

第 3 章

综合实训

综合实训在高阶系统的模拟、系统响应求解方法和高阶系统设计等方面结合应用实例给予学生全面的训练,帮助学生建立完整的信号与系统的架构体系,学会查阅文献资料,设计实现方案,进一步提高学生系统模块化设计的综合应用能力,使学生掌握如何运用信号与系统原理及设计方法去分析和解决工程实践中的问题,让学生对理论和实验方法的理解和运用达到更高层次。

3.1 二阶连续时间系统的模拟

【引言】

系统的模拟是用基本运算单元组成的模拟装置来模拟实际的系统。这些实际的系统可以是电的或非电的物理量系统,也可以是社会、经济和军事等非物理量系统。模拟装置可以与实际系统的内容完全不同,但是两者之间的微分方程完全相同,所以可以通过模拟装置的研究来分析实际系统,最终达到在一定条件下确定最佳参数的目的。对于用数学手段较难处理的高阶系统,系统模拟更为有效。

【实验目的】

熟悉掌握如何通过直接模拟图进一步得到由基本运算部件构成的二阶连续时间系统的模拟系统。

【实验原理】

以 RLC 串联的二阶连续时间系统为模拟对象,其电路原理图如图 3-1 所示。由图可知,系统的激励为 $e(t)$,响应为 $r(t)$ 。根据时域分析法可求得描述该系统工作特性的微分方程是

$$r''(t) + \frac{R}{L}r'(t) + \frac{1}{LC}r(t) = \frac{R}{L}e'(t) \quad (3-1)$$

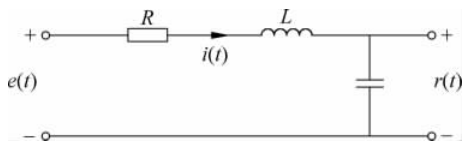


图 3-1 RLC 串联二阶连续时间系统

系统模拟指的是用来描述 RLC 串联二阶连续时间系统工作特性的微分方程,其实质是系统对输入信号 $e(t)$ 进行一系列的运算后得到的响应信号 $r(t)$, 这一系列的运算包括加法、乘法和微分三种运算。因此可以用硬件组成这三种运算部件按一定的运算顺序来实现式(3-1)的运算。但是在实践中发现由硬件制造的微分器极易引入噪声和干扰,因此由它的逆运算——积分来代替,而积分器的性质则较优良,能使系统稳定地工作。

如何将这三种运算部件按一定的顺序组合起来实现式(3-1)所示的一系列运算,这个问题就是要根据式(3-1)画出 RLC 串联二阶连续时间系统运算过程的直接模拟图。

引入中间函数 $x(t)$, 令 $x(t)$ 满足微分方程

$$x''(t) + \frac{R}{L}x'(t) + \frac{1}{LC}x(t) = e(t) \quad (3-2)$$

由式(3-1)和式(3-2)可以解得

$$r(t) = \frac{R}{L}x'(t) \quad (3-3)$$

由式(3-1)和式(3-3)可以画出原系统的直接模拟图,如图 3-2 所示。

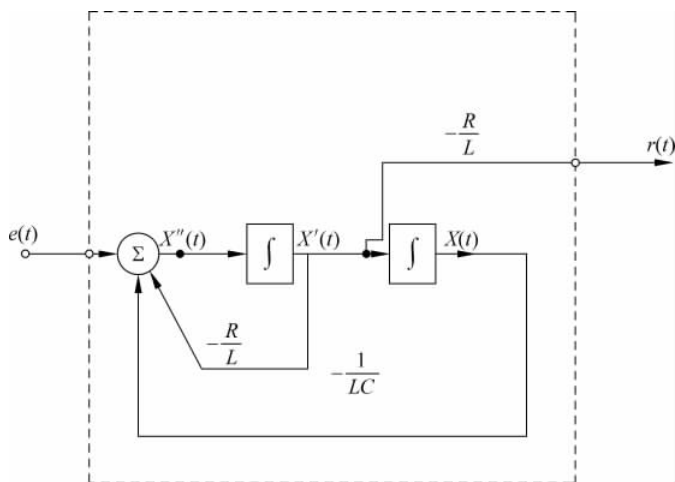


图 3-2 RLC 串联二阶连续时间系统直接模拟图

高于二阶的系统,也可以用上述方法画出系统的直接模拟图。根据直接模拟图,就可以用基本运算部件来构成能实现同样运算过程的模拟系统,但是由于用运算放大器构成的积分器所代表的运算关系是 $u_o = -\frac{1}{RC} \int u_i dt$, 而直接模拟图中的积分器所代表的运算关系是 $u_o = \int u_i dt$, 这两种关系相差一个负实系数,因此不能进行简单的代换,但其电路的结构基本上与直接模拟图是一样的,只要根据运算放大器的特点,适当地增加一些比例运算和反相器即可。

根据图 3-2 所示的直接模拟图所设计的能实现式(3-1)所示的运算的模拟系统的参考电路原理图如图 3-3 所示。根据运算放大器的基本性质以及时域分析法,可以证明图 3-3 所示电路系统工作特性的微分方程是

$$r''(t) + a_1 r'(t) + a_0 r(t) = b_1 e'(t) \quad (3-4)$$

式中, $a_1 = \frac{R_4}{(R_4 \cdot R_{10} + R_4 \cdot R_{10} + R_{10} \cdot R_{10}) C_1}$, $a_0 = \frac{1}{R_6 \cdot R_{13} \cdot C_1 \cdot C_2}$, $b_1 = \frac{1}{R_5 \cdot C_1}$ 。

对比式(3-4)和式(3-1),两式具有相同的形式,只要合理选择图 3-1 中所示各元件的参数,使得 $a_1 = \frac{R}{L}$, $a_0 = \frac{1}{RL}$ 和 $b_1 = \frac{R}{L}$ 同时成立,那么图 3-3 所示的由运算放大器组成的系统就是图 3-1 所示 RLC 串联二阶系统的模拟系统。

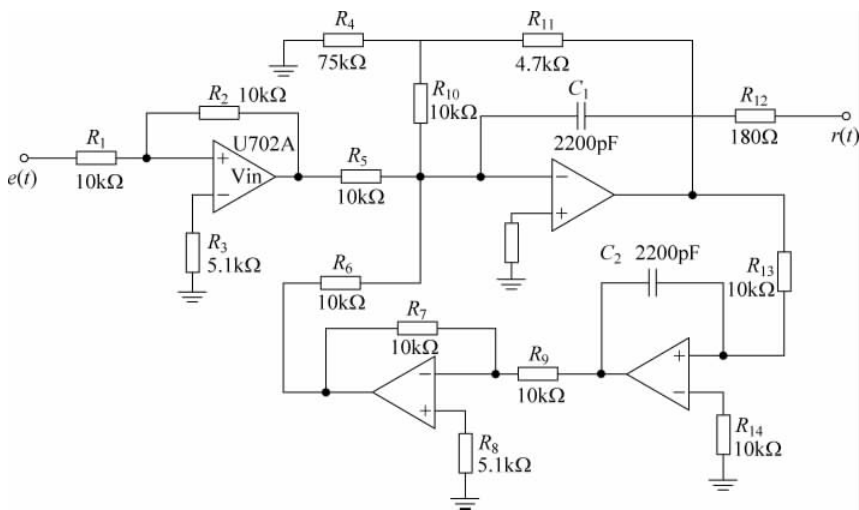


图 3-3 RLC 串联二阶模拟系统的参考电路

如果每次都这样用运算放大器去构成一个模拟系统来进行系统模拟,那是不合算的。对于离散时间信号和离散时间系统来说,系统模拟可以在通用个人计算机上进行,只要按照直接模拟图编制运算程序即可。

对于直接模拟图 3-1 和模拟系统图 3-3,不管它们的结构相差多大,只要用输入-输出法描述它们工作特性的微分方程是一样的,则它们对于输入信号的传输和处理功能是相同的,即它们是等效的。

【实验内容】

- (1) 设计二阶模拟系统的电路。
- (2) 采用逐点测量法测试系统的幅频特性和相频特性。

将函数信号发生器的输出信号接入 RLC 二阶系统的输入端。调节函数信号发生器使之输出幅值为 $V_i = 4V$ 的正弦波,保持信号幅度稳定不变。用示波器的 CH1 观察系统输入端的正弦信号波形。

(3) 将示波器的 CH2 与系统的输出端相连,观察输出波形,并与 CH1 的输入波形对比。根据示波器的波形显示,测量并换算出输入和输出波形的有效值 V_i 和 V_o ,记入表 3-1 中。在 $0 \sim 10f_0$ 范围内调节输出正弦信号频率,合理选择 20 个以上不同的频率

点,用示波器观测此时低通滤波器输出电压信号波形的幅值 V_0 (峰峰值)。

(4) 用双踪示波法,可以在示波器上看到输入端、输出端两波形的相位差,根据时间 t_1, t_2 的大小测算出相移量,将 SEC/DIV 开关逆时针旋到底至 X-Y 位置,观察李沙育图,记录到表 3-1。

(5) 调节输出正弦信号频率,合理选择不同的频率点。对于低通滤波器应选择如下的几个频率点: f_p, f_c 和 f_s 。其中, f_p 表示 $\frac{V_0}{V_i}=0.9$ 时的频率, f_c 表示 $\frac{V_0}{V_i}=0.707$ 时的频率, f_s 表示 $\frac{V_0}{V_i}=0.1$ 时的频率。当 $f < f_p$ 和 $f > f_s$ 时各选一个频率点,当 $f_c < f < f_s$ 时选 2~3 个频率点,测试的频点数在 7~8 个。

表 3-1 RLC 二阶系统幅频特性和相频特性记录

N(序号)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f/Hz									
V_i/mV									
V_o/mV									
$\phi/(\circ)$									
李沙育图									

【实验报告】

- (1) 设计实验中各单元电路连接示意图。
- (2) 整理表 3-1 数据,绘制模拟系统的幅频特性曲线和相频特性曲线。
- (3) 根据实验记录及幅频特性求出幅频特性最高频率点 f_0 ,根据设计电路图参数计算 f_0 值,并与实验值比较,分析误差产生的原因。

【思考题】

- (1) 分析正弦波激励信号通过二阶模拟系统的工作过程。
- (2) 二阶模拟系统的中心频率应如何测量,分析实测值与理论计算值之间误差产生的原因。

3.2 系统时域响应的求解

【引言】

微分方程建模方法是研究函数变化规律的有力的工具,在科技、工程和经济管理等领域中有广泛的应用。建立微分方程模型只是解决问题的第一步,通常要求出方程的解来说明实际现象,并加以检验。

【实验目的】

- (1) 掌握求解系统响应的一种方法——模拟解法。
- (2) 研究系统参数变化对响应的影响。

【实验原理】

1. 物理系统

一物理系统如图 3-4 所示, 弹簧的劲度系数 $k=100\text{N/m}$, $M=1\text{kg}$, 物体离开静止位置的位移为 y , 且 $y(0)=1\text{cm}$, 列出位移变化 y 的方程式。设计能求解该方程式的实验电路和比例尺。

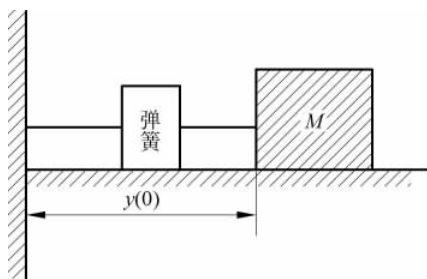


图 3-4 物理系统

为了求解系统的响应, 需建立系统的微分方程, 一些实验系统的微分方程可能是一个高阶方程或者是一个微分方程组, 它们的求解是很费时间甚至是困难的。由于描述各种不同系统(如电系统、机械系统、力学系统、生物学系统和经济学系统)的微分方程有惊人的相似之处, 因而可以用电系统来模拟各种非电系统, 并进一步用基本运算单元获得该实际系统响应的模拟解。这种装置又称为“电子模拟计算机”。应用它能较快地求解系统的微分方程, 并能用示波器将求解结果显示出来。

2. 微分方程

微分方程的一般形式为 $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x$, 其中 x 为激励, y 为响应。根据前述实验的内容可知, 模拟系统微分方程的规则是将微分方程输出函数的最高阶导数保留在等式左边, 把其余各项一起移到等式右边, 这个最高阶导数作为第一积分器输入, 以后每经过一个积分器, 输出函数导数就降低一阶, 直到输出 y 为止, 各个阶数降低了的导数及输出函数分别通过各自的运算放大器, 再送至第一个积分器前面的求和器, 与输入函数 x 相加, 则该模拟装置的输入和输出所表征的方程与被模拟的实际微分方程完全相同。

以本实验的力学系统为例, 可建立系统的微分方程为

$$y'' + a_1y' + a_0y = x \quad (3-5)$$

时域二阶网络函数框图如图 3-5 所示。

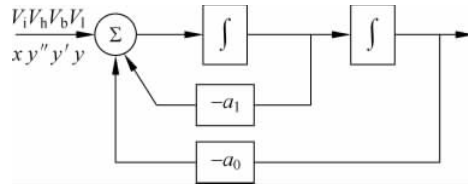


图 3-5 时域二阶网络函数框图

根据图 3-5 可设计实际电路原理图,如图 3-6 所示。

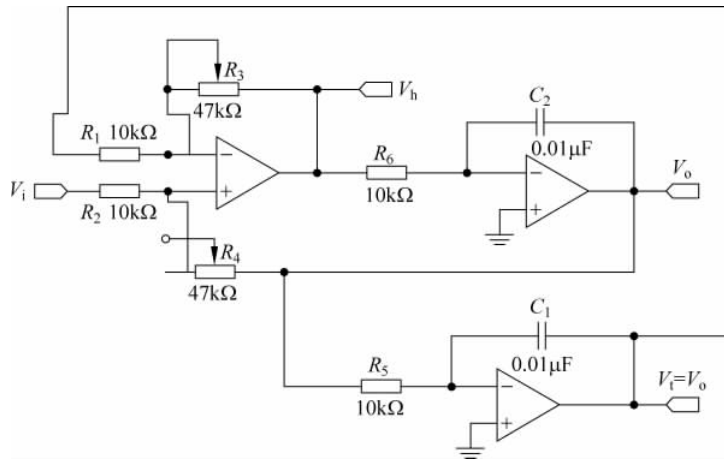


图 3-6 系统参考电路

由模拟电路可得模拟方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)V_B - \frac{1}{R_2}V_i - \frac{1}{R_4}V_b = 0 \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)V_A - \frac{1}{R_1}V_t - \frac{1}{R_3}V_h = 0 \\ V_A = V_B \end{cases} \quad (3-6)$$

要适当地选定模拟装置的元件参数,可使模拟方程和实际系统的微分方程完全相同。

当取 $R_3 = R_4 = 30\text{k}\Omega$,由上述方程组则有

$$V_t = V_i + \frac{1}{3}V_b - \frac{1}{3}V_h \quad (3-7)$$

$$V_h = \frac{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot V_i - \frac{R_1 + R_3}{R_2 R_3} \cdot \frac{1}{R_4} \cdot V_b + \frac{R_2 + R_4}{R_2 R_4} \cdot \frac{1}{R_3} \cdot V_t}{\frac{R_1 + R_4}{R_1 R_4} \cdot \frac{1}{R_1}} \quad (3-8)$$

$$V_t = - \int \frac{1}{R_5 C_1} \cdot V_b dt = -10^4 V_b \quad (3-9)$$

$$V_b = - \int \frac{1}{R_6 C_2} \cdot V_h dt = -10^{-4} V_h \quad (3-10)$$

实际系统响应的变化范围可能很大,持续时间可能很长,但是运算放大器输出电压是有一定限制的,大致在 $\pm 10\text{V}$ 。积分时间受 RC 元件数值限制也不能太长,因此要合理地选择变量的比例尺度 M_y 和时间的比例尺度 M_t ,使得 $v_2 = M_y y, t_M = M_t t$,式中 y 和 t 为实验系统方程中的变量和时间, v_2 和 t_M 为模拟方程中的变量和时间。在求解系统的微分方程及解时,需了解系统的初始状态 $y(0)$ 和 $y'(0)$ 。

按照上述的参数对系统进行复域的分析,则可得到

$$V_b(s) = -10^{-4}sV_i(s) \quad (3-11)$$

$$V_h(s) = -10^{-4}sV_b(s) = 10^{-8}s^2V_i(s) \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned} V_i(s) &= V_i(s) - \frac{1}{3}V_b(s) + \frac{1}{3}V_h(s) \\ &= V_i(s) + \frac{10^{-4}}{3}sV_i(s) + \frac{10^{-8}}{3}s^2V_i(s) \end{aligned} \quad (3-13)$$

由图 3-6 得到下面 3 个二阶系统的传递函数:

(1) 反映无零点的传输函数(即为本二阶系统的输出端 V_i):

$$\frac{V_i(s)}{V_i(s)} = H_1(s) = \frac{1}{s^2 + b_1s + b_2} \quad (\text{低通函数})$$

(2) 反映有一个零点的传输函数:

$$\frac{V_b(s)}{V_i(s)} = H_b(s) = \frac{-s}{s^2 + b_1s + b_2} \quad (\text{带通函数})$$

(3) 反映有两个零点的传输函数:

$$\frac{V_h(s)}{V_i(s)} = H_h(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1s + b_2} \quad (\text{高通函数})$$

【实验内容】

- 设计模拟物理系统的电路。
- 使函数信号发生器输出频率为 $10\sim 80\text{Hz}$ 的方波,将方波信号接入模拟系统信号输入端。
- 用示波器观察模拟系统输出测试点 V_h, V_b 和 V_i 的波形,记录数据到表 3-2。
- 调节电位器阻值大小,进行尺度变换的系数调节,观察模块各测试点输出波形有何变化。

表 3-2 模拟系统输出点测量数据

测量条件: 电位器阻值 =								
输入 V_i 的频率 f/Hz								
输出 V_o 的幅值/V								

【实验报告】

- 设计实验中各单元电路连接示意图。
- 绘出所观察到的各种模拟阶跃响应的波形,将其中所得到的时域波形与计算微

分方程结果相比较,分析参数变化对运算器输出波形的影响。

(3) 绘制二阶低通、高通和带通网络函数的模拟电路的频率特性曲线。

(4) 归纳和总结用基本运算单元求解系统时域响应的要点。

【思考题】

设计给定微分方程 $y''(t) + y'(t) + 3y(t) = 3x(t)$ 所描绘的二阶网络函数的电路模型,软件仿真该模拟电路的微分方程的实现情况。

3.3 四阶巴特沃斯有源滤波器幅频特性的分析

【引言】

由电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成的模拟滤波器是典型的线性时不变系统,也是信号系统重要的信号处理单元。有了运算放大器之后,人们在巴特沃斯无源 RC 滤波器的基础上,很容易就实现了各阶的巴特沃斯有源 RC 滤波器。有源滤波器与对应的无源滤波器相比较,除了滤波功能之外,还对通带内信号有放大功能,另外带负载能力也增强了。

【实验目的】

(1) 设计四阶巴特沃斯有源滤波器的电路结构。

(2) 观察和了解四阶巴特沃斯有源滤波器的幅频特性,与相应的二阶有源滤波器比较其性能,验证高阶滤波器相比低阶滤波器是否更接近理想滤波器。

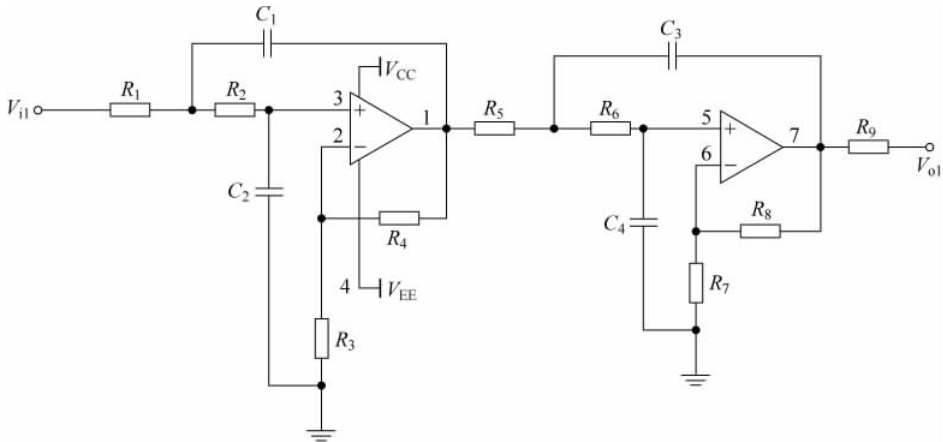
【实验原理】

有源 R 、 L 、 C 滤波器的综合设计法的第一步是按所要求的频率响应特性寻求一种可实现滤波器的系统函数 $H(s)$,使它满足用户对频率响应特性的要求,这类问题称为“逼近”。这类问题表面上看是一个电路设计问题,但本质上仍是一个数学问题。人们经过长期的研究和实践,已经研究出了若干种典型系统函数 $H(s)$,可以很好地适应不同特点的频率响应特性要求,因而在一般情况下并不需要滤波器设计者自己去重新寻找或建立滤波器的系统函数 $H(s)$ 。这若干种典型的系统函数中,有一种是由巴特沃斯多项式所构成的,相应的由这种系统函数构成的滤波器就称为巴特沃斯滤波器。除了巴特沃斯滤波器之外,另一种常用的滤波器是切比雪夫滤波器。对于巴特沃斯滤波器来说,用归一化的复频率 $S' = \frac{S}{\Omega_c}$ 所表示的系统函数 $H(s')$ 的分母多项式称为巴特沃斯多项式, Ω_c 是滤波器的截止频率。巴特沃斯多项式是一个系列多项式,它与滤波器的阶数相对应。巴特沃斯多项式是通过对幅频特性

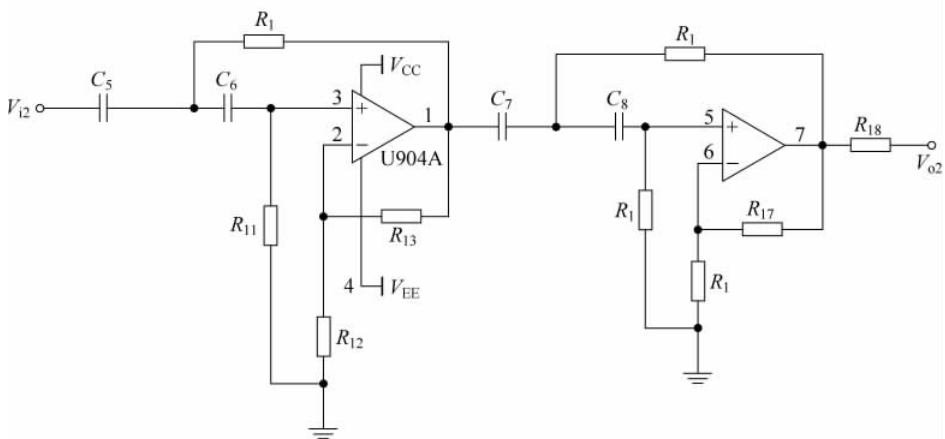
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}} \quad (3-14)$$

进行数学与电路结构的综合分析得出的。

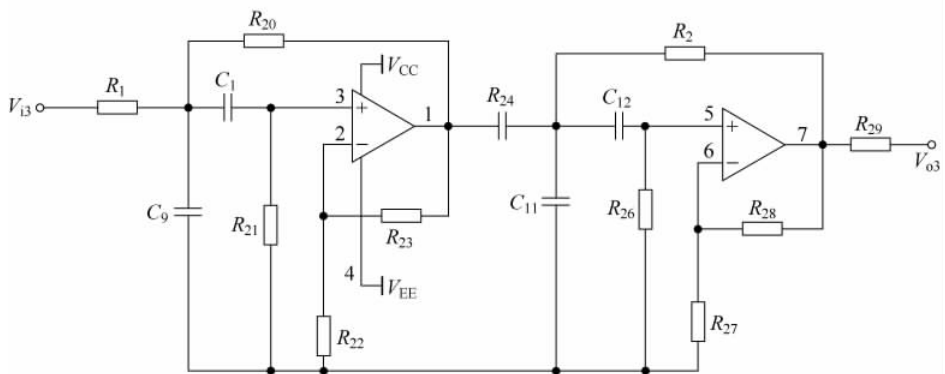
本实验采用的实际参考电子线路如图 3-7 所示。



(a) 四阶低通



(b) 四阶高通



(c) 四阶带通

图 3-7 四阶巴特沃斯有源滤波器参考电路

【实验报告】

- (1) 设计实验中各单元电路连接示意图。
- (2) 整理表 3-3 数据,绘制各模拟系统的幅频特性曲线和相频特性曲线。

【思考题】

根据实验记录及幅频特性,将四阶巴特沃斯低通滤波器与二阶巴特沃斯低通滤波器相比较,分析各自与理想低通滤波器的差异。