第1章 函数和方程式

1.1 变量与函数

在给定的问题中，不变的、保持一定值的量叫作常量(constant)。例如，在光速测量中，假定实验是精确的，就会发现，无论测量是在何时何地进行的，光速都是 3×10^{8}m/s，因此，我们称之为常量。

相反地，由于某种原因而变化的、取不同值的量叫作变量(variable)，一般用字母 x、y、z 等表示。我们经常把经济现象抽象为经济变量。比如说失业水平，不同国家的失业水平有不同的数据，一个国家连续几年的失业水平也是变化的。在经济分析中的常量与变量具有不同特性，往往要强调条件。

经济分析中的变量一般有两类，一类是数量型变量，如工资、价格、储蓄、消费、失业率等，另一类是性质型变量，如季节、性别、区域、好坏等，经常通过赋值的方法将这些变量纳入经济分析中，性质型变量有时也称为虚拟变量。

经济分析中应尽量选取数量型变量。在经济分析中，由于变量数量较多，为了区分变量，往往选择特定的字母来表示变量，如需求用字母 d 表示，价格用字母 p 来表示，工资率用字母 w 来表示，等等，以防止混淆。

变量之间彼此联系。我们考虑问题的过程中，不仅是一个变量，可能有几个变量，要研究的是这些变量之间有什么关系。例如，去银行存钱，假设1年定期整存整取的年利率为3.05%，则存款本金 x 与一年到期时的利息 y 之间的对应关系如表1.1所示。

表1.1 利息 y 与本金 x 的关系

x	500	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000
y	15.25	30.5	61	152.5	305	610

表1.1中的例子反映了在同一过程中两个相互依赖的变量，当其中一个变量取一个值时，按一定的规则，另一个变量有唯一确定的值与之对应，变量之间的这种“同步的”联系，就是函数关系，即给定其中一个变量的值，就肯定能够得出另一个变量的唯一确定的值时，我们称一个变量是另一个变量的函数，记为

$$y=f(x) \tag{1.1}$$

式(1.1)是“y 是 x 的函数”这种关系的一种简记。简记形式所代表的具体函数形式是不明确的，任何一个英文字母或希腊字母的变形，都可以用来表示“y 是 x 的函数”。例如：

$$y=a(x),\quad y=\varphi(x)$$

其中，x 习惯地称为自变量，y 称为因变量(即 y 因 x 而决定)。x 的变化范围称为函数的定义域，记为 D；y 的变化范围称为函数的值域，记为 Z；f 为自变量与因变量的对应规则。例如：

$$y = 2x^2 + 3x \tag{1.2}$$

式中,y 和 x 的关系是:当 x 任取一个值时,y 就会得出一个确定的值。例如,当 $x=2$ 时,就有 $y=2\times2^2+3\times2=14$;同样,当 $x=-5$ 时,$y=35$;$x=2\,000$ 时,有 $y=8\,006\,000$。因此,y 是 x 的函数,式(1.2)描述了这种函数关系。

在式(1.2)中,给出一个 x 的值,就有一个相对应的 y 值。当然,函数可以采取多种不同的具体形式。例如:

$$y = x^3 \tag{1.3}$$

$$y = 10x - 5 \tag{1.4}$$

式(1.3)和式(1.4)都给出了从 x 值求出 y 值的规则。按照这一规则,表 1.1 中利息与存款本金相对应的函数关系为

$$y = 0.030\,5x$$

思考题

1.1　考虑如下函数关系:

(a) $y=8x^2-5x+3$;　　(b) $y=\dfrac{5}{x}+10$;　　(c) $y=(2x+3)^3$。

求 x 取以下不同值时的 y 值:(i)$x=2$;(ii)$x=-3$。

1.2　若 $z=6t^4+3t^2+10$,求当 $t=4$ 和 $t=-6$ 时的 z 值。

函数是经济数学的主要研究对象。我们经常把经济现象之间的联系抽象为函数关系。用数学方法描述经济问题时经常要建立函数关系。例如,失业率上升时,工资率下降;可支配收入增加时,家庭的消费支出上升;商品价格上涨时,需求量降低。当这些联系“同步地”变动时,变量之间存在函数关系。因此,掌握函数对于学好经济理论起着至关重要的作用。

但在数学中可能存在 y 和 x 的非单值对应关系,如:

$$y = \pm\sqrt{x} \tag{1.5}$$

若 $x=9$ 时,则有 $y=3$ 或 $y=-3$,这样 y 的值就不是唯一的。式(1.5)不是我们刚刚定义过的函数,在本书中,我们不讨论如式(1.5)中的关系。

表示函数关系,常用的方法有两种:

一种是解析法,即用一个数学公式来表示,如 $y=f(x)$。在经济分析中,经常用解析法来表示经济变量之间的联系,如其他条件不变时,商品的需求量是自身价格的函数,可以把两个变量之间的关系写成

$$d = f(p) \quad 或 \quad d = d(p) \tag{1.6}$$

式中:d 为某种商品的需求量;p 为这种商品的价格。同理,在其他条件不变时,经济中固定资本的投资水平由利率决定,可以写作

$$I = f(R) \quad 或 \quad I = I(R) \tag{1.7}$$

式中:I 为投资;R 为利率。例如,我们有如下的 I(单位:万元)和 R(百分比)的函数关系:

$$I = 200 + \frac{10}{R^2} \tag{1.8}$$

即给定 R 值,可用式(1.8)求出唯一的 I 值。例如,当利率 $R=5\%$时,可得 $I=200+\dfrac{10}{0.05^2}=4\,200$(万元)。

同样，若 $R=10\%$，则 $I=200+\dfrac{10}{0.1^2}=1\,200$（万元）。

思考题

1.3　用解析法表示下列经济关系：

(a) 家庭消费支出取决于可支配收入；

(b) 货币需求取决于利率；

(c) 平均成本取决于产量。

另一种表示函数的方法是图示法，即用坐标系中的曲线反映变量之间的函数关系。坐标系由横轴与纵轴构成。横轴与纵轴如图 1.1 所示，两个轴的交点称为原点。变量 y 值用纵轴表示（称之为 y 轴），变量 x 值用横轴表示（称之为 x 轴）。在原点之上的 y 值是正值，在原点之下则是负值；在原点右侧的 x 值是正值，原点左侧则是负值。

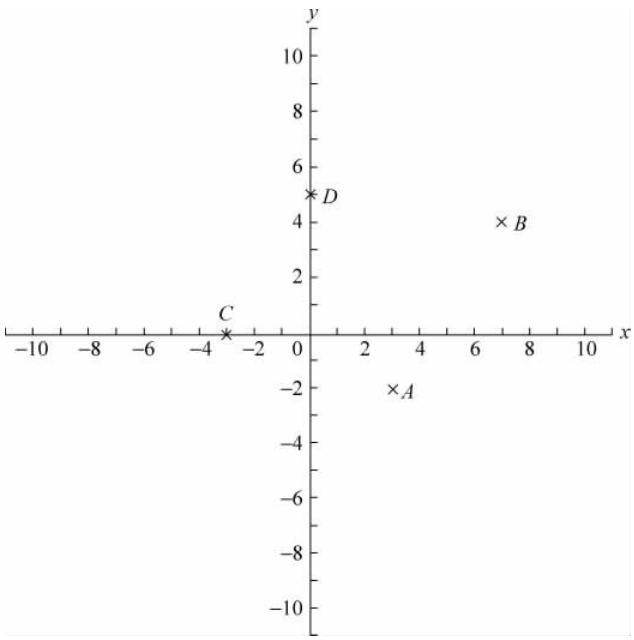

图 1.1　坐标系

变量 x 和 y 的任意一对组合都可通过坐标系上的一点来表示。例如，$x=3$，$y=-2$ 由图 1.1 中的点 A 表示，A 点是从原点出发，沿 x 轴向右移动 3 单位，沿 y 轴向下移动 2 单位得到的。

习惯上通常把坐标为 $(3,-2)$ 的点用一个字母 A 表示。A 点所代表的括号中的数字依次是 x 值和 y 值。x 值被称为 x 坐标（横坐标），y 值被称为 y 坐标（纵坐标）。在图 1.1 中可以标出更多的点，如 B 点坐标是 $(7,4)$，即该点的 x 坐标为 7，y 坐标为 4，它代表 $x=7$，$y=4$。同样，在 x 轴上的点 C 坐标为 $(-3,0)$，y 轴上的点 D 坐标为 $(0,5)$。

思考题

1.4　在坐标系中标出点 $(-5,-8)$，$(6,-4)$，$(0,-6)$，$(-3,2)$，$(0,0)$，$(2,0)$。

给定如上的一个坐标系,就可以画出我们以前所描述的任何一个函数的图像。例如,考虑如下函数关系:

$$y = x^2 + 3x - 4 \tag{1.9}$$

可用函数(1.9)求出与 x 值所对应的 y 值。例如,当 $x=3$ 时,对应的 y 值为:$y=3^2+3\times3-4=14$,这对 x 值和 y 值可在坐标系上用点(3,14)表示出来。因此,我们可用函数来找出所有的一一对应的 x 值和 y 值,并将它们在坐标系中表示出来。表 1.2 中是 x 取 $-4\sim+4$ 时对应的 y 值,如图 1.2 所示。

表 1.2　函数 $y=x^2+3x-4$ 的对应值

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$3x$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
y	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14	24

在图 1.2 中,将各点用一条平滑的曲线连接,就可得出式(1.9)的图像。当然,我们只能画出函数在 x 取值范围内的图像,其余的部分无法画出。当 x 超过 4 时,y 的变动是不确定的;当 x 减少到小于 -4 时,y 的变动也是不确定的。然而,从这部分图像中,可以看出函数的主要特征。当 x 增加时,y 起初减少,而且 y 是以递减的速度减少的,直到达到最小值,即 A 点,然后上升。因此,在 $x=-1.5$ 时,图像有最小值,且该图像关于最小值是对称的。把 $x=-1.5$ 代入式(1.9),可得

$$y = (-1.5)^2 + 3\times(-1.5) - 4 = -6.25$$

y 的最小值为 -6.25,A 点的坐标为 $(-1.5,-6.25)$。

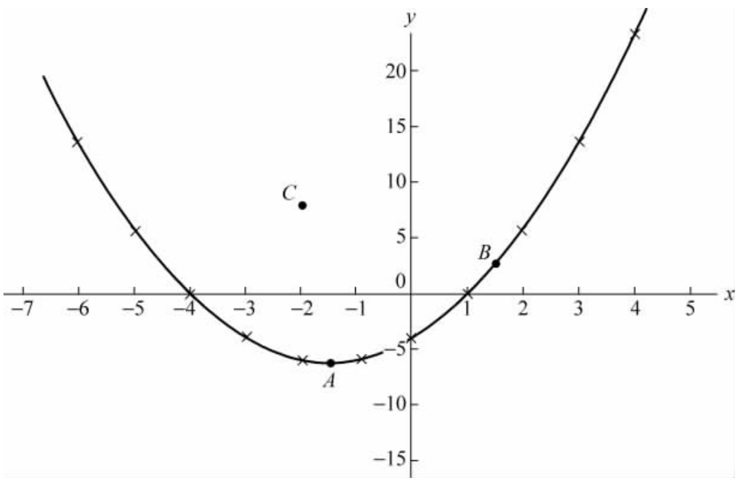

图 1.2　函数 $y=x^2+3x-4$ 的图像

需要强调的是函数式(1.9)和它在图 1.2 中的图像之间存在紧密联系。显然给定函数中任何一对 x 和 y 值,都能通过图像上的点表示出来;反过来,图 1.2 中的任一点一定代表一对满足函数式(1.9)的 x 和 y 值。例如,当 $x=1.5$ 时,通过式(1.9)可得 $y=2.75$,(1.5,2.75)就是图 1.2 中的点 B。

任何一对满足函数式(1.9)的 x 和 y 值,都在图 1.2 中的曲线上,而任何不在图 1.2 中

曲线上的点所代表的 x 和 y 值也都不满足函数式(1.9)。例如,图 1.2 中的点 C 坐标为 $(-2,8)$,显然不满足函数式(1.9),因为从式(1.9)中可知,当 $x=-2$ 时,$y=-6$。

思考题

1.5　画出函数式 $y=2x^2+7x-4$ 的图像,x 的取值范围为 $x=-5$ 到 $x=2$,并找出 y 的最小值。试证明:点(0.5,0)既满足该函数式又位于曲线之上,而点(2,10)既不满足函数式也不在曲线上。

注意函数式(1.9)的图像有两个点与 x 轴相交,在 $x=-4$ 和 $x=1$ 时,y 都等于 0。在式(1.9)中,$y=0$ 意味着

$$x^2+3x-4=0 \tag{1.10}$$

从此式中可得出 x 值,求 x 值的过程叫作解方程式。任一个使方程(1.10)成立的 x 值都是方程式的解或根。$x=-4$ 和 $x=1$ 是方程(1.10)的解,因为它们是能够满足方程式,或者说使方程左右两边相等的 x 值。

由于表达形式所限,图示法经常用来表示两个变量之间的函数关系。在用函数来表示经济关系的时候,限定函数的取值范围是必要的,在经济分析中函数图像主要表示在第一象限中。

思考题

1.6　利用思考题 1.5 中所画出的图像,解方程式 $2x^2+7x-4=0$。

函数的几何性质

函数 $y=x^2$ 的对应值如表 1.3 所示。在坐标系中作出 $y=x^2$ 的函数图像,如图 1.3 所示。

表 1.3　函数 $y=x^2$ 的对应值

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

可以看到,在 $x\in(-\infty,0)$ 时,函数图像呈下降趋势;在 $x\in(0,+\infty)$ 时,函数图像呈上升趋势。这反映了函数的单调性。即,当 x 在区间 $(-\infty,0)$ 上取值时,随着 x 的增大,相应的 y 值减少,函数 $y=x^2$ 是单调递减的;当 x 在区间 $(0,+\infty)$ 上取值时,随着 x 的增大,相应的 y 值也增大,函数 $y=x^2$ 是单调递增的。

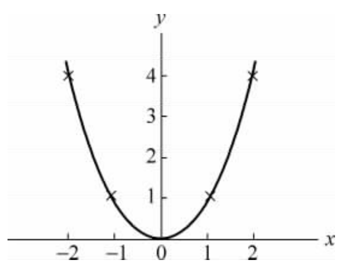

图 1.3　函数 $y=x^2$ 的图像

一般地,如果 $x_1,x_2\in D$,若 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的单调递增函数;有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的单调递减函数。如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是单调递增函数或单调递减函数,那么就说 $y=f(x)$ 在区间 D 上具有单调性。

函数具有单调性是极值的基础,因此,单调性是经济分析中最常使用的性质之一。例如,在 U 形的平均成本曲线上,一定存在着令平均成本最小的产量水平 q^*。当实际产量低

于 q^* 时,平均成本函数是单调递减的;当实际产量高于 q^* 时,平均成本函数是单调递增的。

函数 $y=x^2$ 在闭区间内又是一个有界函数。有界性是指,如果对于自变量 x 所在的某一定义域 D 范围内,存在一个正数 M,使得在 D 上的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界,或 $y=f(x)$ 在 D 上是有界函数。反之,如果不存在这样的正数 M,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上无界,或 $y=f(x)$ 在 D 上是无界函数。

一般来说,连续函数在闭区间内具有有界性。例如:$y=x^2$ 在 $[-3,0]$ 上有最小值 0,最大值 9,函数值在 0～9 变化,是有界的,所以具有有界性。在经济分析中,有界性常常与单调性联系起来用于分析函数的极值问题。

除了单调性、有界性之外,函数的几何性质还包括奇偶性和周期性等。但这两种性质在经济分析中不常出现,在此就不详加论述了。

1.2　一元线性函数和直线

最经常使用的函数为一元函数,即只有一个自变量和一个因变量的函数,一般表示为 $y=f(x)$。一元函数可以采取多种形式,最简单的一元函数形式是线性函数,若某函数具有函数关系

$$y = mx + c \tag{1.11}$$

则称该函数为线性的,其中,m 和 c 是任意常数。若 $m=3,c=4$,则有线性函数

$$y = 3x + 4 \tag{1.12}$$

表 1.4 列出了线性函数 $y=3x+4$ 的对应值。函数图像如图 1.4 所示,显而易见,其图像是一条直线。

表 1.4　线性函数 $y=3x+4$ 的对应值

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3x$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
y	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16

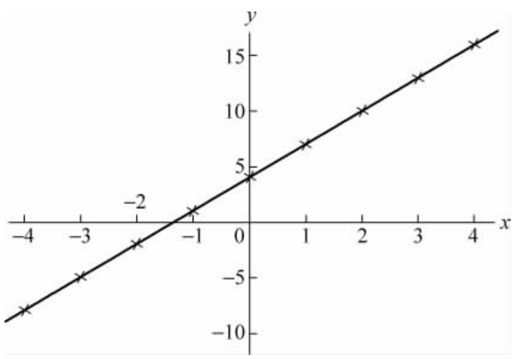

图 1.4　线性函数 $y=3x+4$ 的图像

无论 m 和 c 取何值,式(1.11)的图像都是一条直线,因此,式(1.11)也称作直线方程。在画线性函数图像时,只要找到两点,并用一条直线将这两点连接起来即可。在式(1.11)

中，系数 c 是当 $x=0$ 时 y 的值。因此，它给出了直线与 y 轴相交的点。c 被称为截距。c 取负值，则意味着直线与 y 轴的交点位于原点的下方，如图 1.5 所示。

式(1.11)中，系数 m 是直线的斜率，在图 1.5 和图 1.6 中，m 度量了当 x 变化 1 单位时 y 的变化，此时 m 等于 b/a。

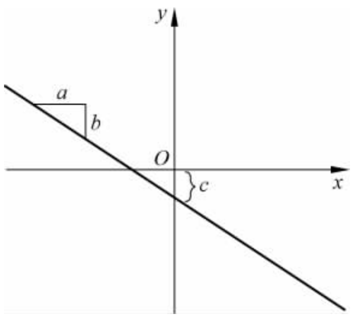

图 1.5　负的斜率和截距

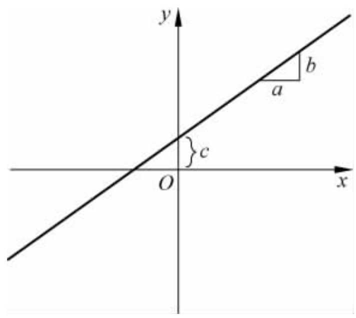

图 1.6　正的斜率和截距

两种特殊情况需要注意：①若式(1.11)中 $m=0$，则图像是一条水平的直线(也就是斜率为 0)，且与 y 轴交于 $y=c$ 处；②如果图 1.5 中 $a=0$，m 是无穷的，则图像为一条与 x 轴垂直的直线。

显然，除了水平线之外，直线与横轴交于一点且只交于一点。例如，在图 1.4 中直线 $y=3x+4$ 与横轴交于 $x=-\frac{4}{3}$是方程式 $3x+4=0$ 的解。因此，线性方程

$$mx+c=0 \quad 且 \quad m\neq 0 \tag{1.13}$$

有且仅有一个解。

思考题

1.7　写出下列直线方程的截距和斜率：

(a) $y=6x+8$；　(b) $2x-3y=8$；　(c) $7x=2y-5$。

线性方程的代数解

在图 1.4 中，我们得到一种解方程的方法，即根据函数关系画出图像，然后确定图像与 x 轴相交的点。然而这种方法要得到精确的答案需要非常仔细地绘图，有时运用一点代数知识来求解会更加方便。

求解式(1.13)那样的线性方程，由于 $mx+c=0$，可得

$$mx=-c \tag{1.14}$$

因此

$$x=-\frac{c}{m} \tag{1.15}$$

式(1.15)给出了线性方程(1.13)的一个解。例如，在式(1.12)中，$m=3$，$c=4$，解就是 $x=-\frac{4}{3}$，这和图 1.4 中所画的是一致的。

在求解方程时可以简化成式(1.14)的形式，求解起来会更加简单。例如，考虑一个方

程式

$$3(x+5)+2x=7+5(2x-1) \tag{1.16}$$

将括号乘开并把所有含 x 的项移到等号左边,所有常数项移到等号右边,可得

$$3x+2x-10x=7-5-15$$

或

$$-5x=-13$$

方程式(1.16)的解为 $x=\dfrac{13}{5}$。

提醒注意的是,有一类方程式比较特殊,那就是恒等式。考虑方程式

$$5(2-x)+x=2(3-2x)+4 \tag{1.17}$$

乍看起来,式(1.17)与式(1.16)是相似的。事实上,将括号乘开,可得

$$-5x+x+4x=6+4-10$$

上式可简化为

$$0=0$$

我们的求解程序显然不再适用。这是因为式(1.17)实质上不是一个方程式而是一个恒等式。也就是说,无论 x 取何值时,该式都是成立的。把如式(1.17)这样的式子定义为

$$5(2-x)+x\equiv 2(3-2x)+4$$

记号"≡"称为"恒等于"。恒等式在经济学中是很普遍的。在经济分析中,恒等式一般用于以下两种情况。

第一种情况,用恒等式来表示某个变量的定义。例如,国内生产总值(GDP)通常是指一定时期内,一个国家或地区所生产的全部最终产品和劳务的市场价值的总和。对国内生产总值进行核算时,可以通过将一定时期内社会购买各项最终产品的支出加总得出该时期国内生产的最终产品的市场价值。具体地,社会对最终产品和劳务的支出主要是居民消费、企业投资、政府购买和净出口。因此,国内生产总值 GDP 可表示为

$$\mathrm{GDP}\equiv C+I+G+(X-M)$$

其中,C 表示居民消费;I 表示企业投资;G 表示政府购买,是各级政府购买商品和劳务的支出;$(X-M)$表示净出口(X 表示出口,M 表示进口)。

第二种情况,用恒等式来表示某种平衡关系。例如,商品市场达到平衡的条件是全社会对商品的总需求与总供应相等,即 AD≡AS,在只有居民和厂商的两部门经济中,总需求表现为居民的消费需求和厂商的投资需求;总供给即各种生产要素收入之和,可转化为消费与储蓄两部分。于是

$$\mathrm{AD}=C+I$$
$$\mathrm{AS}=C+S$$

这样,AD≡AS,就可表示为 $I\equiv S$。也就是说,如果通过金融机构把居民储蓄全部转化为投资,就可实现商品市场的平衡。

思考题

1.8 下列式子中哪些是方程式,哪些是恒等式?并求出方程式的解。

(a) $3(x+4)+2(x-5)=3x$;　　(b) $2x+5(2-x)=2(x+5)-5x$;

(c) $3x-5(x-3)=2(2x-3)$；　　(d) $2(x+4)+3(x-1)=4(8+2x)+3(x-1)$。

一元线性函数的经济应用

作为最简单的函数形式，一元线性函数在经济分析中得到了广泛的应用，最典型的代表就是需求函数和供给函数。

先来看需求函数。我们可以想象到一种商品在市场上的需求量肯定与它的价格有关系：价格贵，买的人就少，需求量比较小；价格便宜，买的人就多，需求量比较大。表示需求量与价格之间联系的函数就是需求函数：$d=d(p)$。根据上述分析，可以初步判断，在其他因素不变的条件下，一种商品的需求量和它的价格之间是呈反方向变动的，这样，我们就可以用线性函数来表示具体的需求函数，记为

$$d=d(p)=a-b\cdot p,\quad 其中\ a,b>0 \tag{1.18}$$

线性需求函数表明，一般而言，当一种商品的价格上升时，该商品的需求量将减少。在以价格为纵轴、需求量为横轴的坐标系内，需求函数的图像表现为一条向右下方倾斜的直线，如图1.7(a)所示。

再来看供给函数。供给，就是企业能够为市场提供多少商品，当然它也和价格有关系：商品价格高，企业就增加生产，供给量就比较大；反之，供给量就比较小。我们也可以把这种联系简化为一种函数关系，称为供给函数，在其他因素不变的条件下，供给函数可以表示为：$s=s(p)$。根据上述分析，可以初步判断一种商品的供给量和它的价格之间是呈同方向变动的，这样，我们就可以用线性函数来表示具体的供给函数，记为

$$s=s(p)=-\alpha+\beta\cdot p,\quad 其中\ \alpha,\beta>0 \tag{1.19}$$

线性供给函数表明，一般而言，当一种商品价格上升时，该商品供给量将增加。在以价格为纵轴、供给量为横轴的坐标系内，供给函数的图像表现为一条向右上方倾斜的直线，如图1.7(b)所示。

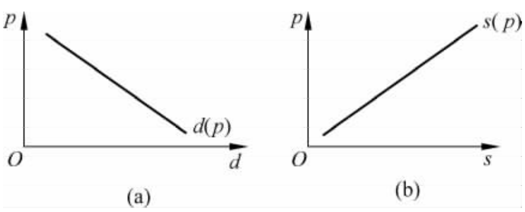

图1.7　线性需求函数和线性供给函数

大家想一想，为什么需求函数和供给函数的斜率和截距按上述方法设置，有什么原因呢？

1.3　一元二次函数和抛物线

如式(1.9)这样的函数被称为二次函数。二次函数的一般形式是

$$y=f(x)=ax^2+bx+c \tag{1.20}$$

显而易见，式(1.9)是式(1.20)的一个特例，此时，$a=1,b=3,c=-4$。

二次函数的图像形状为抛物线，具体形状取决于参数 a：当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，

为 U 形曲线，类似于图 1.2；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，图像是倒 U 形的，并且此时函数有一个最大值而不是最小值。例如：

$$y = -2x^2 + 8x - 13 \tag{1.21}$$

式中 $a=-2$，如表 1.5 和图 1.8 所示，在 $x=2$ 时，该函数有最大值 $y=-5$。

表 1.5 函数 $y=-2x^2+8x-13$ 的对应值

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32	-50	-72
$8x$	-16	-8	0	8	16	24	32	40	48
y	-37	-23	-13	-7	-5	-7	-13	-23	-37

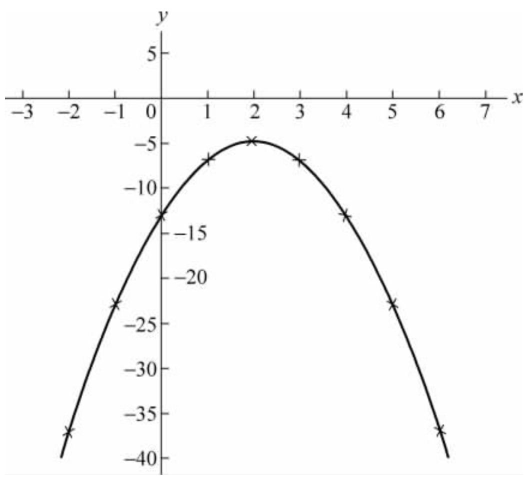

图 1.8 函数 $y=-2x^2+8x-13$ 的图像

在图 1.2 中出现二次函数与 x 轴交于两点的情况，在图 1.8 中二次函数曲线与 x 轴并不存在交点。

根据式(1.20)，可得出二次方程式的形式为

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.22}$$

式(1.22)可能有两个解，也可能没有解，也就是说，有可能存在两个 x 值满足方程式(1.22)，也可能没有任何一个 x 值能使该等式成立。例如，我们知道方程式(1.10)有两个解，$x=-4$ 和 $x=1$。然而，从图 1.8 中可推出方程式

$$-2x^2 + 8x - 13 = 0 \tag{1.23}$$

没有解，即函数(1.23)的曲线与 x 轴不相交。

当然，二次方程式(1.22)还有可能只有唯一的一个解。其实这是两个解无限靠近，最终导致图形与 x 轴相切的情形。

思考题

1.9 在曲线 $y=-3x^2-2x+5$ 上，找到 y 的最大值，并解方程式 $3x^2+2x-5=0$。