

电容器和电介质

前面两章我们讨论了真空中以及导体存在时的电场。实际上,电场中也存在电介质,即绝缘体。本章将讨论电介质和电场的相互影响。为了讲解的方便,先介绍一种用途广泛的电学元件——电容器。然后说明电场对电介质的影响——电极化以及电介质极化后对电场的影响,为此引入电位移矢量及高斯定律。最后介绍电容器的能量并导出有电介质存在时的电场能量密度公式。

12.1 电容器及其电容

靠近的两个导体带电时会通过它们的电场相互发生影响。这在实际的电子线路中是需要考虑的,也常利用这种现象为特定目的形成特殊分布的电场,电容器就是一例。

电容器的最简单而且最基本的形式是平行板电容器。它是用两块平行放置的相互绝缘的金属板构成的(图 12.1),本节讨论板间为真空的情况。平行板电容器带电时,它的两个金属板的相对的两个表面(这是一个电容器的有效表面)上总是同时分别带上等量异号的电荷 $+Q$ 和 $-Q$,这时两板间有一定的电压 $U = \varphi_+ - \varphi_-$ 。一个电容器所带的电量 Q 总与其电压 U 成正比,比值 Q/U 叫电容器的**电容**。以 C 表示电容器的电容,就有

$$C = \frac{Q}{U} \quad (12.1)$$

电容器的电容决定于电容器本身的结构,即两导体的形状、尺寸以及两导体间电介质的种类(见 12.3 节)等,而与它所带的电量无关。

在国际单位制中,电容的单位名称是法[拉],符号为 F,

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$$

实际上 1 F 是非常大的,常用的单位是 μF 或 pF 等较小的单位,

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

$$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$$

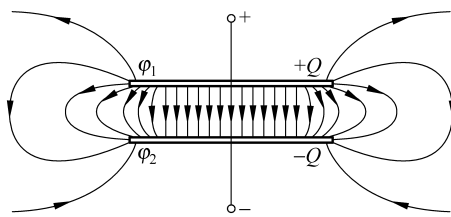


图 12.1 平行板电容器带电和电场分布情况

从式(12.1)可以看出,在电压相同的条件下,电容 C 越大的电容器,所储存的电量越多。这说明电容是反映电容器储存电荷本领大小的物理量。实际上除了储存电量外,电容器在电工和电子线路中起着很多作用。交流电路中电流和电压的控制,发射机中振荡电流的产生,接收机中的调谐,整流电路中的滤波,电子线路中的时间延迟等都要用到电容器。

简单电容器的电容易于计算出来,下面举几个例子。对如图 12.1 所示的平行板电容器,以 S 表示两平行金属板相对着的表面积,以 d 表示两板之间的距离,仍设两板间为真空。为了求它的电容,我们假设它带上电量 Q (即两板上相对的两个表面分别带上 $+Q$ 和 $-Q$ 的电荷)。忽略边缘效应(即边缘处电场的不均匀情况),可以认为它的两板间的电场是均匀电场,电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

两板间的电压就是

$$U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

将此电压代入电容的定义式(12.1)就可得出平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (12.2)$$

圆柱形电容器由两个同轴的金属薄壁圆筒组成。如图 12.2 所示,设筒的长度为 L ,两筒的半径分别为 R_1 和 R_2 ,两筒之间仍设为真空。为了求出这种电容器的电容,我们也假设它带有电量 Q (即外筒的内表面和内筒的外表面分别带有电量 $-Q$ 和 $+Q$)。忽略两端的边缘效应,可以求出,在两圆筒间距离轴线为 r 的一点的电场强度为

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL},$$

场强的方向垂直于轴线而沿径向,由此可以求出两圆筒间的电压为

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

将此电压代入电容的定义式(12.1),就可得圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \quad (12.3)$$

球形电容器是由两个同心的导体球壳组成。如果两球壳间为真空(图 12.3),则可用与上面类似的方法求出球形电容器的电容为

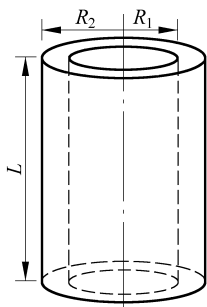


图 12.2 圆柱形电容器

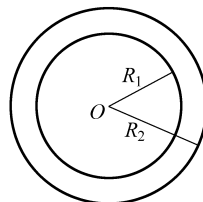


图 12.3 球形电容器

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (12.4)$$

式中 R_1 和 R_2 分别表示内球壳外表面和外球壳内表面的半径。

式(12.2)、式(12.3)和式(12.4)的结果都表明电容的确只决定于电容器的结构。

实际的电工和电子装置中任何两个彼此隔离的导体之间都有电容,例如两条输电线之间,电子线路中两段靠近的导线之间都有电容。这种电容实际上反映了两部分导体之间通过电场的相互影响,有时叫做“杂散电容”或“分布电容”。在有些情况下(如高频率的变化电流),这种杂散电容对电路的性质产生明显的影响。

对一个孤立导体,可以认为它和无限远处的另一导体组成一个电容器。这样一个电容器的电容就叫做这个孤立导体的电容。例如对一个在空气中的半径为 R 的孤立的导体球,就可以认为它和一个半径为无限大的同心导体球组成一个电容器。这样,利用式(12.4),使 $R_2 \rightarrow \infty$,将 R_1 改写为 R ,又因为空气可近似地当真空处理,所以这个导体球的电容就是

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (12.5)$$

衡量一个实际的电容器的性能有两个主要的指标,一个是它的电容的大小,另一个是它的耐(电)压能力。使用电容器时,所加的电压不能超过规定的耐压值,否则在电介质中就会产生过大的场强,而使它有被击穿而失效的危险(见 12.3 节)。

12.2 电容器的联接

在实际电路中当遇到单独一个电容器的电容或耐压能力不能满足要求时,就把几个电容器联接起来使用。电容器联接的基本方式有并联和串联两种。

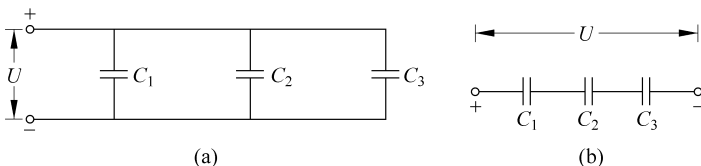


图 12.4 电容器联接

(a) 三个电容器并联; (b) 三个电容器串联

并联电容器组如图 12.4(a)所示。这时各电容器的电压相等,即总电压 U ,而总电量 Q 为各电容器所带的电量之和。以 $C=Q/U$ 表示电容器组的总电容或等效电容,则可证明,对并联电容器组,

$$C_{\text{par}} = \sum C_i \quad (12.6)$$

串联电容器组如图 12.5(b)所示。这时各电容器所带电量相等,也就是电容器组的总电量 Q ,总电压 U 等于各个电容器的电压之和。仍以 $C=Q/U$ 表示总电容,则可以证明,对于串联电容器组

$$\frac{1}{C_{\text{ser}}} = \sum \frac{1}{C_i} \quad (12.7)$$

电容器的并联和串联比较如下。并联时,总电容增大了,但因每个电容器都直接连到电压源上,所以电容器组的耐压能力受到耐压能力最低的那个电容器的限制。串联时,总电容

比每个电容器都减小了,但是,由于总电压分配到各个电容器上,所以可以提高电容器组的耐压能力。

下面给出式(12.6)和式(12.7)的证明。

对图 12.4(a)表示的三个电容器并联情况,由于它们的一个板连在一起,另一个板也连在一起,连在一起的板的电势相等,所以各电容器具有相同的电压,即 $U_1=U_2=U_3=U$,即 U 为电容器组的电压。由于各电容器的电量都是由电源供给的,所以电容器的总电量为 $Q=Q_1+Q_2+Q_3$ 。根据式(12.1),电容器组的总电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U_1} + \frac{Q_2}{U_2} + \frac{Q_3}{U_3}$$

又根据式(12.1),后面各项分别等于各电容器的电容,所以由上式可得 $C=C_1+C_2+C_3$ 。把此结果推广到任意多个电容器的并联,就得到式(12.6)。

对图 12.4(b)表示的三个电容器串联的情况,各电容器的一个板依次单独与下一个电容器的一个板相连接,电源只向最外面的两板供给电量 $+Q$ 和 $-Q$,其他各板所带电量都是静电感应产生的,所以 $Q_1=Q_2=Q_3=Q$ 即为电容器组的总电量。电容器组的总电压显然等于各电容器的电压之和,即 $U=U_1+U_2+U_3$ 。根据式(12.1),以 C 表示电容器的总电容,则其倒数

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{U_1}{Q_1} + \frac{U_2}{Q_2} + \frac{U_3}{Q_3}$$

又根据式(12.1),后面各项分别等于各电容器电容的倒数。所以由上式可得 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$,把这一结果推广到任意多个电容器的串联,就得到式(12.7)。

例 12.1 电容器的混联。三个电容器 $C_1=20\ \mu\text{F}$, $C_2=40\ \mu\text{F}$, $C_3=60\ \mu\text{F}$,联接如图 12.5,求这一组合的总电容。如果在 A 、 B 间加电压 $U=220\ \text{V}$,则各电容器上的电压和电量各是多少?

解 这三个电容器既不是单纯的串联,也不是单纯的并联,而是混联。它是 C_2 和 C_3 串联后又和 C_1 并联, C_2 和 C_3 串联的总电容用式(12.7)计算为

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{40 \times 60}{40 + 60} = 24\ (\mu\text{F})$$

再和 C_1 并联,用式(12.6)计算为

$$C = C_1 + C_{23} = 20 + 24 = 44\ (\mu\text{F})$$

此即此电容器组合的总电容。

由图 12.5 可知, C_1 的电压即 AB 间的电压,为 $U_1=U=220\ \text{V}$ 。由式(12.1)得 C_1 的电量为

$$Q_1 = C_1 U_1 = 20 \times 10^{-6} \times 220 = 4.4 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

C_{23} 上的总电压为 U ,由于 C_2 和 C_3 串联,所以 C_2 和 C_3 的电量为

$$Q_2 = Q_3 = Q = C_{23} U = 24 \times 10^{-6} \times 220 = 5.28 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

由式(12.1)得 C_2 上的电压为

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{5.28 \times 10^{-3}}{40 \times 10^{-6}} = 132\ \text{V}$$

而 C_3 上的电压为

$$U_3 = U - U_2 = 220 - 132 = 88\ \text{V}$$

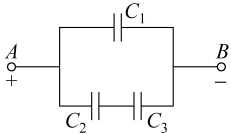


图 12.5 混联电容器组

12.3 电介质对电场的影响

实际的电容器的两板间总充满着某种电介质(如油、云母、瓷质等),电介质对电容器内的电场有什么影响呢?这可以通过下述实验观察出来。图 12.6(a)画出了由两个平行放置的金属板构成的电容器,两板分别带有等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 。板间是空气,可以非常近似地当成真空处理。两板分别连到静电计的直杆和外壳上,这样就可以由直杆上指针偏转的大小测出两带电板之间的电压来。设此时的电压为 U_0 。如果保持两板距离和板上的电荷都不改变,而在板间充满电介质(图 12.6(b)),或把两板插入绝缘液体如油中,则可由静电计的偏转减小发现两板间的电压变小了。以 U 表示插入电介质后两板间的电压,实验证明,它与 U_0 的关系可以写成

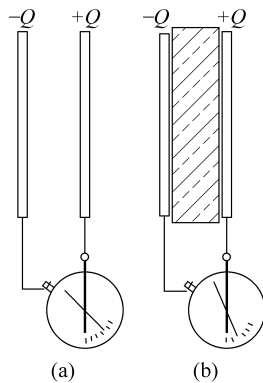


图 12.6 电介质对电场的影响

$$U = U_0 / \epsilon_r \quad (12.8)$$

式中 ϵ_r 为一个大于 1 的数,它的大小随电介质的种类和状态(如温度)的不同而不同,是电介质的一种特性常数,叫做电介质的**相对介电常量**(或**相对电容率**)。几种电介质的相对介电常量列在表 12.1 中。

表 12.1 几种电介质的相对介电常量

电 介 质	相对介电常量 ϵ_r
真空	1
氮(20℃, 1 atm ^①)	1.000 064
空气(20℃, 1 atm)	1.000 55
石蜡	2
变压器油(20℃)	2.24
聚乙烯	2.3
尼龙	3.5
云母	4~7
纸	约为 5
瓷	6~8
玻璃	5~10
水(20℃, 1 atm)	80
钛酸钡 ^②	$10^3 \sim 10^4$

① 1 atm=101 325 Pa。

② 钛酸钡的 ϵ_r 很大,而且随外加电场的强弱变化,并具有和“铁磁性”类似的“铁电性”,因而叫做“铁电体”(见 15.5 节)。

根据电容的定义式 $C=Q/U$ 和上述实验结果(即 Q 未变而电压 U 减小为 U_0/ϵ_r)可知,当电容器两板间为电介质充满时,其电容将增大为板间为真空时的 ϵ_r 倍,即

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (12.9)$$

其中 C 和 C_0 分别表示电容器两板间充满相对介电常量为 ϵ_r 的电介质时和两板间为真空时的电容。

在上述实验中,电介质插入后两板间的电压减小,说明由于电介质的插入使板间的电场减弱了。由于 $U=Ed, U_0=E_0d$, 所以

$$E = E_0/\epsilon_r \quad (12.10)$$

即电场强度减小到板间为真空时的 $1/\epsilon_r$ 。为什么会有这个结果呢? 我们可以用电介质受电场的影响而发生的变化来说明,而这又涉及电介质的微观结构。下节我们就说明这一点。

12.4 电介质的极化

电介质中每个分子都是一个复杂的带电系统,有正电荷,有负电荷,它们分布在一个线度为 10^{-10} m 的数量级的体积内,而不是集中在一点。但是,在考虑这些电荷离分子较远处所产生的电场时,或是考虑一个分子受外电场的作用时,都可以认为其中的正电荷集中于一点,这一点叫正电荷的“重心”。而负电荷也集中于另一点,这一点叫负电荷的“重心”。对于中性分子,由于其正电荷和负电荷的电量相等,所以一个分子就可以看成是一个由正、负点电荷相隔一定距离所组成的电偶极子。在讨论电场中的电介质的行为时,可以认为电介质是由大量的这种微小的电偶极子所组成的。

以 q 表示一个分子中的正电荷或负电荷的电量的数值,以 l 表示从负电荷“重心”指到正电荷“重心”的矢量距离,则这个分子的电矩应是

$$p = ql$$

按照电介质的分子内部的电结构的不同,可以把电介质分子分为两大类:极性分子和非极性分子。

有一类分子,如 HCl , H_2O , CO 等,在正常情况下,它们内部的电荷分布就是不对称的,因而其正、负电荷的重心不重合。这种分子具有固有电矩(图 12.7(a)),它们统称为极性分子。几种极性分子的固有电矩列于表 12.2 中。

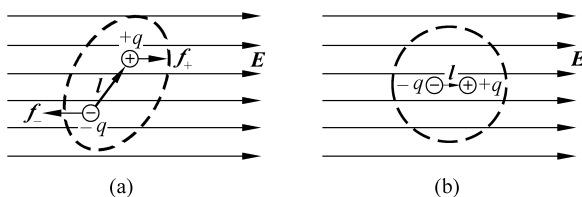


图 12.7 在外电场中的电介质分子

表 12.2 几种极性分子的固有电矩

电 介 质	电矩/(C·m)
HCl	3.4×10^{-30}
NH_3	4.8×10^{-30}
CO	0.9×10^{-30}
H_2O	6.1×10^{-30}

另一类分子,如 He , H_2 , N_2 , O_2 , CO_2 等,在正常情况下,它们内部的电荷分布具有对称性,因而正、负电荷的重心重合,这样的分子就没有固有电矩,这种分子叫**非极性分子**。但如果把这种分子置于外电场中,则由于外电场的作用,两种电荷的重心会分开一段微小距离,因而使分子具有了电矩(图 12.7(b))。这种电矩叫**感生电矩**。在实际可以得到的电场中,感生电矩比极性分子的固有电矩小得多,约为后者的 10^{-5} 。很明显,感生电矩的方向总与外加电场的方向相同。

当把一块均匀的电介质放到静电场中时,它的分子将受到电场的作用而发生变化,但最后也会达到一个平衡状态。如果电介质是由非极性分子组成,这些分子都将沿电场方向产生感生电矩,如图 12.8(a)所示。外电场越强,感生电矩越大。如果电介质是由极性分子组成,这些分子的固有电矩将受到外电场的力矩作用而沿着外电场方向取向,如图 12.8(b)所示。由于分子的无规则热运动总是存在的,这种取向不可能完全整齐。外电场越强,固有电矩排列越整齐。

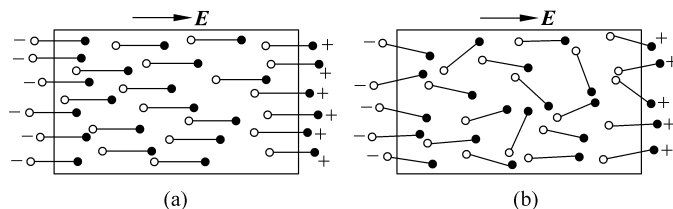


图 12.8 在外电场中的电介质

虽然两种电介质受外电场的影响所发生的变化的微观机制不同,但其宏观总效果是一样的。在电介质内部的宏观微小的区域内,正负电荷的电量仍相等,因而仍表现为中性。但是,在电介质的表面上却出现了只有正电荷或只有负电荷的电荷层,如图 12.8 所示。这种出现在电介质表面的电荷叫**面束缚电荷**(或**面极化电荷**),因为它不像导体中的自由电荷那样能用传导的方法引走。在外电场的作用下,电介质表面出现束缚电荷的现象,叫做**电介质的极化**。一般地,外电场越强,电介质表面出现的束缚电荷越多。

当外加电场不太强时,它只是引起电介质的极化,不会破坏电介质的绝缘性能。(实际的各种电介质中总有数目不等的少量自由电荷,所以总有微弱的导电能力。)如果外加电场很强,则电介质的分子中的电子发生电离而变成可以自由移动的电荷。由于大量的这种自由电荷的产生,电介质的绝缘性能就会遭到明显的破坏而变成导体。这种现象叫**电介质的击穿**。一种电介质材料所能承受的不被击穿的最大电场强度,叫做这种电介质的**介电强度**或**击穿场强**。表 12.3 给出了几种电介质的介电强度的数值(由于实验条件及材料成分的不确定,这些数值只是大致的)。

12.1 节中提到的电容器的耐(电)压能力,就是由电容器两板间的电介质的介电强度决定的。一旦两板间的电压超过一定限度,其电场将击穿所用的电介质,两板不再相互绝缘,电容器也就失效了。

由于电介质的电极化,当两板间充满电介质的电容器带电时,其间电介质的两个表面将出现与相邻极板符号相反的电荷。这样,电容器两板间的电场比起板间为真空时就减弱了。

表 12.3 几种电介质的介电强度

电 介 质	介电强度/(kV/mm)
空气(1 atm)	3
玻璃	10~25
瓷	6~20
矿物油	15
纸(油浸过的)	15
胶木	20
石蜡	30
聚乙烯	50
云母	80~200
钛酸钡	3

例 12.2 充满电介质的电容器。一平行板电容器板间充满相对介电常量为 ϵ_r 的电介质。求当它带电量为 Q 时,电介质两表面的面束缚电荷是多少?

解 板间电介质在电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 的电场作用下,电极化产生的面束缚电荷 $+Q'$ 和 $-Q'$ 如图 12.9 所示。以 σ 和 σ' 分别表示极板上和电介质表面的面电荷密度,则 $\sigma = Q/S$, $\sigma' = Q'/S$, S 为极板面积。两极板间为真空时,板间电场强度为 $E_0 = \sigma/\epsilon_0$,有电介质时,板间电场应是极板上电荷和面束缚电荷的场强的矢量和,面束缚电荷的电场为 $E' = \sigma'/\epsilon_0$ 。由于 E_0 和 E' 方向相反,所以合场强为 $E = E_0 - E' = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$ 。再考虑到实验给出的式(12.10),即 $E = E_0/\epsilon_r$,可得

$$\frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

由此可得

$$\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma$$

从而有

$$Q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q$$

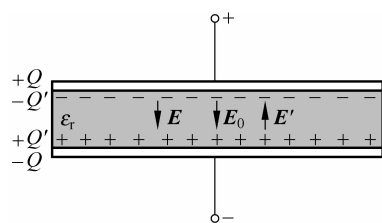


图 12.9 有电介质的电容器电荷分布

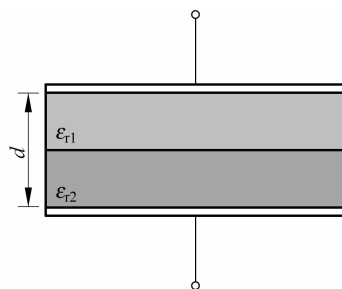


图 12.10 例 12.3 用图

例 12.3 双层电介质。如图 12.10 所示,一平行板电容器的极板面积为 S ,板间由两层相对介电常量分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} 的电介质充满,二者厚度都是板间距离 d 的一半。求此电容器的电容。

解 由于两电介质的分界面与板间电场强度垂直,所以该面为一等势面。因此可以设想两电介质在此面上以一薄金属板隔开,这样,图示电容器就可以看作是两个电容器串联组成。由式(12.2)和式(12.9)知,两个电容器的电容分别是

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d/2} \epsilon_{r1} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d/2} \epsilon_{r2} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{d}$$

由电容器串联公式(12.7)可得图 12.10 所示电容器的电容为

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}{d(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}$$

12.5 D 矢量及其高斯定律

在 12.3 节中讲过,对于图 12.6 所示的那种电介质充满电场的情况,实验指出 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 / \epsilon_r$ 。将此式写成 $\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ 再将两侧对任意封闭面 S 积分,可得

$$\oint_S \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \frac{q_{0,\text{in}}}{\epsilon_0} = q_{0,\text{in}} \quad (12.11)$$

式中第二个等号应用了高斯定律式(10.22),其中与 $\mathbf{E}_0$ 对应的 q_0 是产生 $\mathbf{E}_0$ 的自由电荷(即不是由于电介质极化产生的束缚电荷)。由于自由电荷,如电容器充电时极板上带的电荷,可以由人们“主动地”安置或移走,上式就具有了实际上的重要性。常常定义一个 $\mathbf{D}$ 矢量和 $\mathbf{E}$ 及 ϵ_r 点对点,即有

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E} \quad (12.12)$$

式中 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 叫电介质的介电常量(或电容率), $\mathbf{D}$ 称为电位移矢量。利用此定义,式(12.11)可以简明地改写成

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{0,\text{in}} \quad (12.13)$$

此式的意义是:在有电介质的电场中,通过任意封闭面的电位移通量等于该封闭面包围的自由电荷的代数和。由于式(12.13)和式(10.22)形式相同,所以它就叫做 $\mathbf{D}$ 的高斯定律。

式(12.13)虽然是就图 12.6 的特殊情况导出的,但其实对于各向同性线性介质,该式是普遍成立的。

对于浸在一个大油箱(油的相对介电常量为 ϵ_r)中的,带有电荷(即自由电荷) q 的金属球(图 12.11),可以利用式(12.13)求出

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r \quad (12.14)$$

再由式(12.12),可得

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \mathbf{e}_r \quad (12.15)$$

这一方法使我们不必考虑电介质的电极化情况而能较便捷地求出电场的分布。

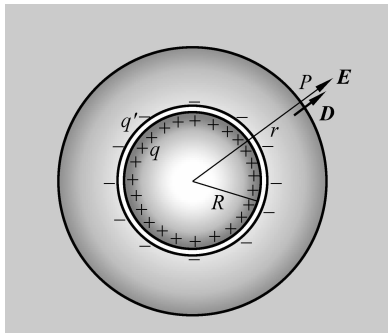


图 12.11 浸在大油箱中的带电导体球的电场

12.6 电容器的能量

电容器带电时具有能量可以从下述实验看出。将一个电容器 C 、一个直流电源 $\mathcal{E}$ 和一个灯泡 B 连成如图 12.12(a) 的电路,先将开关 K 倒向 a 边,当再将开关倒向 b 边时,灯泡会发出一次强的闪光。有的照相机上附装的闪光灯就是利用了这样的装置。

可以这样来分析这个实验现象。开关倒向 a 边时,电容器两板和电源相连,使电容器两板带上电荷。这个过程叫电容器的充电。当开关倒向 b 边时,电容器两板上的正负电荷又会通过有灯泡的电路中和。这一过程叫电容器的放电。灯泡发光是电流通过它的显示,灯泡发光所消耗的能量是从哪里来的呢? 是从电容器释放出来的,而电容器的能量则是它充

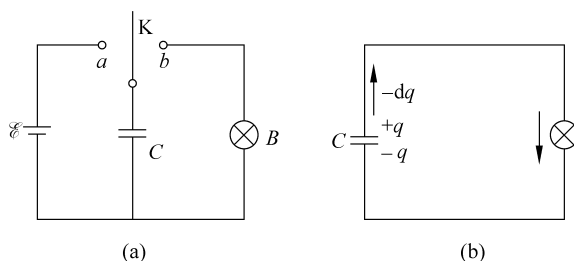


图 12.12 电容器充放电电路图(a)和电容器放电过程(b)

电时由电源供给的。

现在我们来计算电容器带有电量 Q , 相应的电压为 U 时所具有的能量, 这个能量可以根据电容器在放电过程中电场力对电荷做的功来计算。设在放电过程中某时刻电容器两极板所带的电量为 q 。以 C 表示电容, 则这时两板间的电压为 $u = q/C$ 。以 $-dq$ 表示在此电压下电容器由于放电而减小的微小电量(由于放电过程中 q 是减小的, 所以 q 的增量 dq 本身是负值), 也就是说, 有一 $-dq$ 的正电荷在电场力作用下沿导线从正极板经过灯泡与负极板等量的负电荷 dq 中和, 如图 12.12(b) 所示。在这一微小过程中电场力做的功为

$$dA = (-dq)u = -\frac{q}{C}dq$$

从原有电量 Q 到完全中和的整个放电过程中, 电场力做的总功为

$$A = \int dA = -\int_Q^0 \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

这也就是电容器原来带有电量 Q 时所具有的能量。用 W 表示电容器的能量, 并利用 $Q = CU$ 的关系, 可以得到电容器的能量公式为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U \quad (12.16)$$

12.7 电介质中电场的能量

电容器的能量同样可以认为是储存在电容器内的电场之中, 并用下面的分析把这个能量和电场强度 E 联系起来。

仍以平行板电容器为例, 设板的面积为 S , 板间距离为 d , 板间充满相对介电常量为 ϵ_r 的电介质。此电容器的电容由式(12.2)和式(12.9)给出, 即

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

将此式代入式(12.16)可得

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right)^2 S d$$

由于电容器的两板间的电场为

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

所以可得