第 1 章　矩阵知识初步

1.0　本章导引

例 1-1　表 1-1 反映了济南、青岛、烟台到北京、上海的动车班次数量。

表 1-1　动车班次数量

	北京	上海
济南	8	6
青岛	5	4
烟台	2	2

可以将这些数字表示成 3 行 2 列的形式，如下：

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

在实际生活中，经常遇到类似的问题。例如，不同城市之间的距离，物品的生产地和销售地之间的对应关系等，都可以用类似的形式表示。这种形式在表示相关问题时简单、直接。在计算机数学基础中，这种表示形式在关系和图论的研究中有着重要的作用。

1.1　矩阵的概念

定义 1-1　将$m \times n$个数a_{ij}（$i = 1, 2, \cdots, m$，$j = 1, 2, \cdots, n$），按照一定的顺序排列成的一个m行n列的矩形阵列：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个$m \times n$矩阵（matrix），通常用大写字母$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$等表示，可以记为$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$，$a_{ij}$称为矩阵$\boldsymbol{A}$中第$i$行第$j$列的元素（element）。

当$m = n$时，称矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$为$n$阶方阵（square matrix）。

例 1-2　有如下的矩阵：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}，\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}，\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{M}$是1×4矩阵，$\boldsymbol{N}$是2×3矩阵，$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵。

定义 1-2　两个$m \times n$矩阵$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{N}$相等，当且仅当所有的对应元素分别相等。

例 1-3　两个矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$定义如下：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2-a+b & 3 \\ 4 & 5 & 6-a-b \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

假设$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，求$a$和$b$的值。

分析：根据定义 1-2，两矩阵相等，即对应位置的元素分别相等，可以根据这一点计算a和b的值。

解：

根据两矩阵相等，可知对应位置上的元素分别相等。因此，

$$\begin{cases} 2-a+b=2 \\ 6-a-b=8 \end{cases}$$

解得$a=b=-1$。

□

定义 1-3　给定矩阵$\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{m\times n}$：

（1）如果$m=1$，称矩阵$\boldsymbol{M}$为行矩阵（row matrix）或行向量（row vector）。

（2）如果$n=1$，称矩阵$\boldsymbol{M}$为列矩阵（column matrix）或列向量（column vector）。

（3）如果对任意的i、j，有$m_{ij}=0$，称矩阵$\boldsymbol{M}$为零矩阵（zero matrix），记为$\boldsymbol{0}_{m\times n}$或$\boldsymbol{0}$。

（4）如果$m=n$，且对任意的i，有$m_{ii}=1$，其他所有的元素均为 0，称矩阵$\boldsymbol{M}$为单位矩阵（identity matrix），记为E或I。

（5）如果$m=n$，且主对角线以上或以下的元素为 0，称为三角矩阵（triangular matrix）。其中，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为上三角矩阵（upper triangular matrix）；

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为下三角矩阵（lower triangular matrix）。

1.2 矩阵的运算

定义 1-4 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则两个矩阵的和（sum）与差（difference）定义为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

从定义 1-4 可以看出，两个矩阵只有具有相同的行数和列数时，才能进行相加减。

例 1-4 设有矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&5&3\\4&5&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&8\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1+1&5+2&3+3\\4+4&5+5&1+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&7&6\\8&10&9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1-1&5-2&3-3\\4-4&5-5&1-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&0\\0&0&-7\end{bmatrix}$$

□

不难验证，矩阵的加法满足下列运算定律。

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$。

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

定义 1-5 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k\in R$是常数，则矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$称为数$k$与矩阵$\boldsymbol{A}$的数乘（scalar multiplication），记为$k\boldsymbol{A}$，即$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$。

不难验证，矩阵的数乘满足如下性质。

（1）$(k_1k_2)\boldsymbol{A}=k_1(k_2\boldsymbol{A})$。

（2）$(k_1+k_2)\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{A}$；$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$。

（3）$k\boldsymbol{A}=0\Leftrightarrow k=0$或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$。

例 1-5 给定两矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\4&4&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}$$

且$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$。

解： 显然，矩阵$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是同种类型的，均为 3 阶方阵，不妨设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}$$

根据$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，有

$$3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 9-2x_{11} & 3-2x_{12} & -2x_{13} \\ -3-2x_{21} & 6-2x_{22} & 3-2x_{23} \\ 12-2x_{31} & 12-2x_{32} & 6-2x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

两矩阵相等必有对应元素分别相等，因此有

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 4 & \dfrac{3}{2} & -1 \\ -1 & \dfrac{5}{2} & 1 \\ 5 & \dfrac{11}{2} & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$$

□

定义 1-6 设矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times p}$，矩阵$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{p\times n}$，则两个矩阵的乘积（product）定义为$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

记为$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$。

从定义 1-6 可以看出，两个矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$如果可以相乘，则矩阵$\boldsymbol{A}$的列数必须与矩阵$\boldsymbol{B}$的行数相同，否则两者无法相乘。

例 1-6 设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，试计算$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{BA}$。

解：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{AB} \\ =& \begin{bmatrix} 3\times1+1\times(-1)+0\times2 & 3\times0+1\times1+0\times1 & 3\times2+1\times1+0\times1 \\ (-1)\times1+2\times(-1)+1\times2 & (-1)\times0+2\times1+1\times1 & (-1)\times2+2\times1+1\times1 \\ 4\times1+4\times(-1)+2\times2 & 4\times0+4\times1+2\times1 & 4\times2+4\times1+2\times1 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{BA} \\ =& \begin{bmatrix} 1\times3+0\times(-1)+2\times4 & 1\times1+0\times2+2\times4 & 1\times0+0\times1+2\times2 \\ (-1)\times3+1\times(-1)+1\times4 & (-1)\times1+1\times2+1\times4 & (-1)\times0+1\times1+1\times2 \\ 2\times3+1\times(-1)+1\times4 & 2\times1+1\times2+1\times4 & 2\times0+1\times1+1\times2 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} 11 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

从例 1-6 可以看出，矩阵的乘法运算不满足交换律。可以验证，矩阵的乘法运算满足如下的性质。

（1）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$。

（2）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$。

定义 1-7 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，矩阵$\boldsymbol{A}$的转置（transpose）记为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$或$\boldsymbol{A}'$，定义为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})_{n\times m}\text{，其中}a'_{ij}=a_{ji}$$

例 1-7 如果矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的转置为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。

可以证明，矩阵的转置满足如下的性质。

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$。

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

（3）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

1.3 布尔矩阵

定义 1-8 如果一个$m\times n$矩阵中的所有元素都是 0 或 1，称该矩阵是布尔矩阵（Boolean matrix）。

需要说明的是，布尔矩阵中的 0 或 1 并不代表数值中的 0 或 1，而是代表布尔常量 0 或 1，分别表示逻辑假（false）和逻辑真（true）。

与一般矩阵的运算相同，布尔矩阵也可以进行加、减和乘法运算，但由于布尔值进行加、减和乘法运算没有意义，因此需要定义布尔矩阵的运算，它与一般矩阵的运算是不同的。

定义 1-9 设有布尔矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$和$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则：

（1）两个布尔矩阵的交集（intersection），记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如果}a_{ij}=0\text{或}b_{ij}=0\\ 1 & \text{如果}a_{ij}=1\text{且}b_{ij}=1\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$$

（2）两个布尔矩阵的并集（union），记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如果}a_{ij}=0\text{且}b_{ij}=0\\ 1 & \text{如果}a_{ij}=1\text{或}b_{ij}=1\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$$

例 1-8 给定两矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

定义 1-10 如果布尔矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$，则两个布尔矩阵的布尔积（Boolean product），记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果存在}k=1,2,\cdots,p\text{，使}a_{ik}=1\text{且}b_{kj}=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中，$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$。

例 1-9 给定两矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，计算$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的布尔积$\boldsymbol{C}$。

解：

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{12}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{21}=1$，因此$c_{11}=1$。

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{11}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{12}=1$，因此$c_{12}=1$。

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{12}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{23}=1$，因此$c_{13}=1$。

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{11}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{14}=1$，因此$c_{14}=1$。

类似地，可以求出矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的布尔积$\boldsymbol{C}$，如下：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

□

可以证明，布尔矩阵的运算满足如下性质。

（1）$\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{A}$。

（2）$(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\vee\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})$，$(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})$。

（3）$\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\wedge(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\vee(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C})$。

（4）$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})\odot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot(\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})$。

习题 1

1. 已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&3&2\\-1&4&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&3&1\\2&2&4&2\\3&3&2&3\end{bmatrix}$$

计算：

（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。　　（2）$2\boldsymbol{A}$，$3\boldsymbol{B}$。

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}$。　　（4）$\boldsymbol{AB}$。

2. 已知两布尔矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

计算：

（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vee\boldsymbol{B}$。　　（2）$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。　　（3）$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}$。

第 2 章　组合数学与数论初步

2.0　本章导引

例 2-1　从烟台出发，到北京、上海、西安、杭州、拉萨 5 个城市旅游，最后回到烟台。已知所有城市间的单向路线的费用，旅游费用可以按路线的费用累加得到，那么按照怎样的顺序游玩这些城市，费用最省？

分析：如果能列出所有的旅游路线，计算每条线路的费用，选择费用最少的线路即可。由于起点和终点是确定的，其根本在于中间的 5 个城市如何选择，这 5 个城市的排列有$5!=120$种方案，即有 120 种不同的选择。将每条线路的费用计算出来，从 120 种结果中选择最少的即可。

例 2-2　甲数是 36，甲、乙两数的最小公倍数是 288，最大公约数是 4，乙数应该是多少？

分析：此题的关键在于找出两数最小公约数和最大公倍数之间的关系。由于两者的最大公约数是 4，因此乙应该是 4 的倍数，但不是 12 和 36 的倍数。可以从这个角度去搜索这个数。

2.1　基本计数原则

分析计算机算法的时间复杂性和空间复杂性时，需要对计算机的基本运行次数和占用的存储空间进行计数，这是计数的基本运用。基本的计数原则有加法原则和乘法原则。

2.1.1　加法原则

从烟台到北京，可以坐飞机或火车，飞机每天有 4 个航班，火车每天有 5 个车次，则从烟台到北京有 9 种不同的选择方式。这是加法原则的基本应用。

定义 2-1（加法原则）　实现一个任务，有n种不同的方式可以选择，每种方式都可以独立完成任务，在第k种方式中，有a_k种具体的实现方式。则实现这个任务的方式有：

$$N=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

例 2-3　学生请老师推荐一本程序设计的入门教材，该老师熟悉 C、C++、Java 三门编程语言，已知这三门语言的入门教材分别有 4、5 和 6 本。那么该教师可以有 4+5+6=15 种选择方式。

2.1.2 乘法原则

从烟台到北京出差，中间需要到济南办事。已知烟台到济南有 4 种方式，从济南到北京有 10 种方式，则此次出差，有$4 \times 10 = 40$种方式。这是乘法原则的基本应用。

定义 2-2 完成某个任务需要n个步骤，在第k步有a_k种实现方式，则完成该任务的完成方式总数为

$$N = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

例 2-4 已知 ASCII 码（American Standard Code for Information Interchange）由 7 位二进制数组成，请问这种表示形式可以表示多少个不同的 ASCII 符号？

解：

由于 ASCII 码由 7 位二进制组成，因此，要表示一个 ASCII 码，需要将 7 位中的每一位都填上合适的二进制数。根据乘法原则，7 位二进制数可以表示的符号个数为$2^7 = 128$。

□

2.2 排列组合

排列组合问题是计算机科学中的典型问题，在实际生产中也有着广泛的应用。例如，从 20 位学生中选择 2 名学生参加社会实践，有多少种取法？这属于典型的排列问题，通过下面的例题来说明。

例 2-5 从集合$\{1, 2, \cdots, n\}$个数中选择 3 个数，要求各位数字各不相同，问有多少种取法？

解：从n个数字中选择 3 位数字，可以一位一位地取，因此可以基于乘法原则进行。第一次选择时，可以从n个数字中选择 1 位，共有n种选择；第二次选择时，可以从剩下的$n-1$个数中选择，有$n-1$种选择 1 位；第三次选择时可以从剩下的$n-2$个数中选择 1 位，有$n-2$种选择。因此总的选取次数为$n \times (n-1) \times (n-2)$种。

□

将该问题一般化，从$\{1, 2, \cdots, n\}$选取r个数，根据乘法原则，可选择的方案数为

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n, r)$$

进一步，如果$r = n$，该问题相当于将n个数进行全排列的次数，共有

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = \frac{n!}{(n-n)!} = P_n^n = n!$$

例 2-6 在例 2-5 中，如果不考虑取出数字的先后顺序，有多少种取法？

解：从$\{1,2,\cdots,n\}$个数中选择 3 个数，假设取出的数字是 1、2、3 三个数，则取出这 3 个数字后，共有$3!=6$种不同的排列方式。因此，如果不考虑取出数字的先后顺序，取法的次数为

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3!}$$

□

将该问题一般化，从$\{1,2,\cdots,n\}$选取r个数组成一个集合，可选择的方案数为

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C(n,r)$$

关于组合数$C(n,r)$，有下面的定理 2-1。

定理 2-1 设n、r为正整数，则

（1）$C(n,r)=\dfrac{n}{r}C(n-1,r-1)$。

（2）$C(n,r)=C(n,n-r)$。

（3）$C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$。

分析：本题属于数值化证明，只需将$C(n,r)$的公式代入相关公式即可。

证明：

（1）根据组合数的定义，有

$$C(n-1,r-1)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!}$$

因此，$C(n,r)=\dfrac{n}{r}C(n-1,r-1)$。

（2）根据组合数的定义，有

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)!r}$$

因此，$C(n,r)=C(n,n-r)$。

（3）根据组合数的定义，有

$$C(n-1,r-1)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)(n-1-r)!}$$

$$C(n-1,r)=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}=\frac{(n-1)!}{r(r-1)!(n-1-r)!}$$

因此，

$$
\begin{aligned}
& C(n-1,r)+C(n-1,r-1) \\
= \quad & \frac{(n-1)!}{r(r-1)!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)(n-1-r)!} \\
= \quad & \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r)!}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r}\right) \\
= \quad & \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r)!}\times\frac{n}{r(n-r)} \\
= \quad & \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
= \quad & C(n,r)
\end{aligned}
$$

□

关于$C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$，可以将其看成是递推的公式，即从较小的$n$、$r$推导出较大的$n$、$r$，它在多项式的求解中有着重要的应用，如下：

$$(a+b)^0=C(0,0)a^0b^0$$

$$(a+b)^1=C(1,1)a^1b^0+C(1,0)a^0b^1$$

$$(a+b)^2=C(2,2)a^2b^0+C(2,1)a^1b^1+C(2,0)a^0b^2$$

$$(a+b)^3=C(3,3)a^3b^0+C(3,2)a^2b^1+C(3,1)a^1b^2+C(3,0)a^0b^3$$

$$(a+b)^4=C(4,4)a^4b^0+C(4,3)a^3b^1+C(4,2)a^2b^2+C(4,1)a^1b^3+C(4,0)a^0b^4$$

$$\vdots$$

将上述多项式的系数可以排列成如图 2-1 所示的方式，称为杨辉[1]三角形或 Pascal[2]三角形。

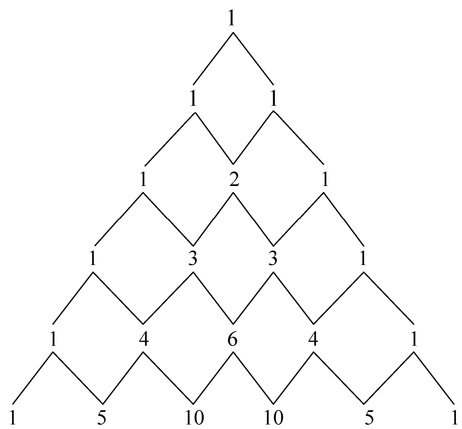

图 2-1　杨辉三角形

① 杨辉，字谦光，汉族，钱塘（今杭州）人，南宋杰出的数学家和数学教育家。杨辉署名的数学书共五种二十一卷。他在总结民间乘除捷算法、“垛积术”、纵横图以及数学教育方面，均做出了重大的贡献。他是世界上第一个排出丰富的纵横图和讨论其构成规律的数学家。与秦九韶、李冶、朱世杰并称宋元数学四大家。

② 布莱士·帕斯卡（Blaise Pascal，1623—1662），法国数学家、物理学家、哲学家、散文家。16 岁时发现著名的帕斯卡六边形定理，17 岁时写成《圆锥曲线论》。1642 年他设计并制作了一台能自动进位的加减法计算装置，被称为是世界上第一台数字计算器，为以后的计算机设计提供了基本原理。