

# 第 5 章

## 信号的抽取与插值

### 5.1 引言

至今,我们讨论的信号处理的各种理论、算法及实现这些算法所需要的系统都是把抽样频率  $f_s$  视为恒定值,即在一个数字系统中只有一个抽样频率(抽样率)。但是,在实际工作中,经常会遇到抽样率转换的问题。具体说明如下。

(1) 一个数字传输系统,既可传输一般的语音信号,也可传输视频信号,这些信号的频率成分相差甚远,因而相应的抽样频率也相差甚远。因此,该系统应具有传输多种抽样率信号并自动地完成抽样率转换的能力。

(2) 在对音频信号的处理和应用中目前存在着多种抽样频率。得到立体声音频信号(studio work)所用的抽样频率是 48 kHz,CD 产品用的抽样率是 44.1 kHz,而数字音频广播用的是 32 kHz<sup>[Vai93]</sup>。

(3) 当需要将数字信号在两个具有独立时钟的数字系统之间传递时,则要求该数字信号的抽样率能根据时钟的不同而转换。

(4) 如 1.2 节所述,对信号(如语音、图像)进行谱分析或编码时,可用具有不同频带的低通、带通及高通滤波器对该信号做子带分解,对分解后的信号再做抽样率转换及特征提取,以最大限度地减少数据量,即实现数据压缩的目的。

(5) 对一个信号抽样时,若抽样率过高,必然会造成数据的冗余,这时,希望能将该数字信号的抽样率减下来。

以上几个方面都是希望能对抽样率进行转换,或要求数字系统能工作在多抽样率状态。因此,建立在抽样率转换理论及其系统实现基础上的多抽样率数字信号处理已成为现代信号处理的重要内容。多抽样率数字信号处理的核心内容是信号抽样率的转换及滤波器组。

降低抽样率以去掉过多数据的过程称为信号的抽取(decimation);增加抽样率以增加数据的过程称为信号的插值(interpolation)。抽取、插值及二者相结合的使用便可实现

信号抽样率的转换。

滤波器组,顾名思义,是一组滤波器,它用以实现对信号频率分量的分解,然后根据需要对其各个子带信号进行多种多样的处理(如编码)或传输,在另一端再用一组滤波器将处理后的子带信号相综合。前者称为分析滤波器组,后者称为综合滤波器组。

本章详细讨论抽样率转换的理论与方法,在第6~8章讨论滤波器组的分析、设计和应用。

## 5.2 信号的抽取

设  $x(n) = x(t)|_{t=nT_s}$ , 欲使  $f_s$  减少  $M$  倍,最简单的方法是将  $x(n)$  中每  $M$  个点抽取一个,依次组成一个新的序列  $y(n)$ ,即

$$y(n) = x(Mn), \quad n \in (-\infty, +\infty) \quad (5.2.1)$$

$y(n)$  和  $x(n)$  的 DTFT 有如下关系:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X[e^{j(\omega - 2\pi k)/M}] \quad (5.2.2)$$

**证明** 由(5.2.1)式,  $y(n)$  的  $z$  变换为

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(Mn)z^{-n} \quad (5.2.3)$$

为了导出  $Y(z)$  和  $X(z)$  之间的关系,定义一个中间序列  $x_1(n)$ ,即

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

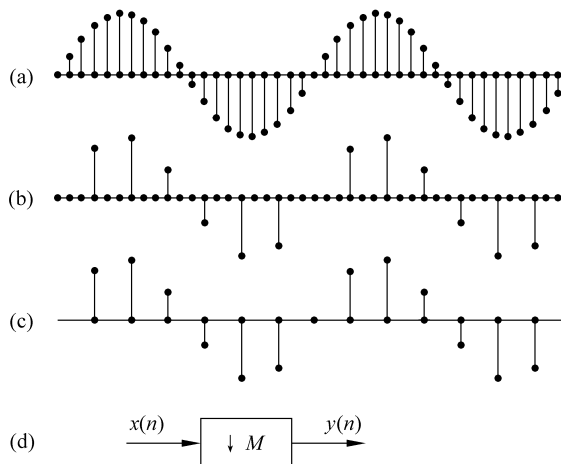
注意,  $x_1(n)$  的抽样率仍为  $f_s$ , 而  $y(n)$  的抽样率是  $f_s/M$ 。  $x(n)$ ,  $x_1(n)$  及  $y(n)$  的关系如图 5.2.1(a), (b) 和 (c) 所示, 横坐标为抽样点数; 抽取的框图如图 5.2.1(d) 所示。图中, 符号  $\downarrow M$  表示作  $M$  倍的抽取。

由图 5.2.1, 显然  $y(n) = x(Mn) = x_1(Mn)$ 。这样, 有

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(Mn)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n/M}$$

上式也可这样来理解: 对序列  $x_1(n)$ , 当  $n/M$  为非整数时,  $x_1(n)$  恒为零, 因此不影响式中的求和。于是有

$$Y(z) = X_1(z^{1/M}) \quad (5.2.5)$$

图 5.2.1 信号抽取示意图,  $M=3$ 

(a) 原信号  $x(n)$ ; (b)  $x_1(n)$ ; (c) 抽取后的信号  $y(n)$ ; (d) 抽取的框图

现在的任务是要找到  $X_1(z)$  和  $X(z)$  之间的关系。

令

$$p(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(n - Mi) \quad (5.2.6a)$$

为一脉冲序列,它在  $M$  的整数倍处的值为 1,其余皆为零,其抽样频率也为  $f_s$ 。由 1.9 节的 Poisson 和公式及(1.9.6)式,  $p(n)$  又可表示为

$$p(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{-kn}, \quad W_M = e^{-j2\pi/M} \quad (5.2.6b)$$

显然,  $x_1(n) = x(n)p(n)$ , 所以有

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(n)z^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{-kn} z^{-n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (z W_M^k)^{-n} \right] \end{aligned}$$

即

$$X_1(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z W_M^k) \quad (5.2.7)$$

将(5.2.7)式代入(5.2.5)式,有

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} W_M^k) \quad (5.2.8)$$

将  $z = e^{j\omega}$  代入(5.2.8)式,即得(5.2.2)式,证毕。

(5.2.8)式又常写成如下形式:

$$Y(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(zW_M^k) \quad (5.2.9)$$

(5.2.2)式的含义是,将信号  $x(n)$  作  $M$  倍的抽取后,所得信号  $y(n)$  的频谱等于将原信号  $x(n)$  的频谱  $X(e^{j\omega})$  先作  $M$  倍的扩展,再在  $\omega$  轴上作  $2\pi k (k=1, 2, \dots, M-1)$  倍的移位,幅度降为原来的  $1/M$  后再叠加。信号抽取后频谱的变化如图 5.2.2 所示,图中  $M=3$ , 每一个子图的含义已标注在纵坐标上。

由抽样定理,在由  $x(t)$  抽样变成  $x(n)$  时,若保证  $f_s \geq 2f_c$ , 那么抽样的结果不会发生频谱的混叠。对  $x(n)$  作  $M$  倍抽取得到  $y(n)$ , 若保证由  $y(n)$  重建出  $x(t)$ , 那么,  $Y(e^{j\omega})$  在自己的一个周期内  $(-\pi, \pi)$  也应等于  $x(t)$  的频谱  $X(j\Omega)$ , 或和  $X(e^{j\omega})$  在其一个周期内作  $M$  倍的扩展后的频谱相同。这就要求抽样频率  $f_s$  必须满足  $f_s \geq 2Mf_c$ 。图 5.2.2 正是这种情况。图中,  $X(e^{j\omega})$  的频谱限制在  $-\pi/3 \sim \pi/3$  内, 而又正好作  $M=3$  的抽取, 因此  $Y(e^{j\omega})$  中没有发生频谱的混叠。

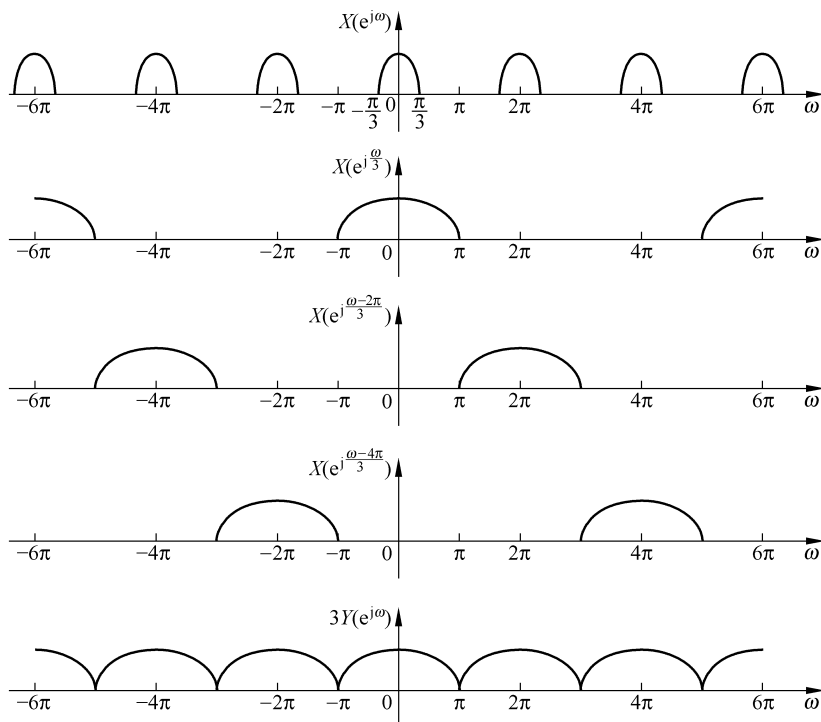


图 5.2.2 信号抽取后频谱的变化

但是,如果  $f_s \geq 2Mf_c$  的条件不能得到满足,那么  $Y(e^{j\omega})$  中将发生混叠,因此也就无法重建出  $x(t)$ 。如图 5.2.3(a) 所示,  $X(e^{j\omega})$  的频谱在  $|\omega| \geq \pi/2$  的范围内仍有值,因此,即使作  $M=2$  倍的抽取,也必然发生混叠,抽取后的频谱如图 5.2.3(b) 所示。

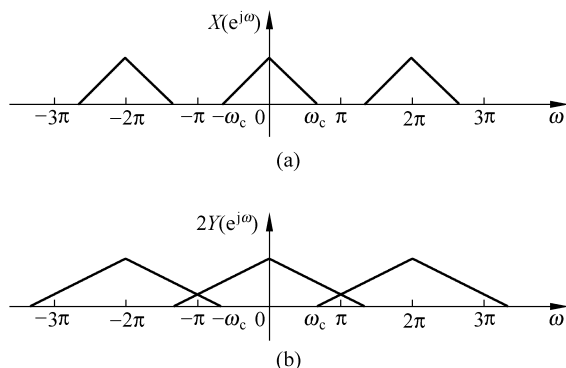


图 5.2.3 抽取后频谱发生混叠

(a)  $X(e^{j\omega})$ ; (b)  $2Y(e^{j\omega})$

由于  $M$  是可变的,所以很难要求在不同的  $M$  下都能保证  $f_s \geq 2Mf_c$ 。为此,防止抽取后在  $Y(e^{j\omega})$  中出现混叠的方法是在对  $x(n)$  抽取前先进行低通滤波,压缩其频带,如图 5.2.4(a) 所示。图中,  $H(z)$  为一理想低通滤波器,其频带范围

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/M \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.2.10)$$

如图 5.2.4(b) 所示。令滤波后的输出为  $v(n)$ , 则

$$v(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

记对  $v(n)$  抽取后的序列为  $y(n)$ , 则

$$\begin{aligned} y(n) &= v(Mn) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(Mn-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Mn-k) \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

由前面的推导不难得出

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^k) H(z^{1/M} W_M^k) \quad (5.2.12a)$$

及

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X[e^{j(\omega-2\pi k)/M}] H[e^{j(\omega-2\pi k)/M}] \quad (5.2.12b)$$

设  $x(n)$  的频谱和  $H(z)$  的频谱仍如图 5.2.3(a) 和图 5.2.4(b) 所示, 则  $v(n)$  的频谱  $V(e^{j\omega})$  如图 5.2.4(c) 所示,  $Y(e^{j\omega})$  如图 5.2.4(d) 所示。由图 5.2.4 可以看出, 加上频带为  $(-\pi/M, \pi/M)$  的低通滤波器后, 可以避免抽取后频谱的混叠。因此, 在对信号抽取时, 抽取前的低通滤波器是不可缺少的。

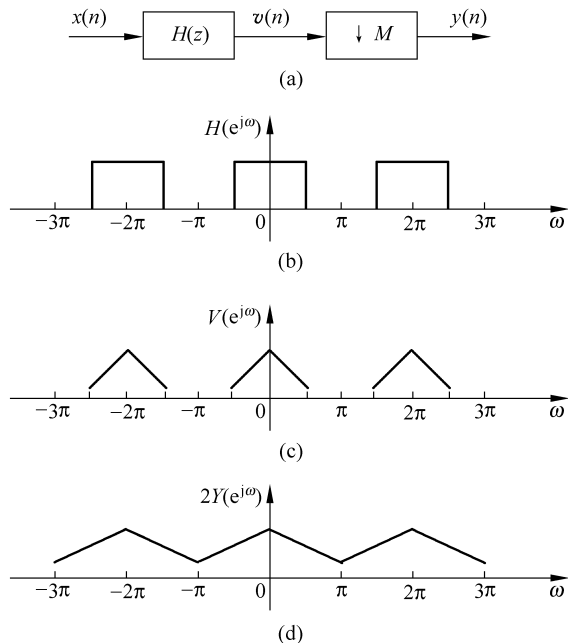


图 5.2.4 先滤波再抽取后的频谱的变化,  $M=2$

(a) 抽取的框图; (b)  $H(e^{j\omega})$ ; (c)  $V(e^{j\omega})$ ; (d)  $2Y(e^{j\omega})$

图 5.2.4(a) 是一个多抽样率系统, 在抽取器前、后的信号工作在不同的抽样频率, 因此, 标注该系统中各处信号频率的变量  $\omega$  也就具有不同的含义。在图 5.2.4(a) 中, 若记  $x(n)$  的抽样频率为  $f_x$ ,  $y(n)$  的抽样频率为  $f_y$ , 则  $f_x = Mf_y$ , 这体现了抽样频率的减少; 同理, 若令相对  $Y(e^{j\omega})$  的圆周频率为  $\omega_y$ , 相对  $X(e^{j\omega})$  的圆周频率为  $\omega_x$ , 则  $\omega_y$  和  $\omega_x$  有如下关系:

$$\omega_y = 2\pi f / f_y = 2\pi f / (f_x / M) = 2\pi M f / f_x = M\omega_x \quad (5.2.13)$$

若要求  $|\omega_y| \leq \pi$ , 则必须有  $|M\omega_x| \leq \pi$ , 即  $|\omega_x| \leq \pi/M$ , 这正是 (5.2.10) 式对  $H(e^{j\omega})$  频带所提要求的原因。同时使用  $\omega_y$  和  $\omega_x$  两个变量固然能指出抽取前后信号频率的内涵, 但使用起来非常不方便。例如, 图 5.2.4(b), (c) 和 (d) 中横坐标的刻度就会不一样, 这和大家把  $2\pi$  作为一个周期相矛盾。因此, 在本书中, 除非特别说明, 在抽取前后及 5.3 节要

讨论的插值前后,信号的圆周频率统一用  $\omega$  表示之。只要搞清了抽取和插值前后的频率关系,一般是不会混淆的。

## 5.3 信号的插值

如果希望将  $x(n)$  的抽样频率  $f_s$  增加  $L$  倍,即变成  $Lf_s$ ,那么,最简单的方法是将  $x(n)$  每两个点之间补  $L-1$  个零。设补零后的信号为  $v(n)$ ,则

$$v(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.3.1)$$

如图 5.3.1(a)和(b)所示。

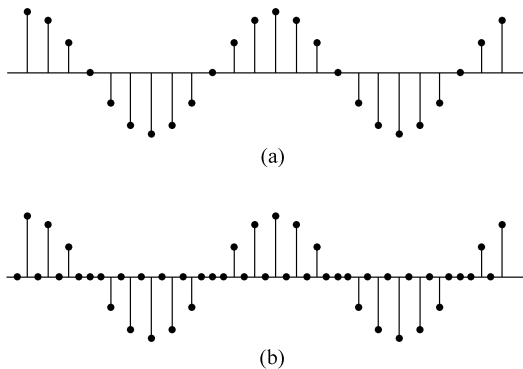


图 5.3.1 信号的插值

(a) 原信号  $x(n)$ ; (b) 插入  $L-1$  个零后得到的  $v(n)$ ,  $L=2$

现在来分析  $x(n)$  和  $v(n)$  各自 DTFT 之间的关系。由于

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/L) e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega kL}$$

所以

$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad (5.3.2)$$

同理

$$V(z) = X(z^L) \quad (5.3.3)$$

式中,  $V(e^{j\omega})$  和  $X(e^{j\omega})$  都是周期的,  $X(e^{j\omega})$  的周期是  $2\pi$ , 但  $X(e^{j\omega L})$  的周期是  $2\pi/L$ , 这样,  $V(e^{j\omega})$  的周期也是  $2\pi/L$ 。(5.3.2)式的含义是: 在  $-\pi \sim \pi$  的范围内,  $X(e^{j\omega})$  的带宽被压

缩了  $L$  倍,同时产生了  $L-1$  个映像,因此,  $V(e^{j\omega})$  在  $-\pi \sim \pi$  内包含了  $L$  个  $X(e^{j\omega})$  的压缩样本,如图 5.3.2 所示。图 5.3.2(a)是插值前的频谱,图 5.3.2(b)是插值后的频谱。

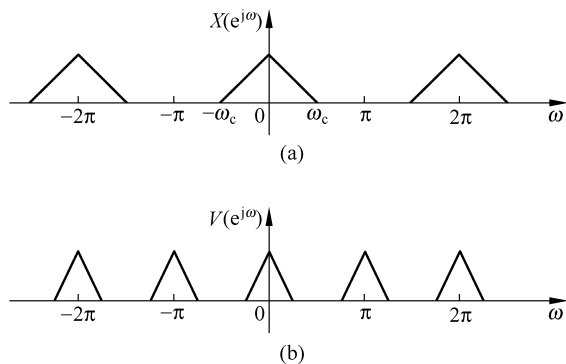


图 5.3.2 插值后对频域的影响,  $L=2$

由图 5.3.2 可以看出,插值以后,在原来的一个周期  $(-\pi \sim \pi)$  内,  $V(e^{j\omega})$  出现了  $L$  个周期,前已述及,多余的  $L-1$  个周期称为  $X(e^{j\omega})$  的映像,应当设法去除这些映像。

实际上,图 5.3.1(b)用填充零的方法实现的插值是毫无意义的,因为补零不可能增加信息,因此不是实际意义上的插值。实现有效插值的方法是将  $v(n)$  再通过一个低通滤波器

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} c, & |\omega| \leq \pi/L \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.3.4)$$

式中,  $c$  是一定标常数。令  $v(n)$  通过滤波器后的输出为  $y(n)$ ,如图 5.3.3 所示。

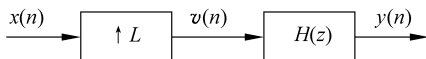


图 5.3.3 插值后的滤波

滤波器  $H(z)$  的作用有两个,一是去除了  $V(e^{j\omega})$  中多余的  $L-1$  个映像,这是由其频带的设置所实现的(见(5.3.4)式);二是实现了对  $v(n)$  中填充的零值点的平滑,这是由卷积运算所实现的。实际上,  $H(z)$  的这两个功能本质上是一样的。

因为

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})V(e^{j\omega}) = cV(e^{j\omega}) = cX(e^{j\omega L}), \quad |\omega| \leq \pi/L$$

$$y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) d\omega$$

所以

$$y(0) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} X(e^{j\omega L}) d\omega = \frac{c}{2\pi L} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \frac{c}{L} x(0)$$

这样,若取  $c=L$ ,则可保证  $y(0)=x(0)$ 。

现在,来分析一下图 5.3.3 中的时域关系。由(5.3.1)式,有

$$\begin{aligned} y(n) &= v(n) * h(n) = \sum_k v(k) h(n-k) \\ &= \sum_k x(k/L) h(n-k) \end{aligned}$$

或

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-kL) \quad (5.3.5)$$

## 5.4 抽取与插值相结合的抽样率转换

对给定的信号  $x(n)$ ,若希望将抽样率转变为  $L/M$  倍,可以按以上两节讨论的方法,先将  $x(n)$  作  $M$  倍的抽取,再作  $L$  倍的插值来实现,或是先作  $L$  倍的插值,再作  $M$  倍的抽取。一般来说,抽取使  $x(n)$  的数据点减少,会造成信息的丢失,因此,合理的方法是先对信号做插值,然后再抽取,如图 5.4.1(a)所示。

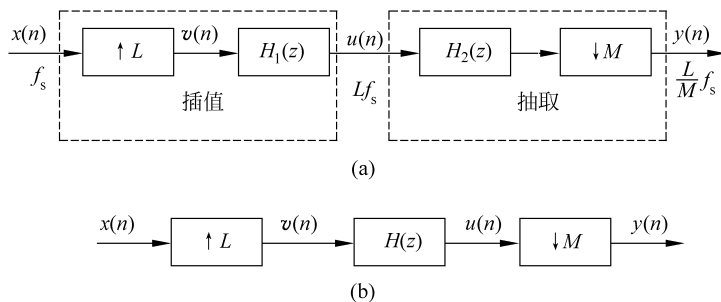


图 5.4.1 插值和抽取的级联实现

(a) 使用两个低通滤波器; (b) 使用一个低通滤波器

图 5.4.1 中,插值和抽取工作在级联状态。图 5.4.1(a)中滤波器  $h_1(n)$ ,  $h_2(n)$  所处理的信号的抽样率都是  $Lf_s$ ,因此可以将它们合起来变成一个滤波器,如图 5.4.1(b)所示。令

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} L, & 0 \leq |\omega| \leq \min(\pi/L, \pi/M) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.4.1)$$

则该滤波器既去除了插值后的映像又防止了抽取后的混叠。

现在分析一下图 5.4.1(b) 中各部分信号的关系。由上两节的讨论可知

$$v(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.4.2)$$

及

$$y(n) = u(Mn), \quad n = -\infty \sim +\infty \quad (5.4.3)$$

因为

$$u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)v(k) \quad (5.4.4)$$

所以

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k/L) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-Lk)x(k) \quad (5.4.5)$$

及

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Mn-Lk) \quad (5.4.6)$$

对比(5.2.11)式及(5.3.5)式可以看出,(5.4.6)式中的  $y(n)$  正是单独抽取和单独插值时时域关系的结合。

因为  $h(n)$  是因果的滤波器, 所以为了保证  $Mn-Lk \geq 0$ , 即  $k \leq \frac{M}{L}n$ , 这是(5.4.6)式中  $k$  的取值的制约关系。记

$$k = \left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor - m \quad (5.4.7)$$

式中,  $\lfloor p \rfloor$  表示求小于或等于  $p$  的最大整数。这样,(5.4.6)式可写成

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor - m\right)h\left(Mn - \left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor L + mL\right) \quad (5.4.8)$$

由于

$$Mn - \left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor L = Mn \pmod{L}$$

$y(n)$  和  $x(n)$  之间的关系也可写成如下的表达式:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor - m\right)h(mL + \langle Mn \rangle_L) \quad (5.4.9)$$

式中,  $\langle Mn \rangle_L$  表示  $Mn$  对模  $L$  求余。