第1部分

算　　术

第1章

CHAPTER 1

算　术

1.1 数的概念、性质和运算

1 数的概念

我们在数物体的时候，用来表示物体个数的 1，2，3…叫做**自然数**. 一个物体也没有，用 0 表示. 0 也是自然数. 自然数都是整数.

将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做**分数**. 表示其中一份的数是这个分数的**分数单位**. 分数有**真分数**、**假分数**、**带分数**等.

将整数“1”平均分成 10 份，100 份，1000 份……这样的一份或几份是十分之几，百分之几，千分之几……它们可以用小数表示. 小数分有限小数、无限小数、循环小数等.

整数和小数都是按照十进制计数法写出的数，其中个，十，百……以及十分之一，百分之一……都是**计数单位**. 各个计数单位所占的位置，叫做**数位**. 表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做**百分数**，也叫做**百分率**或**百分比**. 百分数通常用“%”来表示.

2 数的整除

当整数 a 除以整数 $b(b\neq0)$，除得的商正好是整数而无非零余数时，则称 a 能被 b **整除**或称 b 能整除 a. 当 a 能被 b 整除时，也称 a 是 b 的**倍数**，b 是 a 的**约数**. 一个数的约数的个数是有限的，其中最小的约数是 1，最大的约数是它本身；一个数的倍数的个数是无限的，其中最小的倍数是它本身.

个位上是 0，2，4，6，8 的数都能被 2 整除，个位上是 0，5 的数都能被 5 整除，各位上的数的和能被 3 整除的数本身也能被 3 整除. 能被 2 整除的数称为**偶数**，不能被 2 整除的数称为**奇数**.

一个正整数，如果只有 1 和它本身两个约数，叫做**质数**（**素数**）. 一个正整数，如果除了 1 和它本身，还有其他**约数**，叫做**合数**. 每个合数都可以写成几个质数相乘，这几个质数都叫做

这个合数的**质因数**.

几个数公有的倍数叫做这几个数的**公倍数**,所有公倍数中最小的一个叫做这几个数的**最小公倍数**. 几个数公有的约数叫做这几个数的**公约数**,所有公约数中最大的一个叫做这几个数的**最大公约数**. 公约数只有 1 的两个正整数,叫做**互质(素)数**. 分子与分母互质的分数称为**最简分数**.

3 数的四则运算

把两个数合并成一个数的运算,叫做**加法**. 相加的两个数叫做**加数**,加得的数叫做**和**. 数的加法运算满足交换律和结合律,即有 $a+b=b+a$,$(a+b)+c=a+(b+c)$.

已知两个数的和与其中的一个加数,求另一个加数的运算,叫做**减法**. 已知的和叫做**被减数**,减去的已知加数叫做**减数**,求出的未知加数叫做**差**. 减法是加法的逆运算.

求几个相同加数的和的简便运算,叫做**乘法**. 相乘的两个数叫做**因数**,乘得的数叫做**积**. 数的乘法满足交换律、结合律和分配律,即有 $a\times b=b\times a$,$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$,$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$.

已知两个因数的积与其中一个非零因数,求另一个因数的运算,叫做**除法**. 已知的积叫做**被除数**,已知的一个非零因数叫做**除数**,求出的未知因数叫做**商**. 除法是乘法的逆运算.

在四则运算中,加法和减法叫做第一级运算,乘法和除法叫做第二级运算. 在一个没有括号的算式中,如果只含有同一级运算,要从左往右依次计算;如果含有两级运算,要先做第二级运算,后做第一级运算. 在一个有括号的算式中,要先算小括号里面的,再算中括号里面的,等等.

4 比和比例

两个数相除又叫做两个数的**比**. 表示两个比相等的式子叫做**比例**,记作 $a:b=c:d$. 组成比例的 4 个数,叫做比例的项. 两端的两项叫做比例的外项,中间的两项叫做比例的内项. 在比例中,两个外项的积等于两个内项的积.

两种相关联的量,一种量变化,另一种量也随着变化. 如果这两种量中相对应的两个数的比值一定,这两种量就叫做成**正比例**的量,它们的关系叫做**正比例关系**;如果这两种量中相对应的两个数的积一定,这两种量就叫做成**反比例**的量,它们的关系叫做**反比例关系**.

1.2 应用问题举例

1 整数和小数四则运算应用题

例 1.2.1 甲、乙两个工人要生产同样规格并且是同样数量的零件,甲每小时可做 12

个，乙每小时可做 10 个. 两人同时开始生产，甲比乙提前 2.5h 完成任务. 当甲完成任务时，乙做了多少个零件？

解 根据题意，当甲完成任务时，甲比乙多做的零件个数为 10×2.5=25(个). 由此可知甲完成任务所用的时间为

$$25\div(12-10)=12.5(\text{h}).$$

因此甲完成任务时，乙做的零件个数为 10×12.5=125(个).

答 当甲完成任务时，乙做了 125 个零件.

例 1.2.2 甲、乙两队同时开凿一条 640m 长的隧道. 甲队从一端起，每天掘进 7m；乙队从另一端起，每天比甲队多掘进 2m. 两队在距隧道中点多远的地方会合？

解 根据题意，乙队每天掘进的长度为 7+2=9(m). 因此掘通隧道所需的天数为

$$640\div(7+9)=40(\text{天}).$$

由于甲队 40 天掘进的长度为 7×40=280(m). 所以甲队距隧道中点的距离为

$$640\div2-280=40(\text{m}).$$

答 甲、乙两队在距隧道中点 40m 处会合.

利用算术方法解答简单的应用题时，应注意以下几个方面：

首先要弄清题意，找出已知条件和所求问题；其次要分析题中数量间的关系，确定先算什么，再算什么，最后算什么；再次要确定每一步怎样算，列出算式，算出得数；最后还要进行检验，写出答案.

例 1.2.3 已知 a,b,c,d,e 是 5 个质数，它们依次增加且相差 12. 求 a,b,c,d,e 的平均值.

解 由题设，$b=a+12$，$c=a+24$，$d=a+36$，$e=a+48$，所以

$$a+b+c+d+e=5a+120.$$

当 $2\leqslant a<10$ 时，易知只有 $a=5$，才能使得 a,b,c,d,e 是依次相差 12 的 5 个质数.

因为大于 10 的质数的个位数只有可能取 1,3,7,9，而这时 c,b,e,d 中至少有一个不是质数，所以不存在大于 10 的质数 a，使得 a,b,c,d,e 是依次相差 12 的 5 个质数.

综上，所求的平均值为 $\dfrac{5a+120}{5}=a+24=29$.

答 a,b,c,d,e 的平均值是 29.

例 1.2.4 搬运一堆渣土，原计划用 8 辆相同型号的卡车 15 天可以完成，实际搬运 6 天后，有两辆卡车被调走. 求余下的渣土还需要几天才能运完？

解 根据题意，8 辆卡车搬运 6 天后，剩下的渣土若只用一辆卡车搬运，需要的天数为 9×8=72(天). 因此利用 6 辆卡车搬运所需的天数为

$$72\div6=12(\text{天}).$$

答 余下的渣土还需要 12 天运完.

例 1.2.5 A,B 两地相距 45km，甲、乙两人同时从 A 地出发到 B 地去. 甲骑自行车每

小时行 15km，乙步行每小时行 5km．甲到 B 地后停留了 2h 再返回 A 地，途中与乙相遇，相遇时乙走了多少千米？

解 根据题意，甲从 A 地出发到在 B 地停留 2h 后，所用的时间为

$$45\div15+2=5(\mathrm{h}).$$

乙 5h 行走的路程为 $5\times5=25(\mathrm{km})$．所剩路程，甲、乙两人相向而行，相遇时所用的时间为

$$(45-25)\div(5+15)=1(\mathrm{h}).$$

相遇时乙行走的总路程为 $5\times(5+1)=30(\mathrm{km})$．

答 相遇时乙走了 30km．

例 1.2.6 A,B,C,D 四个自然数，依次少 16，已知 A 是 D 的 3 倍．求 A,B,C,D 的值．

解 根据题意，A 与 D 的差为

$$A-D=3\times16=48.$$

由于 $A-D=(3-1)\times D$，所以

$$D=48\div2=24.$$

因此 $C=24+16=40,B=40+16=56,A=56+16=72$．

答 A,B,C,D 的值分别为 72，56，40，24．

所谓“差倍问题”，就是已知几个数的差及它们之间的倍数关系，求各个数的值的问题．与此类似，还有所谓的“和倍问题”、“和差问题”等．

例 1.2.7 在圆形水池边栽杨树，把树栽在距岸边均为 5m 的圆周上，每隔 4m 栽1 棵，共栽 157 棵．求圆形水池的周长约是多少？

解 根据题意，栽树的圆周长为 $4\times157=628(\mathrm{m})$．栽树圆周的直径约为

$$628\div3.14=200(\mathrm{m}).$$

所以水池的直径约为 $200-5\times2=190(\mathrm{m})$．水池的周长约为 $190\times3.14=596.6(\mathrm{m})$．

答 圆形水池的周长约为 596.6m．

例 1.2.8 在桥上用绳子测量桥的高度，把绳子对折垂到水面时尚余 8m，把绳子三折垂到水面尚余 2m．求桥高和绳长．

解 根据题意，绳子长度比桥高的 2 倍还多 $8\times2=16(\mathrm{m})$．绳子长度比桥高的 3 倍还多 $2\times3=6(\mathrm{m})$．所以桥的高度为 $16-6=10(\mathrm{m})$．绳子的长度为 $2\times10+16=36(\mathrm{m})$．

答 桥高 10m，绳长 36m．

上述例题还可以利用简单方程进行求解．设桥高为 $x(\mathrm{m})$，则根据题意可知绳长为 $(x+8)\times2$ 和 $(x+2)\times3$．因此

$$(x+8)\times2=(x+2)\times3,$$

所以

$$x=16-6=10(\mathrm{m}),\quad (x+8)\times2=(10+8)\times2=36(\mathrm{m}).$$

利用分数运算求解例 1.2.8 也很简单．根据题意可知绳长的 $\frac{1}{2}$ 比绳长的 $\frac{1}{3}$ 长 6m，所以

绳长为

$$6\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=36(\mathrm{m}).$$

桥高为 $36\times\frac{1}{2}-8=10(\mathrm{m})$.

例 1.2.9 粮库内存有大米若干包，第 1 次运出库存的一半多 30 包，第 2 次运出剩下的一半多 50 包，第 3 次运出 90 包，粮库里还剩下 200 包. 求粮库里原有大米多少包？

解 根据题意，第 3 次运出前，粮库中的大米包数为 $200+90=290$(包). 第 2 次运出前，粮库中的大米包数为 $(290+50)\times 2=680$(包). 粮库中原有大米的包数为 $(680+30)\times 2=1420$(包).

答 粮库里原有大米 1420 包.

例 1.2.10 从甲地到乙地的水路有 120km，水流速度为 5km/h. 一艘轮船在静水中的航速为 15km/h，它在甲、乙两地之间往返一次需要多少时间？

解 根据题意，顺流时的航速为 $15+5=20(\mathrm{km/h})$，逆流时的航速为 $15-5=10(\mathrm{km/h})$. 所以往返一次需要的时间为

$$120\div 20+120\div 10=18(\mathrm{h}).$$

答 轮船在甲、乙两地之间往返一次需要 18h.

例 1.2.11 在有上、下行的轨道上，两列火车相对开来. 甲列车的车身长 235m，车速为 25m/s；乙列车的车身长 215m，车速为 20m/s. 求这两列火车从车头相遇到车尾离开需要多少时间？

解 根据题意，两车相遇时，两车尾部的距离为 $235+215=450(\mathrm{m})$. 两列火车的相对速度为 $25+20=45(\mathrm{m/s})$. 所以从相遇到车尾离开需要的时间为

$$450\div 45=10(\mathrm{s}).$$

答 两列火车从车头相遇到车尾离开需要 10s.

例 1.2.12 现有 A,B,C 三种不同规格的住房 30 套，B 住房的数量是 C 住房的 2 倍. 出租时，每套 A 住房的月租金为 720 元，每套 B 住房的月租金为 540 元，每套 C 住房的月租金为 390 元. 30 套住房的月租金总数为 16770 元，求三种住房各有多少套？

解 若设 C 住房的套数为 x，则 B 住房的套数为 $2x$，A 住房的套数为 $30-3x$，进而有

$$720\times(30-3x)+540\times 2x+390x=16770,$$

$$690x=4830,\quad 即\quad x=7.$$

故 C 住房的套数为 $x=7$(套)，B 住房的套数为 $2x=14$(套)，A 住房的套数为 $30-21=9$(套).

答 A,B,C 三种住房的套数分别为 9 套、14 套、7 套.

2 分数与百分数应用题

例 1.2.13 一个最简分数，分子与分母的和为 50，如果分子、分母都减去 5，得到的分数是 2/3，这个分数原来是多少？

解 根据题意，2/3 化简前分子与分母的和为 $50-5\times2=40$. 所以化简前的分母为

$$40\div\left(1+\frac{2}{3}\right)=24.$$

化简前的分子为 $40-24=16$. 因此这个分数原来是

$$\frac{16+5}{24+5}=\frac{21}{29}.$$

答 这个分数原来是 $\frac{21}{29}$.

上述例题也可以利用比例方法或解方程的方法进行求解.

例 1.2.14 有一项工程，甲队单独做 24 天完成，乙队单独做 30 天完成. 甲、乙两队共同做 8 天后，余下的由丙队独做，又做了 6 天才完成，这个工程由丙队独做，需要多少天完成？

解 根据题意，甲、乙两队共同做一天可完成总工作量的 $\frac{1}{24}+\frac{1}{30}=\frac{3}{40}$，因此甲、乙两队共同做 8 天后，完成了总工作量的 $\frac{3}{40}\times8=\frac{3}{5}$. 由于丙队 6 天完成了总工作量的 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，所以全部由丙队单独做所需的天数为

$$6\div\frac{2}{5}=15(\text{天}).$$

答 丙队独做需要 15 天完成.

例 1.2.15 今年，王老师与甲、乙、丙三位同学的年龄之和为 76 岁，且甲、乙、丙的年龄之比为 5∶5∶6. 已知 6 年后王老师的年龄与这三位同学的年龄之和相等，问今年丙的年龄.

解 **方法 1** 6 年后，王老师与甲、乙、丙三位同学的年龄之和为 $76+24=100$ 岁. 根据题意知，王老师今年的年龄是 $\frac{100}{2}-6=44$ 岁，甲、乙、丙三位同学的年龄之和为 $76-44=32$ 岁. 所以丙同学今年的年龄是 $32\times\frac{6}{5+5+6}=12$ 岁.

答 今年丙的年龄为 12 岁.

方法 2 设今年甲、乙、丙的年龄分别为 $5x,5x,6x$，则王老师今年的年龄为 $76-16x$. 根据题意，得

$$(76-16x)+6=16x+18,$$

解得 $x=2$. 所以丙同学今年的年龄是 12 岁.

答 今年丙的年龄为 12 岁.

例 1.2.16 打印一本书稿,甲、乙两人合打 8 天可以完成,甲单独打 12 天完成.实际上乙先打了若干天后,再由甲继续完成,全部完成共用了 15 天.求两人各工作了多少天?

解 根据题意,乙单独工作一天可完成总工作量的 $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$.甲单独工作一天比乙单独工作一天多完成总工作量的 $\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$.乙单独工作 15 天后,余下的工作量是总工作量的 $1-\frac{1}{24}\times 15=\frac{3}{8}$.所以甲工作的时间为

$$\frac{3}{8}\div\frac{1}{24}=9(\text{天}).$$

乙工作的时间为 $15-9=6$(天).

答 甲、乙两人分别工作了 9 天和 6 天.

注意 若设甲、乙工作的天数分别为 x 和 y,则

$$\begin{cases} x+y=15, \\ \dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{24}=1. \end{cases}$$

解此线性方程组得 $x=9, y=6$.

例 1.2.17 某公司共有员工 52 人,男性员工人数的 $\frac{1}{4}$ 比女性员工人数的 $\frac{1}{3}$ 少 1 人,求男、女员工各有多少人?

解 根据题意,若设男性员工的人数为 x,则有

$$x+\left(\frac{1}{4}x+1\right)\div\frac{1}{3}=52,$$

即 $\frac{7}{4}x=49$.所以男性员工人数为 $x=28$(人),女性员工人数为 $52-28=24$(人).

答 男、女员工的人数分别为 28 人和 24 人.

例 1.2.18 一个书架分上、下两层,共放书 360 本.如果把上层本数的 $\frac{1}{10}$ 放入下层,上、下层的本数正好相等,求上、下层原来各放书多少本?

解 根据题意,上层书架原来放书的 $\frac{9}{10}$ 正好是所有书的一半,所以上层书架原来放书的本数为

$$360\div 2\div\frac{9}{10}=200(\text{本}).$$

下层书架原来放书的本数为 $360-200=160$(本).

答 上、下层原来放书的本数分别为 200 本和 160 本.

例 1.2.19 甲、乙、丙三杯盐水的浓度分别为 38%，87.5%和 75%，三杯盐水共有 200g，其中一半装在甲杯中．已知三杯盐水混合后的浓度是 60%，求原来丙杯盐水的质量？

解 设原来丙杯盐水的质量是 x(单位：g)，则乙杯盐水的质量是 $100-x$．根据题意，得

$$100\times38\%+(100-x)\times87.5\%+x\times75\%=200\times60\%,$$

解得 $x=44$．所以原来丙杯盐水的质量是 44g．

答 原来丙杯盐水的质量是 44g．

3 简单方程应用题

例 1.2.20 某机床厂今年每月生产机床 100 台，比上一年的平均月产量的 2 倍少 40 台，求上一年的平均月产量．

解 设上一年的平均月产量为 x 台，则

$$2x-40=100,$$

解得 $x=70$．

答 上一年的平均月产量是 70 台．

例 1.2.21 甲、乙两人植树．单独植完这批树甲比乙需要的时间多$\frac{1}{3}$，如果两人一起干，乙比甲多植树 36 棵，这批树共有多少棵？

解 设这批树共有 x 棵，甲、乙每天种树的棵数分别为 m，n．由题意知

$$\frac{x}{m}=\frac{x}{n}+\frac{1}{3}\times\frac{x}{n}.$$

解得 $m=\frac{3}{4}n$．

根据题意，得

$$\frac{x}{n+m}(n-m)=36,\quad 即\quad \frac{36}{n-\frac{3}{4}n}=\frac{x}{n+\frac{3}{4}n}.$$

解得 $x=252$．所以这批树共有 252 棵．

答 这批树共有 252 棵．

例 1.2.22 甲、乙两人从 A 地同时出发前往 B 地，经过 10min 后，乙落后甲 300m，已知乙每分钟行走 240m，问甲每分钟行走多少米？

解 设甲每分钟行走 x(m)，根据题意可知

$$10x-10\times240=300,$$

解得 $x=270$．

答 甲每分钟行走 270m．

例 1.2.23 要从含盐 16%的 40kg 盐水中蒸去水分，制出含盐 20%的盐水，应当蒸去

多少水分？

解 设蒸去的水分为 x(kg)，根据题意可得

$$40\times16\%=(40-x)\times20\%,$$

解得 $x=8$.

答 应当蒸去 8kg 水分.

4 比和比例应用题

例 1.2.24 甲、乙两筐水果共重 121kg，若将甲筐中水果的六分之一装入乙筐，则甲、乙两筐水果的重量之比为 5∶6. 原来两筐水果各有多重？

解 设甲、乙两筐水果原来的重量分别为 $x$kg 和 $y$kg. 依题意，得

$$\begin{cases} x+y=121, \\ \dfrac{x-\frac{1}{6}x}{y+\frac{1}{6}x}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} x+y=121, \\ 5x=6y. \end{cases}$$

解得 $x=66, y=55$.

答 甲、乙两筐水果原来的重量分别为 66kg 和 55kg.

例 1.2.25 秋高气爽的时节，某年级的同学到公园划船. 电瓶船可乘 4 人，每小时租金 50 元；脚踏船可乘 6 人，每小时租金 40 元. 同学们租了电瓶船和脚踏船共 24 艘，大家都上了船，恰好每条船都坐满了. 大家玩得很开心，划船 1h 共用了 1050 元. 求参加划船的同学人数.

解 设租的电瓶船和脚踏船数分别为 x, y，根据题设，得

$$\begin{cases} x+y=24, \\ 50x+40y=1050. \end{cases}$$

解得 $x=9, y=15$. 所以

$$4x+6y=36+90=126.$$

答 参加划船的同学人数是 126.

例 1.2.26 一个直角梯形的周长是 48cm，两底之和与两腰之和的比是 2∶1，一条腰与另一条腰的比是 3∶5，求这个梯形的面积.

解 根据题意，直角梯形的两底之和为 32cm，两腰之和为 16cm.

由于两条腰的比是 3∶5，所以两条腰的长度分别为 6cm 和 10cm，且 6cm 就是直角梯形的高. 所以直角梯形的面积为 $\frac{1}{2}\times32\times6=96(\text{cm}^2)$.