单位矢量  $\hat{n} = e_z$ , 所以

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H} = e_z \times \mathbf{H} |_{z=0} = e_y \frac{\pi}{\omega \mu_0 d} E_0 \sin(\omega t - k_x x)$$

在  $z=d$  的表面上, 法线单位矢量  $\hat{n} = -e_z$ , 所以

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H} = -e_z \times \mathbf{H} |_{z=d} = e_y \frac{\pi}{\omega \mu_0 d} E_0 \sin(\omega t - k_x x)$$

## 5.5 坡印廷定理和坡印廷矢量

### 1. 电磁场的能量

电场的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (5.57)$$

磁场的能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (5.58)$$

由于变化的电场和变化的磁场统称为电磁场, 所以电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (5.59)$$

由于电场、磁场都随时间变化, 所以空间每一点处的能量密度  $w$  也随时间变化, 时变电磁场中就出现能量的流动。

### 2. 能流密度矢量 $\mathbf{S}$ (坡印廷矢量)

能流密度矢量  $\mathbf{S}$  定义为: 单位时间内穿过与能量流动方向垂直的单位截面的能量, 其瞬时值的表达式为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.60)$$

能流密度矢量  $\mathbf{S}$  的单位是  $\text{W/m}^2$ , 方向表示该点能量流动的方向。

### 3. 坡印廷定理

坡印廷定理描述电磁场中能量的守恒和转换关系, 下面推导坡印廷定理的表达式, 由

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.61)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.62)$$

用  $\mathbf{H} \cdot$  式(5.61)减去  $\mathbf{E} \cdot$  式(5.62)可得

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.63)$$

式(5.63)的左边等于  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ , 右边的第1项和第3项分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) \\ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right)\end{aligned}$$

把上式代入式(5.63)中可得

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

把上式两边作体积分, 并注意到  $\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = w$ , 可得

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$

由散度定理  $\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ , 且  $\int_V w dV = W$ , 所以

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (5.64)$$

式(5.64)即为坡印廷定理的数学表达式, 其中  $\frac{\partial W}{\partial t}$  表示  $V$  内单位时间内电磁能量的增量,

$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$  表示通过  $S$  面流入的功率(单位时间内流入的能量), 第3项

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = \int_V p dV = P$$

表示  $V$  内损耗的焦耳热功率(单位时间内损耗的能量)。所以说坡印廷定理描述了电磁场中能量的守恒和转换关系。

## 5.6 时变电磁场的矢量位和标量位

讨论恒定电、磁场时, 为了计算方便, 引入了标量电位  $\Phi$ 、矢量磁位  $\mathbf{A}$  和标量磁位  $\Phi_m$ , 讨论时变电磁场, 也可以引入标量位和矢量位。

### 5.6.1 矢量位 $\mathbf{A}$ 和标量位 $\Phi$ 的引入

#### 1. 矢量位 $\mathbf{A}$ 的引入

由  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  和矢量恒等式  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ ,  $\mathbf{B}$  可以写为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.65)$$

## 2. 标量位 $\Phi$ 的引入

把式(5.65)代入  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

所以  $\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$ , 再由矢量恒等式  $\nabla \times \nabla \Phi = 0$ , 可以写出

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad \text{或} \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.66)$$

可以看出, 引入的标量位与标量电位不同,  $\Phi$  不仅与  $\mathbf{E}$  有关, 而且与  $\mathbf{A}$  有关;  $\mathbf{A}$  也与  $\mathbf{E}$  有关。所以时变电磁场中不再分电位和磁位, 而称为时变电磁场的矢量位和标量位。

## 3. 洛伦兹条件

由式(5.65)和式(5.66)还不能唯一地确定  $\mathbf{A}$  和  $\Phi$ 。例如, 设有

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$\psi$  为任意一个标量, 则

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}' &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \mathbf{A} \\ -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} &= -\nabla \left( \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \psi) \\ &= -\nabla \Phi + \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

即由式(5.65)和式(5.66)可以得到无数多个  $\Phi, \mathbf{A}$ 。这是由于式(5.65)只给出  $\mathbf{A}$  的旋度, 没有给定  $\mathbf{A}$  的散度, 根据亥姆霍兹定理  $\mathbf{A}$  是不确定的。为了唯一地确定  $\mathbf{A}$  和  $\Phi$ , 必须给定  $\mathbf{A}$  的散度, 讨论时变场, 采用洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.67)$$

由式(5.65)、式(5.66)、式(5.67)定义的  $\mathbf{A}, \Phi$  是唯一确定的。

## 5.6.2 达朗贝尔方程

达朗贝尔方程是时变场电磁场的矢量位  $\mathbf{A}$  和标量位  $\Phi$  满足的微分方程。首先推导矢量位  $\mathbf{A}$  的达朗贝尔方程, 对式(5.65)两边取旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{B} = \mu \nabla \times \mathbf{H}$$

把  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  和  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  代入上式可得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Phi) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

经过整理可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu\mathbf{J} + \nabla\left(\mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) - \mu\mathbf{J}$$

利用式(5.67)可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} \quad (5.68)$$

下面推导标量位  $\Phi$  的达朗贝尔方程, 把  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  代入  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ , 并利用式(5.66)可得

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \cdot \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \rho$$

所以

$$\nabla^2 \Phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.69)$$

其中

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$$

把上式代入式(5.69)可得

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.70)$$

由于电磁波传播速度  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ , 式(5.68)、式(5.70)可以写为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} \quad (5.71)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.72)$$

式(5.68)、式(5.70)或式(5.71)、式(5.72)称为  $\mathbf{A}$ 、 $\Phi$  的波动方程或达朗贝尔方程。两式形式完全相同, 而且  $\mathbf{A}$  仅由  $\mathbf{J}$  决定,  $\Phi$  仅由  $\rho$  决定, 给求解  $\mathbf{A}$ 、 $\Phi$  带来方便, 达朗贝尔方程的求解将在第 8 章中介绍。

## 5.7 应用案例 电磁场在医学领域的应用

### 5.7.1 CT

CT(Computed Tomography, 计算机断层扫描)是利用精确准直的 X 线束、 $\gamma$  射线、超声波等, 与灵敏度极高的探测器围绕人体的某一部位作一个接一个的断面扫描, 具有扫描时间快、图像清晰等特点, 可用于多种疾病的检查。CT 机如图 5-9 所示。根据所采用的射线不同可分为 X 射线 CT(X-CT)、超声 CT(UCT)以及  $\gamma$  射线 CT( $\gamma$ -CT)等。传统的 X 射线成像技术只能产生二维图像, 而 CT 扫描产生的是三维图像。

#### 1. 成像原理

X 射线源产生一个很薄的扇形波束, 宽度足以覆盖人体上要检查的部位, 厚度只有

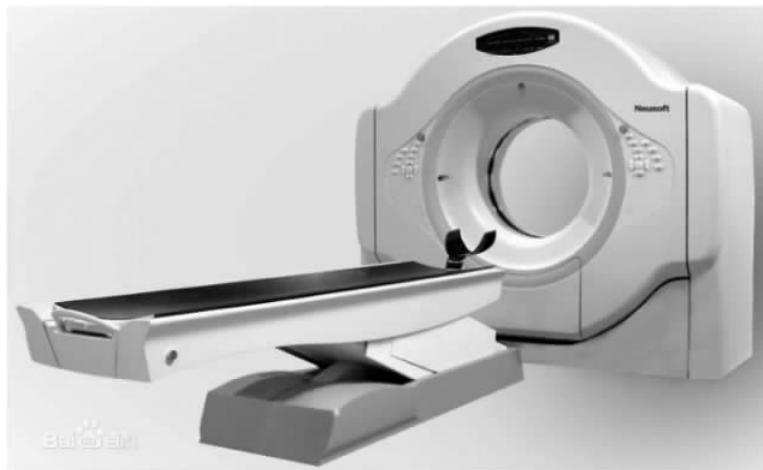


图 5.9 CT 机

几毫米,对人体某一部位一定厚度的层面进行扫描,如图 5.10 所示,扫描的一个断层如图 5.11 所示。由探测器接收透过该层面的 X 射线,转变为电信号,再经模/数转换器变为数字信号输入计算机处理。



图 5.10 CT 扫描

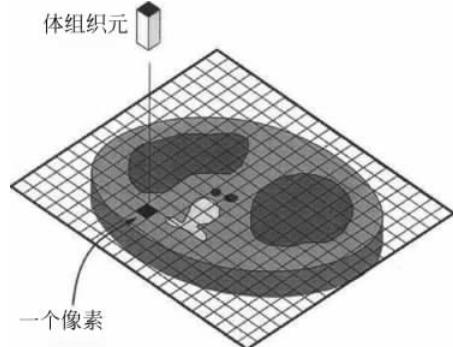


图 5.11 扫描的一个断层

X 射线源和探测器阵列安装在一个环形的框架上,每次几分之一度地绕病人旋转,波束透过人体被探测器阵列接收,这样就从不同的角度(1000 个角度以上)记录了被检查的部位对 X 射线的衰减情况,如图 5.12 所示。对于每一个断层,CT 作  $n \times 10^3$  次检测( $n$  是探测器的数量),CT 就可以重构每个体组织元的三维图像(像素)。病人躺着的平台缓慢地沿轴向移动,检测完一个断层,就开始检测下一个断层。利用这些测量结果,CT 就可以重构每个断层以致整个器官的三维图像。这些像素由黑到白灰度不同,黑影表示低吸收区,即低密度区,如含气体多的肺部;白影表示高吸收区,即高密度区,如骨骼。利用这些立体的图像,医生就可以发现体内各部位的细小病变。

CT 探测器的数量已经多达 4800 个,分布在环形框架的一周,如图 5.13 所示。扫描方

式也从平移/旋转、旋转/旋转、旋转/固定,发展到新近开发的螺旋CT扫描(spiral CT scan)。计算机容量大、运算快,可立即重建图像。由于扫描时间短,可避免运动产生的伪影,例如呼吸产生的干扰,可提高图像质量;层面是连续的,所以不至于漏掉病变。不同CT装置所得图像的像素大小及数目不同。大小可以是 $1.0\text{mm}\times 1.0\text{mm}, 0.5\text{mm}\times 0.5\text{mm}$ 不等;数目可以是 $256\times 256, 512\times 512$ 不等。像素越小,数目越多,构成图像越细致,即空间分辨力越高。

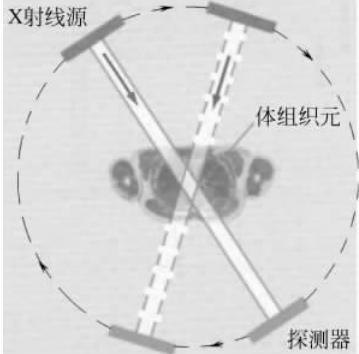


图 5.12 X 射线源和探测器阵列旋转,从不同的角度检测每一个体组织元

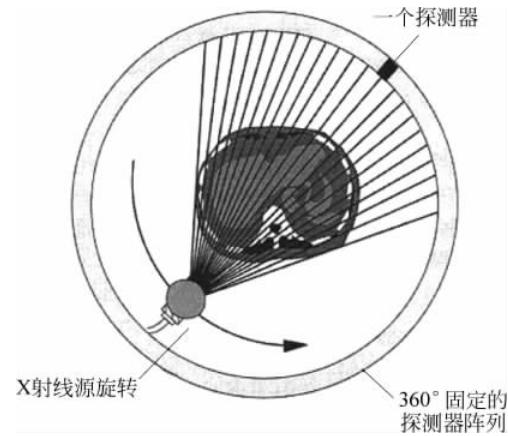


图 5.13 探测器阵列分布在环形框架的一周

## 2. 主要用途

CT除了用于医学检查,还可以用于工业检测,例如设备、部件的无损检测,大型货物集装箱的安保检测等。

### 5.7.2 磁共振成像

#### 1. 核磁共振(NMR)

核磁共振主要是由原子核的自旋运动引起的。原子核是带正电荷的粒子,自旋就能产生环形电流,形成磁矩( $\mathbf{p}_m$ )。

当自旋核处于磁感应强度为 $\mathbf{B}_0$ 的外磁场中时,除自旋外,还会绕 $\mathbf{B}_0$ 运动,这种运动情况与陀螺的运动情况十分相像,称为拉莫尔进动(见 6.6.2 节)。

微观磁矩在外磁场中的取向是量子化的(方向量子化),自旋量子数为 $l$ 的原子核在外磁场作用下只可能有 $2l+1$ 个取向,每一个取向都可以用一个自旋量磁子数 $m$ 来表示, $m$ 与 $l$ 之间的关系是

$$m = l, l-1, l-2, \dots, -l$$

原子核的每一种取向都代表了核在该磁场中的一种能量状态, $l$ 值为 $1/2$ 的核(例如

氢)在外磁场作用下只有两种取向(两个能级):①与外磁场平行,能量低,磁量子数 $m=+1/2$ ;②与外磁场相反,能量高,磁量子数 $m=-1/2$ 。这两种状态之间的能量差是 $\Delta W$ ,一个核要从低能态跃迁到高能态,必须吸收 $\Delta W$ 的能量。

让处于外磁场中的自旋核接受一定频率的电磁波辐射,当辐射的能量恰好等于自旋核两种不同取向的能量差时,处于低能态的自旋核吸收电磁辐射能跃迁到高能态,这种现象称为共振吸收。处于高能态的自旋核也可以把吸收的能量以电磁波的形式辐射出去,从而又跃迁到低能态,这种现象称为共振发射。共振吸收和共振发射的过程就称为“核磁共振(NMR)”。

## 2. 磁共振成像(MRI)

磁共振成像(也称为核磁共振成像)的“核”指的是氢原子核,因为人体约70%是由水组成的,而每个水分子中就有两个氢原子。当把人体的某一部分置于在磁场中,用适当的电磁波照射它,使之发生核磁共振,然后分析释放出的电磁波,就可以得知构成被测部位原子核的位置和组织的种类,据此可以绘制成被测部位的精确立体图像,如图5.14所示。

根据拉莫尔定理,共振频率与磁场强度成正比,设计一个与空间位置一一对应的磁场分布(可以在主磁场 $B_0$ 上叠加一个梯度磁场,梯度磁场一般远远小于主磁场),使得不同位置上的自旋核以不同的频率共振,则每个频率的信号对应着一个具体位置上的被测物的磁共振特性,就可以从测得的NMR信号中生成与某个参数有关的图像,这种把空间位置与磁场、共振频率对应起来的方法称为空间编码。

MRI重建图像的方法有投影重建法、傅里叶变换法、回波平面法等,每一种方法都采用不同的空间编码技术。

人体不同组织之间、正常组织与该组织中的病变组织之间氢核密度、弛豫时间T1、T2三个参数的差异,是MRI用于临床诊断最主要的物理基础。

由于,人体中各种组织含水比例不同,即含氢核数的多少不同,因此NMR信号强度有差异,利用这种差异作为特征量,把各种组织分开,就是氢核密度的核磁共振图像。

加上外磁场后,磁化过程是一个指数函数,这个指数函数的时间常数称为弛豫时间T1。出现共振发射时,发射的电磁波的衰减也是一个指数函数,这个指数函数的时间常数称为弛豫时间T2。对于某一种组织,弛豫时间T1、T2是固定的。

MRI系统由磁铁系统、射频系统和计算机图像重建系统组成。磁铁系统可以产生静磁场和梯度磁场,静磁场是主磁场,当前临床所用超导磁铁,磁场强度为0.5~4.0T(特斯拉),常用的是1.5T和3.0T。梯度磁场用来实现NMR信号的空间编码,由三组线圈产生x、y、z三个方向的梯度磁场,叠加起来,可得到任意方向的梯度磁场。



图5.14 磁共振成像

射频系统产生短而强的射频场,以脉冲方式加到样品上,使样品中的氢核产生 NMR 现象。

计算机图像重建系统,把射频接收器送来的信号经 A/D 转换,根据与观察层面各体素的对应关系,经计算机处理,得出层面图像数据,再经 D/A 转换器,加到图像显示器上,用不同的灰度等级显示出欲观察层面的图像。

由于核磁共振是磁场成像,没有放射性,所以对人体无害,是非常安全的。有的人误认为“核磁共振”中有“核”,就与放射性有关,所以称为“磁共振”更准确一些。磁共振成像在物理、化学、医疗、石油化工、考古等方面获得了广泛的应用。

### 5.7.3 微波切除肿瘤

利用聚焦的微波波束可以消融恶性肿瘤。由成像系统引导,例如 CT 或 B 超,医生能够确定肿瘤的位置,在身体内插入一根很细的同轴传输线(直径 1.5mm),把传输线的顶端(像天线一样的探头)插入到肿瘤内部。传输线的另一端连接到信号发生器,可以传送 915MHz、60W 的功率。肿瘤组织内的极性分子在微波场的作用下高速运动产生热量,当温度升到 60℃ 以上时,肿瘤细胞的蛋白质变性凝固,导致其不可逆坏死。

肿瘤温度的升高与它接收的能量有关,微波消融技术对于治疗肝癌、肺癌、肾上线癌等是一种很有前途的新技术。

高功率纳秒脉冲( $10^{-9} \sim 10^{-12}$  s)也可以用于消融肿瘤。高功率纳秒脉冲具有极高的电压和电流。脉冲的持续时间大约是 200ns,电压和电流的幅度大约分别是 3000V 和 60A,峰值功率大约是 180 000W,而脉冲携带的总能量只有  $1.8 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-7} = 0.0036$ J。虽然能量很低,但是极高的电压对于摧毁恶性肿瘤是非常有效的。一个利用高功率纳秒脉冲消融肿瘤的探头如图 5.15 所示。步骤如下:①打开开关,由于连接到高压源,装置被充电;②关闭开关,由于终端短路,电压波在传输线的终端反射,在开关附近波的极性反转,反射波与入射波在负载处(肿瘤病灶处)相遇,产生瞬态电压脉冲;③最后当波的后沿相遇时,脉冲结束。

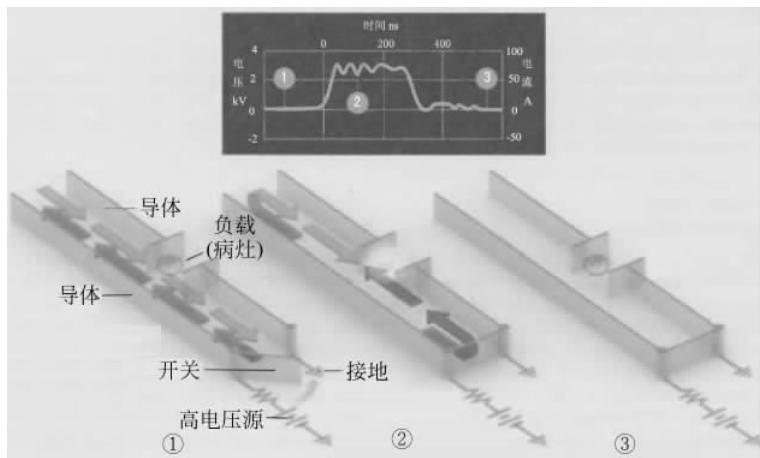


图 5.15 高功率纳秒脉冲消融肿瘤

## 第5章 习题

5-1 已知真空平板电容器的极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ , 当外加电压  $U=U_0 \sin \omega t$  时, 计算电容器中的位移电流, 证明它等于导线中的传导电流。

5-2 一圆柱形电容器, 内导体半径和外导体内半径分别为  $a$  和  $b$ , 长为  $l$ 。设外加电压  $U_0 \sin \omega t$ , 试计算电容器极板间的位移电流, 证明该位移电流等于导线中的传导电流。

5-3 当电场  $\mathbf{E}=e_x E_0 \cos \omega t \text{ V/m}$ ,  $\omega=1000 \text{ rad/s}$  时, 计算下列媒质中传导电流密度与位移电流密度的振幅之比:

- (1) 铜  $\sigma=5.7 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $\epsilon_r=1$ ;
- (2) 蒸馏水  $\sigma=2 \times 10^{-4} \text{ S/m}$ ,  $\epsilon_r=80$ ;
- (3) 聚苯乙烯  $\sigma=2 \times 10^{-16} \text{ S/m}$ ,  $\epsilon_r=2.53$ 。

5-4 由麦克斯韦方程组, 导出点电荷的电场强度计算公式和泊松方程。

5-5 将麦克斯韦方程的微分形式写成 8 个标量方程:

- (1) 在直角坐标系中;
- (2) 在圆柱坐标系中;
- (3) 在球坐标系中。

5-6 试由微分形式麦克斯韦方程组中的两个旋度方程及电流连续性方程导出两个散度方程。

5-7 利用麦克斯韦方程证明: 通过任意闭合曲面的传导电流与位移电流之和等于零。

5-8 在由理想导电壁( $\sigma=\infty$ )限定的区域  $0 \leqslant x \leqslant a$  内存在一个如下的电磁场

$$\begin{aligned} E_y &= H_0 \mu \omega \left( \frac{a}{\pi} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin(kz - \omega t) \\ H_x &= -H_0 k \left( \frac{a}{\pi} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin(kz - \omega t) \\ H_z &= H_0 \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos(kz - \omega t) \end{aligned}$$

验证它们是否满足边界条件, 写出导电壁上的面电流密度表达式。

5-9 设区域 I ( $z < 0$ ) 的媒质参数  $\epsilon_{rl}=1$ ,  $\mu_{rl}=1$ ,  $\sigma_1=0$ ; 区域 II ( $z > 0$ ) 的媒质参数  $\epsilon_{r2}=5$ ,  $\mu_{r2}=20$ ,  $\sigma_2=0$ 。区域 I 中的电场强度

$$\mathbf{E}_1 = e_x [60 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) + 20 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] \text{ V/m}$$

区域 II 中的电场强度

$$\mathbf{E}_2 = e_x A \cos(15 \times 10^8 t - 50z) \text{ V/m}$$

求: (1) 常数  $A$ ;

(2) 磁场强度  $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{H}_2$ ;

(3) 证明在  $z=0$  处  $\mathbf{H}_1$  和  $\mathbf{H}_2$  满足边界条件。

5-10 设电场强度和磁场强度分别为  $\mathbf{E}=E_0 \cos(\omega t + \psi_e)$ ,  $\mathbf{H}=H_0 \cos(\omega t + \psi_m)$ , 证明

其坡印廷矢量的平均值为  $\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \cos(\phi_e - \phi_m)$ 。

5-11 已知真空区域中时变电磁场的瞬时值为  $\mathbf{H}(y, t) = \mathbf{e}_x \sqrt{2} \cos 20x \sin(\omega t - k_y y)$ , 试求电场强度的复矢量、能量密度及能流密度矢量的平均值。

5-12 一个真空中存在的电磁场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x j E_0 \sin kz, \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_y \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos kz$$

其中  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ,  $\lambda$  是波长。求  $z=0, \lambda/8, \lambda/4$  各点的坡印廷矢量的瞬时值和平均值。

5-13 已知电磁波的电场  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} z - \omega t)$ , 求此电磁波的磁场、瞬时值能流密度矢量及其在一周期内的平均值。

5-14 已知时变电磁场中矢量位  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_m \sin(\omega t - kz)$ , 其中  $A_m, k$  是常数。求电场强度、磁场强度和瞬时坡印廷矢量。



赫兹

(Heinrich Rudolph Hertz, 1857—1894, 德国)

1887 年首先发表了电磁波发生和接收的实验论文,证实了电磁波的存在。