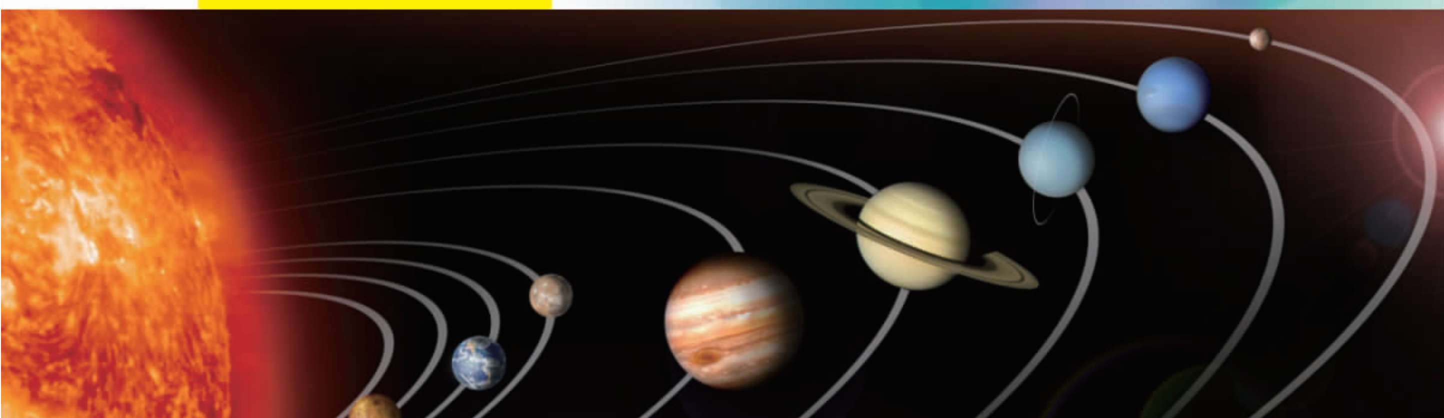
Chapter 1

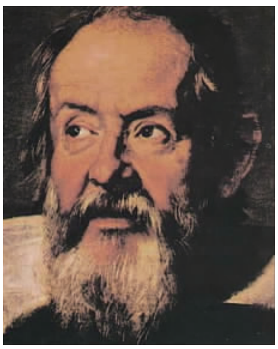
第1章



质点运动学

物理学是研究物质最普遍、最基本的运动形式及其基本规律的一门学科，这些运动形式包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核运动以及其他微观粒子的运动等。物体之间或物体各部分之间相对位置的变动称为**机械运动**(**mechanical motion**)。机械运动是这些运动中最简单、最基本的运动形式，例如地球的自转、河水的流动、车辆的行驶，都是机械运动。物理学中把研究机械运动的规律及其应用的学科称为**力学**。机械运动的基本形式有平动和转动。在平动过程中，若物体内各点的位置没有相对变化，那么各点的运动路径完全相同，可用物体上的任一点的运动来代替整个物体的运动。在力学中，研究物体的位置随时间而变化的内容称为**质点运动学**(**particle kinematics**)。

本章主要内容有：位置矢量(position vector)、位移(displacement)、速度(velocity)、加速度(acceleration)、质点的运动方程、切向加速度(tangential acceleration)和法向加速度(normal acceleration)、相对运动(relative motion)等。



伽利略·伽利雷(Galileo Galilei，1564—1642 年)，意大利著名数学家、物理学家、天文学家、哲学家，近代实验科学的先躯者。1590 年，伽利略在比萨斜塔上做了“两个球同时落地”的著名实验，从此推翻了亚里士多德“物体下落速度和重量成比例”的学说。伽利略的著作有《星际使者》、《关于太阳黑子的书信》、《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》和《关于两门新科学的谈话和数学证明》。

1.1 参考系　坐标系　质点

1.1.1 参考系和坐标系

单纯从运动学的观点看，任何运动的描述都是相对的，即一切运动都是相对的，绝对静止的物体是没有的，这就是说任何物体的运动总是相对于其他物体或物体系来确定的。这个其他的物体或物体系就叫做参照物或参考系，简言之：**被选作参考标准的物体或相对位置不变的物体组合**称为**参考系**(**reference frame**)。同一物体的运动，由于所选取的参考系不同，对它的运动描述就不同。例如，行驶车厢中自由下落的物体相对于车厢参考系的运动是自由落体运动，而相对于地面参考系，则是沿抛物线运动，这就是运动的相对性。因此，在描述某一物体的运动状态时，必须指明是对哪个参考系而言。一般约定，如果采用的是地面参考系可以不必特别指出。

参考系的选取是任意的，一般主要由问题的性质和视研究问题的方便而定，例如，如果要研究物体在地面上的运动，最方便的是选取地球为参考系；一个宇宙飞船在火箭刚发射时，主要研究它相对于地面的运动，所以就选地面作为参考系；当飞船绕地球运行时，则选取地球为参考系，而当飞船飞离地球，绕太阳运行时，则应选太阳为参考系。

选取某个参考系后，为了定量地确定物体的位置，就需要在参考系上建立适当的**坐标系**（**coordinates system**）。常用的坐标系有笛卡儿的直角坐标系、极坐标系、自然坐标系、柱面坐标系和球面坐标系等。选取什么样的坐标系，要视问题的性质和研究问题的方便而定。

参考系是具体的物体，而坐标系是参考系的一个数学抽象。

1.1.2 质点

自然界的一切客观物体都有大小和形状。一般来说，物体运动时各部分的位置变化是不同的。因此，要精确描述物体各部分的运动状态不是一件容易的事。根据问题的性质，在某些情况下，往往可以忽略物体的大小和形状，把物体看成一个具有一定质量的点，这样抽象化后的理想模型称为**质点**（**mass point，particle**）。例如，在研究地球绕太阳运动的公转时，由于地球的直径不到平均日地距离的万分之一，直径与此距离相比要小得多，因此，地球上和各点相对于太阳的运动可认为是相同的，也就是说可以忽略地球的线度和形状，把地球当作一个质点。另外，当物体作平移运动时，物体上各点的运动情况都一样，物体各点都作同等的运动，因而任一点的运动都能代表整体运动，物体的形状大小就可以不加考虑。因此，平动的物体都可以简化为一个质点。

能否把一个物体抽象成质点，不是决定于物体的大小，而是取决于问题的性质，同一个物体在一问题中可以当作是质点，在另外一个问题中可能就不能当作质点。例如，在研究地球的自转运动时，就不能把地球当作质点了。一般地，当物体间的距离远大于物体本身的线度时，物体可抽象为质点。

质点运动是研究物体运动的基础。在不能把物体当作质点时，可把整个物体视为由许多质点组成，弄清这些质点的运动，就可以了解整个物体的运动。

在本书有关力学的各章中，除刚体一章外，都是把物体当作质点来处理的。

在物理学中有大量的理想化模型，它们都是对实际研究对象的一种抽象。在力学中有质点模型、刚体模型等。建立理想化的模型是物理学中一个十分重要的科学研究方法，它往往根据所研究的问题的性质，去寻找事物的主要矛盾，忽略一些次要因素，使研究对象和问题得以简化，便于作比较精确的描述。在学习大学物理学时，应该高度注意这一点。

1.2 描述质点运动的物理量

为了全面掌握物体的运动状况，必须要获知它在每一时刻的空间位置、运动的快慢和方向以及运动快慢的变化情况，例如飞机指挥中心就必须时刻了解飞行中飞机的整个运动情况。以下将介绍描述质点运动的这三个方面的物理量。

1.2.1 位置矢量　运动方程　位移和路程

1. 位置矢量

在描述质点的运动时，首先必须知道质点的位置，例如跑步运动员的位置随时间变化，

如图 1-1 所示。质点在空间的位置可以用一个矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示。如图 1-2 所示，设质点在时刻 t 处于位置 P，我们从坐标原点 O 向此点引一条有向线段 OP，并记作矢量 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 的方向确定了 P 点相对于坐标轴的方位，$\boldsymbol{r}$ 的大小就是 P 点到原点的距离。方位和距离都确定了，P 点的位置也就完全确定了。用来确定质点位置的这一矢量 $\boldsymbol{r}$ 叫做**质点的位置矢量（position vector）**，简称**位矢**。

图 1-1　跑步运动员的位置随时间变化

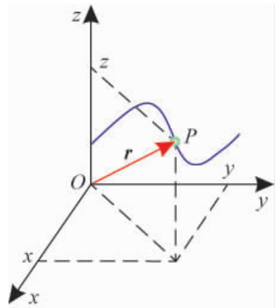


图 1-2　位置矢量

在直角坐标系中，质点的位置 P 也可以用它在 x，y，z 轴的坐标来表示，位矢 $\boldsymbol{r}$ 可以写为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x，y，z 轴正方向的单位矢量。单位矢量是大小为 1 的长度单位的矢量，在直角坐标系中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 都是大小和方向均不变的常矢量。$\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦由下式确定：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

式中，α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴之间的夹角。

位矢具有以下特征：①矢量性：$\boldsymbol{r}$ 是矢量，有大小和方向；②瞬时性：质点在运动时，不同时刻其位矢不同；③相对性：位矢 $\boldsymbol{r}$ 依赖于坐标系的选取。

2. 运动方程

当质点运动时，它相对坐标原点 O 的位矢 $\boldsymbol{r}$ 是随时间 t 变化的，因此，$\boldsymbol{r}$ 是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

这给出了任意时刻质点在空间的位置，也称为**质点的运动方程（equation of motion）**，质点的运动方程反映了质点运动的全部情况。式（1-2）中的坐标值 x、y、z 一般都是随时间变化的，是时间 t 的函数。

在直角坐标系中，质点的运动方程式（1-2）也可以写成坐标分量的形式

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1-3}$$

坐标分量形式的运动方程可以看作是质点在坐标轴方向同时进行的三个分运动，或者

说，我们可以把一个质点的运动分解为各个坐标轴方向上的独立分运动；反过来说，$\boldsymbol{r}$ 是各个分运动叠加的结果。

从式(1-3)中消去参数 t 便得到质点的轨迹方程，所以式(1-3)也是运动轨迹的参数方程，质点运动学的重要任务之一就是找出质点运动所遵循的运动方程。

［例题 1-1］

一质点在平面上的运动方程为 $\boldsymbol{r}=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2+2)\boldsymbol{j}$，式中 $\boldsymbol{r}$ 的单位是 m，时间 t 的单位是 s，试求该质点的运动轨迹。

解　质点在 x，y 坐标轴上的分运动方程分别为

$$x = t+1$$
$$y = t^2 + 2$$

将上面两式消去 t 后，便得到质点的轨迹方程为

$$y = (x-1)^2 + 2 \quad (\mathrm{m})$$

显然，质点的运动轨迹是抛物线。

3. 位移和路程

要了解质点的运动，不仅要知道它的位置，还要知道它的位置变化情况。如图 1-3 所示，设质点在 t_1 时刻处于位置 P_1 点，质点在 t_2 时刻处于位置 P_2 点，P_1 和 P_2 的位矢分别为 $\boldsymbol{r}(t_1)$和 $\boldsymbol{r}(t_2)$，则质点在 $t_1 \sim t_2$ 时间间隔内位矢的增量为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1) \tag{1-4}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 称为质点在 $t_1 \sim t_2$ 时间内的**位移矢量(displacement vector)**，简称**位移**。位移是描述质点空间位置变化的物理量，它是从质点初始时刻位置指向终点时刻位置的有向线段。

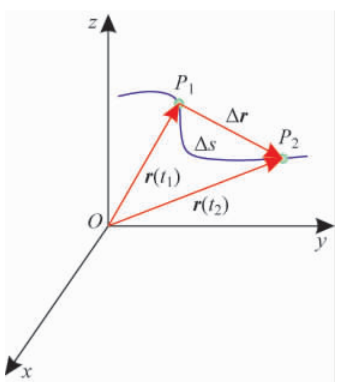


图 1-3　位移与路程

在直角坐标系中，设质点在 t_1 时刻的坐标为 x_1、y_1、z_1，在 t_2 时刻的坐标为 x_2、y_2、z_2，则这段时间内，质点的位移为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \\ &= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-5}$$

式中，Δx、Δy、Δz 分别为质点在 $t_1 \sim t_2$ 时间间隔内各坐标分量的增量。与位矢一样，位移也具有矢量性、瞬时性和相对性等特性。

质点运动的实际路径是图 1-3 中的曲线段 Δs，其长度叫做**路程(path)**，特别需要注意的是位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和路程 Δs 的区别：首先 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是矢量，仅与质点的始、末位置矢量 $\boldsymbol{r}(t_1)$和 $\boldsymbol{r}(t_2)$有关，而与中间过程无关，Δs 是**标量(scalar)**，与过程有关，它是质点运动轨迹的长度；其次，一般情况下路程并不等于位移的大小，即 $\Delta s \neq |\Delta\boldsymbol{r}|$，例如，当质点经一闭合路径回到起始位置时，其位移为零，而路程则不为零，只有当时间间隔 Δt 取无穷小的极限情况下，位移大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 才等于路程 $\mathrm{d}s$。

我们应当注意，当参考系确定后，质点的位矢依赖于坐标系的选取，而它的位移则与坐标系的选取无关。这点很容易证明。

［例题 1-2］

一质点作直线运动，其运动方程为 $x=2+2t-t^2$，式中 t 的单位为 s，x 的单位为 m。试求：从 $t=0$ 到 $t=4$s 时间间隔内质点位移的大小和它走过的路程。

解 位移大小为

$$|\Delta x| = |x|_{t=4} - x|_{t=0}| = 8(\mathrm{m})$$

将 x 对时间 t 求一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2 - 2t = 0$$

可得 $t=1$s，即质点在 $t=0$ 到 $t=1$s 内沿 x 正向运动，然后反向运动。

分段计算：

$$\Delta x_1 = x\Big|_{t=1} - x\Big|_{t=0} = 1(\mathrm{m})$$

$$|\Delta x_2| = |x|_{t=4} - x|_{t=1}| = 9(\mathrm{m})$$

路程为

$$\Delta x_1 + |\Delta x_2| = 10(\mathrm{m})$$

1.2.2 速度

在力学中，仅知道质点在某时刻的位矢还不能完全确定质点的运动状态，为确定质点的运动状态，还需要知道质点运动的方向和快慢，描述质点运动的方向和快慢的物理量是**速度**(**velocity**)。只有当质点的位矢和速度同时被确定时，其运动状态才被确定。所以，位矢和速度是描述质点运动状态的两个物理量。

如图 1-3 所示，质点在时间 $\Delta t=t_2-t_1$ 内的位移是 $\Delta \boldsymbol{r}$，为表示质点在这一段时间内的运动快慢和方向，定义质点的平均速度(mean velocity)

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-6}$$

由上式可知，由于位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 是矢量，所以平均速度也是矢量，其方向与位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向相同。

当 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度的极限值叫做质点在时刻 t 的**瞬时速度**(**instantaneous velocity**)，简称**速度**，用 $\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

显然，速度 $\boldsymbol{v}$ 是矢量，从图 1-3 中可以看出，速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向是位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 在 $\Delta t \to 0$ 时的极限方向，当 $\Delta t \to 0$ 时，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 趋向于和轨道相切，即某点速度沿着该点轨迹的切线方向，从数学上看，速度 $\boldsymbol{v}$ 就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的一阶导数。

动画：瞬时速度

与位矢、位移一样，速度也具有矢量性、瞬时性和相对性。将式(1-1)代入式(1-7)，就得到直角坐标系中速度矢量$\boldsymbol{v}$的表达式

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

式中，$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$分别是速度在三个坐标轴方向的分量，由上式，速度大小也可表示为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1-9}$$

速度的大小叫**速率(speed)**，以v表示：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} \tag{1-10}$$

前面讲到，当时间间隔$\Delta t\to 0$时，位移大小$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$等于路程$\mathrm{d}s$，因此，上式可以写成

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

即速率v等于质点所走过的路程s对时间的变化率。

速度描述了质点在某一瞬时的运动状态，一般来说，速度就是随时间变化的，即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t) \tag{1-12}$$

物理量的单位采用国际单位制，简称SI制。在国际单位制中，长度的单位是m(米)，时间单位是s(秒)，速度的单位是m/s(米/秒)。

[例题 1-3]

设质点的运动方程为$\boldsymbol{r}=(t+2)\boldsymbol{i}+(0.25t^2+2)\boldsymbol{j}$(m)，求：(1)$t=3$s时的速度；(2)质点的运动轨迹方程。

解 (1) 由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1\ (\mathrm{m/s}),\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5t\ (\mathrm{m/s})$$

故$t=3$s时的速度分量为$v_x=1$m/s和$v_y=1.5$m/s，于是$t=3$s时的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+1.5\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m/s})$$

速度的值为$v=1.8$m/s，速度与x轴的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{1.5}{1}=56.3^\circ$$

（2）由已知的运动方程 $\boldsymbol{r}=(t+2)\boldsymbol{i}+(0.25t^2+2)\boldsymbol{j}$，可得 $x=t+2$，$y=0.25t^2+2$，从 x、y 中消去 t 可得轨迹方程

$$y=0.25x^2-x+3\ (\mathrm{m})$$

1.2.3 加速度

质点在运动中，其速度的大小和方向会发生变化，或者二者同时变化。**加速度（acceleration）**就是描述质点运动速度变化的物理量。

设质点在 t 与 $t+\Delta t$ 时刻的位置分别在 P、Q 处，其速度分别为 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，如图 1-4(a)所示，速度的变化为 $\Delta\boldsymbol{v}$，如图 1-4(b)所示。定义这段时间内的平均加速度(mean acceleration)

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-13}$$

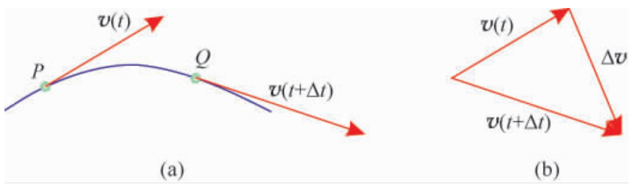


图 1-4 速度的变化

平均加速度只能粗略地描述质点速度在一段时间内的变化。当 Δt 趋于零时，式(1-13)的极限就是速度对时间的变化率，称为质点在时刻 t 的**瞬时加速度（instantaneous acceleration）**，简称**加速度**，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-14}$$

加速度精确地描述了质点在时刻 t 速度变化的快慢和方向，从数学上看，加速度 $\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{v}$ 对时间 t 的一阶导数，或者是位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的二阶导数。

将式(1-8)代入式(1-14)，就得到直角坐标系中加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的表达式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-15}$$

式中，$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$ 分别是加速度在三个坐标方向的分量。加速度的大小

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-16}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 是一个矢量，它的方向是 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向，注意到描述质点运动状态的速度 $\boldsymbol{v}$ 是矢量，所以加速度 $\boldsymbol{a}$ 不仅表示质点速度大小的变化，也表示速度方向的变化。一般情况下，质点任一时刻的加速度方向并不沿着该时刻质点速度的方向(轨迹的切线方向)。

加速度与速度一样具有矢量性、瞬时性、相对性三个特征。在国际单位制中，加速度的单位是 $\mathrm{m/s^2}$(米/秒^2)。

一般质点运动学中所研究的问题可以分为两类。一是已知质点运动方程，求质点在任意时刻的速度和加速度。求解这类问题的基本数学方法是求导。二是已知质点的加速度或速度，以及 $t=0$ 时的初始条件（例如初始位置 $\boldsymbol{r}_0$ 和初始速度 $\boldsymbol{v}_0$），求物体的运动方程或运动轨迹，这类问题可以通过利用式(1-7)和式(1-14)对时间积分求解。下面举例说明。

［例题 1-4］

一质点沿 Ox 轴作加速直线运动，$t=0$ 时的位置是 x_0、速度是 v_0，加速度为 $a=a_0+bt$，其中 a_0 和 b 是常量，求经过时间 t 后质点运动的速度和位置。

解 质点作直线运动，由定义 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t = (a_0 + bt)\mathrm{d}t$$

当 $t=0$ 时，$v=v_0$，对上式两边从初始时刻到任意 t 时刻积分，得

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t (a_0 + bt)\mathrm{d}t$$

经过 t 秒后质点的速度为

$$v = v_0 + a_0 t + \frac{b}{2}t^2$$

质点沿 Ox 轴运动，由定义 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，得

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$$

当 $t=0$ 时，$x=x_0$，对上式两边从初始时刻到任意 t 时刻积分，得

$$x - x_0 = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \left(v_0 + a_0 t + \frac{b}{2}t^2\right)\mathrm{d}t = v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{b}{6}t^3$$

经过 t 秒后质点的位置为

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{b}{6}t^3$$

如果 $b=0$，则质点作匀加速直线运动，有

$$v = v_0 + a_0 t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$$

这些就是我们熟知的匀加速直线运动的速度和加速度公式。

在 v 和 x 的表达式中消去 t，还可以得到速度与位置之间的函数关系。这一关系也可以从下式得到：

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x$$

两边积分，有

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x$$

即得

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

这些结论都是我们熟知的匀变速直线运动公式。

[例题 1-5]

如图 1-5 所示，设在地球表面附近有一个可视为质点的抛体，以初速 $\boldsymbol{v}_0$ 在 Oxy 平面内沿与 Ox 轴正向成 α 角抛出，并略去空气对抛体的作用。求：(1)抛体的运动方程和其运动的轨迹方程；(2)抛体的最大射程。

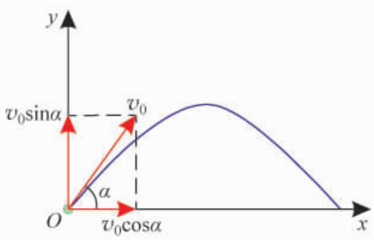


图 1-5　抛物运动

解　(1) 由题意可知，物体在地球表面附近作加速度为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}=-g\boldsymbol{j}$ 的斜抛运动。又从图中可以看出，在 $t=0$ 时，抛体位于原点 O，其位矢 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0}$。于是，由 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}$，可解得抛体在时刻 t 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t \tag{a}$$

则初速度沿 x 轴和 y 轴的分量分别是

$$\begin{cases} v_{0x}=v_0\cos\alpha \\ v_{0y}=v_0\sin\alpha \end{cases}$$

又由 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{v}$ 和式(a)，可得抛体在时刻 t 的位矢为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 \tag{b}$$

式(b)就是斜抛物体的运动方程的矢量式。它在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量式为

$$x=v_0t\cos\alpha \tag{c}$$

$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \tag{d}$$

这清楚地表明：抛体运动是由沿 x 轴的匀速直线运动和沿 y 轴的匀加速直线运动叠加而成的，这就是抛体运动的可叠加性。式(b)、(c)和式(d)都是斜抛物体的运动方程。只是矢量式更加简洁而概括。

消去式(c)和式(d)中的 t 可得

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \tag{e}$$

这就是斜抛物体的轨迹方程。它表明在略去空气阻力的情况下，抛体在空间运动的轨迹为抛物线。

(2) 当抛体落回地面，即 $y=0$ 时，抛体距离原点 O 的距离 d_0 称为射程。由式(e)可得

$$d_0=\frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

显然，射程 d_0 是抛射角 α 的函数，由最大射程的条件

$$\frac{\mathrm{d}d_0}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{2v_0^2}{g}\cos2\alpha=0$$

可得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$。这就是说，当抛射角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，抛体的射程最远，其值为

$$d_{0\mathrm{m}}=\frac{v_0^2}{g}$$

在研究物体的运动学问题时，如果已知物体的运动方程(即位矢)，就可以通过运动方程对时间求导数，得到物体的速度和加速度。