第 3 章 电路的基本分析方法

CHAPTER 3

上一章介绍了电路分析中的等效变换法，它基于等效的概念，可以把一个结构复杂的单口网络变换为一个结构较简单的单口网络，从而简化了电路的计算。然而，等效变换法改变了原电路结构，不适于求解多变量的电路问题。本章将介绍电路的基本分析方法，它是在给定了电路结构、元件参数和激励的条件下，选择合适的电路变量，依据两类约束，列写电路方程，先求解所选电路变量，然后再求待求量。根据所选电路变量的不同，本章重点介绍支路分析法，网孔分析法和节点分析法。此外，还介绍了仿真分析中的直流工作点分析。

3.1 基于两类约束的独立方程

我们知道，拓扑约束和元件约束是对电路中各电流变量、电压变量施加的全部约束。根据这两类约束，可以列写求解电路中所有电流变量和电压变量的独立方程组。比如一个具有 m 条支路的电路，可列出联系 m 个支路电流变量和 m 个支路电压变量的 $2m$ 个独立方程式。

下面以图 3-1 所示的电路为例，可以看出，该电路有 4 个节点，6 条支路，7 个回路，3 个网孔，共有 6 个支路电流变量和 6 个支路电压变量。

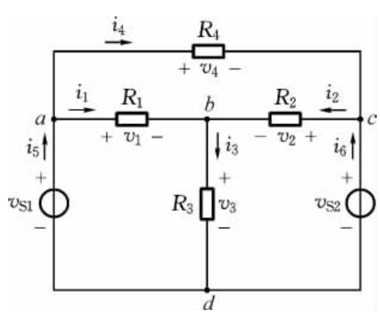

图 3-1 电阻电路

对节点 a、b、c、d，根据 KCL，分别列写节点电流方程，有

$$\begin{cases} i_5 - i_1 - i_4 = 0 \\ i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_4 + i_6 - i_2 = 0 \\ i_3 - i_5 - i_6 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

显然，将式(3.1)中任意 3 个方程相加，可得到剩余的第 4 个方程，说明这 4 个方程式中只有 3 个是独立的，也就是说，对所有节点列写的 KCL 方程不是独立的，因此，对图 3-1 所示电路来说，只需对任意 3 个节点列写 KCL 方程，便可得到该电路的独立节点方程。比如选节点 a、b、c 列写节点电流方程，该电路的独立节点方程为

$$\begin{cases} i_5 - i_1 - i_4 = 0 \\ i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_4 + i_6 - i_2 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

一般来说，对具有 n 个节点的电路应用 KCL 列写方程式时，只能写出 $(n-1)$ 个独立方程，且为任意的 $(n-1)$ 个。这 $(n-1)$ 个节点称为独立节点。

对 7 个回路，根据 KVL，分别列写回路电压方程，有

$$\begin{cases} v_1 + v_3 - v_{S1} = 0 \\ -v_2 + v_{S2} - v_3 = 0 \\ v_4 + v_2 - v_1 = 0 \\ v_4 + v_{S2} - v_{S1} = 0 \\ v_1 - v_2 + v_{S2} - v_{S1} = 0 \\ v_4 + v_{S2} - v_3 - v_1 = 0 \\ v_4 + v_2 + v_3 - v_{S1} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

将式(3.3)中第 1、2 个方程相加，可得到第 5 个方程；第 1、3 个方程相加，可得到第 7 个方程；第 2、4 个方程相加，可得到第 6 个方程；第 1、2、3 个方程相加，可得到第 4 个方程，说明这 7 个方程式中只有 3 个是独立的，也就是说，对所有回路列写的 KVL 方程不是独立的，因此，对图 3-1 所示的电路来说，只需对 3 个网孔列写 KVL 方程，便可得到该电路的独立回路方程。比如选 3 个网孔列写 KVL 方程，该电路的独立回路方程为

$$\begin{cases} v_1 + v_3 - v_{S1} = 0 \\ -v_2 + v_{S2} - v_3 = 0 \\ v_4 + v_2 - v_1 = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

对于一个给定的平面电路来说，其中含有 $[m-(n-1)]$ 个网孔，且 $[m-(n-1)]$ 个网孔的 KVL 方程是独立的。我们把能提供独立的 KVL 方程的回路称为独立回路。

需要说明，在电路中，将 KVL 应用于每一个网孔，得到了独立的 KVL 方程，这只是一种方法，且此方法只能用于平面电路，能获得 KVL 独立方程还有其他的方法，但独立 KVL 方程的数目仍为 $[m-(n-1)]$ 个。

再利用元件的 VCR，可得到 6 条支路的 VCR，即

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 \\ v_4 = R_4 i_4 \\ v_{S1} = \text{给定值} \\ v_{S2} = \text{给定值} \end{cases} \tag{3.5}$$

式(3.5)所示方程均为独立的。

总之，对于具有 m 条支路、n 个节点的电路来说，有 m 个支路电流变量和 m 个支路电压变量，需要 $2m$ 个独立方程式联立求解。其中由 m 条支路的 VCR 可得到 m 个独立方程，如上述的式(3.5)，其余的 m 个独立方程，分别为 $(n-1)$ 个 KCL 方程和 $[m-(n-1)]$ 个 KVL 方程，分别如上述的式(3.2)和式(3.4)。

由此可见，在给定电路结构、元件特性和各独立源参数的情况下，欲求出该电路中所有的支路电流和支路电压，或部分的支路电流和支路电压，需要列写 $2m$ 个方程式联立求解。如上例中则需要联立 $2\times6=12$ 个方程式。显然，求解这样的方程组是比较麻烦的。为了避

免求解大量的联立方程式，要设法减少联立的方程数，以求比较简单的分析方法。比如，先以支路电流(支路电压)列写方程组，求得支路电流(支路电压)后，再去求解支路电压(支路电流)，即不同时求出这些电压和电流，这样，所涉及的联立方程数会减少一半。又比如，先选择一些特定的电流或电压来列写方程组，求解之后，再利用这些特定的电流或电压，求出所求量，这可使联立方程数进一步减少。概括一下，这些电路分析方法的思路是将求解过程分两步进行，使每一步求解过程都相对容易了很多。

3.2 支路分析法

鉴于以上分析，我们把以支路电流为变量，列写联立方程组求解电路的方法，称为支路电流法；以支路电压为变量，列写联立方程组求解电路的方法，称为支路电压法。这两种分析方法的依据是电路的两类约束，均属于支路分析法。所以，这两种分析法应用于具有 m 条支路的电路中时，需要联立的方程数为 m 个。本节通过实例重点介绍支路电流法。

1. 电路中只含独立源

例 3.1 如图 3-2 所示，已知 $R_1=3\Omega$，$R_2=2\Omega$，$R_3=6\Omega$，$v_{S1}=12\text{V}$，$v_{S2}=4\text{V}$。用支路电流法求解电路中所标出的电流和电压。

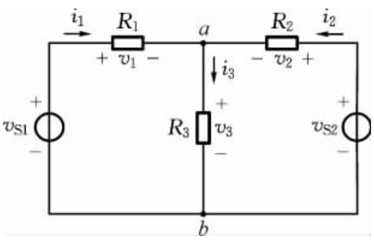

图 3-2 例 3.1 的图

解：选各支路的电流为变量，并以图中标出的方向为它们的参考方向(注意：若电路中没有标出电流电压的方向，在列写方程前，必须先标出它们的参考方向)。

以支路电流为变量列写方程：

图中有独立节点 1 个，选节点 a 列写 KCL 方程，有

$$i_1+i_2-i_3=0 \tag{3.6}$$

图中有网孔 2 个，为独立回路，根据 KVL 和元件约束，有

$$\begin{cases} i_1R_1+i_3R_3-v_{S1}=0 \\ -i_2R_2-i_3R_3+v_{S2}=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

联立式(3.6)和式(3.7)，可得到用支路电流法列写的方程组

$$\begin{cases} i_1+i_2-i_3=0 \\ i_1R_1+i_3R_3-v_{S1}=0 \\ -i_2R_2-i_3R_3+v_{S2}=0 \end{cases} \tag{3.8}$$

代入数据，得

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 3i_1 + 6i_3 = 12 \\ 2i_2 + 6i_3 = 4 \end{cases} \tag{3.9}$$

解之，可求得 3 个支路的电流 i_1、i_2、i_3。即

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 12 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{24-24-72}{-6-18-12} = \frac{-72}{-36} = 2\text{A} \tag{3.10}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 12 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{72-12-24}{-36} = \frac{36}{-36} = -1\text{A} \tag{3.11}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-12-24}{-36} = \frac{-36}{-36} = 1\text{A} \tag{3.12}$$

最后，分别求解 3 个电阻上的端电压，即

$$v_1 = 2 \times 3 = 6\text{V},\quad v_2 = (-1) \times 2 = -2\text{V},\quad v_3 = 1 \times 6 = 6\text{V} \tag{3.13}$$

采用类似的方法，以支路电压为变量建立方程组来求解电路，这就是支路电压法。在上例中，把支路的 VCR 代入式(3.6)，可以得到以 v_1、v_2、v_3 为变量的方程，再与网孔的 KVL 方程联立，即可得到以 v_1、v_2、v_3 为变量的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{R_1} + \dfrac{v_2}{R_2} - \dfrac{v_3}{R_3} = 0 \\ v_1 + v_3 - v_{S1} = 0 \\ -v_2 - v_3 + v_{S2} = 0 \end{cases}$$

这就是采用支路电压法得到的方程组。利用该方程组可先求得未知电压 v_1、v_2、v_3，再由 $i_1=\dfrac{v_1}{R_1}$，$i_2=\dfrac{v_2}{R_2}$，$i_3=\dfrac{v_3}{R_3}$，求得三个未知电流。

2. 电路中含有受控源

例 3.2　用支路电流法分析图 3-3 电路中的功率平衡问题。

解：先标出各支路电流参考方向。

从图中可以看出，左边支路为给定电流源，其支路电流为已知，故图中只有两个未知的支路电流，这样只需列写两个方程，选任意一个节点和右边网孔各列写一个方程式，即

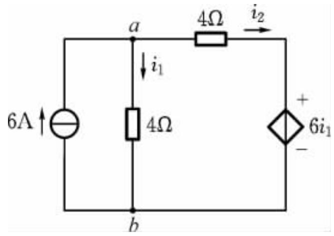

图 3-3　例 3.2 的图

$$\begin{cases}6-i_1-i_2=0\\4i_2+6i_1-4i_1=0\end{cases}\tag{3.14}$$

解之，得

$$i_1=12\text{A},\quad i_2=-6\text{A}$$

据此，求得各元件的功率分别为

两个 4Ω 电阻的功率分别为

$$4i_1^2=4\times12^2=576\text{W},\quad 4i_2^2=4\times(-6)^2=144\text{W}\quad \text{均为吸收功率}$$

受控电压源的功率为

$$6i_1\times i_2=6\times12\times(-6)=-432\text{W}\quad \text{提供功率}$$

独立电流源的功率为

$$-6\times v_{ab}=-6\times4i_1=-6\times4\times12=-288\text{W}\quad \text{提供功率}$$

且 576＋144＋(－432)＋(－288)＝0，故电路的功率平衡。

支路电流法分析电路的一般步骤：

(1) 在给定电路中，先设各支路电流，并标明参考方向。任取$(n-1)$个节点，依据 KCL 列写独立节点电流方程。

(2) 选取独立回路(平面电路一般选网孔)，并选定绕行方向，依据 KVL 和元件的 VCR，列写以支路电流为变量的$[m-(n-1)]$个独立回路电压方程。

(3) 若电路中含有受控源，应将控制量用未知电流表示，增加一个辅助方程。

注：若电路中的受控源的控制量就是某一支路电流(如上例)，那么方程组中方程个数可以不增加。若受控源的控制量是另外的变量，那么需对含受控源电路先按前面的步骤(1)、(2)列写方程(把受控源先作为独立源一样看待)，然后再增加一个控制量用未知电流表示的辅助方程(见习题)。

(4) 联立求解(1)、(2)、(3)步列写的方程组，求得各支路电流。

(5) 根据其他电路变量与支路电流的关系，计算电路中的电压、功率。

3.3　网孔分析法

由上一节可以看出，支路电流法使求解的方程数由 $2m$ 个减少到 m 个，但对于图 3-1 所示电路来说，仍需列写一个六元一次方程组，来求解电路中的 6 个支路电流。能不能使方程的数目更少一些呢？这就是本节所要讨论的问题。

先看一个例子。将图 3-1 重新画于图 3-4，利用支路电流法，列写的方程组如下

$$\begin{cases} i_5 - i_1 - i_4 = 0 \\ i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_4 + i_6 - i_2 = 0 \\ i_4 R_4 + i_2 R_2 - i_1 R_1 = 0 \\ i_1 R_1 + i_3 R_3 - v_{S1} = 0 \\ -i_2 R_2 - i_3 R_3 + v_{S2} = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

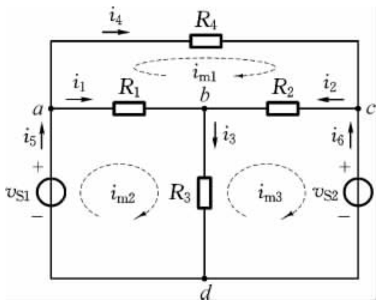

图 3-4　网孔分析法

这是一个关于 6 个支路电流的六元一次方程组。下面我们通过整理该方程组，会发现一些规律，从而得出分析电路的另一种方法——网孔分析法。

将式(3.15)中的前 3 个节点电流方程代入后 3 个网孔电压方程中，消去支路电流 i_1、i_2、i_3，得到

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_4)i_4 - R_1 i_5 + R_2 i_6 = 0 \\ -R_1 i_4 + (R_1 + R_3)i_5 + R_3 i_6 = v_{S1} \\ R_2 i_4 + R_3 i_5 + (R_2 + R_3)i_6 = v_{S2} \end{cases} \tag{3.16}$$

下面分析式(3.16)中每一个方程式，会发现它们都具有相同的规律。以第一个方程式为例，其中第一项相当于视 i_4 为网孔 1 中的电流，$(R_1+R_2+R_4)i_4$ 即为 i_4 在网孔 1 中所有电阻上的压降；第二、三项相当于视 i_5、i_6 分别为相邻网孔 2、3 中的电流，$R_1 i_5$ 为 i_5 在 R_1 上的压降，前面的－号表示 i_5 与 i_4 在 R_1 上的方向相反，$R_2 i_6$ 为 i_6 在 R_2 上的压降，前面的＋号表示 i_6 与 i_4 在 R_2 上的方向相同。第二、三个方程式分别对网孔 2、3 而言，具有与网孔 1 类似的规律。由此我们可以建立一个立足于网孔的电路分析方法，即网孔分析法，又称网孔电流法。显然，与式(3.15)相比较，式(3.16)只是网孔电压方程，需要求解的方程数减少了。

显然，网孔电流法是以网孔电流作为第一求解对象的，所以，在分析电路时，首先设想一种沿着网孔边界流动的电流，即网孔电流，如图 3-4 中以虚线表示的 i_{m1}、i_{m2}、i_{m3}，箭头表示网孔电流的参考方向，图中各支路电流可以网孔电流来表示，比如，$i_4 = i_{m1}$，$i_3 = i_{m2} - i_{m3}$，等。

由于一个平面电路有$[m-(n-1)]$个网孔，所以也有$[m-(n-1)]$个网孔电流。

下面再回到图 3-4 中，利用网孔电流来分析电路，从而找到网孔分析法的规律。图中 3 个网孔以网孔电流可列写如下方程组

$$\begin{cases} R_4 i_{m1} + R_2(i_{m1} - i_{m3}) + R_1(i_{m1} - i_{m2}) = 0 \\ R_1(i_{m2} - i_{m1}) + R_3(i_{m2} - i_{m3}) - v_{S1} = 0 \\ R_2(i_{m3} - i_{m1}) + R_3(i_{m3} - i_{m2}) + v_{S2} = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

整理，可得

$$\begin{cases}(R_1+R_2+R_4)i_{m1}-R_1i_{m2}-R_2i_{m3}=0\\-R_1i_{m1}+(R_1+R_3)i_{m2}-R_3i_{m3}=v_{S1}\\-R_2i_{m1}-R_3i_{m2}+(R_2+R_3)i_{m3}=-v_{S2}\end{cases}\tag{3.18}$$

这就是利用网孔电流法对图 3-4 所列写的方程组，相当于用网孔电流 i_{m1}、i_{m2}、i_{m3} 替换了式(3.16)中的 i_4、i_5、i_6。

将式(3.18)写为一般形式

$$\begin{cases}R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+R_{13}i_{m3}=v_{Sm1}\\R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+R_{23}i_{m3}=v_{Sm2}\\R_{31}i_{m1}+R_{32}i_{m2}+R_{33}i_{m3}=v_{Sm3}\end{cases}\tag{3.19}$$

说明：

(1) R_{11}、R_{22}、R_{33}分别称为网孔 1、2、3 的自电阻，其值分别为各自网孔内所有电阻之和，如 $R_{11}=R_1+R_2+R_4$。

(2) 其余电阻均为互电阻，如 R_{12}称为网孔 1 与网孔 2 的互电阻，它是这两个网孔的公有电阻，如 $R_{12}=R_1$，等等。互电阻前面的正或负号由该两个网孔电流流过公有电阻的方向是相同还是相反决定，如流过 R_1的网孔电流 i_{m1}与 i_{m2}方向相反，则取负号。若各网孔电流的参考方向均取顺时针或逆时针，则所有互电阻均取负值。

(3) v_{Sm1}、v_{Sm2}、v_{Sm3}分别为网孔 1、2、3 中各电压源电压升的代数和。

一般地说，具有 k 个网孔的电路，网孔方程的形式为

$$\begin{cases}R_{11}i_{m1}+R_{12}i_{m2}+\cdots+R_{1k}i_{mk}=v_{Sm1}\\R_{21}i_{m1}+R_{22}i_{m2}+\cdots+R_{2k}i_{mk}=v_{Sm2}\\\quad\vdots\\R_{k1}i_{m1}+R_{k2}i_{m2}+\cdots+R_{kk}i_{mk}=v_{Smk}\end{cases}\tag{3.20}$$

式(3.20)中各符号的意义参见式(3.19)的说明。

网孔分析法只适用于平面电路。

例 3.3 电路如图 3-5 所示，已知 $R_1=3\Omega$，$R_2=2\Omega$，$R_3=6\Omega$，$v_{S1}=12\text{V}$，$v_{S2}=4\text{V}$。试利用网孔电流法求解各支路电流。

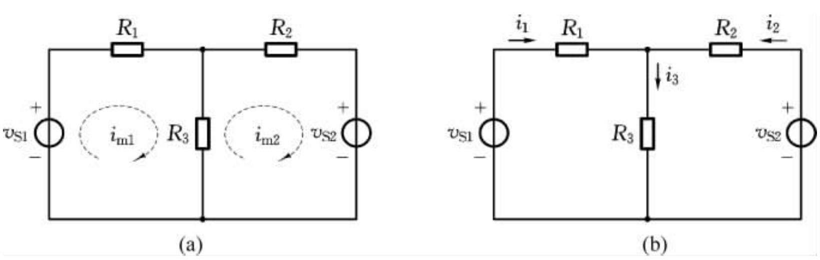

图 3-5 例 3.3 的图

解：设题图中两个网孔电流分别为 i_{m1}与 i_{m2}，并假定它们的参考方向均为顺时针方向，如图 3-5(a)所示。

网孔 1 的自电阻为 $R_{11}=R_1+R_3$，网孔 1、2 的互电阻为 $R_{12}=R_{21}=-R_3$，网孔 2 的自电

阻为 $R_{22}=R_2+R_3$。

根据网孔电流法，列写网孔方程为

$$\begin{cases}(3+6)i_{m1}-6i_{m2}=12\\-6i_{m1}+(2+6)i_{m2}=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9i_{m1}-6i_{m2}=12\\-6i_{m1}+8i_{m2}=-4\end{cases}$$

解之，得

$$i_{m1}=\frac{\begin{vmatrix}12 & -6\\-4 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}9 & -6\\-6 & 8\end{vmatrix}}=\frac{96-24}{72-36}=\frac{72}{36}=2\text{A}$$

$$i_{m2}=\frac{\begin{vmatrix}9 & 12\\-6 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}9 & -6\\-6 & 8\end{vmatrix}}=\frac{-36+72}{72-36}=\frac{36}{36}=1\text{A}$$

设各支路电流如图 3-5(b)所示，根据网孔电流与各支路电流的关系，有

$$i_1=i_{m1},\quad i_2=-i_{m2},\quad i_3=i_{m1}-i_{m2}$$

代入数据，得

$$i_1=2\text{A},\quad i_2=-1\text{A},\quad i_3=2-1=1\text{A}$$

例 3.4　用网孔电流法求解图 3-6 所示电路中的 i_2。

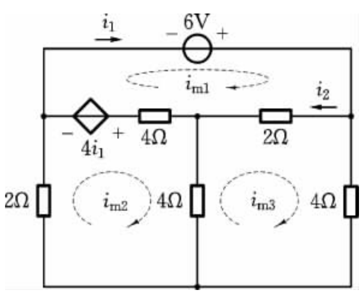

图 3-6　例 3.4 的图

解：三个网孔电流及其参考方向如图 3-6 所示。为方便起见，网孔电流的参考方向均取顺时针方向。另外，图中所含受控源作独立源处理，受控源的控制量以网孔电流来表示，需引入附加方程。于是，有

$$\begin{cases}(2+4)i_{m1}-4i_{m2}-2i_{m3}=6-4i_1\\-4i_{m1}+(2+4+4)i_{m2}-4i_{m3}=4i_1\\-2i_{m1}-4i_{m2}+(2+4+4)i_{m3}=0\\i_1=i_{m1}\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}10i_{m1}-4i_{m2}-2i_{m3}=6\\-8i_{m1}+10i_{m2}-4i_{m3}=0\\-2i_{m1}-4i_{m2}+10i_{m3}=0\end{cases}$$

因为 $i_2=i_{m1}-i_{m3}$，所以只需解得 i_{m1}、i_{m3}，即

$$i_{m1}=\frac{\begin{vmatrix}6 & -4 & -2\\ 0 & 10 & -4\\ 0 & -4 & 10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & -4 & -2\\ -8 & 10 & -4\\ -2 & -4 & 10\end{vmatrix}}=\frac{600-96}{1000-32-64-40-320-160}=\frac{504}{384}\mathrm{A}$$

$$i_{m3}=\frac{\begin{vmatrix}10 & -4 & 6\\ -8 & 10 & 0\\ -2 & -4 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & -4 & -2\\ -8 & 10 & -4\\ -2 & -4 & 10\end{vmatrix}}=\frac{192+120}{1000-32-64-40-320-160}=\frac{312}{384}\mathrm{A}$$

故有 $i_2=i_{m1}-i_{m3}=0.5\mathrm{A}$。

例 3.5 用网孔电流法计算图 3-7 所示电路中的电流 i。

解：三个网孔电流及其顺时针的参考方向如图 3-7 所示。由于网孔电流法实质上列写的是网孔的电压方程，所以对图中的独立电流源来说，需假设其端电压，设为 v，参考方向如图 3-7 所示，这样就便于列写网孔电流方程了，但同时出现了第 4 个未知数，所以，须引入附加方程。

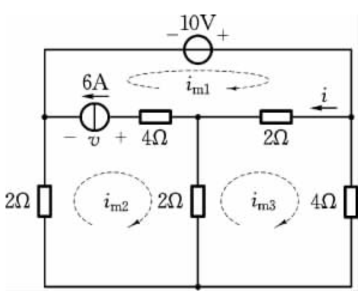

图 3-7 例 3.5 的图

利用网孔电流法列写的方程组和附加方程如下：

$$\begin{cases}(2+4)i_{m1}-4i_{m2}-2i_{m3}=10-v\\ -4i_{m1}+(2+2+4)i_{m2}-2i_{m3}=v\\ -2i_{m1}-2i_{m2}+(2+2+4)i_{m3}=0\\ i_{m1}-i_{m2}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v+2i_{m1}-2i_{m3}=-14\\ -v+4i_{m1}-2i_{m3}=48\\ -4i_{m1}+8i_{m3}=-12\end{cases}$$

解之，得

$$i_{m1}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -14 & -2\\ -1 & 48 & -2\\ 0 & -12 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 4 & -2\\ 0 & -4 & 8\end{vmatrix}}=\frac{384-24-112-24}{32-8+16-8}=\frac{224}{32}=7\mathrm{A}$$

$$i_{m3}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -14\\ -1 & 4 & 48\\ 0 & -4 & -12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 4 & -2\\ 0 & -4 & 8\end{vmatrix}}=\frac{-48-56-24+192}{32-8+16-8}=\frac{64}{32}=2\mathrm{A}$$

故有　$i=i_{m1}-i_{m3}=5\mathrm{A}$。

网孔电流法分析电路的一般步骤：

(1) 标出每个网孔电流及其参考方向；

(2) 计算每个网孔的自电阻、互电阻以及沿网孔电流绕行方向电压源电压升的代数和，据此写出[$m-(n-1)$]个网孔方程；

(3) 若电路中含受控源，则将其作为独立源处理，需引入相应的附加方程(见例3.4)；

(4) 若电流源位于两个网孔的公共支路，则需设该电流源的端电压，并引入相应的附加方程(见例3.5)；若电流源位于网孔外围时，则该网孔的网孔电流取该电流源的电流值(见习题)；

(5) 联立求解上述方程式，求得网孔电流；

(6) 根据电路中待求量与网孔电流的关系进一步求解。

3.4　节点分析法

从以上两节的讨论中可知，对于具有 m 条支路、n 个节点的电路来说，如果采用支路分析法，或以支路电流或以支路电压为第一求解对象，均需要列写 m 个方程；如果采用网孔分析法，则以网孔电流为第一求解对象，需要列写[$m-(n-1)$]个方程，从而使求解过程变得相对简单。本节将从电路中的节点入手，讨论一种电路分析方法——节点分析法。

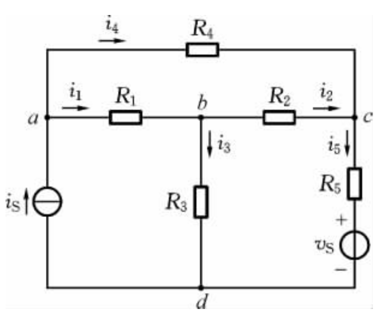

图 3-8　节点分析法的例子

先来看一个例子。电路如图3-8所示，图中有4个节点 a、b、c、d，其中只有3个节点是独立的。比如列写 a、b、c 三个独立节点的KCL，则有

$$\begin{cases}i_S-i_1-i_4=0\\ i_1-i_2-i_3=0\\ i_2+i_4-i_5=0\end{cases}\tag{3.21}$$

根据元件约束，将式(3.21)以元件端电压来表示，则有

$$\begin{cases}i_S-\dfrac{v_{ab}}{R_1}-\dfrac{v_{ac}}{R_4}=0\\ \dfrac{v_{ab}}{R_1}-\dfrac{v_{bc}}{R_2}-\dfrac{v_{bd}}{R_3}=0\\ \dfrac{v_{bc}}{R_2}+\dfrac{v_{ac}}{R_4}-\dfrac{v_{cd}-v_S}{R_5}=0\end{cases}\tag{3.22}$$

或者

$$\begin{cases} i_S - G_1 v_{ab} - G_4 v_{ac} = 0 \\ G_1 v_{ab} - G_2 v_{bc} - G_3 v_{bd} = 0 \\ G_2 v_{bc} + G_4 v_{ac} - G_5 (v_{cd} - v_S) = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

式中 $G_n = \dfrac{1}{R_n}$ $(n=1,2,3,4,5)$为与电阻对应的电导。就式(3.23)来说，这是以 a、b、c 三个独立节点列写的 KCL 方程，现把节点 d 设为电路的电位参考点，定义 a、b、c 三个节点对节点 d 的电压为节点电压(在 1.5 节中称为电位)，并假定节点电压为电压降，分别表示为 v_a、v_b、v_c。于是，式(3.23)可以三个节点电压表示为

$$\begin{cases} i_S - G_1 (v_a - v_b) - G_4 (v_a - v_c) = 0 \\ G_1 (v_a - v_b) - G_2 (v_b - v_c) - G_3 v_b = 0 \\ G_2 (v_b - v_c) + G_4 (v_a - v_c) - G_5 (v_c - v_S) = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

整理，得

$$\begin{cases} (G_1 + G_4) v_a - G_1 v_b - G_4 v_c = i_S \\ -G_1 v_a + (G_1 + G_2 + G_3) v_b - G_2 v_c = 0 \\ -G_4 v_a - G_2 v_b + (G_2 + G_4 + G_5) v_c = G_5 v_S \end{cases} \tag{3.25}$$

这就是以节点电压 v_a、v_b、v_c 为第一求解对象的三个方程，即图 3-8 的节点电压方程组。显然，这三个方程构成独立方程组，且以此可解得这三个节点电压，进而求出电路中所有的支路电压和支路电流。

将式(3.25)写为一般形式

$$\begin{cases} G_{11} v_{n1} + G_{12} v_{n2} + G_{13} v_{n3} = i_{Sn1} \\ G_{21} v_{n1} + G_{22} v_{n2} + G_{23} v_{n3} = i_{Sn2} \\ G_{31} v_{n1} + G_{32} v_{n2} + G_{33} v_{n3} = i_{Sn3} \end{cases} \tag{3.26}$$

说明：

(1) G_{11}、G_{22}、G_{33} 分别称为节点 1、2、3 的自电导，其值分别为各节点上所有电导之和，如 $G_{11} = G_1 + G_4$。

(2) 其余电导均为互电导，如 G_{12} 称为节点 1 与节点 2 的互电导，它是这两个节点间的公有电导的负值，如 $G_{12} = -G_1$，等等，所有互电导取负值。

(3) i_{Sn1}、i_{Sn2}、i_{Sn3} 分别为节点 1、2、3 由电流源和电压源所流入电流的代数和。其中，对于电流源产生的电流，流入节点时为正，反之为负；对于电压源产生的电流，电压源正极靠近该节点时为正，反之为负。

具有 n 个节点的电路应有$(n-1)$个节点电压，节点方程的形式为

$$\begin{cases} G_{11} v_{n1} + G_{12} v_{n2} + \cdots + G_{1(n-1)} v_{n(n-1)} = i_{Sn1} \\ G_{21} v_{n1} + G_{22} v_{n2} + \cdots + G_{2(n-1)} v_{n(n-1)} = i_{Sn2} \\ \qquad\vdots \\ G_{(n-1)1} v_{n1} + G_{(n-1)2} v_{n2} + \cdots + G_{(n-1)(n-1)} v_{n(n-1)} = i_{Sn(n-1)} \end{cases} \tag{3.27}$$

式(3.27)中各符号的意义参见式(3.26)的说明。

特别注意，与电流源串联的电阻不能计入自电导和互电导之中。

节点分析法与网孔分析法相比，当电路的独立节点数少于网孔数时，前者联立的方程数

少些，易于求解；当电路中的已知电源为电流源时，则前者较为方便；当电路中的已知电源为电压源时，则后者较为方便。另外，节点分析法对平面和非平面电路都适用，而网孔分析法只适用于平面电路。

例 3.6 电路如图 3-4 所示。已知 $R_1=5\Omega, R_2=2\Omega, R_3=R_4=10\Omega, v_{S1}=10V, v_{S2}=4V$。用节点分析法，求各支路电流。

解：观察可知，电路中有 4 个节点，若选节点 d 为零电位参考点，则节点 a、b、c 为独立节点，且节点 a、c 的电位 v_a、v_c 为已知，因此，只需求出节点 b 的电位 v_b，便可求得各支路电流，如图 3-9 所示。

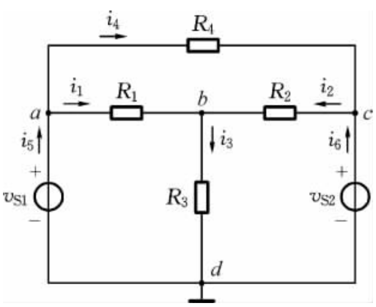

图 3-9　例 3.6 的图

节点 b 的节点方程为

$$-\frac{1}{R_1}v_a+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_b-\frac{1}{R_2}v_c=0$$

整理，得

$$v_b=\frac{\frac{1}{R_1}v_a+\frac{1}{R_2}v_c}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

将 $v_a=v_{S1}=10V, v_c=v_{S2}=4V$，以及各电阻值代入上式，得

$$v_b=\frac{\frac{1}{5}\times 10+\frac{1}{2}\times 4}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}}=\frac{4}{0.8}=5V$$

利用三个节点电压，求得各支路电流分别为

$$i_1=\frac{v_a-v_b}{R_1}=\frac{10-5}{5}=1A$$

$$i_2=\frac{v_c-v_b}{R_2}=\frac{4-5}{2}=-0.5A$$

$$i_3=\frac{v_b}{R_3}=\frac{5}{10}=0.5A$$

$$i_4=\frac{v_a-v_c}{R_4}=\frac{10-4}{10}=0.6A$$

$$i_5=i_1+i_4=1+0.6=1.6A$$

$$i_6=i_2-i_4=-0.5-0.6=-1.1A$$

可见，恰当选择零电位参考点，可简化求解过程。

例 3.7 多支路两节点电路如图 3-10 所示，试确定电路的节点电压 v_a。

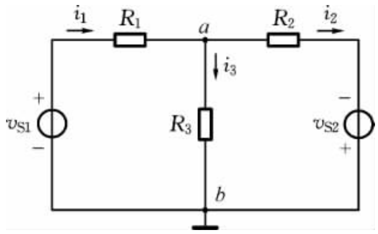

图 3-10 例 3.7 的图

解：可以看出，电路有 a、b 两个节点，选节点 b 为零电位参考点。设 R_1、R_2所在支路的电流分别为 i_1、i_2。根据节点分析法，节点 a 的节点电压方程为

$$\frac{1}{R_3}v_a = i_1 - i_2$$

而 $i_1=\dfrac{v_{S1}-v_a}{R_1}$和 $i_2=\dfrac{v_a+v_{S2}}{R_2}$，代入上式，整理，得

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_a = \frac{v_{S1}}{R_1}-\frac{v_{S2}}{R_2}$$

也可以按照列写节点电压方程的方法直接得到此式。故电路的节点电压 v_a 为

$$v_a = \frac{\dfrac{v_{S1}}{R_1}-\dfrac{v_{S2}}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}} \tag{3.28}$$

多支路两节点电路是较常见的一种电路结构，式(3.28)给出了该电路节点电压的计算公式，即式中分母为两节点间各支路的理想电压源为零后的电阻的倒数之和，且均为正值；分子为各支路理想电压源与本支路电阻之比的代数和——当理想电压源与节点电压的参考方向一致时为正，相反时为负。

两节点电路的节点电压公式概括为

$$v = \frac{\sum \dfrac{v_S}{R}}{\sum \dfrac{1}{R}} \tag{3.29}$$

不难证明，当两节点间为理想电流源支路或理想电流源与电阻串联支路时，两节点电路的节点电压公式可概括为

$$v = \frac{\sum \dfrac{v_S}{R}+\sum i_S}{\sum \dfrac{1}{R}} \tag{3.30}$$

式中，分子中的 $\sum i_S$ 为理想电流源的代数和——当理想电流源流入节点时为正，流出节点时为负；分母中不计及与理想电流源串联的电阻。

例 3.8 用节点分析法求图 3-11 电路中各支路的电流。已知 $v_{S1}=6\text{V}$，$v_{S2}=18\text{V}$，$i_S=-2\text{A}$，$R_1=3\Omega$，$R_2=6\Omega$，$R_3=R_4=2\Omega$。

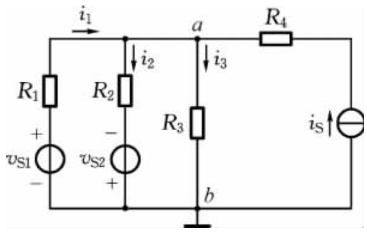

图 3-11　例 3.8 的图

解：取电路中 b 点为参考点，以 v_a 表示节点 a 的节点电压，根据式(3.30)，可求得节点电压 v_a 为

$$v_a=\frac{\frac{v_{S1}}{R_1}-\frac{v_{S2}}{R_2}+i_S}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}=\frac{\frac{6}{3}-\frac{18}{6}-2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=-3\text{V}$$

由 KVL 和元件约束，得

$$i_1=\frac{v_{S1}-v_a}{R_1}=\frac{6-(-3)}{3}=3\text{A}$$

$$i_2=\frac{v_a+v_{S2}}{R_2}=\frac{-3+18}{6}=2.5\text{A}$$

$$i_3=\frac{v_a}{R_3}=\frac{-3}{2}=-1.5\text{A}$$

例 3.9　列写图 3-12 所示电路的节点方程。

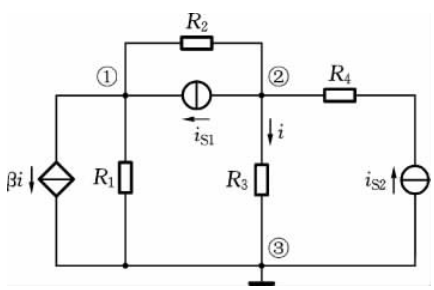

图 3-12　例 3.9 的图

解：方法 1：选节点③为参考点，列写节点①、②的节点方程。列写节点方程时需注意，电路中的受控源可作为独立源处理，但需找出受控源的控制量与节点电压之间的关系，即附加方程；电阻 R_4 与电流源 i_{S2} 串联，R_4 视为多余电阻。据此，可得节点方程

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{n1}-\frac{1}{R_2}v_{n2}=i_{S1}-\beta i\\ -\frac{1}{R_2}v_{n1}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_{n2}=i_{S2}-i_{S1}\end{cases}$$

附加方程

$$i=\frac{v_{n2}}{R_3}$$

三个方程联立求解，先将附加方程代入节点方程，消去 i，即可解得节点电压 v_{n1} 和 v_{n2}。

方法 2：将式(3.30)应用于多节点电路中，比如列写节点①的节点方程时，可将节点②的节点电压视为一个电压源 v_{n2}，而列写节点②的节点方程时，可将节点①的节点电压视为一个电压源 v_{n1}。这样，便可以按照两节点的节点电压公式式(3.30)，列写每个节点的节点电压方程了。

对于节点①，有

$$v_{n1}=\frac{-\beta i+(i_{S1}R_2+v_{n2})/R_2}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$$

其中 R_2 与 i_{S1} 并联等效为电压源，再与 v_{n2} 串联。

同理，对于节点②，有

$$v_{n2}=\frac{i_{S2}+(-i_{S1}R_2+v_{n1})/R_2}{\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$

例 3.10 列写图 3-13 所示电路的节点方程。

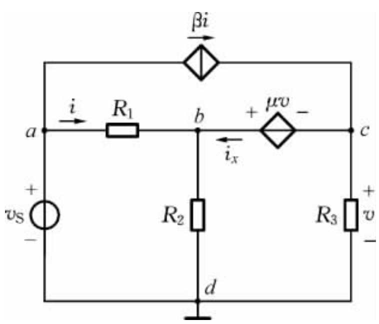

图 3-13 例 3.10 的图

解：观察电路，若选择节点 d 为参考点，则节点 a 的节点电压为已知，$v_a=v_S$，这样就只有两个未知数，可减少一个节点电压方程。受控电压源处于两独立节点之间，需设该电压源的电流为 i_x。节点 b、c 的节点电压方程为

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{R_1}v_S+\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)v_b=i_x\\[2ex]\dfrac{1}{R_3}v_c=\beta i-i_x\end{cases}$$

两个受控源需两个附加方程，增设电流 i_x 需一个附加方程，共计三个附加方程，即

$$v_b-v_c=\mu v$$

$$v_c=v$$

$$i=\frac{v_S-v_b}{R_1}$$

这样，使总的方程数等于总的未知量数，即可求解。

节点电压法分析电路的一般步骤：

(1) 选取电路中的一个节点为参考点，其他节点的电压分别记为 v_{n1}、v_{n2}……；

(2) 计算每个节点的自电导、互电导以及与相应节点相连的电流源流入的代数和，据此

写出($n-1$)个节点方程；

（3）若电路中含受控源，则将其作为独立源处理，需将控制量用待求的节点电压来表示，以作为相应的附加方程；

（4）根据具体情况分别处理：

① 若理想电压源位于两个独立节点之间，则需设该电压源的电流 i，并用该电压源的电压等于这两个节点的节点电压之差作为相应的附加方程(见例 3.10)；

② 若理想电压源位于独立节点和参考点之间时，则该独立节点的节点电压取该电压源的电压值，即为已知量，这样电路的节点方程数可以减少一个(见例 3.6、例 3.10)；

③ 若支路中为实际电压源，即理想电压源与电阻串联，则需将其等效变换为实际电流源，即理想电流源与电阻并联(见例 3.7、例 3.8)；

（5）联立求解上述方程式，求得节点电压；

（6）根据电路中待求量与节点电压的关系，作进一步的求解。

3.5　仿真实验——直流工作点分析

直流工作点分析又称为静态工作点分析，它可以求解在直流电压源或直流电流源作用下电路中的电流和电压值，比如前面章节中学过的直流电路分析，以及后续课程中的放大电路静态工作点分析等，均可以采用直流工作点分析。需要说明，当进行直流工作点分析时，电路中的交流源自动被置零，电感元件被短路，电容元件被开路。

下面通过实例仿真来说明直流工作点分析的步骤。

（1）在电路工作窗口创建需要分析的电路原理图(以例 3.6 为例)，如图 3-14 所示。

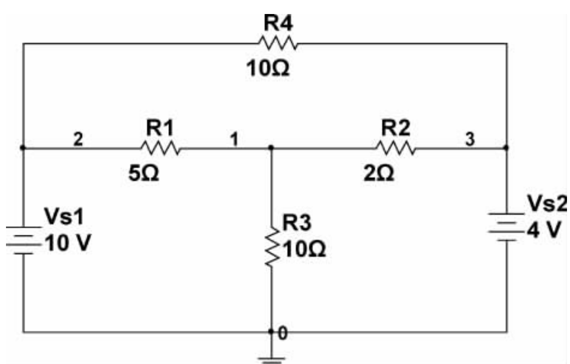

图 3-14　例 3.6 的仿真电路图

（2）单击 Options→Sheet Properties 命令，在 Circuit 选项卡中，选 Net Names 中的 Show All，如图 3-15 所示，单击 OK 按钮，得到标有节点编号的电路图，如图 3-14 所示。

（3）执行 Simulate→Analysis→DC Operating Point Analysis 命令，在 Output 选项卡中，在 Variables in circuit 栏显示了电路中所有的电压电流等变量，如图 3-16 所示。

（4）选择所要分析的变量，单击 Add 按钮，添加到右边的 Selected variables for analysis 栏目下，如图 3-17 所示。图中 I(R1)表示流过电阻 R1 的电流，方向从左到右；I(VS1)表示流过电压源 VS1 的电流，方向自上而下；等等。然后单击此对话框中的 Simulate 按钮，所求电流值显示在 Grapher View 对话框中，如图 3-18 所示。

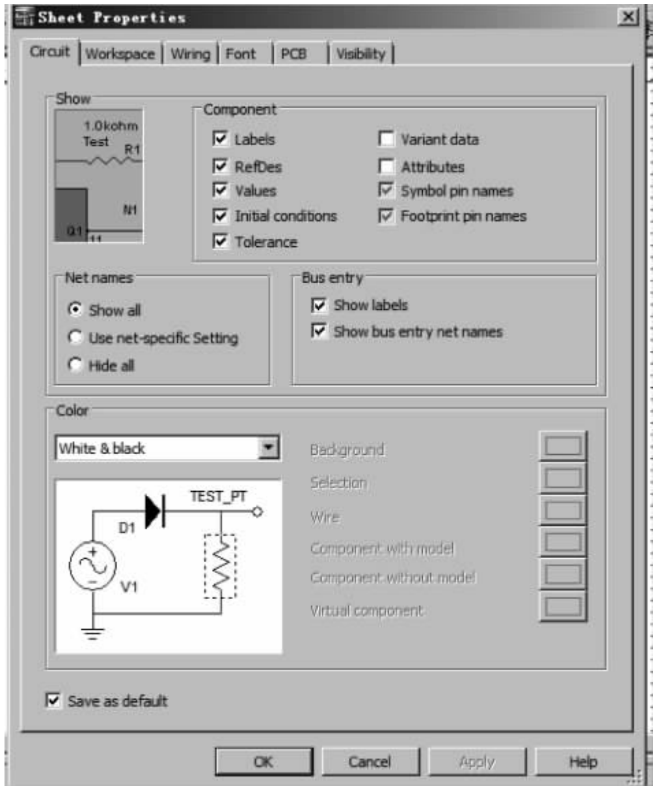

图 3-15　Sheet Properties 对话框中的 Circuit 选项卡

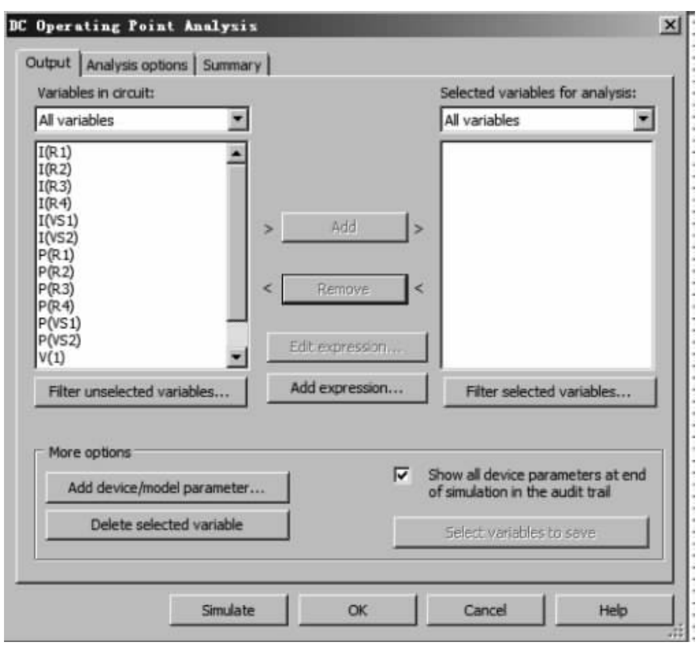

图 3-16　DC Operating Point Analysis 对话框中的 Output 选项卡

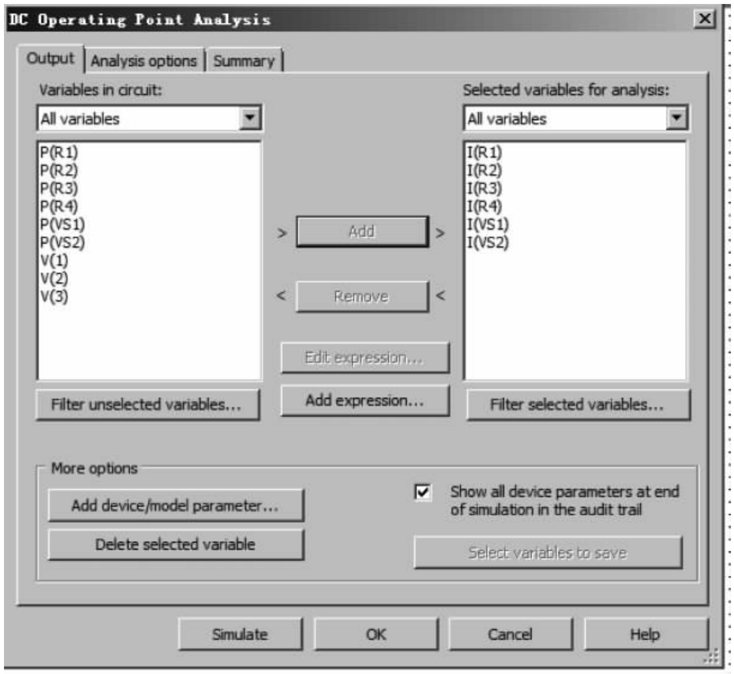

图 3-17 将分析变量添加到 Selected variables for analysis 栏目下

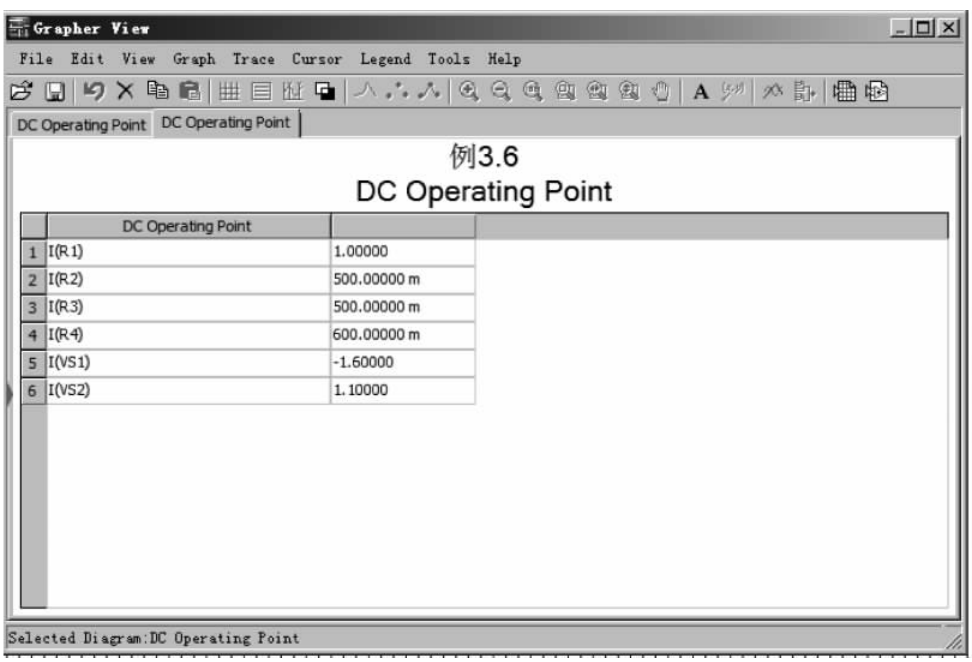

图 3-18 DC Operating Point Analysis 分析结果

作为仿真练习,可采用类似的方法,对例 3.4 进行仿真分析,从仿真电路到分析结果分别如图 3-19、图 3-20 和图 3-21 所示。

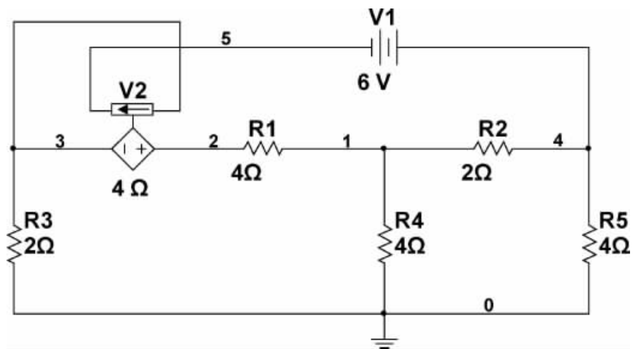

图 3-19 例 3.4 的仿真电路图

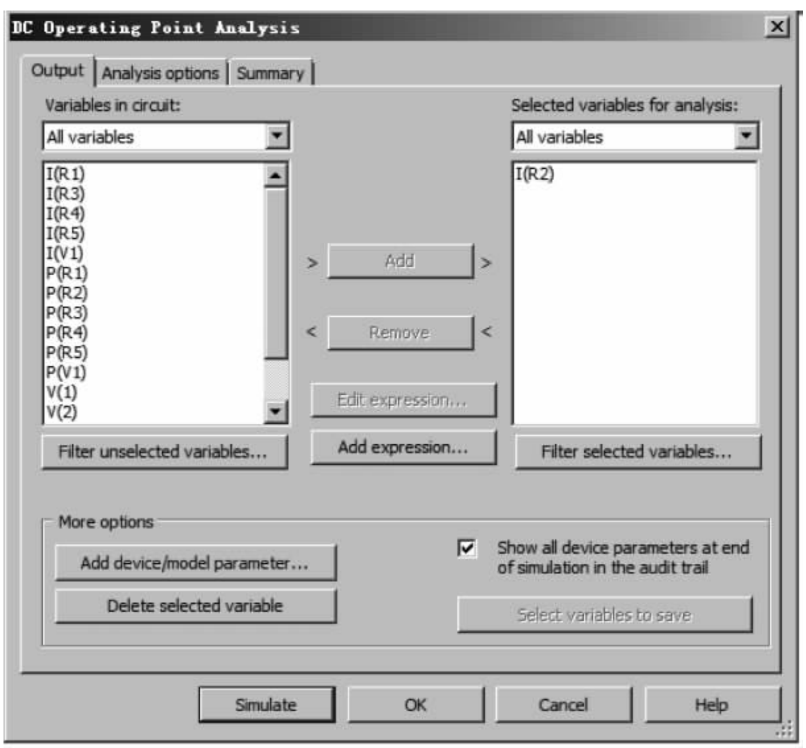

图 3-20 将分析变量添加到 Selected variables for analysis 栏目下