第8章　一元多项式

在5.1节中曾经讨论过数域 F 上次数小于 n 次的一元多项式全体，以及多项式的加法和数与多项式的乘法构成数域 F 上的 n 维线性空间 $F_n[x]$. 多项式是代数学中最基本的内容之一，不但与高次方程的研究有关，而且在学习代数以及其他数学分支中也会涉及. 本章将系统介绍有关一元多项式理论的基本知识.

8.1　整除性

8.1.1　多项式的概念与运算

设 F 表示一个数域，x 是一个符号(或称为文字)，形式表达式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{8.1}$$

称为数域 F 上文字 x 的**一元多项式**(polynomial)，其中 n 是非负整数，$a_i \in F(i=0,1,\cdots,n)$.

这里定义的多项式是符号 x 的形式表达式，当 x 是未知数时，就是大家熟悉的中学代数中的多项式. x 还可以表示其他任意对象，正如在线性代数中所看到的，x 可以是 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，那么就得到一个矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A}) = a_n\boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I}$；$x$ 也可以是线性变换 σ，$f(\sigma) = a_n\sigma^n + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \cdots + a_1\sigma + a_0\varepsilon$ 是一个关于线性变换 σ 的多项式，等等.

在(8.1)式中，$a_i x^i$ 称为 i 次项，a_i 称为 i 次项系数. 若 $a_n \neq 0$，则称 $a_n x^n$ 为**首项**，a_n 为**首项系数**，n 是 $f(x)$ 的**次数**(degree)，记作 $\deg f(x)$. 当 $f(x) = a_0$，$a_0 \neq 0$ 时，$\deg f(x) = 0$，即 $f(x) = a_0$ 是一个零次多项式. $f(x) = 0$ 称为**零多项式**，零多项式是唯一不定义次数的多项式.

记数域 F 上的全体一元多项式为 $F[x]$，称为 F 上的**一元多项式环**. 常见的多项式有复系数多项式 $\mathbb{C}[x]$，实系数多项式 $\mathbb{R}[x]$ 和有理系数多项式 $\mathbb{Q}[x]$.

设 $f(x), g(x) \in F[x]$，并设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i.$$

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同次的，并且同次项系数全相等，则称这两个多项式**相等**，即

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow n=m \text{ 且 } a_i=b_i, \quad i=0,1,\cdots,n. \tag{8.2}$$

中学代数中两个多项式可进行加、减、乘等运算，对形式表达式(8.1)也可以引入类似的运算. 假设 $n\geqslant m$，为方便起见，在 $g(x)$ 中令 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$，于是

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\pm b_i)x^i, \tag{8.3}$$

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=k}a_ib_j\Big)x^k. \tag{8.4}$$

显然 F 上的多项式进行加、减、乘等运算后，所得结果仍是 F 上的多项式，也就是说 $F[x]$ 关于多项式的加、减、乘运算是封闭的. 不难验证

$$\deg(f(x)\pm g(x))\leqslant \max\{\deg f(x),\deg g(x)\}.$$

若 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$，则 $f(x)g(x)\neq 0$，且

$$\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x).$$

多项式的运算还和数的运算一样，满足下面的一些规律.

(1) 加法结合律

$$f(x)+(g(x)+h(x))=(f(x)+g(x))+h(x).$$

(2) 加法交换律

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x).$$

(3) 乘法结合律

$$f(x)(g(x)h(x))=(f(x)g(x))h(x).$$

(4) 乘法交换律

$$f(x)g(x)=g(x)f(x).$$

(5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

(6) 乘法消去律

如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则

$$g(x)=h(x).$$

8.1.2 带余除法

多项式的乘法的逆运算并不是对任意多项式都可以做的，事实上任意两个多项式做除法，正如两个整数相除一样，会得到一个商式和一个余式. 我们有如下定理.

定理 8.1(带余除法) 设 $f(x),g(x)\in F[x]$，$g(x)\neq 0$，则存在唯一的 $q(x),r(x)\in F[x]$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x), \tag{8.5}$$

其中 $\deg r(x)<\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$.

证 先证明存在性.

若 $f(x)=0$,则取 $q(x)=r(x)=0$.

设 $f(x)\neq 0$,若 $\deg f(x)=0$,这时如果 $\deg g(x)>0$,则取 $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$;如果 $\deg g(x)=0$,则取 $q(x)=f(x)/g(x)$,$r(x)=0$.

现设 $\deg f(x)>0$,对 $\deg f(x)$作数学归纳法.假设 $\deg f(x)<n$ 时,命题真,下面证明 $\deg f(x)=n$ 时,命题也真.令

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

若 $m>n$,取 $q(x)=0$,$r(x)=f(x)$,命题结论成立.若 $m\leqslant n$,令

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x),$$

则 $\deg f_1(x)<n$.根据归纳假设,存在 $q_1(x),r(x)\in F[x]$,使得

$$f_1(x)=q_1(x)g(x)+r(x),$$

其中 $\deg r(x)<\deg g(x)$或 $r(x)=0$.于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)\\&=\left(q_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)g(x)+r(x).\end{aligned}$$

令 $q(x)=q_1(x)+\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$,有 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$.由归纳法原理,对一切自然数 n,命题为真.

再证唯一性.

若另有 $q_0(x),r_0(x)\in F[x]$,也满足

$$f(x)=q_0(x)g(x)+r_0(x),$$

其中 $\deg r_0(x)<\deg g(x)$或 $r_0(x)=0$,则

$$q(x)g(x)+r(x)=q_0(x)g(x)+r_0(x),$$
$$(q(x)-q_0(x))g(x)=r_0(x)-r(x),$$

若 $q(x)-q_0(x)\neq 0$,则 $\deg(q(x)-q_0(x))\geqslant 0$,于是

$$\deg(r_0(x)-r(x))=\deg(q(x)-q_0(x))+\deg g(x)\geqslant \deg g(x).$$

与 $\deg(r_0(x)-r(x))<\deg g(x)$矛盾.所以

$$q(x)=q_0(x),\quad r(x)=r_0(x).$$ ■

在(8.5)式中,称 $q(x)$为商式,$r(x)$为余式.当 $r(x)=0$ 时,$f(x)=q(x)g(x)$,这时 $g(x)$能整除 $f(x)$,记作 $g(x)\mid f(x)$,并称 $g(x)$为 $f(x)$的因式,$f(x)$是 $g(x)$的倍式.当 $r(x)\neq 0$ 时,$g(x)$不能整除 $f(x)$,记作 $g(x)\nmid f(x)$.

例 8.1 $f(x)=x^3-1$，$g(x)=x^2+2x-2$，求 $g(x)$除 $f(x)$的商式及余式.

解 按如下格式做除法：

$$\begin{array}{r|c|l} x^2+2x-2 & x^3 \qquad\qquad -1 & x-2=q(x) \\ & x^3+2x^2-2x & \\ \hline & -2x^2+2x-1 & \\ & -2x^2-4x+4 & \\ \hline & \qquad\qquad 6x-5=r(x) & \end{array}$$

于是

$$x^3-1=(x-2)(x^2+2x-2)+6x-5.$$

商式 $q(x)=x-2$，余式 $r(x)=6x-5$. ■

这种方法也叫做长除法.

当 $g(x)$是一次多项式时，有如下结论.

推论 1(余数定理) 设 $f(x)\in F[x]$，$\alpha\in F$，则存在唯一的 $q(x)\in F[x]$，使得

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)+f(\alpha).$$

推论 2 设 $f(x)\in F[x]$，$\alpha\in F$，则

$$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)\mid f(x).$$

若 $f(\alpha)=0$，$\alpha\in F$，称 α 是 $f(x)=0$ 的一个**根**(root)或 $f(x)$的一个**零点**(zero). 求多项式在域 F 中的零点相当于求它的形如 $x-\alpha$ 的因式. 要判断 $x-\alpha$ 是不是 $f(x)$的因式，可以用带余除法，以 $x-\alpha$ 除$f(x)$. 还有一个更简便的方法叫做综合除法.

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$g(x)=x-\alpha$，并设$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$，$f(\alpha)=r$，则由推论 1，有

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)+r. \tag{8.6}$$

比较(8.6)式中 x 的同次幂系数，得到

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1}, \\ a_{n-1} &= b_{n-2}-\alpha b_{n-1}, \\ &\vdots \\ a_1 &= b_0-\alpha b_1, \\ a_0 &= r-\alpha b_0. \end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-1}+\alpha b_{n-1}, \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1+\alpha b_1, \\ r &= a_0+\alpha b_0. \end{aligned}$$

按以上关系，记 a_n 为 b_{n-1}，将 b_{n-1}乘以 α 再加 a_{n-1}得 b_{n-2}，将 b_{n-2}乘以 α 加 a_{n-2}得

b_{n-3},……,将 b_1 乘以 α 加 a_1 得 b_0,最后将 b_0 乘以 α 加 a_0 得 r 即为所求的 $f(\alpha)$的值.综合除法的格式如下:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\alpha & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & \alpha b_{n-1} & \cdots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & r
\end{array}$$

例 8.2 $f(x)=x^3-4x^2-5x+2$,求 $f(-3)$.

解

$$\begin{array}{c|cccc}
-3 & 1 & -4 & -5 & +2 \\
 & & -3 & +21 & -48 \\
\hline
 & 1 & -7 & +16 & -46
\end{array}$$

即

$$f(x)=(x^2-7x+16)(x+3)-46,\quad 或\quad f(-3)=-46.$$ ■

推论 3 设 $f(x)\in F[x]$,$\deg f(x)=n$,则 $f(x)$在包含 F 的域 K 中,最多有 n 个互异零点.

证 设数域 K 包含 F,$a_1,a_2,\cdots,a_m\in K$ 是 $f(x)$的互异零点,即 $a_i\neq a_j$,$i\neq j$.由推论 2,存在 $f_1(x)\in K[x]$,使得

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x).$$

再由 $a_1\neq a_2$,$f(a_2)=0$,即 $f(a_2)=(a_2-a_1)f_1(a_2)=0\Rightarrow f_1(a_2)=0$.再由推论 2,存在 $f_2(x)\in K[x]$,使得

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x).$$

于是

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)f_2(x).$$

继续这个过程,最后存在 $f_m(x)\in K[x]$,使得

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)f_m(x).$$

比较等式两边多项式的次数,得到 $m\leqslant n$. ■

推论 4 设 $f(x)\in F[x]$,$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,如果 $f(x)$在包含 F 的某个域中有多于 n 个互异零点,则 $f(x)\equiv 0$.

由推论 4,立即推得以下结论.

推论 5 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,$\max\{\deg f(x),\deg g(x)\}\leqslant n$,若 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$,$i=1,2,\cdots,n+1$,$\alpha_i\in F$,且 $\alpha_i\neq\alpha_j$,$i\neq j$,则 $f(x)=g(x)$.

利用推论 5 可以求得一些未知的公式.例如已知 $f(x)$是一次式,那么根据推论 5,只要知道 $f(x)$的两个函数值就可以唯一地确定 $f(x)$.由解析几何知道一次式代表一条直线,知道了 $f(x)$的两个函数值也就相当于知道直线上的两个点,因此推论 5 告诉我们一个早已知道的事实:两点确定一条直线.

若已知 $f(x)$的 $n+1$ 个函数值,那么就可以求一个 n 次多项式来逼近它.我们来讨论如下的问题.

例 8.3 给定 F 中 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 及任意 $n+1$ 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}$，求一个次数小于等于 n 的多项式 $f(x)$，使 $f(a_i)=b_i$，$i=1,2,\cdots,n+1$.

解 先看一个特殊情况. 如果 $b_1\neq 0$，$b_2=b_3=\cdots=b_{n+1}=0$，那么条件就是

$$f(a_1)=b_1,$$
$$f(a_i)=0,\quad i=2,3,\cdots,n+1,$$

即 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$ 是 $f(x)$ 的 n 零点，或者说 $f(x)$ 有 n 个因子 $(x-a_i)$，$i=2,3,\cdots,n+1$. 因此可以设

$$f(x)=c(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1}).$$

这是一个 n 次多项式，$c\in F$ 是待定系数. 利用条件 $f(a_1)=b_1$，就可将 c 求出.

$$c=\frac{b_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})}.$$

记这个多项式为 $f_1(x)$，则得

$$f_1(x)=\frac{b_1(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})}.$$

同理可以推得 $b_i\neq 0$，$b_1=b_2=\cdots=b_{i-1}=b_{i+1}=\cdots=b_{n+1}=0$ 的情况，这个多项式记作 $f_i(x)$，那么

$$f_i(x)=\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}.$$

现在再考虑一开始提出的一般问题，即要求 $f(x)$ 满足：

$$f(a_i)=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n+1.$$

显然，所求的多项式 $f(x)$ 为

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_{n+1}(x). \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}. \end{aligned}\tag{8.7}$$

如果记 $F(x)=\prod\limits_{i=1}^{n+1}(x-a_i)$，则对于实函数 $F(x)$ 有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)},\tag{8.8}$$

其中 $F'(a_i)$ 是 $F(x)$ 在 a_i 点的导数值. 请读者自行验证. 这个公式叫做拉格朗日(Lagrange)插值公式，在实际问题中有许多应用. ■

8.1.3 最大公因式

定义 8.1 设 $f(x),g(x)\in F[x]$，若 $F[x]$ 中存在 $d(x)$，使得

(1) $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，

(2) 若 $d_1(x)\mid f(x)$，$d_1(x)\mid g(x)$，则 $d_1(x)\mid d(x)$，

则称 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的**最大公因式**(the greatest common divisor).

按照定义,$d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式要满足两个条件,首先,$d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式;其次,$d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的任意一个公因式的倍式.

例 8.4 设 $f(x)=2(x-1)^2(x+1)$,$g(x)=4(x-1)(x+1)^2$. $x-1$ 是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式,但不是最大公因式.这是因为 $f(x)$与 $g(x)$有公因式$(x-1)(x+1)$,而$(x-1)(x+1)\nmid(x-1)$.同理,$x+1$ 也不是最大公因式. $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式是 $2(x-1)(x+1)$.实际上,$(x-1)(x+1)$也是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式. ■

那么,怎样求多项式 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式呢?一般用辗转相除法(也称欧几里得算法).

设 $f(x)\neq 0$,$g(x)\neq 0$,且设 $\deg g(x)\leqslant \deg f(x)$,由带余除法,有

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x), \tag{8.9}$$

其中 $\deg r_1(x)<\deg g(x)$或 $r_1(x)=0$.若 $r_1(x)=0$,则 $g(x)$是$f(x)$与 $g(x)$的最大公因式,否则有

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x), \tag{8.10}$$

其中 $\deg r_2(x)<\deg r_1(x)$或 $r_2(x)=0$.若 $r_2(x)\neq 0$,有

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x),$$

其中 $\deg r_3(x)<\deg r_2(x)$或 $r_3(x)=0$.继续这个过程,由于$\deg g(x)$是有限的,而每做一步都降低次数,因此在有限步内,必有 $r_{s+1}(x)=0$,即成立

$$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x), \tag{8.11}$$

于是 $r_s(x)\mid r_{s-1}(x)$.再看前一步,有

$$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x), \tag{8.12}$$

于是 $r_s(x)\mid r_{s-2}(x)$.逐步往前推导,得到

$$r_s(x)\mid g(x),\qquad r_s(x)\mid f(x),$$

即 $r_s(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式.又设 $d_1(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的任意公因式,则有 $d_1(x)\mid f(x)$,$d_1(x)\mid g(x)$,由(8.9)式推出$d_1(x)\mid r_1(x)$.再由(8.10)式推出 $d_1(x)\mid r_2(x)$,继续往前推,最后由(8.11)式推出 $d_1(x)\mid r_s(x)$.由定义 8.1 知 $r_s(x)$是 $f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

由(8.12)式有

$$r_s(x)=r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-1}(x). \tag{8.13}$$

仿照(8.12)式可得

$$r_{s-3}(x)=q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)+r_{s-1}(x).$$

解出 $r_{s-1}(x)$代入(8.13)式,得到

$$r_s(x)=(1+q_s(x)q_{s-1}(x))r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-3}(x).$$

继续往前推,就有 $r_s(x)$用 $r_{s-3}(x)$和 $r_{s-4}(x)$的一个组合的表示式.最后得到 $r_s(x)$用 $f(x)$和 $g(x)$的一个组合表示的关系式,于是有如下定理.

定理 8.2 设 $f(x),g(x)\in F[x]$ 且不全为 0，则必存在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)\in F[x]$，且在 $F[x]$ 中有 $u(x)$ 和 $v(x)$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

例 8.5 设 $f(x)=x^4+x^3-x^2-2x+1$，$g(x)=x^3+2x^2-3$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

解 用辗转相除法，格式如下：

$q_2(x)=x+1$	$g(x)$	$f(x)$	$x-1=q_1(x)$
	$x^3+2x^2\quad -3$	$x^4+x^3-x^2-2x+1$	
	x^3+x^2-2x	$x^4+2x^3\quad -3x$	
	x^2+2x-3	$-x^3-x^2+x+1$	
	x^2+x-2	$-x^3-2x^2\quad +3$	
	$r_2(x)=x-1$	$r_1(x)=x^2+x-2$	$x+2=q_3(x)$
		x^2-x	
		$2x-2$	
		$2x-2$	
		$r_3(x)=0$	

因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $r_2(x)=x-1$.

将上述过程写下来有：

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x-1)g(x)+(x^2+x-2),\\
g(x)&=(x+1)(x^2+x-2)+(x-1),\\
x^2+x-2&=(x+2)(x-1).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
x-1&=g(x)-(x+1)(x^2+x-2)\\
&=g(x)-(x+1)(f(x)-(x-1)g(x))\\
&=g(x)-(x+1)f(x)+(x^2-1)g(x)\\
&=-(x+1)f(x)+x^2g(x).
\end{aligned}$$

即有 $u(x)=-(x+1)$，$v(x)=x^2$，使得

$$x-1=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

事实上容易验证

$$-(x+1)(x^4+x^3-x^2-2x+1)+x^2(x^3+2x^2-3)=x-1.$$ ■

从例 8.4 看到，两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式不唯一. 例如 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，那么对于任意常数 $c\neq 0$，$cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 不仅如此，还能证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一个最大公因式 $d_1(x)$ 必是 $d(x)$ 的非零常数倍. 事实上，若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式，$d_1(x)$ 作为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，必有

$$d_1(x)\mid d(x)$$

或

$$d(x) = q_1(x)d_1(x).$$

现在若把 $d_1(x)$看作 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式,$d(x)$看作公因式,则又有

$$d(x) \mid d_1(x).$$

或

$$d_1(x) = q(x)d(x).$$

于是

$$d(x) = q_1(x)q(x)d(x).$$

由此可推出 $\deg(q_1(x)q(x))=0 \Rightarrow \deg q_1(x)=\deg q(x)=0$,即$q(x)$与 $q_1(x)$是常数. 为讨论方便起见,记 $f(x)$与 $g(x)$的首项系数为 1 的最大公因式为$(f(x),g(x))$.

设 $f(x),g(x),h(x)\in F[x]$. 若 $h(x)$既是 $f(x)$的倍式,又是 $g(x)$的倍式,则称 $h(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个公倍式. 若 $m(x)\in F[x]$是 $f(x)$与 $g(x)$的公倍式,且 $f(x)$与 $g(x)$的任意一个公倍式都是 $m(x)$的倍式,则称 $m(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个**最小公倍式**(the least common multiple).

8.1.4 互素

定义 8.2 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,若$(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x)$与 $g(x)$**互素**(relatively prime).

例 8.6 设 $f(x)=2x+2$,$g(x)=4x-4$,由于$(f(x),g(x))=1$,所以 $f(x)$与 $g(x)$互素. ■

定理 8.3 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,则 $f(x),g(x)$互素的充分必要条件是存在 $u(x)$,$v(x)\in F[x]$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

证 必要性由定理 8.2 得到.

充分性,设$(f(x),g(x))=d(x)$,则

$$d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x) \Rightarrow d(x) \mid 1 \Rightarrow \deg d(x) = 0,$$

所以 $d(x)=1$,即 $f(x)$与 $g(x)$互素. ■

关于互素有如下性质.

定理 8.4 设 $f(x),g(x),h(x)\in F[x]$,若$(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

证 由$(f(x),g(x))=1$,根据定理 8.3,有 $u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

等式两边乘 $h(x)$,得到

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x).$$

因为 $f(x)\mid g(x)h(x)$,所以 $f(x)$整除等式左边,从而

$$f(x)\mid h(x).$$ ■

推论 设 $f_1(x),f_2(x),g(x)\in F[x]$,若$(f_1(x),f_2(x))=1$. 且 $f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

证 由 $f_1(x)\mid g(x)\Rightarrow g(x)=f_1(x)h_1(x)$,由 $f_2(x)\mid g(x)$,即得 $f_2(x)\mid f_1(x)h_1(x)$. 又$(f_1(x),f_2(x))=1$,根据定理 8.4,有 $f_2(x)\mid h_1(x)$,即 $h_1(x)=f_2(x)h_2(x)$,所以

$$g(x)=f_1(x)f_2(x)h_2(x),$$

即

$$f_1(x)f_2(x)\mid g(x).$$ ■

例 8.7 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,若$(f(x),g(x))=1$,证明对任意 $h(x)\in F[x]$,都有$(f(x)h(x),g(x))=(h(x),g(x))$.

证 若 $h(x)=0$,结论显然成立. 不妨假定 $h(x)\neq 0$,由$(f(x),g(x))=1$,根据定理 8.3,存在 $u(x),v(x)\in F[x]$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$$

于是

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x). \tag{8.14}$$

设$(f(x)h(x),g(x))=d(x)$,只要证明 $d(x)=(h(x),g(x))$. 根据定义 8.1,$d(x)\mid f(x)h(x)$,$d(x)\mid g(x)$. 由(8.14)式可知,$d(x)\mid h(x)$. 于是 $d(x)$是 $h(x)$与 $g(x)$的一个公因式. 又设 $d_1(x)$是 $h(x)$与 $g(x)$的任意公因式,则 $d_1(x)\mid h(x)$,$d_1(x)\mid g(x)$,从而 $d_1(x)\mid f(x)h(x)$,再根据定义 8.1,$d_1(x)\mid d(x)$. 于是 $d(x)=(h(x),g(x))$. ■

8.2 因式分解

8.2.1 因式分解唯一性定理

因式分解是多项式理论的一个主要内容. 在中学代数中曾经介绍过一些具体方法分解多项式,这里将进一步讨论有关因式分解的理论. 什么是因式分解? 通俗地讲,就是把一个多项式分解成一些不能再分的因式的乘积. 那么什么叫不能再分呢? 在中学代数中我们知道它是和所讨论的数有关的,例如在有理数中,x^2-2 是不能再分解的,而在实数中,它还可以分解成$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. 又如 x^2+1 在实数中不可再分解,而在复数中可分解成$(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$,等等. 这些例子说明因式分解和我们讨论的多项式的系数所在的数域有密切关系. 下面给出不能分解的确切定义.

定义 8.3 设 $f(x)\in F[x]$,$\deg f(x)\geqslant 1$,若 $f(x)$不能表示成数域 F 上的两个次数比 $f(x)$低的多项式的乘积,就称 $f(x)$在数域 F 上是**不可约**的(irreducible).