第 5 章　基于状态空间模型的设计法系统习题解答

5.1　本章内容概要

1. 控制系统的离散状态空间描述

连续系统的离散化就是根据已知的连续系统的状态空间表达式来做离散化处理，以得到时间离散的状态空间表达式。对连续对象离散化时需要考虑精确度问题，不精确的离散化处理，会使离散化后的系统与原来的连续系统的"结构"发生变化，甚至两者的动力学特征大相径庭，造成控制的失误。

对于线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^l, n \geqslant m \geqslant l\end{cases}$$

式中，各系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{C}$ 都为常数矩阵。

系统离散化的原则是：在每个采样时刻 kT（$k=0,1,2,\cdots$，其中 T 为采样周期），系统离散化前后的 $\boldsymbol{u}(kT)$，$\boldsymbol{x}(kT)$，$\boldsymbol{y}(kT)$保持不变。而采样的方法是在 $t=kT$ 时刻对 $\boldsymbol{u}(t)$值采样得 $\boldsymbol{u}(kT)$，并通过零阶保持器，使 $\boldsymbol{u}(kT)$的值在$[kT,(k+1)T]$时间段保持不变。

根据上述离散化原则，我们有离散化后的动态方程为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}((k+1)T) = \boldsymbol{G}(T)\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{H}(T)\boldsymbol{u}(kT) \\ \boldsymbol{y}(kT) = \boldsymbol{C}(T)\boldsymbol{x}(kT)\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}$，称为系统矩阵，或状态转移矩阵；$\boldsymbol{H} = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}$，为控制矩阵，控制输入矩阵，或控制转移矩阵；$\boldsymbol{C}$ 为输出矩阵，或观测矩阵。

线性系统离散化需要精确地计算矩阵 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$，所以关键是要计算 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}$，而计算 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}$ 主要的方法有拉普拉斯逆变换、约当标准形、矩阵指数函数有限多项式分解以及计算机迭代求级数和等方法，还可利用 MATLAB 工具。

离散时间状态空间方程求解一般有两种方法：递推法（迭代法）和 z 变换法。

2. 离散系统的能控性、能观性与稳定性

能控性从严格意义上说有两种，一种是系统控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$对系统内部状态 $\boldsymbol{x}(t)$的控制能力；另一种是控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$对系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$的控制能力。但是一般没有特别指明时，指的都是状态的可控性。能观（测）性针对的是系统状态空间模型中的状态的可观测性，它反

映系统的内部状态(通常是不可以直接测量的)被系统的输出量 $\boldsymbol{y}(t)$(通常是可以直接测量的)所反映的能力。所以,系统的能控性和能观性研究一般都是基于系统的状态空间表达式的。

1) 离散系统的能控性

n 阶线性定常离散系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\end{cases}$$

如果存在有限步控制信号序列 $\boldsymbol{u}(k)$、$\boldsymbol{u}(k-1)$、…、$\boldsymbol{u}(n-1)$,使得系统第 k 步上的状态 $\boldsymbol{x}(k)$能在第 n 步到达零状态,即 $\boldsymbol{x}(n)=0$,那么就说系统第 k 步上的状态 $\boldsymbol{x}(k)$是能控的;如果第 k 步上的所有状态都能控,则称系统在第 k 步上是完全能控的。进一步,如果系统的每一步都是可控的,那么称系统完全可控,或称系统为能控系统。

n 阶线性定常离散系统能控的充要条件是能控判别阵 $\boldsymbol{Co}=[\boldsymbol{H}\quad \boldsymbol{GH}\quad \cdots\quad \boldsymbol{G}^{n-1}\boldsymbol{H}]$的秩等于 n。

2) 离散系统的能观性

n 阶线性定常离散系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\end{cases}$$

如果根据第 i 步及以后有限步的输出观测 $\boldsymbol{y}(i)$,$\boldsymbol{y}(i+1)$,…,$\boldsymbol{y}(N)$,能唯一地确定第 i 步的状态 $\boldsymbol{x}(i)$,则称系统能观。

n 阶线性定常离散系统完全能观的充要条件为能观判别阵 $\boldsymbol{Ob}=[\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{CG}\quad \cdots\quad \boldsymbol{CG}^{n-1}]^{\mathrm{T}}$ 的秩等于 n。

3) 离散系统稳定性分析

系统的稳定一般有外部稳定和内部稳定两种。外部稳定又称作输出稳定,也就是当系统在干扰取消后,在一定时间内,其输出会恢复到原来的稳态输出。系统内部稳定主要针对系统内部状态,反映的是系统内部状态受干扰信号的影响。当扰动信号取消后,系统的内部状态会在一定时间内恢复到原来的平衡状态,则称系统状态稳定。

(1) 基于状态空间模型的外部稳定性判别

状态空间模型系统稳定,必须使特征方程$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}|=0$ 的根,亦即矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征值,全部位于 z 平面的单位圆内。

(2) Liapunov 稳定性

Liapunov 意义下的稳定性、一致稳定性、渐近稳定性和大范围稳定性的定义和判别条件。

内部稳定与外部稳定的关系:

① 内部稳定的系统外部一定稳定;

② 外部稳定的系统不能保证内部稳定;

③ 完全能控和能观系统,则外部稳定与内部稳定等价。

3. 极点配置设计法

闭环系统的极点分布与系统的控制性能之间存在密切的关系。因此控制系统的设计任务就是应用反馈使闭环系统具有期望的极点配置。所谓极点配置设计法,就是在给定了闭

环系统的极点位置后，在已知被控制对象模型的前提下，如何设计反馈控制律来达到给定的极点配置，使得闭环系统既有克服扰动的能力，又有跟踪给定值 r（参考输入）的能力。

基于状态空间模型按极点配置设计的控制器是由两部分组成：一部分是状态观测器，它根据所量测到的输出 $\boldsymbol{y}(k)$ 重构出状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$；另一部分是状态反馈控制律，它直接反馈重构的状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$，构成状态反馈控制。其结构如图 5.1 所示。

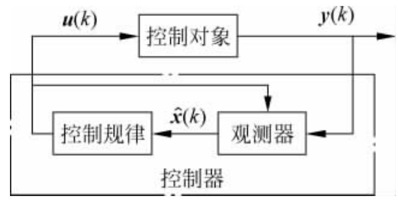

图 5.1　控制器结构图

根据分离性原理，控制器的设计可以分成两个独立的部分：

（1）按控制极点配置设计控制律（控制极点即期望的闭环系统极点）；

（2）按观测极点配置设计状态观测器（观测极点指的是状态观测器的极点）。

最后再把两者结合起来，构成状态反馈控制器。

1）基于极点配置的状态反馈控制规律设计。

设控制规律为线性状态反馈，即

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{r}(k)$$

假设 $\boldsymbol{r}(k)=0$，并暂时假设所反馈的是实际对象的全部状态 $\boldsymbol{x}(k)$，而不是重构状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$。

将上式代入离散系统状态方程，得到闭环系统状态方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{G}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(k)\\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\end{cases}$$

因此，闭环系统特征方程为

$$|z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{K})| = 0$$

设计反馈控制规律 $\boldsymbol{K}$，以使得闭环系统具有所需要的极点配置。

极点配置法的基本思想是，首先根据对系统性能的要求，确定期望的闭环系统的控制极点 $z_i, i=1,2,\cdots,n$，再求得要求的闭环系统特征方程为

$$\beta_c(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = z^n+\beta_1 z^{n-1}+\cdots+\beta_n = 0$$

而反馈控制规律 $\boldsymbol{K}$ 满足 $|z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{K})|=\beta_c(z)$。对于任意的极点配置，反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 具有唯一解的充分必要条件是控制对象完全能控。$\boldsymbol{K}$ 的求解方法有系数匹配和矩阵运算两种。

2）基于极点配置的观测器设计

为了实现状态反馈，除了可以利用不完全状态反馈或输出反馈外，最常用的方法是利用观测器（估计器）来观测、估计系统的状态。

给定系统的状态方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)\\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\end{cases}$$

观测器估计系统状态构造的系统模型为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{H}u(k)$$

式中 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$ 为模型的状态，或状态的估计值。如果 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{u}(k)$ 已知，且给定了系统的初始状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}(0)$，那么用上式就可求得状态的估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$。为了使估计的状态更准确，模型的参数及初始条件必须和真实系统一致。由于没有利用估计误差进行反馈修正，所以此估

计模型称为开环估计。

若$\tilde{\boldsymbol{x}}$为估计误差，则有

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$$

观测误差的状态方程为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$$

可以看到开环估计时，观测误差$\tilde{\boldsymbol{x}}$的转移矩阵是原系统的转移矩阵 $\boldsymbol{G}$，这是不希望的。因为在实际系统中，如果原系统是不稳定的，那么观测误差$\tilde{\boldsymbol{x}}$将随着时间的增加而发散；如果 $\boldsymbol{G}$ 阵的模态收敛很慢，观测值$\hat{\boldsymbol{x}}(k)$也不能很快收敛到 $\boldsymbol{x}(k)$的值，将影响观测效果。

为了解决开环估计的缺点，可以利用观测误差修正模型的输入，构成闭环估计器。

由于利用系统输出值不同，有两种实现状态闭环估计的方法：一种方法是利用 $\boldsymbol{y}(k-1)$ 值来估计状态 $\boldsymbol{x}(k)$值——预报观测器，如图 5.2(b)所示；另一种方法是利用当今测量值 $\boldsymbol{y}(k)$估计 $\boldsymbol{x}(k)$值——现时观测器，如图 5.2(a)所示。

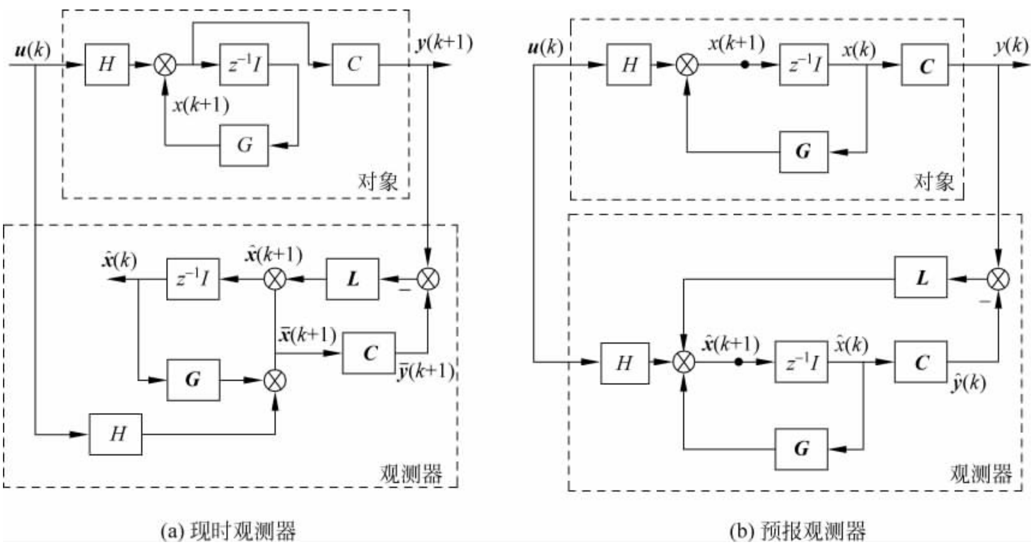

图 5.2　观测器结构图

现时观测器方程

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) &= \bar{\boldsymbol{x}}(k+1) + \boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}(k+1) - \bar{\boldsymbol{y}}(k+1)] \\ &= \boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}(k+1) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k))] \\ &= (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{LCG})\hat{\boldsymbol{x}}(k) + (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{LCH})\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(k+1)\end{aligned}$$

现时观测误差方程

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) = (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{LCG})\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$$

预报观测器

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) &= \boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k)] \\ &= (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(k)\end{aligned}$$

预报观测误差方程

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) = (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$$

预报观测器和现时观测器都是根据输出量重构出全部状态，即观测器的维数等于状态

的个数,因此也称为全维观测器。对于任意的极点配置,全维观测器的增益矩阵 $\boldsymbol{L}$ 具有唯一解的充要条件是系统完全能观。

如果系统状态不完全能观,即所能量测到的输出量只是系统的一部分状态,则可以设计较低阶的状态观测器,称为降维观测器,根据这部分可量测到的状态,再重构出其余不能量测的状态。

3）基于极点配置的控制器设计

按极点配置设计的状态观测器和控制律,不仅可以组成状态反馈的比例控制器,为了克服扰动和消除静差,还可以引入积分控制。设计实用控制器,首先假设 $\boldsymbol{r}(k)=0$,按极点配置方法设计出状态观测器和控制律,以保证系统具有满意的稳定性和克服扰动的能力,使系统从非零的初始状态回到零状态时具有较好的调节性能;然后再引入给定值 $\boldsymbol{r}(k)$,以使系统具有满意的跟踪性能及稳态精度。

闭环系统的 $2n$ 个极点由两部分组成:一部分是按极点配置设计控制律所给定的 n 个控制极点;另一部分是按极点配置设计观测器所给定的 n 个观测器极点,就是分离性原理。

设计控制器时,控制极点是按照对闭环系统性能的要求来设置的,因而控制极点成为整个闭环系统的主导极点;观测器极点的设置应使状态重构具有较快的跟随速度。如果量测输出中无大的误差或噪声,则可以考虑将观测器极点都设置在原点;如果量测输出中含有较大的误差或噪声,则可以考虑按观测器极点所对应的衰减速度比控制极点所对应的衰减速度快约 4 或 5 倍的要求来设置。

观测器类型的选择应考虑以下两点:

（1）如果控制器的计算延时与采样周期处于同一量级,则可考虑选用预报观测器,否则可选用现时观测器。

（2）如果量测输出比较准确,而且它也是系统的一个状态,则可考虑选用降维观测器,否则可选用全维观测器。

4. 线性二次型最优控制

如果过程对象是线性的,且可以是多输入和多输出。若系统性能指标(系统目标泛函)是状态和控制信号的二次型函数,则系统设计问题称为线性二次型(Linear Quadratic,LQ)控制问题。若涉及的是调节系统,则系统设计问题称为线性二次型状态调节器(Linear Quadratic Regulator,LQR)设计,简称 LQR 设计。

5.2　学习重点及例题

本章首先讲述连续状态空间模型离散化的方法,系统可控性、可观测性与稳定性的判别,然后讲述给定闭环极点的极点配置设计法,以及最优控制和最优估计。学习的重点是:

（1）基于状态空间模型的极点配置设计,包括状态反馈控制规律的设计、观测器的设计和控制器的设计问题。

（2）线性二次型最优控制问题。

例 5-1 某计算机控制系统如图 5.3 所示，采样周期 $T=0.1\mathrm{s}$，求系统的离散状态方程。

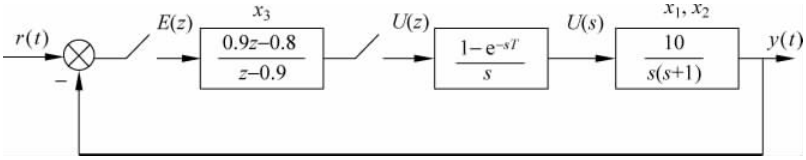

图 5.3 计算机控制系统框图

解：由图 5.3 可得

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{0.9z-0.8}{z-0.9}=0.9+\frac{0.01}{z-0.9},\quad U(z)=0.9E(z)+0.01\frac{E(z)}{z-0.9}$$

(1) 控制器部分

设$X_3(z)=\dfrac{E(z)}{z-0.9}$，则有

$$\begin{cases}x_3(k+1)=0.9x_3(k)+e(k)\\u(k)=0.9e(k)+0.01x_3(k)\end{cases}$$

(2) 连续部分

先求 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，再求 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10}{s(s+1)}\rightarrow\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=10u(t)$$

令$x_1=y$，$x_2=\dot{x}_1=\dot{y}$，得连续部分状态方程

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix}u(t)\\y(t)=x_1(t)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

将上述状态方程离散化

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\,|_{t=T}=\begin{bmatrix}1&1-\mathrm{e}^{-t}\\0&\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\Bigg|_{t=T}=\begin{bmatrix}1&0.0952\\0&0.9048\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t\boldsymbol{B}=\int_0^T\begin{bmatrix}1&1-\mathrm{e}^{-t}\\0&\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\mathrm{d}t\boldsymbol{B}=\int_0^T10\begin{bmatrix}1-\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}\mathrm{d}t=10\begin{bmatrix}T-1+\mathrm{e}^{-T}\\1-\mathrm{e}^{-T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0484\\0.9516\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\boldsymbol{H}u(k)=\begin{bmatrix}1&0.0952\\0&0.9048\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0484\\0.9516\end{bmatrix}u(k)$$

(3) 反馈部分

$$e(k)=r(k)-y(k)=r(k)-x_1(k)$$

代入控制器

$$\begin{cases}x_3(k+1)=0.9x_3(k)+r(k)-x_1(k)\\u(k)=0.9r(k)-0.9x_1(k)+0.01x_3(k)\end{cases}$$

最后得

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9565 & 0.0952 & 0.000484\\-0.8565 & 0.9048 & 0.00952\\-1 & 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0435\\0.8565\\1\end{bmatrix}r(k)\\ y(k)=x_1(k)=[1\quad 0\quad 0]\boldsymbol{X}(k)\end{cases}$$

例 5-2　试用 z 变换法求下面状态方程的解

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.16 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

设 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$u(k)=1$。

解：根据题意得

$$\boldsymbol{G}^k=\boldsymbol{\Phi}(k)=Z^{-1}[(z\mathbf{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z]=Z^{-1}\left\{z\begin{bmatrix}z & -1\\0.16 & z+1\end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4(-0.2)^k-(-0.8)^k & 5[(-0.2)^k-(-0.8)^k]\\0.8[(-0.8)^k-(-0.2)^k] & 4(-0.8)^k-(-0.2)^k\end{bmatrix}$$

于是可算出

$$Z^{-1}[(z\mathbf{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z]\boldsymbol{x}(0)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4(-0.8)^k-(-0.2)^k\\0.2(-0.2)^k-3.2(-0.8)^k\end{bmatrix}$$

$$Z^{-1}[(z\mathbf{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{H}U(z)]\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-\frac{15}{6}(-0.2)^k+\frac{10}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18}\\\frac{1}{2}(-0.2)^k-\frac{8}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18}\end{bmatrix}$$

解得

$$\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{22}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18}\\\frac{1.7}{3}(-0.2)^k-\frac{17.6}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18}\end{bmatrix}$$

例 5-3　某闭环系统状态方程为 $\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & T\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}T^2/2\\T\end{bmatrix}u(k)$，求状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$，是系统闭环极点为 $z_{1,2}=0.8\pm \mathrm{j}0.25$。

解：取 $u(k)=-[K_1\ K_2]x(k)$

$$\boldsymbol{G}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1 & T\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}T^2/2\\T\end{bmatrix}[K_1\quad K_2]=\begin{bmatrix}1-T^2K_1/2 & T-T^2K_2/2\\-TK_1 & 1-TK_2\end{bmatrix}$$

$$\det[z\mathbf{I}-(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{K})]=\begin{vmatrix}z-1+T^2K_1/2 & -T+T^2K_2/2\\TK_1 & z-1+TK_2\end{vmatrix}$$

$$=z^2+(T^2K_1/2+TK_2-2)z+(T^2K_1/2-TK_2+1)=0$$

因为 $z_{1,2}=0.8\pm \mathrm{j}0.25$，所以

$$\Delta(z)=z^2-1.6z+0.7$$

对应系数相等

$$\begin{cases}T^2K_1/2+TK_2-2=-1.6\\T^2K_1/2-TK_2+1=0.7\end{cases}$$

在 $T=0.1\mathrm{s}$ 时，可得 $\boldsymbol{K}=[10\quad 3.5]$。

最终得 $u(k)=[10 \quad 3.5]x(k)$。

5.3 习题及解答

5-1 已知连续时间系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

设 $T=1\text{s}$,试求相应的离散时间状态方程。并用迭代法求解 $x(kT)$。

解:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.233 \\ -0.465 & -0.097 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.233 \\ -0.465 & -0.097 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix}u(k)$$

$$k=0:\ \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}u(0) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.233 \\ -0.465 & -0.097 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix}u(0)$$

$$\begin{aligned} k=1:\ \boldsymbol{x}(2) &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{H}u(1) = \boldsymbol{G}^2\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{H}u(1) \\ &= \begin{bmatrix} 0.252 & 0.117 \\ -0.234 & -0.099 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0) + \begin{bmatrix} 0.174 \\ -0.116 \end{bmatrix}u(0) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix}u(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=2:\ \boldsymbol{x}(3) &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(3)+\boldsymbol{H}u(3) = \boldsymbol{G}^3\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H}u(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}u(1)+\boldsymbol{H}u(2) \\ &= \begin{bmatrix} 0.096 & 0.047 \\ -0.094 & -0.045 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0) + \begin{bmatrix} 0.078 \\ -0.07 \end{bmatrix}u(0) + \begin{bmatrix} 0.174 \\ -0.116 \end{bmatrix}u(1) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix}u(2) \end{aligned}$$

$\vdots$

5-2 设单输入线性定常离散系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

试判断其能控性。

解:能控判别阵

$$\boldsymbol{Co} = [\boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix},\ \det(\boldsymbol{Co}) = 4 \neq 0,\text{系统能控}$$

5-3 已知线性定常离散系统的动态方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}(k), \quad i=1,2 \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -2 & 1\\3 & 0 & 2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

试判断系统的可观测性,并讨论可观测性的物理解释。

解:可观测性判别矩阵

$$\boldsymbol{Ob}_1=[\boldsymbol{C}_1\quad \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{G}^2]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\\3 & 4 & 0\end{bmatrix},\det(\boldsymbol{Ob}_1)=3\neq 0,\text{系统可观。}$$

$$\boldsymbol{Ob}_2=[\boldsymbol{C}_2\quad \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{G}^2]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\3 & 0 & 2\\1 & 0 & -1\\9 & 0 & 1\\-2 & 0 & -3\end{bmatrix},\mathrm{rank}(\boldsymbol{Ob}_2)=2<n,\text{系统不可观测。}$$

由输出方程 $y(k)=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix}x_3(k)\\x_1(k)\end{bmatrix}$及动态方程,有

$$y(k+1)=\begin{bmatrix}x_3(k+1)\\x_1(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1(k)+2x_3(k)+u(k)\\x_1(k)-x_3(k)+2u(k)\end{bmatrix}$$

$$y(k+2)=\begin{bmatrix}x_3(k+2)\\x_1(k+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1(k+1)+2x_3(k+1)+u(k+1)\\x_1(k+1)-x_3(k+1)+2u(k+1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9x_1(k)+x_3(k)+8u(k)+u(k+1)\\-2x_1(k)-3x_3(k)+u(k)+2u(k+1)\end{bmatrix}$$

可以看出,三步的输出测量值中,始终不含 $x_2(k)$,故 $x_2(k)$是不可观测的状态变量。只要有一个状态变量是不可观测的,系统就是不可观测的。

5-4　设连续控制对象的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -0.1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

采样周期 $T=1\mathrm{s}$。

(1) 要求闭环系统的特征多项式$\beta_c(z)=z^2-0.786z+0.368$,求解 $\boldsymbol{K}$。

(2) 要求观测器的特征多项式$\beta_o(z)=z^2-0.16z+0.0064$,求解 $\boldsymbol{L}$。

解:由行列式 $\det(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})=\lambda(\lambda+0.1)$,得特征根 $\lambda_1=0,\lambda_2=-0.1$,按有限多项式分解法可以算出

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}=\begin{bmatrix}1 & 10-10\mathrm{e}^{-0.1T}\\0 & \mathrm{e}^{-0.1T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10(1-\mathrm{e}^{-0.1T})\\0 & \mathrm{e}^{-0.1T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.952\\0 & 0.905\end{bmatrix}$$

$$G_1 = \int_0^T e^{At}dt = \begin{bmatrix} T & 10T + 100(e^{-0.1T} - 1) \\ 0 & 10(1 - e^{-0.1T}) \end{bmatrix}$$

$$H = G_1 B = \begin{bmatrix} T + 10(e^{-0.1T} - 1) \\ 1 - e^{-0.1T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.048 \\ 0.095 \end{bmatrix}$$

$$Co = [H \quad GH] = \begin{bmatrix} 0.048 & 0.138 \\ 0.095 & 0.086 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}(Co) = 2 = n, \quad \text{系统能控}$$

$$Ob = [C \quad CG]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.952 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}(Ob) = 2 = n, \quad \text{系统可观测}$$

(1) $K = [0 \quad 1][H \quad GH]^{-1}\beta_c(G)$

$$= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0.048 & 0.138 \\ 0.095 & 0.086 \end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0.952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}^2 - 0.786\begin{bmatrix} 1 & 0.952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} + 0.368\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= [6.156 \quad 8.725]$$

(2) $L = \beta_o(G)\begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0.952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}^2 - 0.16\begin{bmatrix} 1 & 0.952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} + 0.0064\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.952 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.745 \\ 0.715 \end{bmatrix}$$

5-5 伺服系统的状态方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}x(k) + \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}u(k)$$

试利用极点配置法求全状态反馈增益，使闭环极点在 s 平面上位于 $\xi = 0.46$，$\omega_n = 4.2\mathrm{rad/s}$，假定采样周期 $T = 0.1\mathrm{s}$。

解：s 平面极点为：

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \mathrm{j}\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = -1.93 \pm \mathrm{j}3.73$$

对应 z 平面的极点为：

$$z_{1,2} = e^{sT} = e^{-0.193 \pm \mathrm{j}0.373} = 0.82\,e^{\pm \mathrm{j}0.373} = 0.76 \pm \mathrm{j}0.3$$

闭环系统的特征方程为：

$$\beta_c(z) = (z - 0.76 + \mathrm{j}0.3)(z - 0.76 - \mathrm{j}0.3) = z^2 - 1.52z + 0.67$$

解得

$K = [0 \quad 1][H \quad GH]^{-1}\beta_c(G)$

$$= [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0.00484 & 0.013903 \\ 0.0952 & 0.086156 \end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}^2 - 1.52\begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} + 0.67\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= [15.14 \quad 3.11]$$

或

$$|zI - (G - HK)| = \left|\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\right|$$

$$= (z - 1 + 0.00484k_1)(z - 0.905 + 0.0952k_2)$$

$$-0.0952k_1(0.00484k_2-0.0952)$$
$$=z^2-1.52z+0.67$$

比较系数即得结果。

5-6　试简述预报观测器与现时观测器的区别，写出现时观测器方程。

答：为了解决开环估计的缺点，可以利用观测误差修正模型的输入，构成闭环估计器。由于利用系统输出值不同，有两种实现闭环估计的方法：一种是利用 $\boldsymbol{y}(k-1)$值来估计状态 $\boldsymbol{x}(k)$，即预报观测器；另一种方法是利用当前测量值 $\boldsymbol{y}(k)$估计 $\boldsymbol{x}(k)$值，即现时观测器。预报观测器与现时观测器的结构图如图 5.2 所示。

现时观测器方程

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)&=\bar{\boldsymbol{x}}(k+1)+\boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}(k+1)-\bar{\boldsymbol{y}}(k+1)]\\&=\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{Hu}(k)+\boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}(k+1)-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{G}\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{Hu}(k))]\\&=[\boldsymbol{G}-\boldsymbol{LCG}]\hat{\boldsymbol{x}}(k)+[\boldsymbol{H}-\boldsymbol{LCH}]\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{Ly}(k+1)\end{aligned}$$

观测误差方程

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)=[\boldsymbol{G}-\boldsymbol{LCG}]\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$$

5-7　状态观测器的用途是什么？

答：如果控制系统采用极点配置的方法来设计，就必须要得到系统的各个状态，然后才能状态反馈进行极点配置。然而，大多数被控系统的状态是不能直接得到的，于是提出了利用被控系统的输入量和输出量重构原系统的状态，这样原系统的状态就能被等价取出，从而进行状态反馈，达到改善系统的目的。另外，状态观测器可以用来监测被控系统的各个参量。

5-8　已知线性定常离散系统的动态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{Gx}(k)+\boldsymbol{H}u(k)$$

其中 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0&0.2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，试求 Liapunov 最优状态反馈。

解：

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}=-\mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix}0.5&0\\0.5&0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0&0.2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

解得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1.33&0.37\\0.37&1.47\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}&=[\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PH}]^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PG}\\&=\left[\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.33&0.37\\0.37&1.47\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.33&0.37\\0.37&1.47\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0&0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.24&0.34\end{bmatrix}\end{aligned}$$

5-9　已知线性定常离散系统的状态方程为 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{Gx}(k)+\boldsymbol{H}u(k)$，$y(k)=\boldsymbol{Cx}(k)$，其中 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0.607&0\\0.393&0.5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0.393\\0.107\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$，试进行 LQR 设计，并求系统的控制序列和响应序列。

解：可参照本书配套教材 P134，例 5.17。