# 第1章

# 质点运动学

经典力学是研究物体的机械运动的规律的。为了研究，首先描述。力学中描述物体运动的内容叫做**运动学**。实际的物体结构复杂，大小各异，为了从最简单的研究开始，引进**质点**模型，即以具有一定质量的点来代表物体。本章讲解质点运动学。相当一部分概念和公式在中学物理课程中已学习过了，本章在简要复习的基础上，对它们进行了更严格、更全面也更系统化的讲解。例如强调了参考系的概念，速度、加速度的定义都用了导数这一数学运算，还普遍加强了矢量概念。又例如圆周运动介绍了切向加速度和法向加速度两个分加速度。最后还介绍了同一物体运动的描述在不同参考系中的变换关系——伽利略变换。

## 1.1 匀变速直线运动

在高中课程中同学们已学习了如何描述质点的匀变速(或称匀加速)直线运动。以质点运动所沿的直线为 $x$ 轴，质点在各时刻 $t$ 的位置以坐标值 $x$ 表示，则质点的运动就表示为 $x$ 随 $t$ 的变化，如图 1.1 所示。在时刻 $t$ 前后 $\Delta t$ 时间内质点运动的快慢用**平均速度** $\bar{v}$ 表示，

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.1}$$

如果 $\Delta t$ 非常小，$\bar{v}$ 即是时刻 $t$ 质点的**瞬时速度**或**速度**，以 $\boldsymbol{v}$ 表示，其大小称为**速率**。速率的单位常用 m/s。

质点在运动中其速度可能随时间改变，此改变的快慢称为**加速度**。$\Delta t$ 时间内的**平均加速度**用 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 表示，为

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.2}$$

如果 $\Delta t$ 非常小，$\bar{\boldsymbol{a}}$ 即是时刻 $t$ 质点的**瞬时加速度**或**加速度**，以 $\boldsymbol{a}$ 表示。加速度的单位常用 m/s$^2$。

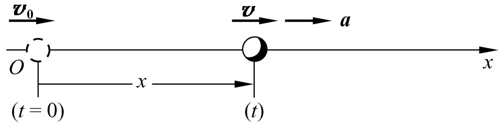


图 1.1　直线运动图示

如果在运动中，质点的速度均匀变化，即加速度 $\boldsymbol{a}$ 不随时间改变而为一常量，这种运动称为匀变速运动。关于**匀变速直线运动**，有下列基本关系式：

速度和时间（初速度为 $v_0$）：

$$v = v_0 + at \tag{1.3}$$

位置和时间（初位置在原点）：

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.4}$$

上两式中消去 $t$，还可得

速度和位置的关系：

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \tag{1.5}$$

实际上常见的匀变速直线运动有沿竖直方向的**自由落体运动**，它的加速度竖直向下，称**自由落体加速度**或**重力加速度**。值得强调的是，实验证明在地球上同一地点，不同的物体的重力加速度都相同。通常以 $g$ 表示重力加速度的大小。地面上各处不太高的范围内，$g$ 一般就在 9.8 $m/s^2$ 左右。一般计算就取

$$g = 9.80\ m/s^2$$

对于由静止自由下落（$v_0=0$）的物体，以 $t$ 表示下落的时间，$h$ 表示下落的高度，并以向下为坐标正方向，则式(1.3)到式(1.5)转化为

$$v = gt \tag{1.6}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.7}$$

$$v^2 = 2gh \tag{1.8}$$

**例 1.1 电子加速**。在电视机的电子枪内一电子被电场均匀加速沿直线前进，如图 1.2 所示，经过 2.00 cm 距离后其速率由 $2.80\times10^4$ m/s 增大为 $5.20\times10^6$ m/s，求此电子在此加速过程中的加速度和所用的时间。

**解** 以电子运动的径迹为 $x$ 轴，原点选在 2.00 cm 的起点（图 1.2），则电子的初速度为 $v_0=2.80\times10^4$ m/s，而在到达 $x=2.00$ cm 处时其速率变为 $v=5.20\times10^6$ m/s。于是利用式(1.5)可求得电子的加速度为

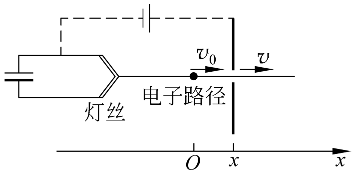

图 1.2 电子枪示意图

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(5.20\times10^6)^2 - (2.80\times10^4)^2}{2\times2.00\times10^{-2}}$$
$$= 6.76\times10^{14}\ (m/s^2)$$

再利用式(1.3)，可求得电子经过 2.00 cm 时所用的时间是

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{5.20\times10^6 - 2.80\times10^4}{6.76\times10^{14}} = 7.65\times10^{-9}\ (s)$$

**例 1.2 悬崖抛石**。在高出海面 30 m 的悬崖边上以 15 m/s 的初速竖直向上抛出一石子，如图 1.3 所示，设石子回落时不再碰到悬崖并忽略空气的阻力。求(1)石子能达到的最大高度；(2)石子从被抛出到回落触及海面所用的时间；(3)石子触及海面时的速度。

**解** 取通过抛出点的竖直线为 $x$ 轴，向上为正，抛出点为原点（图 1.3）。石子抛出后做匀变速运动，就可以用式(1.3)～式(1.5)求解。由于重力加速度和 $x$ 轴方向相反，所以式(1.3)～式(1.5)中的 $a$ 值应取 $-g$，而 $v_0=15$ m/s。

此题可分两阶段求解：石子上升阶段和回落阶段。

（1）以 $x_1$ 表示石子达到的最高位置，由于此时石子的速度应为 $v_1=0$，所以由式(1.5)（$v^2=v_0^2+2(-g)x$）可得

$$x_1=\frac{v_0^2-v_1^2}{2g}=\frac{15^2-0^2}{2\times 9.80}=11.5\ (\mathrm{m})$$

即石子最高可达到抛出点以上 11.5 m 处。

（2）石子上升到最高点，根据式(1.3)（$v=v_0+(-g)t$）可得所用时间 $t_1$ 为

$$t_1=\frac{v_0-v_1}{g}=\frac{15-0}{9.80}=1.53\ (\mathrm{s})$$

石子到达最高点时就要回落（为清晰起见，在图 1.3 中将石子回落路径和上升路径分开画了），做初速度为零的自由落体运动，这时可利用公式(1.6)～式(1.8)，由于下落高度为 $h=11.5+30=41.5$ m，所以由式(1.7)$\left(h=\frac{1}{2}gt^2\right)$可得下落的时间为

$$t_2=\sqrt{2h/g}=\sqrt{2\times 41.5/9.80}=2.91\ (\mathrm{s})$$

于是，石子从抛出到触及海面所用的总时间就是

$$t=t_1+t_2=1.53+2.91=4.44\ (\mathrm{s})$$

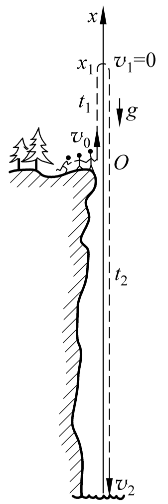


图 1.3 悬崖抛石

（3）石子触及海面时的速度可由式(1.8)求出，为

$$v_2=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.80\times 41.5}=28.5\ (\mathrm{m/s})$$

此题(2)、(3)两问也可以根据把上升下落作为一整体考虑，这时石子在抛出后经过时间 $t$ 后触及海面的位置应为 $x=-30$ m，由式(1.5)（$v^2=v_0^2+2(-g)x$）可得石子触及海面时的速率为

$$v=-\sqrt{v_0^2-2gx}=-\sqrt{15^2-2\times 9.80\times(-30)}=-28.5\ (\mathrm{m/s})$$

此处开根号的结果取负值，是因为此时刻速度方向向下，与 $x$ 轴正向相反。

根据式(1.4)$\left(x=v_0t+\frac{1}{2}(-g)t^2\right)$，代入 $x$，$v_0$ 和 $g$ 的值可得

$$-30=15t-4.9t^2$$

解此二次方程可得石子从抛出到触及海面所用总时间为 $t=4.44$ s（此方程另一解为 $-1.38$ s 对本题无意义，故舍去）。

## 1.2 参考系

现在让我们对质点运动学加以更严格、更全面一些的讨论，更一般地描述质点在三维空间的运动。

物体的机械运动是指它的位置随时间的改变。位置总是相对的，这就是说，任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。这个其他物体或物体系就叫做确定物体位置时用的**参考物**。例如，确定交通车辆的位置时，我们用固定在地面上的一些物体，如房子或路牌作参考物。

经验告诉我们，相对于不同的参考物，同一物体的同一运动，会表现为不同的形式。例如，一个自由下落的石块的运动，站在地面上观察，即以地面为参考物，它是直线运动。如果在近旁驰过的车厢内观察，即以行进的车厢为参考物，则石块将作曲线运动。物体运动的形式随参考物的不同而不同，这个事实叫**运动的相对性**。由于运动的相对性，当我们描述一个物体的运动时，就必须指明是相对于什么参考物来说的。

确定了参考物之后，为了定量地说明一个质点相对于此参考物的空间位置，就在此参考

物上建立固定的**坐标系**。最常用的坐标系是**笛卡儿直角坐标系**。这个坐标系以参考物上某一固定点为原点 $O$，从此原点沿 3 个相互垂直的方向引 3 条固定在参考物上的直线作为**坐标轴**，通常分别叫做 $x,y,z$ 轴(图 1.4)。在这样的坐标系中，一个质点在任意时刻的空间位置，如 $P$ 点，就可以用 3 个坐标值 $(x,y,z)$ 来表示。

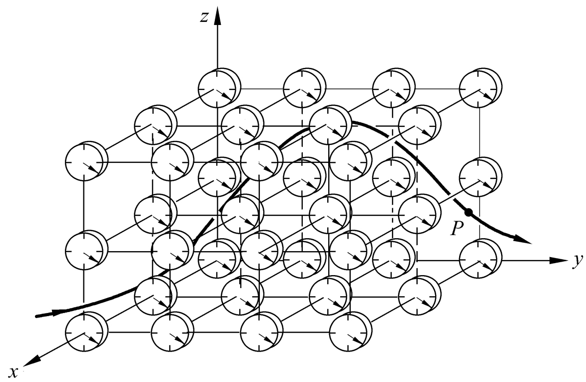


图 1.4　一个坐标系和一套同步的钟构成一个参考系

质点的运动就是它的位置随时间的变化。为了描述质点的运动，需要指出质点到达各个位置 $(x,y,z)$ 的时刻 $t$。这时刻 $t$ 是由在坐标系中各处配置的许多**同步的钟**(如图 1.4，在任意时刻这些钟的指示都一样)给出的[①]。质点在运动中到达各处时，都有近旁的钟给出它到达该处的时刻 $t$。这样，质点的运动，亦即它的位置随时间的变化，就可以完全确定地描述出来了。

一个固定在参考物上的坐标系和相应的一套同步的钟组成一个**参考系**。参考系通常以所用的参考物命名。例如，坐标轴固定在地面上(通常一个轴竖直向上)的参考系叫**地面参考系**(图 1.5 中 $O''x''y''z''$)；坐标原点固定在地心而坐标轴指向空间固定方向(以恒星为基准)的参考系叫**地心参考系**(图 1.5 中 $O'x'y'z'$)；原点固定在太阳中心而坐标轴指向空间固定方向(以恒星为基准)的参考系叫**太阳参考系**(图 1.5 中 $Oxyz$)。常用的固定在实验室的参考系叫**实验室参考系**。

质点位置的空间坐标值是沿着坐标轴方向从原点开始量起的长度。在**国际单位制** SI(其单位也是我国的法定计量单位)中，长度的基本单位是米(符号是 m)。现在国际上采用的米是 1983 年规定的[②]：**1 m 是光在真空中在(1/299 792 458)s 内所经过的距离**。这一规定的基础是激光技术的完善和相对论理论的确立。

指示质点到达空间某一位置的时刻在 SI 中是以秒(符号是 s)为基本单位计量的。以前

---

① 此处说的“在坐标系中各处配置的许多同步的钟”是一种理论的设计，实际上当然办不到。实际上是用一个钟随同物体一起运动，由它指出物体到达各处的时刻。这只运动的钟事前已和静止在参考系中的一只钟对好，二者同步。这样前者给出的时刻就是本参考系给出的时刻。实际的例子是宇航员的手表就指示他到达空间各处的时刻，这和地面上控制室的钟给出的时刻是一样的。不过，这种实际操作在物体运动速度接近光速时将失效，在这种情况下运动的钟和静止的钟**不可能**同步，其原因参见 6.3 节同时性的相对性与时间延缓。

② 关于基本单位的规定，请参见：张钟华. 基本物理常量与国际单位制基本单位的重新定义. 物理通报，2006，2：7～10.

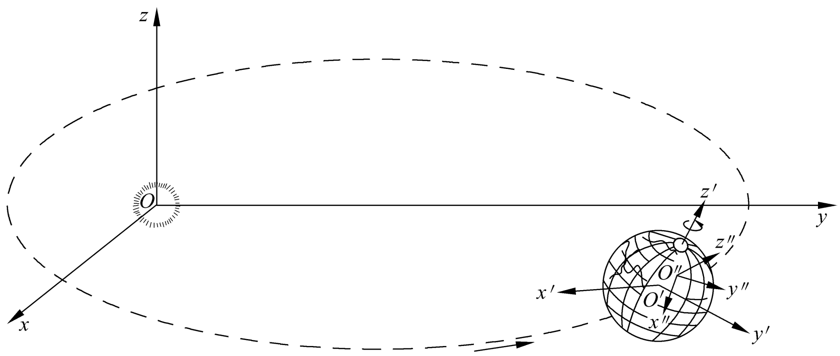


图 1.5　参考系示意图

曾规定平均太阳日的 1/86 400 是 1s。现在 SI 规定：**1 s 是铯的一种同位素 $^{133}$Cs 原子发出的一个特征频率的光波周期的 9 192 631 770 倍**。

在实际工作中，为了方便起见，常用基本单位的倍数或分数作单位来表示物理量的大小。这些单位叫**倍数单位**，它们的名称都是基本单位加上一个表示倍数或分数的词头构成。SI 词头如表 1.1 所示。

**表 1.1　SI 词头**

| 因数 | 词头名称 | | 符号 |
|---|---|---|---|
| | 英文 | 中文 | |
| $10^{24}$ | yotta | 尧[它] | Y |
| $10^{21}$ | zetta | 泽[它] | Z |
| $10^{18}$ | exa | 艾[可萨] | E |
| $10^{15}$ | peta | 拍[它] | P |
| $10^{12}$ | tera | 太[拉] | T |
| $10^{9}$ | giga | 吉[咖] | G |
| $10^{6}$ | mega | 兆 | M |
| $10^{3}$ | kilo | 千 | k |
| $10^{2}$ | hecto | 百 | h |
| $10^{1}$ | deca | 十 | da |
| $10^{-1}$ | deci | 分 | d |
| $10^{-2}$ | centi | 厘 | c |
| $10^{-3}$ | milli | 毫 | m |
| $10^{-6}$ | micro | 微 | $\mu$ |
| $10^{-9}$ | nano | 纳[诺] | n |
| $10^{-12}$ | pico | 皮[可] | p |
| $10^{-15}$ | femto | 飞[母托] | f |
| $10^{-18}$ | atto | 阿[托] | a |
| $10^{-21}$ | zepto | 仄[普托] | z |
| $10^{-24}$ | yocto | 幺[科托] | y |

## 1.3 质点的位矢、位移和速度

选定了参考系，一个质点的运动，即它的位置随时间的变化，就可以用数学函数的形式表示出来了。作为时间 $t$ 的函数的 3 个坐标值一般可以表示为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1.9}$$

这样的一组函数叫做质点的**运动函数**（有的书上叫做运动方程）。

质点的位置可以用**矢量**①的概念更简洁清楚地表示出来。为了表示质点在时刻 $t$ 的位置 $P$，我们从原点向此点引一有向线段 $OP$，并记作矢量 $\boldsymbol{r}$（图 1.6）。$\boldsymbol{r}$ 的方向说明了 $P$ 点相对于坐标轴的方位，$\boldsymbol{r}$ 的大小（即它的“模”）表明了原点到 $P$ 点的距离。方位和距离都知道了，$P$ 点的位置也就确定了。用来确定质点位置的这一矢量 $\boldsymbol{r}$ 叫做质点的**位置矢量**，简称**位矢**，也叫**径矢**。质点在运动时，它的位矢是随时间改变的，这一改变一般可以用函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.10}$$

来表示。上式就是质点的运动函数的矢量表示式。

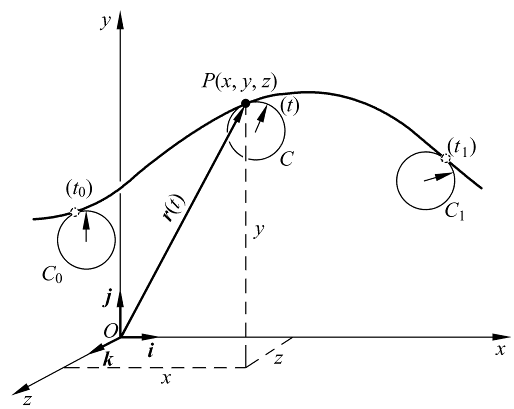


图 1.6 用位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示质点在时刻 $t$ 的位置

由于空间的几何性质，位置矢量总可以用它的沿 3 个坐标轴的分量之和表示。位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 沿 3 个坐标轴的投影分别是坐标值 $x,y,z$。以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 $x,y,z$ 轴正方向的**单位矢量**（即其大小是一个单位的矢量），则位矢 $\boldsymbol{r}$ 和它的 3 个分量的关系就可以用矢量合成

---

① **矢量**是指有方向而且其求和（或合成）需用**平行四边形定则**进行的物理量。矢量符号通常用粗体字印刷并且用长度与矢量的大小成比例的箭矢代表。求 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和 $\boldsymbol{C}$ 时可用平行四边形定则（图 1.7(a)），也可用三角形定则（图 1.7(b)，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 首尾相接）。求 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$ 时，由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$，所以可按图 1.8 进行（$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 首首相连）。

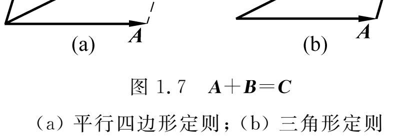


图 1.7 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(a) 平行四边形定则；(b) 三角形定则

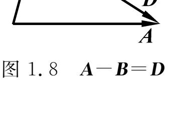


图 1.8 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$

公式

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.11}$$

表示。式中等号右侧各项分别是位矢 $\boldsymbol{r}$ 沿各坐标轴的分矢量,它们的大小分别等于各坐标值的大小,其方向是各坐标轴的正向或负向,取决于各坐标值的正或负。根据式(1.11),式(1.9)和式(1.10)表示的运动函数就有如下的关系:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.12}$$

式(1.12)中各函数表示质点位置的各坐标值随时间的变化情况,可以看做是质点沿各坐标轴的**分运动**的表示式。质点的实际运动是由式(1.12)中3个函数的总体或式(1.10)表示的。式(1.12)表明,质点的实际运动是各分运动的**合运动**。

质点运动时所经过的路线叫做**轨道**,在一段时间内它沿轨道经过的距离叫做**路程**,在一段时间内它的位置的改变叫做它在这段时间内的**位移**。设质点在 $t$ 和 $t+\Delta t$ 时刻分别通过 $P$ 和 $P_1$ 点(图1.9),其位矢分别是 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$,则由 $P$ 引到 $P_1$ 的矢量表示位矢的增量,即(图1.8)

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1.13}$$

这一位矢的增量就是质点在 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内的位移。

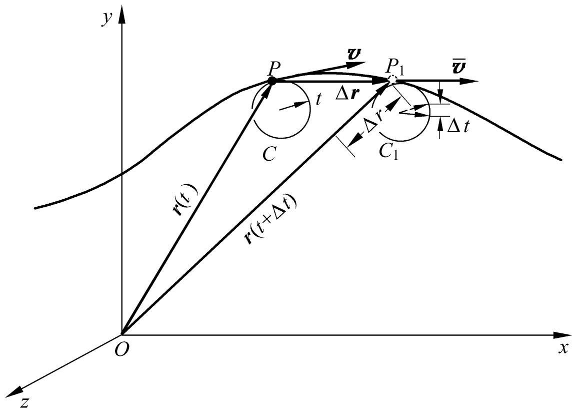


图1.9 位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\boldsymbol{v}$

应该注意的是,位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是矢量,既有大小又有方向。其大小用图中 $\Delta\boldsymbol{r}$ 矢量的长度表示,记作 $|\Delta\boldsymbol{r}|$。这一数量不能简写为 $\Delta r$,因为 $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$,它是位矢的大小在 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内的增量。一般地说,$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta r$。

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和发生这段位移所经历的时间的比叫做质点在这一段时间内的**平均速度**。以 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示平均速度,就有

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.14}$$

平均速度也是矢量,它的方向就是位移的方向(如图1.9所示)。

当 $\Delta t$ 趋于零时,式(1.14)的极限,即质点位矢对时间的变化率,叫做质点在时刻 $t$ 的**瞬时速度**,简称**速度**。用 $\boldsymbol{v}$ 表示速度,就有

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.15}$$

速度的方向，就是 $\Delta t$ 趋于零时，$\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向。如图 1.9 所示，当 $\Delta t$ 趋于零时，$P_1$ 点向 $P$ 点趋近，而 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向最后将与质点运动轨道在 $P$ 点的切线一致。因此，质点在时刻 $t$ 的速度的方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方，如图 1.9 中 $\boldsymbol{v}$ 的方向。

速度的大小叫**速率**，以 $v$ 表示，则有

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} \tag{1.16}$$

用 $\Delta s$ 表示在 $\Delta t$ 时间内质点沿轨道所经过的路程。当 $\Delta t$ 趋于零时，$|\Delta \boldsymbol{r}|$ 和 $\Delta s$ 趋于相同，因此可以得到

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.17}$$

这就是说速率又等于质点所走过的路程对时间的变化率。

根据位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 $\Delta r$ 的区别可以知道，一般地，

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

将式(1.11)代入式(1.15)，由于沿 3 个坐标轴的单位矢量都不随时间改变，所以有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z \tag{1.18}$$

等号右面 3 项分别表示沿 3 个坐标轴方向的**分速度**。速度沿 3 个坐标轴的分量 $v_x, v_y, v_z$ 分别为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1.19}$$

这些分量都是数量，可正可负。

式(1.18)表明：质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 是各分速度的矢量和。这一关系是式(1.12)的直接结果，也是由空间的几何性质所决定的。

由于式(1.18)中各分速度相互垂直，所以速率

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.20}$$

速度的 SI 单位是 m/s。表 1.2 给出了一些实际的速率的数值。

**表 1.2 某些速率** m/s

| | |
|---|---|
| 光在真空中 | $3.0\times10^8$ |
| 北京正负电子对撞机中的电子 | 99.999 998%光速 |
| 类星体的退行(最快的) | $2.7\times10^8$ |
| 太阳在银河系中绕银河系中心的运动 | $3.0\times10^5$ |
| 地球公转 | $3.0\times10^4$ |
| 人造地球卫星 | $7.9\times10^3$ |
| 现代歼击机 | 约 $9\times10^2$ |
| 步枪子弹离开枪口时 | 约 $7\times10^2$ |
| 由于地球自转在赤道上一点的速率 | $4.6\times10^2$ |
| 空气分子热运动的平均速率(0℃) | $4.5\times10^2$ |
| 空气中声速(0℃) | $3.3\times10^2$ |
| 机动赛车(最大) | $1.0\times10^2$ |

续表

| | |
|---|---|
| 猎豹(最快动物) | $2.8\times10$ |
| 人跑步百米世界记录(最快时) | $1.205\times10$ |
| 大陆板块移动 | 约 $10^{-9}$ |

## 1.4　加速度

当质点的运动速度随时间改变时，常常需要了解速度变化的情况。速度变化的情况用**加速度**表示。以 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ 分别表示质点在时刻 $t$ 和时刻 $t+\Delta t$ 的速度(图 1.10)，则在这段时间内的**平均加速度** $\bar{\boldsymbol{a}}$ 由下式定义：

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.21}$$

当 $\Delta t$ 趋于零时，此平均加速度的极限，即速度对时间的变化率，叫质点在时刻 $t$ 的**瞬时加速度**，简称**加速度**。以 $\boldsymbol{a}$ 表示加速度，就有

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.22}$$

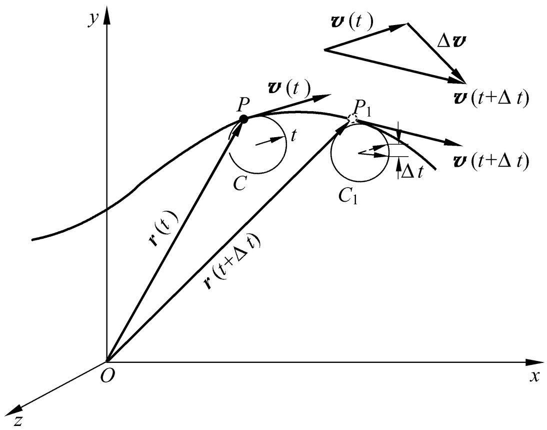


图 1.10　平均加速度矢量 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 的方向就是 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向

应该明确的是，加速度也是矢量。由于它是速度对时间的变化率，所以不管是速度的大小发生变化，还是速度的方向发生变化，都有加速度。利用式(1.15)，还可得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.23}$$

将式(1.18)代入式(1.22)，可得加速度的分量表示式如下：

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z \tag{1.24}$$

加速度沿 3 个坐标轴的分量分别是

$$\left.\begin{aligned}a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

这些分量和加速度的大小的关系是

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.26}$$

加速度的 SI 单位是 $\mathrm{m/s^2}$。表 1.3 给出了一些实际的加速度的数值。

**表 1.3　某些加速度的数值**　　$\mathrm{m/s^2}$

| | |
|---|---|
| 超级离心机中粒子的加速度 | $3\times10^6$ |
| 步枪子弹在枪膛中的加速度 | 约 $5\times10^5$ |
| 使汽车撞坏(以 27 m/s 车速撞到墙上)的加速度 | 约 $1\times10^3$ |
| 使人发晕的加速度 | 约 $7\times10$ |
| 地球表面的重力加速度 | 9.8 |
| 汽车制动的加速度 | 约 8 |
| 月球表面的重力加速度 | 1.7 |
| 由于地球自转在赤道上一点的加速度 | $3.4\times10^{-2}$ |
| 地球公转的加速度 | $6\times10^{-3}$ |
| 太阳绕银河系中心转动的加速度 | 约 $3\times10^{-10}$ |

**例 1.3　火箭升空。** 竖直向上发射的火箭(图 1.11)点燃后，其上升高度 $z$(原点在地面上，$z$ 轴竖直向上)和时间 $t$ 的关系，在不太高的范围内为

$$z = ut\left[1 + \left(1 - \frac{M_0}{\alpha t}\right)\ln\frac{M_0}{M_0 - \alpha t}\right] - \frac{1}{2}gt^2$$

其中 $M_0$ 为火箭发射前的质量，$\alpha$ 为燃料的燃烧速率，$u$ 为燃料燃烧后喷出气体相对火箭的速率，$g$ 为重力加速度。

(1) 求火箭点燃后，它的速度和加速度随时间变化的关系。

(2) 已知 $M_0 = 2.80\times10^6$ kg，$\alpha = 1.20\times10^4$ kg/s，$u = 2.90\times10^3$ m/s，$g$ 取 $9.80\ \mathrm{m/s^2}$。求火箭点燃后 $t = 120$ s 时，火箭的高度、速度和加速度。

(3) 用(2)中的数据分别画出 $z$-$t$，$v$-$t$ 和 $a$-$t$ 曲线。

**解**　(1) 火箭的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u\ln\frac{M_0}{M_0 - \alpha t} - gt$$

加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha u}{M_0 - \alpha t} - g$$

(2) 将已知数据代入相应公式，得到在 $t = 120$ s 时，

$$M_0 - \alpha t = 2.80\times10^6 - 1.20\times10^4\times120 = 1.36\times10^6\ (\mathrm{kg})$$

而火箭的高度为

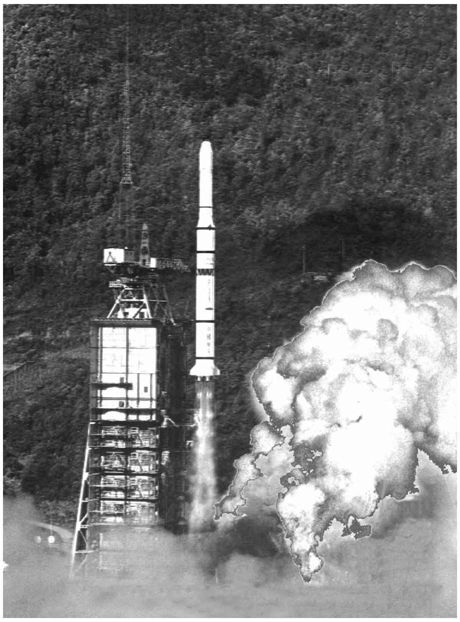

图 1.11 “长征二号 E”运载火箭携带卫星发射升空

$$z = 2.90\times10^3\times120\times\left[1+\left(1-\frac{2.80\times10^6}{1.20\times10^4\times120}\right)\times\ln\frac{2.80\times10^6}{1.36\times10^6}\right]-\frac{1}{2}\times9.80\times120^2$$

$$=40\ (\text{km})$$

为地球半径的 0.6%。这时火箭的速度为

$$v = 2.90\times10^3\times\ln\frac{2.80\times10^6}{1.36\times10^6}-9.80\times120 = 0.918\ (\text{km/s})$$

方向向上，说明火箭仍在上升。火箭的加速度为

$$a = \frac{1.20\times10^4\times2.90\times10^3}{1.36\times10^6}-9.80 = 15.8\ (\text{m/s}^2)$$

方向向上，与速度同向，说明火箭仍在向上加速。

(3) 图 1.12(a)，(b)和(c)中分别画出了 $z$-$t$，$v$-$t$ 和 $a$-$t$ 曲线。从数学上说，三者中，后者依次为前者的斜率。

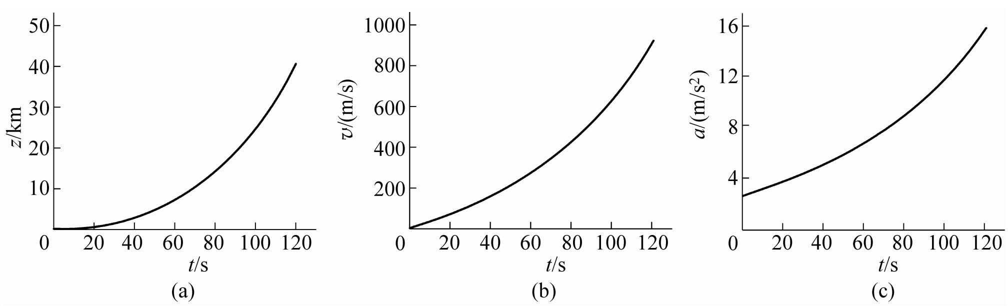


图 1.12 例 1.3 中火箭升空的高度 $z$、速率 $v$ 和加速度 $a$ 随时间 $t$ 变化的曲线

## 1.5 匀加速运动

加速度的大小和方向都不随时间改变，即加速度 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量的运动，叫做**匀加速运动**。由加速度的定义 $\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$，可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

对此式两边积分，即可得出速度随时间变化的关系。设已知某一时刻的速度，例如 $t=0$ 时，速度为 $\boldsymbol{v}_0$，则任意时刻 $t$ 的速度 $\boldsymbol{v}$，就可以由下式求出：

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

利用 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量的条件，可得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t \tag{1.27}$$

这就是匀加速运动的速度公式。

由于 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$，所以有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$，将式(1.27)代入此式，可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t)\mathrm{d}t$$

设某一时刻，例如 $t=0$ 时的位矢为 $\boldsymbol{r}_0$，则任意时刻 $t$ 的位矢 $\boldsymbol{r}$ 就可通过对上式两边积分求得，即

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t)\mathrm{d}t$$

由此得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \tag{1.28}$$

这就是匀加速运动的位矢公式。过程中对矢量的积分，可以理解为对其三个分量的积分的合写。只有当等式中的矢量是一次项时，才可以这样表示。

在实际问题中，常常利用式(1.27)和式(1.28)的分量式，它们是速度公式

$$\left.\begin{aligned}v_x&=v_{0x}+a_xt\\v_y&=v_{0y}+a_yt\\v_z&=v_{0z}+a_zt\end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

和位置公式

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2\\y&=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2\\z&=z_0+v_{0z}t+\frac{1}{2}a_zt^2\end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

这两组公式具体地说明了质点的匀加速运动沿 3 个坐标轴方向的分运动，质点的实际运动就是这 3 个分运动的合成。

以上各公式中的加速度和速度沿坐标轴的分量均可正可负，这要由各分矢量相对于坐标轴的正方向而定：相同为正，相反为负。

质点在时刻 $t=0$ 时的位矢 $\boldsymbol{r}_0$ 和速度 $\boldsymbol{v}_0$ 叫做运动的**初始条件**。由式(1.27)和式(1.28)可

知，在已知加速度的情况下，给定了初始条件，就可以求出质点在任意时刻的位置和速度。这个结论在匀加速运动的诸公式中看得最明显。实际上它对质点的任意运动都是成立的。

如果质点沿一条直线作匀加速运动，就可以选它所沿的直线为 $x$ 轴，而其运动就可以只用式(1.29)和式(1.30)的第一式加以描述。如果再取质点的初位置为原点，即取 $x_0=0$，则这些公式就是大家熟知的匀加速(或匀变速)直线运动的公式，式(1.3)和式(1.4)了。

## 1.6 抛体运动

从地面上某点向空中抛出一物体，它在空中的运动就叫**抛体运动**。物体被抛出后，忽略风的作用，它的运动轨道总是被限制在通过抛射点的由抛出速度方向和竖直方向所确定的平面内，因而，抛体运动一般是二维运动(见图 1.13)。

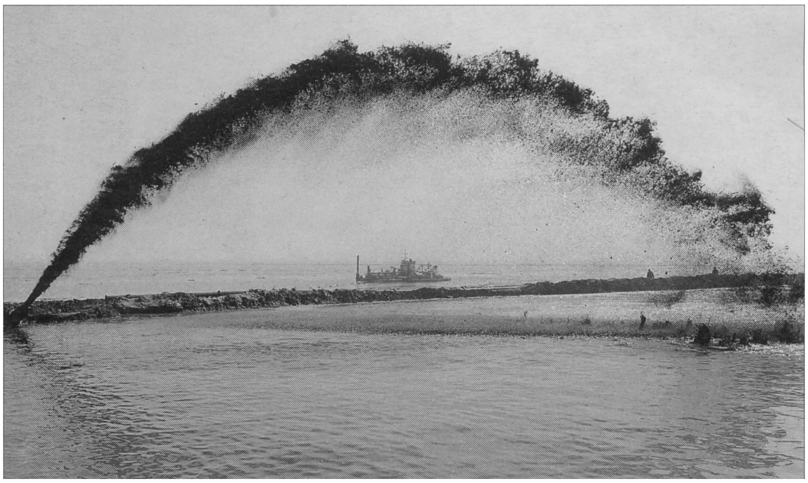

图 1.13 河北省曹妃甸的吹沙船在吹沙造地、吹起的沙形成近似抛物线

一个物体在空中运动时，在空气阻力可以忽略的情况下，它在各时刻的加速度都是重力加速度 $\boldsymbol{g}$。一般视 $\boldsymbol{g}$ 为常矢量。这种运动的速度和位置随时间的变化可以分别用式(1.29)的前两式和式(1.30)的前两式表示。描述这种运动时，可以选抛出点为坐标原点，而取水平方向和竖直向上的方向分别为 $x$ 轴和 $y$ 轴(图 1.14)。从抛出时刻开始计时，则 $t=0$ 时，物体的初始位置在原点，即 $\boldsymbol{r}_0=0$；以 $\boldsymbol{v}_0$ 表示物体的初速度，以 $\theta$ 表示抛射角(即初速度与 $x$ 轴的夹角)，则 $\boldsymbol{v}_0$ 沿 $x$ 轴和 $y$ 轴上的分量分别是

$$v_{0x}=v_0\cos\theta,\quad v_{0y}=v_0\sin\theta$$

物体在空中的加速度为

$$a_x=0,\quad a_y=-g$$

其中负号表示加速度的方向与 $y$ 轴的方向相反。利用这些条件，由式(1.29)可以得出物体在空中任意时刻的速度为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\theta \\ v_y &= v_0\sin\theta-gt \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

由式(1.30)可以得出物体在空中任意时刻的位置为

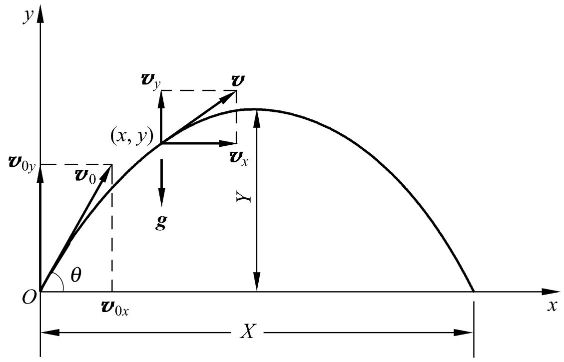


图 1.14　抛体运动分析

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta \cdot t \\ y &= v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

式(1.31)和式(1.32)也是大家在中学都已熟悉的公式。它们说明抛体运动是竖直方向的匀加速运动和水平方向的匀速运动的合成。由上两式可以求出(请读者自证)物体从抛出到回落到抛出点高度所用的时间 $T$ 为

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

飞行中的最大高度(即高出抛出点的距离)$Y$ 为

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

飞行的射程(即回落到与抛出点的高度相同时所经过的水平距离)$X$ 为

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

由这一表示式还可以证明：当初速度大小相同时，在抛射角 $\theta$ 等于 45°的情况下射程最大。

在式(1.32)的两式中消去 $t$，可得抛体的轨道函数为

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\,\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

对于一定的 $v_0$ 和 $\theta$，这一函数表示一条通过原点的二次曲线。这曲线在数学上叫“抛物线”。

应该指出，以上关于抛体运动的公式，都是在忽略空气阻力的情况下得出的。只有在初速比较小的情况下，它们才比较符合实际。实际上子弹或炮弹在空中飞行的规律和上述公式是有很大差别的。例如，以 550 m/s 的初速沿 45°抛射角射出的子弹，按上述公式计算的射程在 30 000 m 以上。实际上，由于空气阻力，射程不过 8500 m，不到前者的 1/3。子弹或炮弹飞行的规律，在军事技术中由专门的弹道学进行研究。

空气对抛体运动的影响，不只限于减小射程。对于乒乓球、排球、足球等在空中的飞行，由于球的旋转，空气的作用还可能使它们的轨道发生侧向弯曲。

对于飞行高度与射程都很大的抛体，例如洲际弹道导弹，弹头在很大部分时间内都在大气层以外飞行，所受空气阻力是很小的。但是由于在这样大的范围内，重力加速度的大小和方向都有明显的变化，因而上述公式也都不能应用。

**例 1.4 阳台抛球**。有一学生在体育馆阳台上以投射角 $\theta=30^\circ$和速率 $v_0=20$ m/s 向台前操场投出一垒球。球离开手时距离操场水平面的高度 $h=10$ m。试问球投出后何时着地？在何处着地？着地时速度的大小和方向各如何？

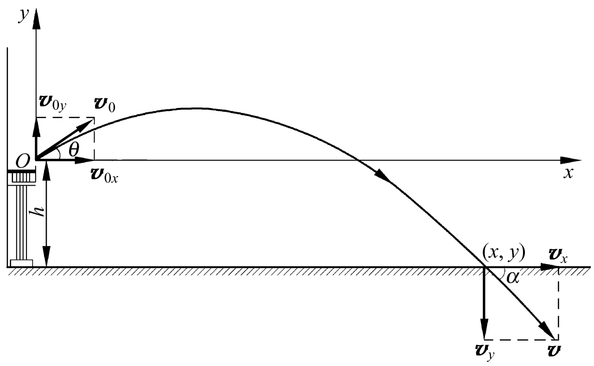


图 1.15 例 1.4 用图

**解** 以投出点为原点，建 $x$，$y$ 坐标轴如图 1.15。引用式(1.32)，有

$$x=v_0\cos\theta\cdot t$$

$$y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

以$(x,y)$表示着地点坐标，则 $y=-h=-10$ m。将此值和 $v_0$，$\theta$ 值一并代入第二式得

$$-10=20\times\frac{1}{2}\times t-\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2$$

解此方程，可得 $t=2.78$ s 和$-0.74$ s。取正数解，即得球在出手后 2.78 s 着地。

着地点离投射点的水平距离为

$$x=v_0\cos\theta\cdot t=20\times\cos 30^\circ\times 2.78=48.1\ (\mathrm{m})$$

引用式(1.31)得

$$v_x=v_0\cos\theta=20\times\cos 30^\circ=17.3\ (\mathrm{m/s})$$

$$v_y=v_0\sin\theta-gt=20\sin 30^\circ-9.8\times 2.78=-17.2\ (\mathrm{m/s})$$

着地时速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{17.3^2+17.2^2}=24.4\ (\mathrm{m/s})$$

此速度和水平面的夹角

$$\alpha=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\frac{-17.2}{17.3}=-44.8^\circ$$

作为抛体运动的一个特例，令抛射角 $\theta=90^\circ$，我们就得到上抛运动。这是一个匀加速直线运动，它在任意时刻的速度和位置可以分别用式(1.31)中的第二式和式(1.32)中的第二式求得，于是有

$$v_y=v_0-gt \tag{1.33}$$

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1.34}$$

这也是大家所熟悉的公式。应该再次明确指出的是，$v_y$ 和 $y$ 的值都是代数值，可正可负。$v_y>0$ 表示该时刻物体正向上运动，$v_y<0$ 表示该时刻物体已回落并正向下运动。$y>0$ 表示该时刻物体的位置在抛出点之上，$y<0$ 表示物体的位置已回落到抛出点以下了。

## 1.7 圆周运动

质点沿圆周运动时，它的速率通常叫线速度。如以 $s$ 表示从圆周上某点 $A$ 量起的弧长（图 1.16），则线速度 $v$ 就可用式(1.17)表示为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

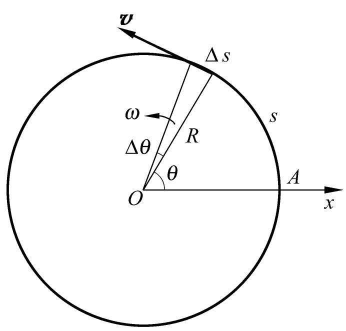

图 1.16 线速度与角速度

以 $\theta$ 表示半径 $R$ 从 $OA$ 位置开始转过的角度，则 $s=R\theta$。将此关系代入上式，由于 $R$ 是常量，可得

$$v=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

式中$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$是质点运动**角速度**的大小，它的 SI 单位是 rad/s 或 1/s。常以 $\omega$ 表示角速度，即

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.35}$$

这样就有

$$v=R\omega \tag{1.36}$$

对于匀速率圆周运动，$\omega$ 和 $v$ 均保持不变，因而其运动周期可求得为

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{1.37}$$

质点做圆周运动时，它的线速度可以随时间改变或不改变。但是由于其速度矢量的方向总是在改变着，所以总是有加速度。下面我们来求变速圆周运动的加速度。

如图 1.17(a)所示，$\boldsymbol{v}(t)$和$\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$分别表示质点沿圆周运动经过 $B$ 点和 $C$ 点时的速度矢量，由加速度的定义式(1.22)可得

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

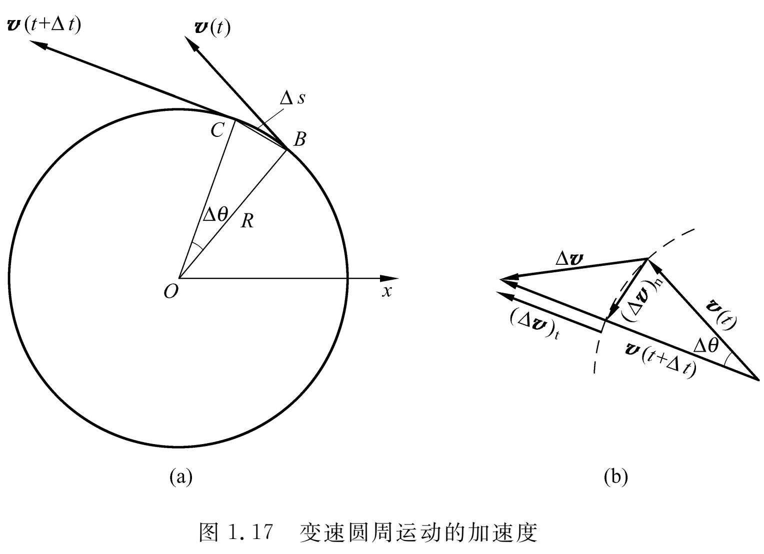

图 1.17 变速圆周运动的加速度

$\Delta\boldsymbol{v}$ 如图 1.17(b)所示，在矢量 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ 上截取一段，使其长度等于 $v(t)$，作矢量 $(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{n}}$ 和 $(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{t}}$，就有

$$\Delta\boldsymbol{v} = (\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{n}} + (\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{t}}$$

因而 $\boldsymbol{a}$ 的表达式可写成

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{n}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{t}}}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} \tag{1.38}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{n}}}{\Delta t},\quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

这就是说，加速度 $\boldsymbol{a}$ 可以看成是两个分加速度的合成。

先求分加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$。由图 1.17(b)可知，$(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{t}}$ 的数值为

$$v(t+\Delta t) - v(t) = \Delta v$$

即等于速率的变化。于是 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 的数值为

$$a_{\mathrm{t}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.39}$$

即等于速率的变化率。由于 $\Delta t\to 0$ 时，$(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{t}}$ 的方向趋于和 $\boldsymbol{v}$ 在同一直线上，因此 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 的方向也沿着轨道的切线方向。这一分加速度就叫**切向加速度**。切向加速度表示质点速率变化的快慢。$a_{\mathrm{t}}$ 为一代数量，可正可负。$a_{\mathrm{t}}>0$ 表示速率随时间增大，这时 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 的方向与速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同；$a_{\mathrm{t}}<0$ 表示速率随时间减小，这时 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 的方向与速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反。

利用式(1.36)还可得到

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$表示质点运动角速度对时间的变化率，是**角加速度**的大小。它的 SI 单位是 $\mathrm{rad/s^2}$ 或 $1/\mathrm{s}^2$。以 $\alpha$ 表示角加速度，则有

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

当 $\alpha$ 是常量，代表匀加速圆周运动，此时，$\theta$、$\omega$、$\alpha$ 可以类比对应匀加速直线运动的 $x$、$v$、$a$ 这些量。

$$a_{\mathrm{t}} = R\alpha \tag{1.40}$$

即切向加速度等于半径与角加速度的乘积。

下面再来求分加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$。比较图 1.17(a)和(b)中的两个相似的三角形可知

$$\frac{|(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{n}}|}{v} = \frac{\overline{BC}}{R}$$

即

$$|(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{n}}| = \frac{v\,\overline{BC}}{R}$$

式中$\overline{BC}$为弦的长度。当 $\Delta t\to 0$ 时，这一弦长趋近于和对应的弧长 $\Delta s$ 相等。因此，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ 的大小为

$$a_{\mathrm{n}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|(\Delta\boldsymbol{v})_{\mathrm{n}}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta s}{R\,\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

由于

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

可得

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{1.41}$$

利用式(1.36),还可得

$$a_n = \omega^2 R \tag{1.42}$$

至于 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向,从图1.17(b)中可以看到,当 $\Delta t \to 0$ 时,$\Delta\theta \to 0$,而 $(\Delta \boldsymbol{v})_n$ 的方向趋向于垂直于速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向而指向圆心。因此,$\boldsymbol{a}_n$ 的方向在任何时刻都垂直于圆的切线方向而沿着半径指向圆心。这个分加速度就叫**向心加速度**或**法向加速度**。法向加速度表示由于速度方向的改变而引起的速度的变化率。在圆周运动中,总有法向加速度。在直线运动中,由于速度方向不改变,所以 $a_n=0$。在这种情况下,也可以认为 $R \to \infty$,此时式(1.41)也给出 $a_n=0$。

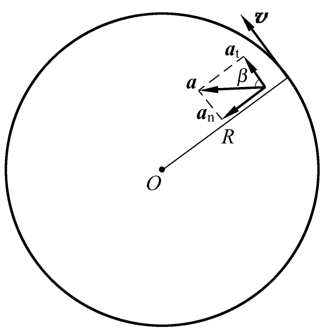

图1.18 加速度的方向

由于 $\boldsymbol{a}_n$ 总是与 $\boldsymbol{a}_t$ 垂直,所以圆周运动的总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \tag{1.43}$$

以 $\beta$ 表示加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角(图1.18),则

$$\beta = \arctan \frac{a_n}{a_t} \tag{1.44}$$

应该指出,以上关于加速度的讨论及结果,也适用于任何二维的(即平面上的)曲线运动。这时有关公式中的半径应是曲线上所涉及点处的曲率半径(即该点曲线的密接圆或曲率圆的半径)。还应该指出的是,曲线运动中加速度的大小

$$a = |\boldsymbol{a}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_t$$

也就是说,曲线运动中加速度的大小并不等于速率对时间的变化率,这一变化率只是加速度的一个分量,即切向加速度。

**例1.5 吊扇转动**。一吊扇翼片长 $R=0.50\ \mathrm{m}$,以 $n=180\ \mathrm{r/min}$ 的转速转动(图1.19)。关闭电源开关后,吊扇均匀减速,经 $t_A=1.50\ \mathrm{min}$ 转动停止。

(1) 求吊扇翼尖原来的转动角速度 $\omega_0$ 与线速度 $v_0$;

(2) 求关闭电源开关后 $t=80\ \mathrm{s}$ 时翼尖的角加速度 $\alpha$、切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$、法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 和总加速度 $\boldsymbol{a}$。

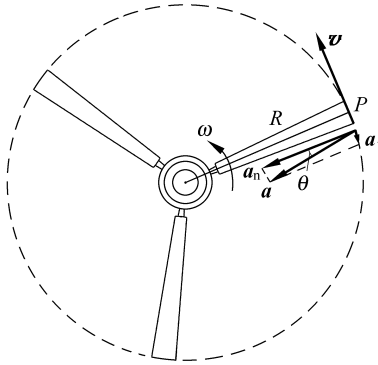

图1.19 例1.5用图

**解** (1) 吊扇翼尖 $P$ 原来的转动角速度为

$$\omega_0 = 2\pi n = \frac{2\pi \times 180}{60} = 18.8\ (\mathrm{rad/s})$$

由式(1.33)可得原来的线速度

$$v_0 = \omega_0 R = \frac{2\pi \times 180}{60} \times 0.50 = 9.42\ (\mathrm{m/s})$$

（2）由于均匀减速，翼尖的角加速度恒定，

$$\alpha = \frac{\omega_A - \omega_0}{t_A} = \frac{0 - 18.8}{90} = -0.209\ (\mathrm{rad/s^2})$$

由式(1.40)可知，翼尖的切向加速度也是恒定的，

$$a_t = \alpha R = -0.209 \times 0.50 = -0.105\ (\mathrm{m/s^2})$$

负号表示此切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 的方向与速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相反，如图 1.19 所示。

为求法向加速度，先求 $t$ 时刻的角速度 $\omega$，即有

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 18.8 - 0.209 \times 80 = 2.08\ (\mathrm{rad/s})$$

由式(1.42)，可得 $t$ 时刻翼尖的法向加速度为

$$a_n = \omega^2 R = 2.08^2 \times 0.50 = 2.16\ (\mathrm{m^2/s})$$

方向指向吊扇中心。翼尖的总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0.105^2 + 2.16^2} = 2.16\ (\mathrm{m/s^2})$$

此总加速度偏向翼尖运动的后方。以 $\theta$ 表示总加速度方向与半径的夹角(如图 1.19 所示)，则

$$\theta = \arctan\left|\frac{a_t}{a_n}\right| = \arctan\frac{0.105}{2.16} = 2.78°$$

## 1.8　相对运动

研究力学问题时常常需要从不同的参考系来描述同一物体的运动。对于不同的参考系，同一质点的位移、速度和加速度都可能不同。图 1.20 中，$xOy$ 表示固定在水平地面上的坐标系(以 $E$ 代表此坐标系)，其 $x$ 轴与一条平直马路平行。设有一辆平板车 $V$ 沿马路行进，图中 $x'O'y'$ 表示固定在这个行进的平板车上的坐标系。在 $\Delta t$ 时间内，车在地面上由 $V_1$ 移到 $V_2$ 位置，其位移为 $\Delta \boldsymbol{r}_{VE}$。设在同一 $\Delta t$ 时间内，一个小球 $S$ 在车内由 $A$ 点移到 $B$ 点，其位移为 $\Delta \boldsymbol{r}_{SV}$。在这同一时间内，在地面上观测，小球是从 $A_0$ 点移到 $B$ 点的，相应的位移是 $\Delta \boldsymbol{r}_{SE}$。(在这三个位移符号中，下标的前一字母表示运动的物体，后一字母表示参考系。)很明显，同一小球在同一时间内的位移，相对于地面和车这两个参考系来说，是不相同的。这两个位移和车厢对于地面的位移有下述关系：

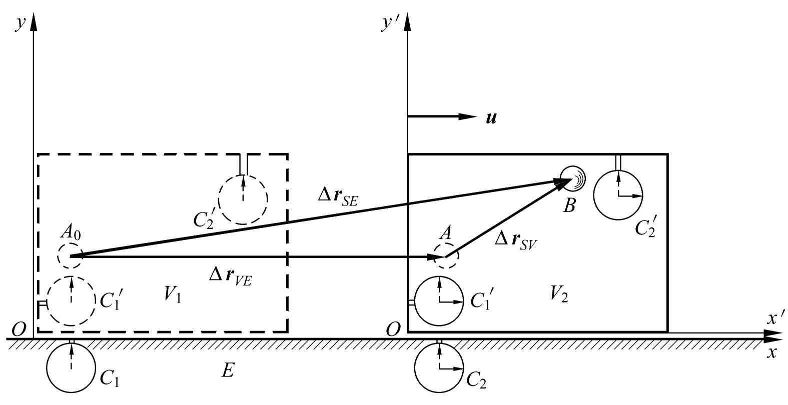


图 1.20　相对运动

$$\Delta \boldsymbol{r}_{SE} = \Delta \boldsymbol{r}_{SV} + \Delta \boldsymbol{r}_{VE} \tag{1.45}$$

以 $\Delta t$ 除此式，并令 $\Delta t \to 0$，可以得到相应的速度之间的关系，即

$$\boldsymbol{v}_{SE} = \boldsymbol{v}_{SV} + \boldsymbol{v}_{VE} \tag{1.46}$$

以 $\boldsymbol{v}$ 表示质点相对于参考系 $S$（坐标系为 $Oxy$）的速度，以 $\boldsymbol{v}'$ 表示同一质点相对于参考系 $S'$（坐标系为 $O'x'y'$）的速度，以 $\boldsymbol{u}$ 表示参考系 $S'$ 相对于参考系 $S$ 平动的速度，则上式可以一般地表示为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \tag{1.47}$$

同一质点相对于两个相对做平动的参考系的速度之间的这一关系叫做**伽利略速度变换**。

要注意，速度的**合成**和速度的**变换**是两个不同的概念。速度的合成是指在同一参考系中一个质点的速度和它的各分速度的关系。相对于任何参考系，它都可以表示为矢量合成的形式，如式(1.18)。速度的变换涉及有相对运动的两个参考系，其公式的形式和相对速度的大小有关，而伽利略速度变换只适用于相对速度比真空中的光速小得多的情形。这一点将在第6章中作详细的说明。

如果质点运动速度是随时间变化的，则求式(1.47)对 $t$ 的导数，就可得到相应的加速度之间的关系。以 $\boldsymbol{a}$ 表示质点相对于参考系 $S$ 的加速度，以 $\boldsymbol{a}'$ 表示质点相对于参考系 $S'$ 的加速度，以 $\boldsymbol{a}_0$ 表示参考系 $S'$ 相对于参考系 $S$ 平动的加速度，则由式(1.47)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 \tag{1.48}$$

这就是同一质点相对于两个相对做平动的参考系的加速度之间的关系。

如果两个参考系相对做匀速直线运动，即 $\boldsymbol{u}$ 为常量，则

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = 0$$

于是有

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$

这就是说，在相对做匀速直线运动的参考系中观察同一质点的运动时，所测得的加速度是相同的。

**例1.6 雨滴下落**。雨天一辆客车 $V$ 在水平马路上以 20 m/s 的速度向东开行，雨滴 $R$ 在空中以 10 m/s 的速度竖直下落。求雨滴相对于车厢的速度的大小与方向。

**解** 如图1.21所示，以 $Oxy$ 表示地面($E$)参考系，以 $O'x'y'$ 表示车厢参考系，则 $v_{VE}=20$ m/s，$v_{RE}=10$ m/s。以 $v_{RV}$ 表示雨滴对车厢的速度，则根据伽利略速度变换 $\boldsymbol{v}_{RE}=\boldsymbol{v}_{RV}+\boldsymbol{v}_{VE}$，这三个速度的矢量关系如图。由图形的几何关系可得雨滴对车厢的速度的大小为

$$v_{RV} = \sqrt{v_{RE}^2 + v_{VE}^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22.4 \text{ (m/s)}$$

这一速度的方向用它与竖直方向的夹角 $\theta$ 表示，则

$$\tan\theta = \frac{v_{VE}}{v_{RE}} = \frac{20}{10} = 2$$

由此得

$$\theta = 63.4^\circ$$

即向下偏西 $63.4^\circ$。