



第 1 章



数学教学的核心是学生的“再创造”

著名数学教育学家弗赖登塔尔认为，数学教学的核心是学生的“再创造”，数学是最容易创造的一门科学。

数学实质上是人们常识的系统化。数学的发展依赖于数学家的创造，学习数学同样要重视学生的亲身体验，用学生自己的思维方式，重新创造有关的数学知识。教师不必将各种规则、定律灌输给学生，而是应该创造合适的条件，提供具体的例子，让学生在实践的过程中，自己“再创造”出各种运算法则，或是发现有关的各种定律。

建构主义学习理论认为学习者存在个体差异，这不仅是指主体已具有的知识，而且也包含了认知风格、学习态度、信心、观念和学习动机等，学习活动在很大程度上取决于主体已有的知识和经验。知识不能简单地通过教师传授得到，而是每个学生在一定的情境即社会文化背景下，借助教师和同学的帮助，利用必要的学习资料，通过人际间的协作活动，依据已有的知识和经验主动地加以意义建构。因此，“情境”“协作”“交流”和“意义建构”是学习环境中的四大要素。其理论核心可以概括为：以学生为中心，强调学生对知识的主动探索、主动发现和对所学知识意义的主动建构。因此数学学习是主体对数学知识的认识过程，学生的数学学习活动不应只限于接受、记忆、模仿、练习等被动的吸收过程，而应是在教师指导下的主动建构学习的过程；这个建构过程依赖于学习者已有的认知结构，因此必须具有个体的特殊性。

当我们在进行优秀生的分班培养是否与教育平等相违背的争论时，2500 多年前孔子早就给出了答案，既要“有教无类”也要“因材施教”。“因材施教”是宋代“二程”（北宋思想家、教育家程颢、程颐的并称）和朱熹从孔子的教育实践活动中概括出来的，曰：“夫子教人，各因其材”。孔子能够针对学生的性格特点和智力水平，用不同的方法进行教育，把学生培养成各种不同的人才。孔子在《论语·雍也》中指出“中人以上，可以语上也；中人以下，不可以语上也”，就是说：“中等水平以上的人，可以告诉他高深学问；中等水平以下的人，不可以告诉他高深学问”。

加德纳的多元智能理论指出，人的智能领域是多方面的，每个学生都有自己的智力强项和学习风格。多元智能理论强调每个个体不可能拥有完全相同的智



能,单个个体有很高的某种智能,却不一定有同样程度的其他智能.这种内隐的智能差异的外显化就是学生的个体差异性,只有当这种差异性被考虑到时,教学才是有效的.

相对于教师主导取向的有意义接受学习,数学优秀生更需要自主取向的深度学习.^①对数学优秀生的培养,最重要的是学习能力的培养.教是为了不教,就是做“授之以渔”的工作,教学生学会思考问题,然后让他们用自己的创造思维去学习.

1. 探究性学习,一种优秀生的培养策略

1.1 优秀生的培养模式

世界范围的综合国力竞争,归根到底是人才特别是创新型人才的竞争.我国科技人才总量居世界前列,但创新创业拔尖人才和领军人才严重不足.

美国有英才教育的政策和法律,1958年颁布的《国防教育法》指出:“为了国家的安全,必须选拔大批的天才儿童,并努力进行天才教育”,1973年通过了《天才教育法》.^②

法国的教育受拿破仑的影响很深,拿破仑认为“教育好20%的人口很重要,因为这20%的人是带动法国前进的火车头”.^③

在日本,精英教育曾被视为违反教育民主的制度而受到批判,但过度的教育平等严重阻碍优秀人才的培养.1978年,当时的首相福田赳夫指出:“日本在经济赶超的时代依靠的是模仿,但是今后必须具有独创性的能力.因此,实施‘英才教育’的时代来临了.”日本文部科学省2002年公布的《劝学》,及稍后由日本文部科学大臣远山敦子发布的《开拓新时代——培养有能力的日本人,从整齐划一到自立和创造》都强调了“英才教育”的理念.^④

英^{⑤⑥}、德^⑦、俄^⑧、韩^⑨等国家也都有针对英才培养的措施和政策.

在我国,1993年教育部基础教育司委托北大附中、清华附中、北师大附中、

① 巩子坤,宋乃庆.数学优秀生培养中需明确的几个观点[J].当代教育科学,2004(21):61-62.

② 潘发勤,杨得国.英才教育·素质教育·学科结构[J].上海教育科学,1997(1):16-18,21.

③ 袁震东.教育公平与英才教育——数学教育改革中的一个重大问题[J].数学教学,2003(7):封2.

④ 赵晋平.从理科高中看日本的精英教育[J].外国教育研究,2004(5):24-28.

⑤ 吴明海.英国伊顿公学的英才教育[J].中国教师,2005(5):53-55.

⑥ 原青林.英国公学英才教育的主要特点探析[J].外国中小学教育,2006(12):12-18.

⑦ 闫瑾.德国培养科研后备人才的政策措施[J].世界教育信息,2008(3):15-17.

⑧ 倪明.从战略上重视数学英才教育——俄罗斯数学物理学校的启示[J].数学教学,2006(12):封2,49.

⑨ 李水山.韩国的“平准化教育”和英才教育的发展[J].基础教育参考,2007(8):29-30.

华师大二附中四所学校办高中理科实验班。受此影响,许多省市重点中学也办了针对数学或理科优秀生的实验班。10多年来,理科实验班在优秀学生的教育教学方面进行了积极探索和有益尝试,但是也引起了社会上对教育公平、学科竞赛的利弊等问题的争论。2004年教育部办公厅下发了《关于全国理科实验班停止招生的通知》,于是大部分学校又停止了或名义上停止了理科实验班的招生。在轰轰烈烈的理科实验班教育的实验中,常见各个学校理科竞赛成绩的罗列,少见教育得失的探讨,更少见优秀生教育规律的研究。

近二十年来对英才教育与素质教育的探讨一直异常激烈。有人将英才教育与素质教育相对立,认为我国教育的弊端在于只重视英才而忽略了大多数。而教育家吕型伟认为:“我国为什么没有涌现世界级大师,没有涌现特别出类拔萃的顶尖人才,甚至没有超过前辈顶尖人物的人才,在国内没有一个得诺贝尔奖的。一个原因是只讲全面发展,不许讲个性发展,结果是实行‘求全责备,扼长补短,求同去异’,学生的才能受到压制,特别是压制了那些奇才、怪才、偏才和狂才,不少有才华的学生被扼杀在摇篮里了。”^①教育家张奠宙指出:“高考体制,是制约数学优秀生成长的瓶颈,减负且深挖洞,形成了陷阱式的考试题,大家一齐陪着做,没有多少数学含量。”^②正所谓“高考减负一刀平,数学英才何处寻?”

从“不懂几何者莫入”的柏拉图的学园到现在各国普遍开设的数学物理学校,人类在数学优秀生的培养上积累了丰富的经验。

数学优秀生培养历史中的标志性事件是匈牙利男爵埃特沃斯在1894年举办的匈牙利中学生数学竞赛,及建立数学物理特设学校,由此鼓舞了一批数学天才,后来匈牙利产生了许多著名科学家,比如分析学家费叶尔、舍贵、拉多、哈尔、里斯,组合数学家蔻尼希,以及著名力学家冯·卡门,著名经济学家、1994年因博弈论而获诺贝尔经济学奖的豪尔绍尼等鼎鼎大名的人物。

数学竞赛成为培养和发现数学英才的一个重要途径。在苏联,人们把数学竞赛称作“数学奥林匹克”,认为数学是“思维的体操”。1934年在列宁格勒(今圣彼得堡),著名数学家狄隆涅主持举办了中学生数学竞赛;1935年,莫斯科也开始举办数学竞赛;1961年全俄(后改“全苏”)数学竞赛举办。在美国,1938年开始举办普特南数学竞赛,获奖者中有的后来成为杰出人物——菲尔兹奖获得者芒福德、米尔诺、奎伦和诺贝尔物理学奖得主费曼、威尔逊等;1972年起,开始举办美国数学奥林匹克,最终选拔出来的国家队队员得以与父母一同到白宫接受总统接见。1956年,在著名数学家华罗庚、苏步青等人的倡导下,由中国数学会发起,北京、天津、上海、武汉首先举办了高中数学竞赛,此后由于

① 吕型伟. 要重视英才教育问题 [J]. 教育发展研究, 1999 (5): 12-15.

② 张奠宙, 赵小平. 高校自主招生和数学英才培养 [J]. 数学教学, 2006 (12): 封底.



各种原因而中断. 1978 年, 随着“科学的春天”的到来, 华罗庚主持了全国八省市的中学数学竞赛. 1981 年, 中国数学会决定举行全国高中数学联合竞赛. 从 1985 年开始我国派队参加了 IMO (国际数学奥林匹克), 并且在 IMO 上取得了非常优异的成绩. 可以说我国的数学竞赛起步较晚, 但后劲十足. 第一届 IMO 于 1959 年在罗马尼亚举办, IMO 为发现数学人才做出了突出贡献, 许多 IMO 优胜者后来成了杰出的数学家, 如沃尔夫奖获得者卢瓦兹、菲尔兹奖获得者德林菲尔德、约克兹、博切兹、高尔斯、马古利斯、拉佛阁、佩雷尔曼、陶哲轩、吴宝珠等.^①曾获 2000 年第 41 届 IMO 满分金牌的恽之玮, 因在“表示论、代数几何和数论等方向诸多基本性的贡献”荣获 2012 年“拉马努金”奖, 这标志着我国的 IMO 获奖者, 开始走向数学研究领域的最前沿.

匈牙利的特设学校成了苏联数学物理学校的模型, 再以后苏联数学物理学校引起了美国、英国和其他国家精英学校的产生, 由此拉开了区别一般学生教育的精英教育的序幕, 并建立了一整套特长生培养的课程安排、学生选择、培养措施、发展规划等培养体系. 20 世纪 80 年代末, 苏联有各种类型的数学中学近 300 所, 每年的毕业生约占全国中学毕业生的 3%, 因解决了庞加莱猜想而在 2006 年世界数学家大会上获菲尔兹奖的佩雷尔曼, 就是从列宁格勒数学物理中学成长起来的.^②

数学优秀生的数学课程安排, 主要有两种模式.

一种注重数学知识的学习, 把大学的数学内容提早渗透到高中课程中, 强调数学知识加深, 教学进度加快. 如大数学家 A. H. 柯尔莫哥罗夫为莫斯科大学附属数学物理寄宿学校制定的“深入学习数学的学校或班级的教学大纲”的指导思想是: 包含宽广的知识面, 基本原理和基本理论, 以及这些原理和理论建立和发展的历史过程、思想实质、相应的事实、丰富的具体材料——联系于当前和可以预见的未来的社会实践. 其中的《几何学》内容包括: 综合几何、向量几何、球面几何、仿射几何, 以及相对论中的几何.^③在美国弗吉尼亚的 Fairfax 郡的中学, 学校让数学单科突出的学生直接进入适合他们的高年级单科班学习, 甚至对数学成绩特别优异的学生, 学校会派校车送他到附近的大学由教授专门辅导.^④美国高中开设的 AP 课程 (美国大学预修课程) 和 Honor 课程 (荣誉课程), 都是为那些对数学特别有兴趣或有特殊天赋的学生开设的, 学生学习 AP 课程并通

① 熊斌, 葛之. 历史与现实: 中国奥林匹克数学竞赛现象的背后 [N]. 中华读书报, 2005-04-27.

② 倪明. 从战略上重视数学英才教育——俄罗斯数学物理学校的启示 [J]. 数学教学, 2006 (12): 封 2, 49.

③ 同上.

④ 李永智. 美国的英才教育与因材施教 [J]. 基础教育参考, 2004 (4): 15.

过统一考试,在大学可以免修该课.一些著名大学以学生学过若干门 AP 课程或 Honor 课程作为入学的必要条件.一些拔尖的学生还可以到就近的大学学习一两门课.^①

另一种注重数学研究能力的培养,注重学生单独的或者互相合作的小课题研究或数学建模等活动.如莫斯科 57 中学和彼得堡 Anichkov Lycee 学校鼓励学生不依赖讲义、教科书及参考资料而独立地建立数学定理和方法,通过讨论会、研究班等形式挑战学术研究课题.^②

1.2 国内外数学探究性学习的研究现状

探究性学习是指学生在教师的指导下,通过观察、分析、类比、归纳、猜想、证明,或通过调查研究、动手操作、表达与交流等探究性活动,探索发现问题、解决问题,从而获得知识、技能和态度的学习方式和学习过程.

20 世纪 50 年代到 70 年代,探究性学习理论的主要代表是布鲁纳、施瓦布等人.布鲁纳提出“发现学习”的理论.施瓦布教授提出的“探究学习”认为,学生学习的过程与科学家的研究过程在本质上是—致的,因此学生应像科学家一样,以研究者的身份去发现问题、解决问题,并在探究过程中获取知识、发展技能、培养能力,特别是培养创造能力,发展自己的个性.他们从理论上论证了“发现学习”和“探究学习”的合理性,推动了长时间的课程改革.20 世纪 80 年代,菲尔兹奖获得者雷内·托姆(Rene Thom)曾针对中学数学学习的现状大声疾呼:数学的学习主要应是一个自发探究的过程,如果认为只需通过大量的生记强练,就会更容易地学到数学,那无论如何是一个可悲的错误.^③

进入 21 世纪,我国《数学课程标准》提出:“有效的数学学习活动不能单纯依赖模仿和记忆,动手实践、自主探索与合作交流是学生学习数学的重要方法.”如今,探究性学习已经成为最受关注的学习方式之一.

对数学探究性学习的研究,国外起步早、研究深.英国数学教育家布尔斯(Burghes)(1998)认为数学探究可归为解难题范畴,从而将探究分成 4 个层次:(1)思索式探究(难题);(2)台级式探究(“过程”或结合型问题);(3)决策性问题;(4)实际的问题.美国学者鲍尔和巴斯(Ball & Bass)(2000)就数学推理问题与探究能力的关系进行了较长时间的实证研究,得出结论:数学推理问题的练习对提高探究能力效果显著,数学探究性学习依赖于一定的假设——演绎推理活动.埃德尔森(Edelson, D. C.)(2001)以信息技术为平台,设计、

① 袁震东.教育公平与英才教育——数学教育改革中的一个重大问题[J].数学教学,2003(7):封2.

② 熊晓东.熊晓东教育论文——英才教育在中国[M].上海:百家出版社,2005:25-41.

③ Rene Thom.在我的数学生涯中遇到的问题小结[J].周建义译.数学译林,1997,(4):275-285.



开发了几十个探究教学软件,推广到五十多所学校的数百个班级使用,开辟了数学探究性学习与计算机技术相结合的新视点.^①

我国对数学解题的探究学习过程研究较为具体.徐利治通过对数学方法论的研究,揭示出问题化归的本质,为数学解题的探究学习过程做了开拓性工作.单增就数学竞赛题的探索解法及一般性数学问题的研究过程进行了针对性探讨,集中反映在其两本著作《数学竞赛研究教程》(1993)和《解题研究》(2002)中.余应龙的《数学探究性学习导读》(2002)及张广祥的《数学中的问题探究》(2003)分别列举了几十个可以展开探究活动的中学数学问题.

2001年,国家《普通高中数学课程标准》(实验)明确将“数学探究”列为3个新增版块之一,强调了探究性学习方式在数学学习中的重要性.随着数学课程改革的推动,数学探究学习研究逐步被重视,在各种数学教育刊物上,以探究学习为关键词的数学教学或学习方面的研究论文日渐丰富,但少有系统的研究成果.

下列教师的研究,与课堂教学密切相连,操作性强.徐光考(2005)从教学实践中总结出数学探究性课堂教学的几种实施方法:建构“较大”的“潜在距离”,实施探究式的变式教学;将数学教材中的概念、定理、公式、法则等知识的形成过程设计成探究的过程;加强应用性问题、开放性问题的探究教学;重视合情推理教学,让学生掌握科学的探究方法.^②周松(2006)结合教学案例归纳了数学探究性学习的四种类型:对数学知识形成过程的探究,对数学一般性规律的探究,对不同数学知识综合的探究,对数学知识与规律应用的探究.^③张国棣(2007)指出新课程教学应加强学生“探究”方向的指导,具体有:探究数学概念的起源,渗透数学文化;探究公式的推广,提高应用的灵活性;探究问题的变化,形成思维的独创性;探究问题的归类,逐步渗透方法论思想;探究知识的“交汇”,提高知识整合能力;探究数学美,提高数学审美能力.^④

宁连华(2006)通过文献分析和课堂教学实录考察指出:当前的数学探究教学设计存在着逻辑起点错位、针对性不强、解释力不足和对传递性教学设计的习惯性支持等缺陷,根本原因在于两代教学设计理论(ID1和ID2)的惯性影响力.对探究需要的分析才是数学探究教学设计的逻辑起点.进行数学探究活动设计时应注意:“元认知提示语”的启发暗示,防止“滑过现象”的发生,尊重探究过

① 宁连华.数学探究学习研究的特点及其思考[J].数学教育学报,2005,14(4):28-30.

② 徐光考.数学探究性课堂教学的探索[J].数学通报,2005,44(10),24-27.

③ 周松.数学探究性教学的基本类型与实践[J].数学通报,2006,45(1),37-39.

④ 张国棣.新课程教学应加强学生“探究”方向的指导[J].数学通报,2007,46(1),5-8.

程的“自组织性”.^①

1.3 数学优秀生的学习特点

关于数学优秀生（也称数学特长生）的界定，一直有种种不同的说法。有的人以各种考试来认定，数学考试成绩最优秀的5%的学生是数学优秀生；有的人以数学竞赛的成绩来认定，在数学奥林匹克中能得奖的学生是数学优秀生；有的以学习效率来认定，不必花费太多的时间和精力，就能得到较好数学成绩的学生是数学优秀生；有的以智力水平高低来认定，智商高且数学成绩好的学生是数学优秀生。^②美国全美数学教师协会（NCTM）对数学优秀生的界定侧重于学生对数学的兴趣，对数学有兴趣，能主动地进行数学学习，且数学学习速度较快的学生是数学优秀生。这些认识，有的侧重数学学习结果，有的侧重数学学习过程。

天津师大教师王光明（2004）兼顾结果和过程的观点：既排除那些不具备内在数学学习动力、学习效率不高、但靠“模仿记忆”和“搞题海战术”也能获得较好数学认知成绩的学生，又应排除那些天赋不错，但缺乏学习毅力、数学学习成绩不能维持在稳定状态的学生，将数学优秀生界定为数学学习兴趣浓厚、数学认知成绩好并维持在稳定状态，而且数学学习效率高（从过程看，能够向时间要数学学习效益；从结果看，能从数学认知学习要教育效益）的学生。^③

从20世纪的经验来说，从开始的匈牙利大学预科和苏联的特设学校到后来相继成立的美国和亚洲地区的学校，都指出那些天才学生可以以相当快的进度学习，他们特殊的解决问题的能力和高度的抽象思维能力大大超过了普通学生。^④

在探究性学习上数学优秀生和普通生还表现出以下差异：

（1）数学优秀生具有较强的探究动力

罗柳英（2005）通过调查后得出，从一天内学习时间分布及一个月内数学学习平均时间分布可以看出，优秀生与普通生每天花2个小时左右时间学习数学，但时间分布却有明显差异：在预习、复习、独立思考方面，优秀生L所花时间是普通生X所花时间的2倍；在课堂练习、课外作业方面，优秀生L所花时间是普通生X所花时间的一半左右。从总体看，若以课堂为中心，优秀生L学习数学的时间是靠前的，即他学在老师的前面。普通生X学习数学的时间是靠后的，即他跟在老师的后面学习。^⑤

数学优秀生更喜欢预习，是因为优秀生对陌生的数学知识有着更强的探究源动

① 宁连华. 数学探究教学设计研究 [J]. 数学教育学报, 2006, 15 (4): 39-41, 51.

② 唐瑞芬. 数学教学理论选讲 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2000: 150.

③ 王光明, 王悦. 高中数学优秀生与普通生的数学认知结构差异比较、析因与教学建议 [J]. 中学数学教学参考, 2004 (4).

④ 李永智. 美国的英才教育与因材施教 [J]. 基础教育参考, 2004 (4): 15.

⑤ 罗柳英. 高中数学优秀生与数学普通生个案研究 [J]. 中学数学杂志 (高中), 2005 (5): 23-25.



力. 他们经常这样想: “这是什么符号, 我怎么没见过?” 他们能更快地感知数学的美, 并想探究究竟, “这是怎么想出来的, 太奇怪了, 太漂亮了, 我怎么想不到?”

如, 这是一个在清华大学就读的学生用短信向我求教的问题: 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都满足

$$f(a \cdot b) = af(b) + bf(a).$$

求证: $f(x)$ 是常数函数. 我经过仔细思考, 构造了

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

为满足条件的函数, 但非常数函数, 所以判定原题为错题. 学生认为构造的反例很巧妙, 又问 “反例是怎么想到的”. 通过手机短信问我问题的学生, 明知道 “怎么想到” 是很难回答的, 有时甚至只可意会不可言传, 她还要追问, 可见 “怎么想到” 是如何的吸引数学优秀生了.^①

(2) 数学优秀生具有较强的质疑意识

从罗柳英 (2005) 的学习行为观察表中的数据可以看出, 优秀生 L 在课内交流的时间是普通生 X 的 3 倍, 甚至更多. 具体表现为: 在认真听讲的同时, 优秀生 L 认真回答问题的比例为 23%, 主动发言 15.3%, 向老师提问 15.3%. 普通生 X 只是认真听讲并认真回答老师提问的比例为 19.2%, 而主动发言及向老师提问均为 0.^②

那么, 优秀生在课堂上的主动发言以及向老师提问, 都有哪些内容呢? 你会听到: “我有不同的解法”, “我认为这样做有漏洞”, “这样解太麻烦了, 有简单的方法吗?” …… 数学优秀生具有较强的质疑意识和探究能力.

一个源于 Weierstrass 函数的数学问题^③

问题: 任取一个区间 (a, b) , 证明: 必存在一个无理数 $x \in (a, b)$, 使数

① 金荣生. 一个反例的构造 [J]. 中学数学教学参考, 2006 (1-2).

② 罗柳英. 高中数学优秀生与数学普通生个案研究 [J]. 中学数学杂志 (高中), 2005 (5): 23-25.

③ 陈波宇同学凭论文《Weierstrass 函数在不可列的稠密集上不可导的一种证明》获得第三届丘成桐中学

数学奖金奖. Weierstrass 函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ 是数学历史上极其著名的一个 “病态函数”. 他的

发现者 Weierstrass 证明了当 $0 < a < 1$, b 为奇整数且 $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ 时, 在 $\mathbf{R}$ 上处处不可导. 由此打破了人们直觉上认为连续函数必然是近乎可导的猜想. 2002 年刘文发表在《高等数学研究》上的文章将 a, b 的范围推广为: $0 < a < 1$, b 为奇整数且 $ab > 1 + \frac{(1-a)\pi}{2}$. 事实上在哈代的论文中已经证明了在 $0 < a < 1$, $ab > 1$ 的情况下 Weierstrass 函数在 $\mathbf{R}$ 上处处不可导, 不过用的是实分析的方法, 在许多数学分析书上只有结论, 而缺少证明. 陈波宇同学独立地用相对初等的方法证明了在 $0 < a < 1$, $ab > 1$, $b \geq 6$, 且 $b \in \mathbf{Z}$ 的情况下, Weierstrass 函数在一个不可列的稠密集上不可导.

适逢 2011 年全国数学竞赛命题工作研讨会在天津举行, 上面的问题源于陈波宇的论文中一个引理的特例, 是特为此次会议命制的一个问题. 本文发表于 2011 年《中等数学》第 4 期.

列 $\{\cos(6^n \pi x)\}$ 中有无穷多项大于 $\frac{1}{2}$.

证明：要证明数列 $\{\cos(6^n \pi x)\}$ 中有无穷多项大于 $\frac{1}{2}$ ，只要证明有无穷多个正整数 n ，使

$$2k + \frac{1}{3} > 6^n x > 2k - \frac{1}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

考虑将 a, b 的小数部分 6 进制化，设

$$a = a_0 + (0. a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \cdots)_6,$$

$$b = b_0 + (0. b_1 b_2 b_3 \cdots b_k \cdots)_6,$$

其中 $a_0, b_0 \in \mathbf{Z}$, $a_k, b_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $k = 1, 2, 3, \cdots$ ，且不存在整数 N ，当 $n \geq N$ 时，恒有 $a_n = 5, b_n = 5$.

因为 $a < b$ ，所以必存在整数 t ，使 $a_t < b_t$ ，且若 $i < t$, $i \in \mathbf{N}$ ，有 $a_i = b_i$.

设 a_m 是从 a_{t+1} 项起第一个不为 5 的数码，令

$$x = x_0 + (0. x_1 x_2 x_3 \cdots x_k \cdots)_6$$

$$= a_0 + (0. a_1 a_2 \cdots a_{t-1} a_t 55 \cdots 55 a_{m-1} 501011011101110 \cdots)_6,$$

则有 $a < x < b$ ，且 x 是无理数.

设 x 的小数部分在 m 位后数码为 0 的数位依次是 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ ，则对任意的 n_i ，有

$$6^{n_i} x > 6^{n_i} a_0 + (x_1 x_2 \cdots x_{n_i-1} 0)_6 + (0. 1 x_{n_i+2} x_{n_i+3} \cdots)_6,$$

因为 $6^{n_i} a_0 + (x_1 x_2 \cdots x_{n_i-1} 0)_6$ 是偶数，可令其为 $2k$, $k \in \mathbf{Z}$.

又 $\frac{1}{3} = (0. 2)_6 > (0. 1 x_{n_i+2} x_{n_i+3} \cdots)_6 > 0 > -\frac{1}{3}$ ，可见， x 符合条件，原问题

得证.

2. 数学课堂内的探究性学习

涂荣豹指出：“是不是堂堂课都要搞探究，现有的条件下基本不可能. 一个真正意义上的探究教学，搞好了，很花时间，再说教学时间、教学进度、教学内容、教师精力、班级人数，等等，那么多制约条件，谈何容易，何况还有一个升学的压力在那里呢！我的看法，三四个星期能有一节课是真正的探究就了不起了，一个学期有五六节课，就不容易啦. 应该提倡教学中局部的探究式教学，经常性的有那么一小段进行探究. 我提倡这样来把握探究式教学：贯穿教学始终的



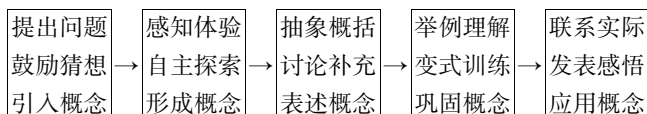
探究多尝试，每节课中一两小段的探究须坚持。”^①

诚然，探究教学要“适时”“适当”和“适度”！对不同的学生，探究要有不同的要求。相比于普通生的探究性学习，我们认为要给数学优秀生更充足的探究时间。数学优秀生喜欢探究，也只有那种包含探究性问题的课堂才真正让数学优秀生感兴趣。在课堂中要给学生留足探究的时间和空间，让学生在课堂上展示思维的过程，很多时间教师需要担当一个合格的倾听者。

探究性学习的课堂基本模式是：情景吸引一定向探究—合作讨论—反馈评价，不同课型的探究教学又有其各自的特点。

2.1 数学概念课的探究教学

概念是数学知识的基础，是数学思想与方法的载体。在概念教学中教师要启发学生通过对具体事物进行一系列的感知活动，联系个人的经验，进行分析、综合、抽象，归纳出一类事物的共同特征，并抽象概括形成“概念”。该课型探究教学的一般结构是：



(1) 引入概念

概念引入时教师要鼓励学生猜想，即让学生依据已有的材料和知识做出符合一定经验与事实的推测性想象，让学生经历数学家发现新概念的最初阶段。

(2) 形成概念

形成概念是通过对具体事物的感知、辨别而抽象概括的过程，这个过程应该通过学生自主探索去完成，用自己的头脑亲自去发现事物的本质属性或规律，进而获得新概念。

(3) 表述概念

概念形成之后，应及时让学生用语言表述出来，培养学生正确的表述概念，能促进学生思维的深刻性。这时要鼓励学生大胆给概念下定义，与同学合作讨论，给出尽量精确的表述。这时可以引导学生通过信息网络了解概念表述的来龙去脉。

(4) 巩固概念

要运用变式加深理解概念的内涵与外延，巩固概念。所谓变式，就是使提供给学生的各种感性材料不断变换其表现形式，使非本质属性时有时无，而本质属

^① 涂荣豹. 谈提高对数学教学的认识——兼评两节数学课 [J]. 中学数学教学参考, 2006 (1-2): 4-8.

性保持恒在. 恰当运用变式, 能使思维不受消极定势的束缚, 实现思维方向的灵活转换, 使思维呈发散状态.

(5) 应用概念

让学生用学到的数学概念解决日常生活中的实际问题, 是概念教学中培养学生的创造性思维的有力手段.

抛物线及其标准方程^①

按照课本所呈现的知识顺序教“抛物线及其标准方程”, 在内容安排上与学生刚学的椭圆、双曲线雷同, 难以激发学生的学习兴趣. 传统的教学设计一般以问题“椭圆的离心率在0和1之间、双曲线的离心率大于1, 那么是否有离心率等于1的曲线?”为引入, 但这些问题对数学优秀生缺乏挑战性、新颖性, 从而也没有留给学生自主探索的空间. 而由于包络等内容学生很少在课本和课堂上接触到, 例如在“猜一猜包络上的点的特点, 想一想抛物线的方程是否也具有 $Ax^2+By^2+F=0$ 的形式”等环节需要学生充分发挥主动性, 分组协商讨论需要学生去归纳、应用他们所学的知识, 巩固练习给学生自我反思的机会, 所以本教学设计在发挥学生的首创精神、将知识外化和实现自我反馈等环节做了努力, 本节课的教学设计是为数学优秀生准备的, 需要学生具有较好的数学基础和数学思维.

一、折纸引入, 创建情境

教师使用实物投影仪, 一边示范, 一边讲解折纸规则; 学生折纸, 体验抛物线形包络的形成过程. 折纸规则:

1. 如图1-1所示, 取一长方形白纸, 在一边上定一点 F ;
2. 如图1-2所示, 在点 F 所在边的对边任取一点 G , 折纸使之与点 F 重合;
3. 如图1-3所示, 留下折痕, 即 FG 的中垂线;
4. 如图1-4所示, 多次改变点 G 的位置, 重复第2、第3步.

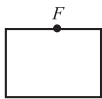


图 1-1

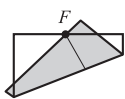


图 1-2

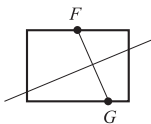


图 1-3

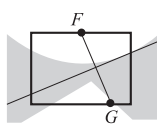


图 1-4

为了给出更清晰的包络曲线, 教师利用几何画板, 作出抛物线包络, 一边作图, 一边讲解作图步骤, 学生观察、思考、讨论, 进一步体验抛物线的形成过程. 作图步骤:

1. 取定点 F , 定直线 l ;

^① 本文为2005年12月我在浙江省瓯海区梧田高中数学实验班公开教学的教案.



2. 在 l 上取动点 A , 连接 AF , 做垂直平分线;
3. 追踪垂线, 形成包络.

二、独立探索, 寻求定义

观察电脑动画和折纸形成的包络, 独立思考以下问题: 形成的包络曲线是前面学习的圆、椭圆、双曲线吗? 曲线上的点具有什么特点?

虽然面向数学优秀生授课, 但也应关注学生的差异, 还可以给不同的学生提供以下层次高低不同的支架:

1. 你可以通过观察, 做一些猜想, 再用刻度尺量一量来验证你的猜想. (当学生不知从何入手时, 为他们提供建议式支架)

2. 包络的形状与长方形的长、宽有关吗?

(与 F 所在的边的长度无关, 而与 F 到对边的距离有关. 这是为学生提供的问题式支架, 目的是为了排除无关信息的干扰, 从而为学生关注抛物线定义中的定点和定直线提供帮助)

3. 图 1-5 中, AF 的垂直平分线为形成的包络曲线提供了几个点? 它们的关系如何? (一个点, 相切)

4. 图 1-5 中, 切点 B 与 A 点的连线与直线 l 的关系如何? (垂直)

通过学生的探索, 归纳得到包络曲线上点的特点, 即到点 F 的距离与到定直线 l 的距离相等, 包络曲线不同于前面学习的椭圆、双曲线. 进而给出抛物线的定义.

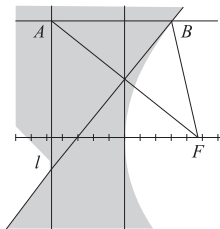


图 1-5

三、协作学习, 探求方程

先将学生分成小组, 要求小组成员选择不同的建立直角坐标系的方法, 独立推导抛物线的方程, 然后将得到的结果在小组中协商、讨论.

要求各小组提出问题在小组讨论, 也可以选择讨论下面老师提供的几个问题:

1. 怎样建立直角坐标系, 得到的抛物线的方程最简洁?

不同的建立直角坐标系的方法, 得到的抛物线方程在形式上有什么不同? 为什么会产生这种不同?

2. 圆、椭圆、双曲线的标准方程可以写成 $Ax^2 + By^2 + F = 0$ 的形式, 能够找到一种建立直角坐标系的方法, 让抛物线的方程也具有 $Ax^2 + By^2 + F = 0$ 的形式吗? (若抛物线的方程也具有 $Ax^2 + By^2 + F = 0$ 的形式, 则其图像有两条对称轴, 这与抛物线只有一条对称轴矛盾)

3. 初中学习过的抛物线 $y = x^2$ 的焦点在哪里? $y = 8x^2$ 呢? $y = ax^2 + bx + c$ 呢? (目的在于将初中知识纳入知识网络, 完善知识结构)

4. 抛物线的标准方程有什么用？如何记忆？

教师提供问题的目的是引发学生的思考，通过学生的讨论使状态纷呈的复杂局面逐渐变得明朗、一致，使其在共享集体思维成果的基础上达到对当前所学知识比较全面、正确的理解，最终完成对所学知识的意义建构。

四、练习巩固，反思评价

通过练习强化符合要求的意义建构，支架中的练习设计，既考虑到以各种方法为基础的能力类别，又考虑用习题的难度与复杂性体现能力要求的高低。

1. 求焦点是 $F(0, -2)$ 的抛物线的标准方程. 已知抛物线过点 $(1, 1)$ ，求它的标准方程. (认清抛物线方程的四种形式)

2. 已知 A 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点， F 为抛物线的焦点， $|AF| = 2$ ，求 A 点坐标.

解法 1: 设 $A(x, y)$ ，则有 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ ，解得 $x=1$ 或 $x=-3$ (舍)，所以 $A(1, \pm 2)$.

解法 2: 设 $A(x, y)$ ，根据抛物线的定义由 $|AF| = 2$ 知， A 到准线的距离为 2，所以 $x+1=2$ ，解得 $x=1$ ， $A(1, \pm 2)$.

解法 1 是方程思想的体现，解法 2 是抛物线定义的应用，本题可用于检测学生是否完成对所学知识的意义建构。

五、前后呼应，引申探究

课尾让学生回顾一节课下来的收获，并将这种积极的情感带到课后. 这时提出要求学生课后解决的带有挑战性的问题：图 1-5 中的中垂线形成的包络是抛物线，是我们观察得到的，你能证明吗？

这时对能力较好的部分学生撤除支架，鼓励自主探索. 对另一部分学生可以提供以下支架，分解难点：

1. 从几何的角度思考，只要说明：每条 AF 的中垂线上都有一点落在以 F 为焦点、 l 为准线的抛物线上，其余的点到焦点的距离大于到准线的距离。

2. 从方程的角度考虑，可以思考以下问题：

(1) 为什么 F 不在阴影部分内？如何判断一点 $M(x, y)$ 是否在阴影部分内？(因为 F 不在任何一条中垂线上，只要看 $M(x, y)$ 的坐标是否适合某条中垂线的方程)

(2) 如何求阴影部分点的集合？如图 1-6，过 F 做 l 的垂线，垂足为 G ，以 FG 的中点为原点，直线 FG 为 x 轴建立

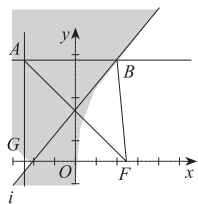


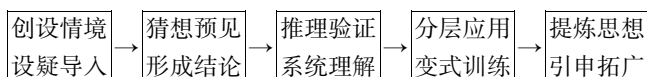
图 1-6



直角坐标系. 设 l 上的动点 A 的坐标为 $\left(-\frac{p}{2}, m\right)$, 则 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2}, m\right)$. AF 的中垂线方程是 $2px - 2my + m^2 = 0$, 点 $M(x, y)$ 在某条中垂线上, 则关于 m 的方程 $2px - 2my + m^2 = 0$ 有解, 因而 $\Delta = 4y^2 - 8px \geq 0$. 因而阴影部分点的集合是 $\{(x, y) \mid y^2 \geq 2px\}$. 所以, 图 1-5 中的中垂线形成的包络是抛物线.

2.2 数学命题课的探究教学

表达数学判断的陈述句是数学命题, 定义、公理、定理、推论、公式都是符合客观实际的真命题. 数学命题课的教学是对数学公理、定理、推论、公式的教学, 它是学生获得新知识的必由之路, 也是学生提高数学素养的基础. 任何一个数学命题的学习都要经历一个由感性到理性的抽象概括的过程. 如果我们把这些过程返璞归真, 在教师的指导下学生以探索者的姿态出现, 去领悟命题的形成过程中隐含的思想方法, 则学生获得的不仅是数学定义、定理、公式, 而且增强了抽象概括的能力, 提高了分析问题和解决问题的能力. 该课型探究教学的一般结构是:



(1) 引入命题

“学起于思, 思源于疑”, 数学优秀生喜欢质疑. 疑能使心理上感到困惑, 产生认知冲突, 这种冲突是激发学生求知的动力, 是探究的“催化剂”. 因此, 在教学过程一开始, 就要紧紧围绕数学命题的内容, 从实际需要或知识发展入手, 通过特殊化、类比、猜想等提出有针对性的问题, 引入新课.

(2) 形成命题

问题提出后片刻, 即引导学生对结论进行合情推理, 或观察, 或试验, 或猜想, 以使学生发现定理、公式或法则, 并就条件和结论概括成命题. 这阶段是对命题的初步认识, 这种初步认识是感性的、零碎的, 或者说是表面的、朦胧的理解. 它存在着这个命题与学生原有知识如何同化或顺应的问题. 这些问题造成了学生深入理解命题本质的困惑, 但同时也是学生力图解除困惑的动因. 教师应充分利用这种困惑, 设疑导入, 并逐步抽象和提炼, 不断逼近命题的本质, 从而形成结论. 这就可望形成学生积极参与教学活动的氛围, 奠定学生作为知识探究者的地位.

(3) 理解命题

结论是否成立必须从理论上证明. 由于有些数学命题的证明方法具有典型性, 寻找证明方法具有规律性, 因此, 必须启发学生分析证明思路, 寻找证明方法, 形成数学思维. 通过命题的形成、证明, 学生心中引入时的“疑”已烟消云

散了,成功感会油然而生,心理上处于兴奋状态.此时,应趁热打铁,引导学生对命题进行全面的分析和领会,细致地进行观察,不仅在形式上,而且要在本质上加深对定理的理解.这阶段是对命题的认识从感性到理性、朦胧到清晰、表面到深入、表象到本质的一个过程,实际上就是使学生对所形成的结论在思想上产生认同和确定.这时信息技术可以帮助学生加深对命题的理解,化抽象为形象.应当指出数学证明不是加深对命题理解的唯一方式,也不一定是最好的方式.

(4) 运用命题

运用是对知识加深理解的必要环节,也是能力培养的主渠道.但对知识的理解和能力的培养都必须遵循循序渐进的原则.为此,在应用上可分层进行,由易到难,拾级而上,变式展开,形成梯度.例如:对公式的运用,我们可以从正用、逆用、变形后用加以考虑.有时也可以要求学生自己编写例题,灵活运用,编题的过程也是探究的过程.

(5) 引申拓广

要引导学生对命题证明的方法、命题形成的思维方法以及命题的运用方法进行总结,考虑命题的条件能否弱化,结论能否加强,能否通过类比、一般化等方法对命题加以推广.

下面的课例,《基本不等式及其应用》是我在上海市北中学“和而不同,上好家常课”活动中,在理科实验班上的公开课.师生互动,气氛活跃,得到了同行、专家的普遍赞誉,从学生的作业反馈可以看出,学生是真正会代这两个公式了!

基本不等式及其应用^①

一、引言

《基本不等式及其应用(一)》这节课要学会代两个公式: $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. 看起来,这并不是很难的事.但我在重点中学第一个班级上课的效果不太理想,上课学生听得懂,可课后作业不会做,或者还是用老方法做.其他老师也有同样的感叹:“现在的学生怎么了,公式都不会代!”究其原因,主要有二:

第一,以前学的公式基本上是恒等式.而此处的公式是恒成立的不等式,不仅要学生瞻前——关注公式中字母存在的条件;还要顾后——不等式中等号成立的条件.就是代这个公式要关注的问题比较多.

第二,不用这个公式,也能用过去熟悉的方法——做差比较法求解.学生没

^① 本文为2007年10月我在市北中学“和而不同,上好家常课”公开教学活动中的教案,发表于闸北区教育局编的《教育探索》2008年第1期.



有体会到代公式的方便，对新学的知识有潜在的排斥.

二、授课过程

第二次上这节课时，我做了改进.

1. 一见而钟情

引入时提出问题：如图 1-7 所示，直角三角形的两直角边为 a 、 b ，斜边与正方形的边长相等. 问：四个这样的直角三角形能否填满这个正方形？

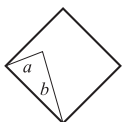


图 1-7

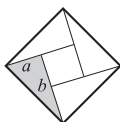


图 1-8

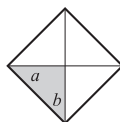


图 1-9

图 1-8 是我国古代用于证明勾股定理的弦图的一个局部，也是在我国召开的国际数学家大会的会标. 图 1-9 是 $a=b$ 的情况.

以弦图引入新课，让学生对基本不等式从形上加以认识，一见而钟情.

2. 从哪里来，到哪里去

在理解公式的过程中，让学生逐渐明白公式的来龙去脉.

(1) 逐步展示图 1-10 中的内容，通过知识的梳理，让学生进一步明确基本不等式 1 和基本不等式 2 是怎么来的，可有哪些用处，怎么用基本不等式.

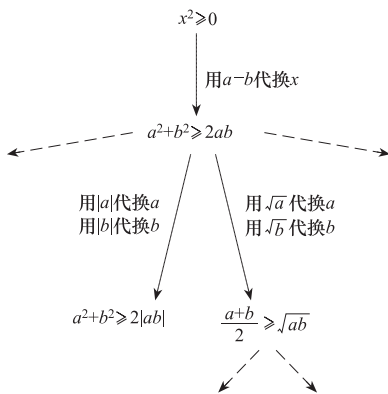


图 1-10

图中虚线为学生指出了用好基本不等式的方向——用不同的量代换公式中的字母，得到新的恒不等式.

(2) 与学生讨论基本不等式 1 中“当且仅当 $a=b$ 时等号成立”的含义.

问题：“当 $a=b$ 时等号成立”指的是什么？ $(a=b \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab)$

“仅当 $a=b$ 时等号成立”指的是什么? ($a \neq b \Rightarrow a^2+b^2 > 2ab$)

“当且仅当 $a=b$ 时等号成立”指的是什么? ($a=b \Leftrightarrow a^2+b^2 = 2ab$)

此处把“当”和“仅当”分开提问,将难点分散,有助于学生对“等号成立条件”的理解.

(3) 考虑恒不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 与 $a^2+b^2 \geq 2|ab|$ 的关系.

恒不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 对 a, b 中有且仅有一个是负数的情况放得太宽了,这时不等式可加强为 $a^2+b^2 \geq -2ab$.

一方面, $a^2+b^2 \geq 2|ab|$ 是 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 的特殊情况(用 $|a|, |b|$ 代基本不等式中的 a, b); 另一方面, $a^2+b^2 \geq 2ab$ 可以由 $a^2+b^2 \geq 2|ab| \geq 2ab$ 推得.

通过对 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 与 $a^2+b^2 \geq 2|ab|$ 关系的思考,使学生对基本不等式的应用(合理的变量代换或结合不等式的性质加以推理)有了初步的体验. 在对不等式强弱的比较中,感受数学的奇异美.

(4) 说明 $\frac{a+b}{2}$ 、 $\sqrt{ab}$ 分别叫作 a, b 的算术平均值和几何平均值. 基本不等式 2 就是指: 两个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值. 其几何意义是直角三角形斜边上的高不大于斜边的中线; 或半弦不大于半径(见图 1-11).

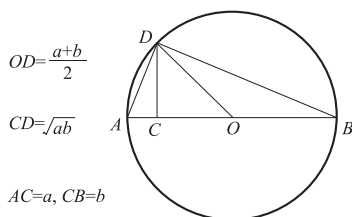


图 1-11

3. 欲穷千里目,更上一层楼

在公式的应用中,逐步认识到基本不等式带来的方便,体味登高望远的喜悦.

练习 1: 用 $>$ 、 $\geq$ 、 $<$ 、 $\leq$ 填空:

(1) x^2+1 _____ $2x$; (2) $4xy$ _____ x^2+4y^2 ; (3) $-4xy$ _____ x^2+4y^2 ;

(4) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ _____ 2 ; (5) $x^2+\frac{1}{x^2+1}$ _____ 1 ; (6) $x^2+2+\frac{1}{x^2+2}$ _____ 2 .

(5) 中填“ $\geq$ ”, 而 (6) 中填“ $>$ ”, 通过 (5)、(6) 的对比,初步体会基本不等式中“等号成立条件”的应用.

练习 2: 判断下列不等式是否恒成立: (1) $a+\frac{1}{a} \geq 2$; (2) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.

题中给出 $a+\frac{1}{a} \geq 2$ 目的在于让学生认识到用 $a+\frac{1}{a} \geq 2$ 要满足条件 $a>0$. 若 $a<0$, 有 $a+\frac{1}{a} \leq -2$.



题中给出 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ 目的在于让学生认识到公式的灵活应用. 乍一看, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ 可以由 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 平方得到, 但由于 a, b 的符号未知, 所以不能用基本不等式 2. 但不能用基本不等式 2 直接推出 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, 不能说明 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ 不成立. 事实上, 由基本不等式 1 可得 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ 对任意实数 a, b 成立.

练习 3: 某人买了 A、B 股票各 10 万元, A 股票第一天的增长率是 m , 第二天的增长率是 n , B 股票两天的增长率都是 $\frac{m+n}{2}$. 问: 在这两天, 哪只股票涨得多?

本题的目的在于感受基本不等式在社会生活中的应用, 即说明 $(1+m)(1+n) \leq \left(1 + \frac{m+n}{2}\right)^2$. 有两种方法, 一种是把左右两边展开, 即证 $1+m+n+mn \leq 1+m+n+\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$, 即证 $mn \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$; 另一种是把 $1+m, 1+n$ 看成整体, 证明 $(1+m)(1+n) \leq \left(\frac{(1+m)+(1+n)}{2}\right)^2$.

练习 4: 你能创造几个恒不等式吗?

学生写出了以下不等式: $a^2+b^2+c^2 \geq 2ab+2bc+2ac$; 当 a, b, c 为正数时, $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$; 当 $a < 0$ 时, $a + \frac{1}{a} \leq -2$; ...

练习 5: 对任意正数 a, b , 有 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 你能将这个不

等式再加一些项吗? 对任意正数 a, b, c , 是否也有类似的不等式?

引申和推广, 正是数学优秀生展示探究能力的舞台.

三、反思

我想这节课的成功有以下原因:

1. 让学生与知识对话

人们常用“冰冷”来形容公式, 但公式冰冷的面孔后也有丰富多彩的故事. 本节课通过学生与公式的相遇、沟通、认同和理解, 完成无声的交流、心灵的碰撞和精神的对话, 不让公式成为冷漠的“独白者”, 让学生认识到基本不等式不仅简洁、美丽, 而且有用、好用, 从而让学生在主观上产生学好基本不等式的

愿望.

2. 让预设与生成相得益彰

考虑到课堂教学时间的限制,对结论“若 $a < 0$,有 $a + \frac{1}{a} \leq -2$ ”,我本不打算在本节课内讲.于是做了这样的预设:“若 $a < 0$, $a + \frac{1}{a}$ 是负数, $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 是不成立的,那么 $a + \frac{1}{a}$ 的取值范围是什么呢?这个问题在课后同学们可以继续思考.”但学生并没有完全遵从我的预设,在课堂进入“请同学们创造几个恒不等式”这个环节时,有同学给出了结论 $a + \frac{1}{a} \leq -2$,许多同学迫不及待地去证明这个结论.下课铃声响了,一位同学突然提出:“老师,股票也可能下跌,如果 m, n 是负数, $(1+m)(1+n) \leq \left(1 + \frac{m+n}{2}\right)^2$ 成立吗?”虽然这些问题的讨论打乱了我原来的方案,没有时间进行计划中的课堂小结,但正是学生的精彩发言,让我看到了学生主动求知的愿望,说明他们喜欢上了基本不等式!

课堂教学是教师、学生、文本展开的心灵对话.因教师精心、有计划的预设而提升,因学生动态、不可重复、创新的生成而精彩!

等比数列的前 n 项和公式^①

教学目标

1. 理解等比数列的前 n 项和公式的推导过程;利用求和公式知三求一,与通项公式结合知三求二;通过公式的灵活运用,进一步渗透方程的思想、分类讨论的思想、等价转化的思想.
2. 通过公式的推导,培养观察、分析、类比、猜想、综合的能力.
3. 进一步渗透从特殊到一般,再从一般到特殊的辩证观点,培养实事求是的科学态度.

教学重点和难点

重点是公式的推导及运用,难点是公式的推导思路的发现.

教学过程

一、故事引入

印度舍罕王打算重赏国际象棋发明人——大臣达依尔.达依尔说:“陛下,请您在这张棋盘上的第1格内,赏给我1粒麦子,在第2格内给2粒,第3格内给4粒,照这样下去,各小格内的麦粒都是前1小格的2倍,陛下,把这样摆满

^① 源于2008年秋我在温州中学的公开课.



棋盘的所有 64 格麦粒，都赏给您的仆人吧！”国王一听，认为大臣的要求真是太低了。

问：你认为大臣的要求高不高？（欲擒故纵）

可经过计算，事情的结果却大出国王的意料之外，即使拿出全印度的粮食，也无法实现自己的诺言！

问：这是怎么回事？（创设悬念）

（这是第三章《数列》序言中的内容，虽然对老师来说它是老故事，但对大部分学生来说是新故事。它能引发学生的认识冲突，诱发学生对过去的表面认知产生怀疑，并且急切想知道结果，有利于促进知识的迁移）

二、公式推导

问题 1：大臣所得的麦粒数为 $S_{64} = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$ ，怎样求 S_{64} ？假设小麦 1000 粒重 40 克，那么国王要给发明者大约多少吨小麦？

（预案 1）从简单开始： $S_1 = 1$ ； $S_2 = 3$ ； $S_3 = 7$ ； $S_4 = 15$ 。猜得： $S_n = 2^n - 1$ 。

（预案 2） $1 + S_{64} = (1 + 1) + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$

$$= (2 + 2) + 4 + 8 + \cdots + 2^{62} + 2^{63}$$

$$= \cdots$$

$$= 2^{63} + 2^{63}$$

$$= 2^{64}.$$

所以 $S_{64} = 2^{64} - 1$ 。

估算： $S_{64} = 2^{64} - 1 = 16 \times (2^{10})^6 - 1 = 16 \times 1024^6 - 1 > 1.6 \times 10^{19}$ ，

$$1.6 \times 10^{19} \div 1000 \times 40 \times 10^{-6} = 6.4 \times 10^{11}.$$

国王要给发明者的小麦超过 6400 亿吨。

（预案，是对学生的思考的一些估计，根据学生的回答来确定教学的流程。国王给发明者的小麦吨数放在课堂内估算，有利于改进原有的认识结构，进一步提高其学习本节内容的兴趣）

问题 2： $S_n = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1} = 3^n - 1$ 吗？

（预案）反例：取 $n = 1$ ，左右两边不相等。

从简单开始： $S_1 = 1 = \frac{3-1}{2}$ ； $S_2 = 4 = \frac{3^2-1}{2}$ ； $S_3 = 13 = \frac{3^3-1}{2}$ 。猜得： $S_n = \frac{3^n-1}{2}$ 。

（首先由问题 1、问题 2 中的两条式子的相似性“类比”得出结果的相似性，但类比是一种主观的不充分的似真推理，要确认其猜想的正确性，还须经过严格的逻辑论证。然后从简单的特殊情况的观察入手，取得一些局部的经验，由此做出一般性结论的猜想）

问题 3：问题 1、问题 2 中的结论有何相似之处，能推广到

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}$$

的情况吗?

(预案) 将问题 1 的结论改写成 $S_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1}$.

猜得: $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

只要证: $(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1})(q - 1) = q^n - 1$.

似曾相识, 想起初中学过的平方差、立方差公式: $(1 - q)(1 + q) = 1 - q^2$,
 $(1 - q)(1 + q + q^2) = 1 - q^3$.

(学习者能否形成良好的认知结构取决于学生原有的认知结构里是否具有清晰、可同化新的知识的生长点)

证明: $(1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1})$
 $= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n)$
 $= 1 - q^n$.

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

问题 4: 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 它的前 n 项和 S_n 如何用 a_1 , q , n 等基本量来表示?

(预案) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
 $= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$
 $= a_1 (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1})$
 $= \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$.

追问: 上面得到的答案是否正确?

当 $q = 1$ 时, 不正确.

问题 5: 能否不用问题 3 中得到的结论 $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, 直接推导出等比数列的前 n 项和的公式?

(预案) 受问题 3 中的证明的启发, $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$ ①.

①的两边乘 q 得: $qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$ ②.

①的两边分别减去②的两边得: $(1 - q)S_n = a_1 - a_1 q^n$.

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$, 也可以写成 $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}$.

当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$.