

第 5 章 IIR 数字滤波器的设计

数字滤波器是对数字信号实现滤波的离散时间系统,它将时间序列通过特定的“运算和处理”转换为所需的序列。数字滤波器是离散系统,其系统函数一般可表示为 z^{-1} 的有理多项式形式,即

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} \quad (5-1)$$

当 $\{a_i; i=1,2,\dots,N\}$ 都为 0 时,由式(5-1)确定的系统被称为有限长脉冲响应数字滤波器,简称 FIR(Finite Impulse Response)数字滤波器。当系数 $\{a_i; i=1,2,\dots,N\}$ 中至少有一个非 0 时,式(5-1)确定的系统被称为无限长脉冲响应数字滤波器,简称 IIR(Infinite Impulse Response)数字滤波器。对于 IIR 数字滤波器,一般满足 $M \leq N$,这时系统被称为 N 阶 IIR 数字滤波器。对于 FIR 数字滤波器,系统函数中 z^{-1} 的有理多项式的最高次幂 M 就是其阶数。

本章讨论 IIR 数字滤波器的设计。由于 IIR 数字滤波器的设计主要借助于模拟滤波器的设计方法,因此本章首先讨论模拟滤波器的逼近方法及仿真方法,然后讨论 IIR 数字滤波器的设计方法。

5.1 离散信号的滤波

5.1.1 信号的滤波过程

本书中,离散时间系统和数字滤波器是等效的概念。滤波器的种类很多,但总的来说,可分为两大类,即经典滤波器和现代滤波器,本书所讲的滤波器属经典滤波器的范畴。经典滤波即选频滤波,假定输入信号 $x(n)$ 中的有用成分和希望去除的成分占有不同的频带,那么通过适当选择滤波器的参数(选频特性),就可去除无用成分而保留有用成分。

设实系数 LTI 系统的幅频响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

设输入信号为 $x(n) = A \cos(\omega_1 n) + B \cos(\omega_2 n)$, 其中 $0 < \omega_1 < \omega_c < \omega_2 < \pi$ 。根据系统的线性特性及式(2-139)可得系统的输出响应为

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_1})| \cos[n\omega_1 + \varphi(\omega_1)] + B |H(e^{j\omega_2})| \cos[n\omega_2 + \varphi(\omega_2)]$$

利用上式,可得 $y(n)$ 为

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_1})| \cos[n\omega_1 + \varphi(\omega_1)]$$

可见,该离散 LTI 系统去除了系统中的高频分量而保留了系统中的低频分量,因而被称为数字低通滤波器。

和模拟滤波器一样,数字滤波器可分为低通(LP)、高通(HP)、带通(BP)、带阻(BS)四种类型,如图 5-1 所示。图中,滤波器的幅频特性都是理想值,在实际中是不可能实现的。实际设计出的滤波器是在某种准则下对理想滤波器的逼近,必须保证滤波器是物理可实现的和稳定的。

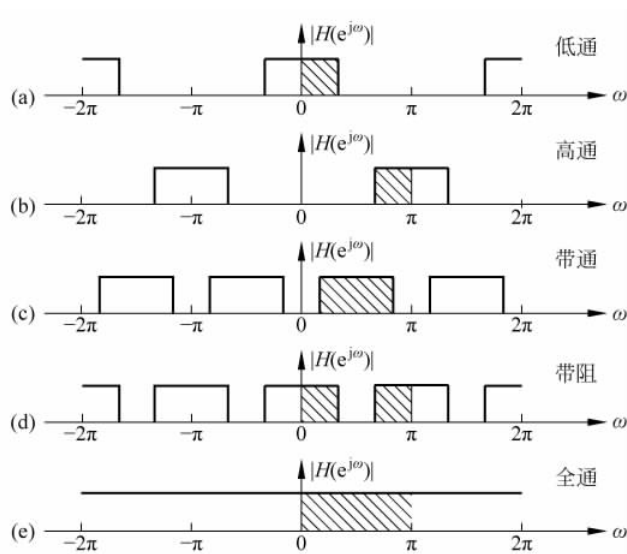


图 5-1 数字滤波器的理想幅频特性

5.1.2 滤波器的技术指标

如图 5-1 所示的理想滤波器在物理上不可实现的根本原因是,从一个频带到另一个频带的过程是突变过程。而实际滤波器在通带内的幅频响应不一定是完全平坦的,在阻带内的幅频响应也不完全衰减为零,通带和阻带内都有一定的误差,而且通带和阻带之间存在过渡带。一般来说,滤波器的性能要求以幅频响应的允许误差来表征。图 5-2 中, ω_p 是数字滤波器的通带截频; ω_{st} 是阻带截频; δ_p 是通带波纹峰值; δ_s 是阻带波纹峰值。

在工程中,数字滤波器的幅度响应还常以衰减响应和增益响应的形式给出,数字滤波器的衰减响应定义为

$$A(\omega) = -10 \lg |H(e^{j\omega})|^2 = -20 \lg |H(e^{j\omega})| \quad (5-2)$$

式中, $A(\omega)$ 的单位为 dB。

数字滤波器的增益响应定义为

$$G(\omega) = -A(\omega) = 20 \lg |H(e^{j\omega})| \quad (5-3)$$

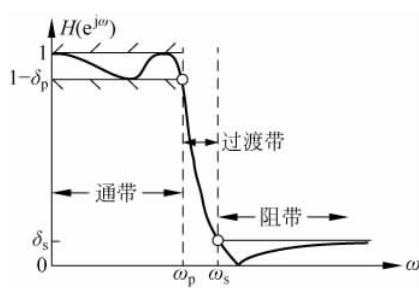


图 5-2 数字低通滤波器的技术指标

式中, $G(\omega)$ 的单位为 dB。

根据衰减响应的定义, 如图 5-2 所示数字低通滤波器的通带最大衰减 A_p (单位为 dB) 为

$$A_p = -20 \lg(1 - \delta_p) \quad (5-4)$$

阻带最小衰减 A_s (单位为 dB) 为

$$A_s = -20 \lg \delta_s \quad (5-5)$$

因此, 数字滤波器的技术指标常用通带截频 ω_p , 通带最大衰减 A_p , 阻带截频 ω_{st} , 阻带最小衰减 A_s 表示。

IIR 滤波器的设计就是根据给定的数字滤波器的技术指标, 确定式(5-1)中滤波器的阶数 N 和系数 $\{a_j, b_i\}$ 。在满足技术指标的条件下, 滤波器的阶数应尽可能低。因为滤波器阶数越低, 实现滤波器的成本就越低。

5.1.3 数字滤波器的设计步骤

设计数字滤波器的主要任务是找出其系统函数 $H(z)$ 。由于模拟滤波器设计技术已非常成熟, 且可得到闭合形式的解, 因此在设计 IIR 数字滤波器时, 一般是先设计模拟滤波器, 然后将模拟滤波器转换为数字滤波器。设计步骤如下:

- (1) 将给出的数字滤波器的技术指标转化为模拟低通滤波器的技术指标。
- (2) 根据转换后的技术指标设计模拟低通滤波器的 $H_L(s)$ 。
- (3) 按要求将 $H_L(s)$ 转换为 $H(z)$ 。

如果所设计的数字滤波器是低通的, 则按上述步骤完成的工作已结束。如果所设计滤波器是高通、带通或带阻滤波器, 那么需要对步骤(1)进行改动: 将高通、带通或带阻滤波器的技术指标先转化为低通滤波器的技术指标, 然后按步骤(2)设计出低通滤波器的 $H_L(s)$, 再按步骤(3)将 $H_L(s)$ 转换成所需的 $H(z)$ 。

5.2 模拟低通滤波器的设计

常用的模拟低通滤波器有巴特沃思(Butterworth)滤波器、切贝雪夫(Chebyshev)滤波器、椭圆滤波器等。本节重点讨论巴特沃思和切贝雪夫模拟低通滤波器的设计方法。

巴特沃思滤波器有非常平坦的通带,但过渡带较宽,切贝雪夫滤波器具有陡峭的过渡带,但通带内是波动的。

这些低通滤波器都有严格的设计公式、现成的设计图表供参考,而高通、带通或带阻滤波器则可通过设计低通滤波器而完成自身的设计。所以,模拟低通滤波器的设计是模拟滤波器设计的基础。模拟滤波器的技术指标与数字滤波器类似,有通带截频 Ω_p ,通带最大衰减 A_p ,阻带截频 Ω_{st} ,阻带最小衰减 A_s 。

5.2.1 巴特沃思模拟低通滤波器

1. 巴特沃思模拟低通滤波器的幅度响应特性

巴特沃思模拟低通滤波器简称 BW 型低通滤波器,其幅度平方函数定义为

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (5-6)$$

式中, N 是滤波器阶数; Ω_c 是滤波器的截止频率。图 5-3 画出 $N=1, 3, 10$ 时,巴特沃思模拟低通滤波器的幅度响应。

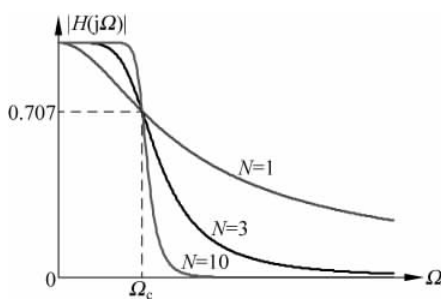


图 5-3 典型巴特沃思低通滤波器的幅度响应

由式(5-6)和图 5-3 可见,巴特沃思模拟低通滤波器的幅度平方函数具有以下特性:

(1) $|H(j0)|^2 = 1$, $|H(j\infty)|^2 = 0$ 。

(2) $|H(j\Omega_c)| \approx 0.707$, $|H(j\Omega_c)|^2 \approx 0.5$, $-20|H(j\Omega_c)| \approx 3\text{dB}$, 所以 Ω_c 又称滤波器的 3dB 截止频率。对于任意的 N , 幅度平方函数都通过 $\frac{1}{2} \times (-3\text{dB})$ 点, 该性质即 3dB 不变性。

(3) 由于 $\frac{d|H(j\Omega)|^2}{d\Omega} = -\frac{2N(\Omega/\Omega_c)^{2N-1}}{[1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}]^2} < 0$, 所以幅度平方函数随 Ω 的增加而单调下降。

(4) 对 $|H(j\Omega)|^2$ 在 $\Omega=0$ 处进行泰勒级数展开得

$$|H(j\Omega)|^2 = 1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{4N} - \dots \quad (5-7)$$

由式(5-7)可知, $|H(j\Omega)|^2$ 在 $\Omega=0$ 处的 $1 \sim 2N-1$ 阶导数为 0, 即在 $\Omega=0$ 处具有最大平坦性。所以巴特沃思模拟低通滤波器也被称为在 $\Omega=0$ 处具有最大平坦性的滤

波器。

2. 巴特沃思模拟低通滤波器的极点及系统函数

归一化的巴特沃思滤波器是指 3dB 截止频率 $\Omega_c=1$ 的巴特沃思滤波器,其幅度平方函数为

$$|H_{L0}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega)^{2N}} \quad (5-8)$$

任意巴特沃思滤波器可由归一化的巴特沃思滤波器通过参数变换获得,式(5-9)给出了参数变换的公式

$$H(s) = H_{L0}(s/\Omega_c) \quad (5-9)$$

由傅里叶变换的性质可知,当系统的单位脉冲响应 $h(t)$ 是实系数时,系统的频率响应 $H(j\Omega)$ 满足

$$H(j\Omega) = H^*(-j\Omega) \quad (5-10)$$

因而对实系数模拟系统,有

$$H(s)H(-s) \big|_{s=j\Omega} = H(j\Omega)H(-j\Omega) = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 \quad (5-11)$$

由式(5-8)可得

$$H(s)_{L0}H(-s)_{L0} = \frac{1}{1 + (-js)^{2N}} \quad (5-12)$$

由式(5-12)可得归一化的巴特沃思模拟滤波器的传输函数 $H(s)_{L0}$ 的极点为

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} j = [e^{-j\pi + j2\pi k}]^{\frac{1}{2N}} e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})}, \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (5-13)$$

式(5-13)中的极点有 $2N$ 个,为保证模拟滤波器的稳定,必须选左半平面的 N 个极点构成 $H(s)$,即

$$\frac{\pi}{2} < \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad (5-14)$$

对式(5-14)化简得

$$\frac{1}{2} < k < N + \frac{1}{2} \quad (5-15)$$

由式(5-15)知,归一化巴特沃思模拟滤波器的 N 个极点为

$$s_k = e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5-16)$$

由式(5-16)得

$$s_{N+1-k} = e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2(N+1-k)-1}{2N}]} = e^{-j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})} = s_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5-17)$$

式(5-17)说明, $H(s)$ 的 N 个极点 $s_k (k=1, 2, \dots, N)$ 的首尾呈共轭关系,即 s_1 与 s_N 共轭, s_2 与 s_{N-1} 共轭……这样,就可将 $H(s)_{L0}$ 的表达式简化,下面是简化的方法。由于

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= s^2 - 2\text{Re}(s_k)s + |s_k|^2 \\ &= s^2 + 2\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right]s + 1, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 \end{aligned} \quad (5-18)$$

当 N 为偶数时,归一化巴特沃思模拟低通滤波器的表达式为

$$H_{L0}(s) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1}{s^2 + 2\sin(\theta_k)s + 1} \quad (5-19)$$

式中

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 \quad (5-20)$$

当 $N=2$ 时, 由式(5-20)得

$$\theta_1 = \pi/4 \quad (5-21)$$

由式(5-19)可得, 归一化二阶巴特沃思模拟低通滤波器的表达式为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (5-22)$$

当 $N=4$ 时, 由式(5-20)得

$$\theta_1 = \pi/8, \quad \theta_2 = 3\pi/8 \quad (5-23)$$

由式(5-19)可得, 归一化四阶巴特沃思模拟低通滤波器的表达式为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{[s^2 + 2\sin(\pi/8)s + 1][s^2 + 2\sin(3\pi/8)s + 1]} \quad (5-24)$$

由于

$$s_{(N+1)/2} = e^{j\pi[\frac{1}{2} + \frac{2(N+1)/2-1}{2N}]} = e^{j\pi} = -1 \quad (5-25)$$

所以当 N 为奇数时, 归一化巴特沃思模拟低通滤波器的表达式为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{s^2 + 2\sin(\theta_k)s + 1} \quad (5-26)$$

式中

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, (N-1)/2 \quad (5-27)$$

当 $N=1$ 时, 系统只在 $s=-1$ 处有一个实极点, 所以归一化一阶巴特沃思模拟滤波器的表达式为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{s+1} \quad (5-28)$$

当 $N=3$ 时, 由式(5-27)得

$$\theta_1 = \pi/6 \quad (5-29)$$

由式(5-19)可得, 归一化三阶巴特沃思模拟低通滤波器的表达式为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)} \quad (5-30)$$

根据上面的分析, 对常用阶数的归一化巴特沃思型模拟低通滤波器的系统函数进行归纳:

一阶归一化巴特沃思型模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{s+1} \quad (5-31)$$

二阶归一化巴特沃思型模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (5-32)$$

三阶归一化巴特沃思型模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \quad (5-33)$$

四阶归一化巴特沃思型模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.8478s+1)} \quad (5-34)$$

根据上面确定的常用阶数的归一化巴特沃思模拟低通滤波器的系统函数,由

$$H(s) = H_{L0}(s/\Omega_c) \quad (5-35)$$

可得出 Ω_c 为任意值的巴特沃思模拟低通滤波器的系统函数。

3. 巴特沃思模拟低通滤波器的技术指标

巴特沃思型模拟低通滤波器设计的基本思路是根据给定技术指标,确定式(5-6)中的 N 和 Ω_c ,获得待设计滤波器的幅度平方函数 $|H(j\Omega)|^2$,再由 $|H(j\Omega)|^2$ 求出滤波器的系统函数 $H(s)$ 。

若已知模拟低通滤波器的通带截频 Ω_p ,通带最大衰减 A_p ,阻带截频 Ω_{st} ,阻带最小衰减 A_s ,根据这些条件,由式(5-6)可得

$$1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N} = \frac{1}{|H(j\Omega_p)|^2}$$

由式(5-2)可得

$$|H(e^{j\Omega_p})|^2 = 10^{-0.1A_p} = 10^{-0.1A_p}$$

由该两式可得

$$1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1A_p} \quad (5-36)$$

用同样的方法可得

$$1 + \left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1A_s} \quad (5-37)$$

求解式(5-36)及式(5-37),可得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)} \quad (5-38)$$

由式(5-38)计算的 N 一般不是整数,应取大于 N 的整数作为滤波器的阶数。

一旦确定了滤波器的阶数 N ,可利用 Ω_p 及 A_p ,由式(5-36)求出 Ω_c ,其表达式为

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \quad (5-39)$$

也可利用 Ω_{st} 和 A_s ,由式(5-37)求出 Ω_c ,其表达式为

$$\Omega_c = \frac{\Omega_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \quad (5-40)$$

由式(5-39)确定的滤波器在通带正好满足技术指标,在阻带误差有可能超出指标;而由式(5-40)确定的滤波器在阻带恰好满足技术指标,在通带误差有可能超出指标。一般地,若 Ω_c 为

$$\frac{\Omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \leq \Omega_c \leq \frac{\Omega_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \quad (5-41)$$

可证明所设计的巴特沃思模拟低通滤波器在通带和阻带内均满足技术指标。

4. 巴特沃思模拟低通滤波器的设计步骤

综上所述,模拟巴特沃思低通滤波器的设计步骤如下:

- (1) 由滤波器的设计指标 $\Omega_p, \Omega_{st}, A_p, A_s$ 和式(5-38)确定滤波器的阶数 N 。
- (2) 由式(5-39)或式(5-40)确定 Ω_c 。
- (3) 由阶数 N 确定滤波器的归一化系统函数 $H_{L0}(s)$ 。
- (4) 由式(5-35)确定滤波器的系统函数 $H(s)$ 。

【例 5-1】 设计一个满足下列指标的巴特沃思型模拟低通滤波器, $\Omega_p = 0.1\pi, \Omega_{st} = 0.3\pi, A_p \leq 1\text{dB}, A_s \geq 30\text{dB}$ 。

解 (1) 计算 N 和 Ω_c 。由式(5-38)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)} = 1.28$$

取 $N=2$ 代入式(5-39)得

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{0.1} - 1)^{1/4}} = 0.4404$$

(2) 确定滤波器的极点。由式(5-16)得

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$s_1 = \Omega_c e^{j\frac{3}{4}\pi} = \Omega_c \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$s_2 = \Omega_c e^{j\frac{5}{4}\pi} = \Omega_c \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(3) 确定模拟低通滤波器的归一化系统函数 $H_{L0}(s)$ 。由式(5-32)得

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

(4) 确定模拟低通滤波器的系统函数 $H(s)$ 。由式(5-35)得

$$H(s) = H_{L0}(s/\Omega_c) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{0.4404^2}{s^2 + 0.6228s + 0.4404^2}$$

验证: $A_p = 1\text{dB}$ 满足指标; $A_s = 18.3\text{dB}$ 存在裕量。

MATLAB 语句:

```
% 滤波器指标
Wp = 0.1 * pi;
Ws = 0.3 * pi;
Ap = 1;
As = 50;
% 设计 Butterworth 滤波器
```

```

[N,Wc] = buttord(Wp,Ws,Ap,As,'s');
[num,den] = butter(N,Wc,'s');
% 计算 Ap, As 及频率响应
omega1 = linspace(0, Wp, 500);
omega2 = linspace(Wp, Ws, 500);
omega3 = linspace(Ws, pi, 500);
H1 = 20 * log10(abs(freqs(num,den,omega1)));
H2 = 20 * log10(abs(freqs(num,den,omega2)));
H3 = 20 * log10(abs(freqs(num,den,omega3)));
fprintf('Ap = %.4f\n',max(-H1));fprintf('As = %.4f\n',min(-H3));
plot([omega1 omega2 omega3]/pi,[H1, H2, H3]);
xlabel('w/pi');ylabel('20log10|H(ejw)|');grid;

```

图 5-4 是该例频率响应的图形。

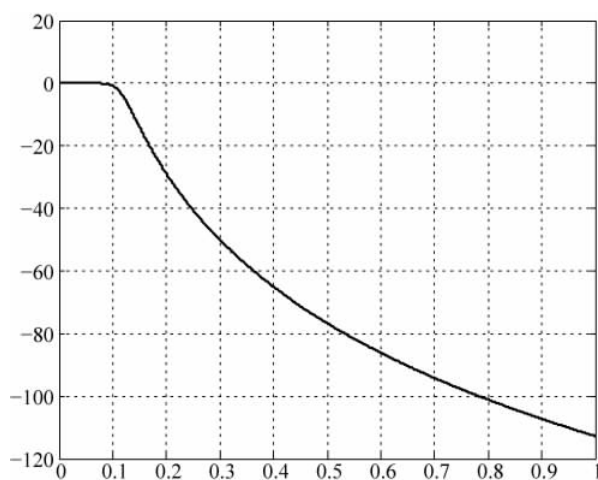


图 5-4 例 5-1 图

【例 5-2】 利用巴特沃思型模拟低通滤波器模型,设计一个满足下列指标的模拟低通滤波器:

$$\begin{cases} 0.8 \leq |H(j\Omega)| \leq 1, & 0 \leq \Omega \leq 5 \text{ rad/s} \\ 0.1 \leq |H(j\Omega)|, & \Omega \geq 10 \text{ rad/s} \end{cases}$$

解 (1) 模拟低通滤波器的设计指标为

$$\Omega_p = 5 \text{ rad/s}, \quad \Omega_{st} = 10 \text{ rad/s}$$

由式(5-4)及式(5-5)得

$$A_p = -20 \lg 0.8 = 1.94 \text{ dB}, \quad A_s = -20 \lg 0.1 = 20.0 \text{ dB}$$

(2) 计算 N 和 Ω_c , 由式(5-38)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2 \lg(\Omega_{st}/\Omega_p)} = 3.7$$

取 $N=4$ 代入式(5-39)得

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{0.1 \times 1.94} - 1)^{1/8}} = 5.37$$

(3) 确定模拟低通滤波器的归一化系统函数 $H_{L0}(s)$ 。由式(5-34)得

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)}$$

(4) 确定模拟低通滤波器的系统函数 $H(s)$ 。由式(5-35)得

$$H(s) = H_{L0}(s/\Omega_c) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2 + 0.7654\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + 1\right]\left[\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2 + 1.8478\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + 1\right]}$$

将 $\Omega_c = 5.37$ 代入该式可得

$$H(s) = \frac{833.3025}{(s^2 + 4.1123s + 28.867)(s^2 + 9.9279s + 28.867)}$$

5.2.2 切贝雪夫模拟低通滤波器

巴特沃思低通滤波器的频率响应,在通带和阻带都随频率的增长而单调下降。如果所设计滤波器在通带边界刚好满足设计指标,则在阻带内的误差会有裕量,即超出设计指标,这种设计不经济。比较经济的方法是在通带和阻带内均匀分布设计指标的精度要求,这样就可以设计出阶数较低的滤波器。可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来完成上述滤波器的设计。

切贝雪夫模拟低通滤波器的幅度响应在一个频带中具有等波纹特性。切贝雪夫Ⅰ型模拟低通滤波器的幅度响应在通带是等波纹的,在阻带是单调下降的。切贝雪夫Ⅱ型模拟低通滤波器的幅度响应在通带是单调下降的,在阻带是等波纹的。

1. 切贝雪夫多项式

N 阶切贝雪夫多项式定义为

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)], & |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh}(x)], & |x| > 1 \end{cases} \quad (5-42)$$

切贝雪夫多项式 $C_N(x)$ 是变量 x 的 N 阶实系数多项式。 $C_N(x)$ 的表达式可由递推公式

$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x), \quad C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = x$$

得出。由上述递推公式可得

$$\begin{aligned} C_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ C_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ C_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

容易证明,切贝雪夫多项式具有以下主要性质:

(1) $|x| \leq 1$ 时, $|C_N(x)| \leq 1$, $C_N(x)$ 在 -1 和 $+1$ 之间振荡,振荡的次数与 N 成正比。

(2) $|x| > 1$ 时, $|C_N(x)| > 1$, $C_N(x)$ 随 $|x|$ 的增加而单调上升。

(3) 奇数阶的切贝雪夫多项式是奇函数,偶数阶的切贝雪夫多项式是偶函数。

(4) N 为偶数时, $|C_N(0)|=1$; N 为奇数时, $|C_N(0)|=0$ 。

(5) $|C_N(\pm 1)|=1$ 。

2. 切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器的设计

1) 切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器的幅度响应特性

N 阶切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器,其幅度平方函数为

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_c)} \quad (5-43)$$

式中, N 是滤波器的阶数; ϵ 和 Ω_c 是滤波器的参数。切贝雪夫 I 型低通滤波器具有以下主要性质:

(1) 由切贝雪夫多项式性质(4)可得, $|H(j0)|^2$ 在 $\Omega=0$ 处的值为

$$|H(j0)|^2 = \begin{cases} 1/(1 + \epsilon^2), & N \text{ 为偶数} \\ 1, & N \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5-44)$$

(2) $0 \leq \Omega \leq \Omega_c$ 时,由切贝雪夫多项式性质(1)可得

$$1/(1 + \epsilon^2) \leq |H(j\Omega)|^2 \leq 1 \quad (5-45)$$

参数 ϵ 控制了滤波器幅度响应在通带波动的大小。

(3) $\Omega \geq \Omega_c$ 时, $|H(j\Omega)|^2$ 单调下降, N 越大,下降速度越快。切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器阻带衰减主要由 N 确定。图 5-5 画出了不同 N 值时切贝雪夫 I 型低通滤波器的幅度响应。

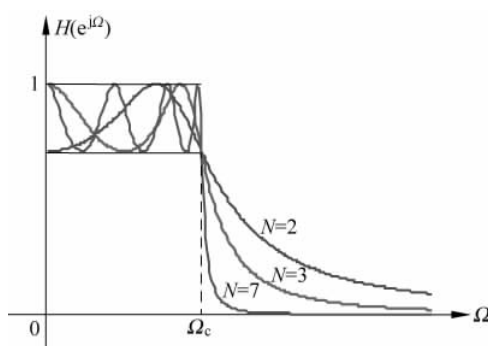


图 5-5 切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器的幅度响应

2) 切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器的极点及系统函数

$\Omega_c=1$ 时的切贝雪夫 I 型低通滤波器称为归一化的切贝雪夫 I 型低通滤波器。可以证明归一化的切贝雪夫 I 型低通滤波器的极点为

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5-46)$$

式中

$$\sigma_k = -\sinh(\beta) \sin \frac{(2k-1)\pi}{2N} \quad (5-47)$$

$$\Omega_k = -\cosh(\beta) \cos \frac{(2k-1)\pi}{2N} \quad (5-48)$$

式(5-47)及式(5-48)中

$$\beta = \operatorname{arcsinh}(1/\epsilon)/N \quad (5-49)$$

N 为偶数时,归一化切贝雪夫 I 型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \prod_{k=1}^{N/2} \frac{(\sigma_k^2 + \Omega_k^2)}{s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \Omega_k^2)} \quad (5-50)$$

N 为奇数时,归一化切贝雪夫 I 型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{\sinh(\beta)}{s + \sinh(\beta)} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{(\sigma_k^2 + \Omega_k^2)}{s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \Omega_k^2)} \quad (5-51)$$

去归一化,可得出 Ω_c 为任意值的切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器的系统函数

$$H(s) = H_{L0}(s/\Omega_c) \quad (5-52)$$

3) 切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器的设计步骤

(1) 由通带截频 Ω_p 确定 Ω_c 。

$$\Omega_c = \Omega_p \quad (5-53)$$

(2) 由通带衰减 A_p 确定 ϵ 。

$$\text{由式(5-43)得} \quad |H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_p/\Omega_c)}$$

将式(5-53)代入该式得

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_p/\Omega_p)} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(1)}$$

根据切贝雪夫多项式的性质(5),得

$$C_N^2(1) = 1$$

将该式代入上式得

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

由式(5-2)得

$$A_p = A(\Omega_p) = -10 \lg |H(j\Omega_p)|^2$$

比较该两式得

$$A_p = -10 \lg \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

解得

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} \quad (5-54)$$

(3) 由阻带指标确定 N 。

$$\text{由式(5-43)得} \quad |H(j\Omega_{st})|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_c)}$$

将式(5-53)代入该式得

$$|H(j\Omega_{st})|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p)}$$

由式(5-2)得

$$A_s = A(\Omega_{st}) = -10 \lg |H(j\Omega_{st})|^2$$

比较该两式得

$$A_s = -10 \lg \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p)}$$

由于 $\Omega_{st}/\Omega_p > 1$

所以,根据式(5-42)可得

$$C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p) = \cosh^2[N \operatorname{arccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)]$$

从而可得

$$A_s = -10 \lg \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cosh^2[N \operatorname{arccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)]}$$

解得

$$N = \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\epsilon} \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{\operatorname{arccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)} \quad (5-55)$$

由式(5-55)计算的 N 一般不是整数,应取大于 N 的整数作为滤波器的阶数。

(4) 由式(5-50)或式(5-51)确定滤波器的归一化系统函数 $H_{L0}(s)$ 。

(5) 由式(5-52)确定去归一化后的滤波器系统函数 $H(s)$ 。

【例 5-3】 设计一切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器,指标为 $\Omega_p = 0.158 \text{ rad/s}$, $\Omega_{st} = 0.727 \text{ rad/s}$, $A_p = 1 \text{ dB}$, $A_s = 10 \text{ dB}$ 。

解 (1) 求模拟滤波器的 Ω, ϵ 。由式(5-53)及式(5-54)可得

$$\Omega_c = \Omega_p = 0.158, \quad \epsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.509$$

(2) 求模拟滤波器的 N 。由式(5-55)得

$$N = \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\epsilon} \sqrt{10^{A_s} - 1}\right)}{\operatorname{arccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)} = 1.11$$

取 $N=2$ 。

(3) 确定极点,求归一化系统函数 $H_{L0}(s)$ 。由式(5-49)得

$$\beta = \frac{\operatorname{arcsinh}(1/\epsilon)}{N} = 0.714$$

由式(5-47)及式(5-48)得

$$\sigma_1 = -\sinh(\beta) \sin \frac{\pi}{2N} = 0.714$$

$$\Omega_1 = -\cosh(\beta) \cos \frac{\pi}{2N} = 0.895$$

由式(5-50)得

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \frac{\sigma_1^2 + \Omega_1^2}{s^2 - 2\sigma_1 s + \sigma_1^2 + \Omega_1^2}$$

(4) 求系统函数 $H(s)$ 。由式(5-52)得

$$\begin{aligned} H(s) &= H_{L0}(s/\Omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \frac{(\sigma_1^2 + \Omega_1^2)}{(s/\Omega_c)^2 - 2\sigma_1(s/\Omega_c) + (\sigma_1^2 + \Omega_1^2)} \\ &= \frac{0.0246}{s^2 + 0.174s + 0.0277} \end{aligned}$$

MATLAB 语句:

```

% 滤波器指标
Wp = 5 * pi;
Ws = 10 * pi;
Ap = 1; As = 50;
% 设计 Chebyshev 滤波器
[N, Wc] = cheblord(Wp, Ws, Ap, As, 's');
[num, den] = cheby1(N, Ap, Wc, 's');
% 计算 Ap, As 及频率响应
omega1 = linspace(0, Wp, 500);
omega2 = linspace(Wp, Ws, 500);
omega3 = linspace(Ws, pi, 500);
H1 = 20 * log10(abs(freqs(num, den, omega1)));
H2 = 20 * log10(abs(freqs(num, den, omega2)));
H3 = 20 * log10(abs(freqs(num, den, omega3)));
fprintf('Ap = %.4f\n', max(-H1));
fprintf('As = %.4f\n', min(-H3));
plot([omega1 omega2 omega3]/pi, [H1, H2, H3]);
xlabel('w/pi'); ylabel('20log10|H(ejw)|'); grid;

```

图 5-6 给出了所设计滤波器的频率响应图。

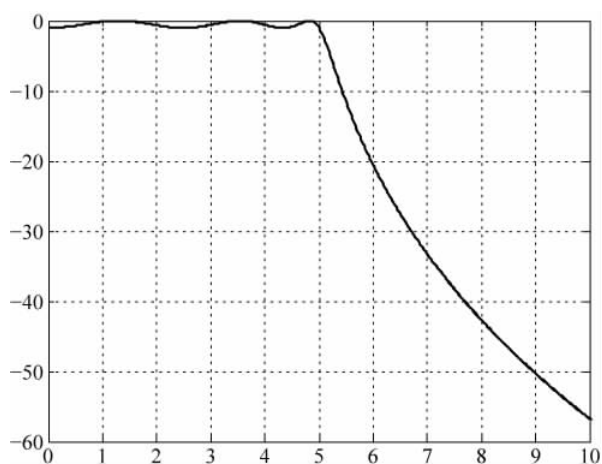


图 5-6 例 5-3 图

3. 切贝雪夫 II 型低通滤波器的设计

1) 切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器幅度响应的特性

N 阶切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器, 其幅度平方函数为

$$|H(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_c/\Omega)} = \frac{\epsilon^2 C_N^2(\Omega_c/\Omega)}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_c/\Omega)} \quad (5-56)$$

式中, N 是滤波器的阶数; ϵ 和 Ω_c 是滤波器的参数。

切贝雪夫 II 型低通滤波器有下列主要性质:

(1) 由切贝雪夫多项式的性质 1 可知, 在 $|\Omega| > \Omega_c$ 时

$$0 \leq |H(j\Omega)|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \quad (5-57)$$

参数 ϵ 控制了滤波器幅度响应在阻带波动的大小。

(2) 对任意 N, Ω_c 和 $\epsilon > 0$, 有 $|H(j0)| = 1$ 。

(3) 在通带 $0 \leq \Omega \leq \Omega_c$ 内, $|H(j\Omega)|^2$ 单调下降。

2) 切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器的零极点及系统函数

图 5-7 给出了切贝雪夫 II 型低通滤波器的幅度响应。 $\Omega_c = 1$ 时切贝雪夫 II 型低通滤波器称为归一化切贝雪夫 II 型低通滤波器。

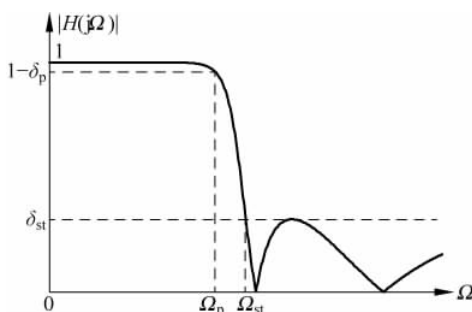


图 5-7 切贝雪夫 II 型滤波器的幅度响应

归一化切贝雪夫 II 型低通滤波器的极点是归一化切贝雪夫 I 型低通滤波器极点的倒数, 用 p_k 表示归一化切贝雪夫 II 型低通滤波器的极点, 比较式 (5-43) 及式 (5-56) 有

$$p_k = \frac{1}{s_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5-58)$$

式 (5-58) 中的 s_k 是式 (5-46) 中的归一化切贝雪夫 I 型低通滤波器的极点。切贝雪夫 I 型低通滤波器的系统函数只有极点, 没有零点; 而切贝雪夫 II 型低通滤波器的系统函数既有极点, 又有零点。可以推出, 归一化切贝雪夫 II 型低通滤波器的零点为

$$z_k = j / \cos \left[\frac{(2k-1)}{2N} \pi \right], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5-59)$$

式 (5-59) 表明, 切贝雪夫 II 型低通滤波器的零点均在 s 平面的虚轴上。当 N 为偶数时, 有 N 个零点; 当 N 为奇数时, 有 $N-1$ 个零点, 因为 $z_{(N+1)/2} = \infty$ 。

当 N 为偶数时, 归一化切贝雪夫 II 型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{(|p_k|^2 / |z_k|^2)(s^2 + |z_k|^2)}{[s^2 - 2\text{Re}(p_k)s + |p_k|^2]} \quad (5-60)$$

当 N 为奇数时, 归一化切贝雪夫 II 型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{1/\sinh(\beta)}{s + 1/\sinh(\beta)} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{(|p_k|^2 / |z_k|^2)(s^2 + |z_k|^2)}{[s^2 - 2\text{Re}(p_k)s + |p_k|^2]} \quad (5-61)$$

去归一化, 可得出 Ω_c 为任意值的切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器的系统函数

$$H(s) = H_{L0}(s/\Omega_c) \quad (5-62)$$

3) 切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器的设计步骤

(1) 由阻带截频 Ω_{st} 确定 Ω_c 。

$$\Omega_c = \Omega_{st} \quad (5-63)$$

(2) 由阻带衰减确定 ϵ 。

$$\text{由式(5-56)得} \quad |H(j\Omega_{st})|^2 = \frac{\epsilon^2 C_N^2(\Omega_c/\Omega_{st})}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_c/\Omega_{st})}$$

将式(5-63)代入该式得

$$|H(j\Omega_{st})|^2 = \frac{\epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_{st})}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_{st})} = \frac{\epsilon^2 C_N^2(1)}{1 + \epsilon^2 C_N^2(1)}$$

根据切贝雪夫多项式的性质(5), 得 $C_N^2(1) = 1$

$$\text{将该式代入上式得} \quad |H(j\Omega_{st})|^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2}$$

由式(5-2)得

$$A_s = A(\Omega_{st}) = -10 \lg |H(j\Omega_{st})|^2$$

比较以上两式得

$$A_s = -10 \lg [\epsilon^2 / (1 + \epsilon^2)]$$

解得

$$\epsilon = 1 / \sqrt{10^{0.1A_s} - 1} \quad (5-64)$$

(3) 由通带、阻带指标确定 N 。

$$\text{由式(5-56)得} \quad |H(j\Omega_p)|^2 = \frac{\epsilon^2 C_N^2(\Omega_c/\Omega_p)}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_c/\Omega_p)}$$

$$\text{将式(5-63)代入该式得} \quad |H(j\Omega_p)|^2 = \frac{\epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p)}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p)}$$

由式(5-2)得

$$A_p = A(\Omega_p) = -10 \lg |H(j\Omega_p)|^2$$

比较以上两式得

$$A_p = A(\Omega_p) = -10 \lg \frac{\epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p)}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p)}$$

由于

$$\Omega_{st}/\Omega_p > 1$$

根据式(5-42)可得

$$C_N^2(\Omega_{st}/\Omega_p) = \cosh^2 [\text{Narccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)]$$

故

$$A_p = -10 \lg \frac{\epsilon^2 \cosh^2 [\text{Narccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)]}{1 + \epsilon^2 \cosh^2 [\text{Narccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)]}$$

解得

$$N = \frac{\text{arccosh} \left(\frac{1}{\epsilon \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}} \right)}{\text{arccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)} \quad (5-65)$$

由式(5-65)计算的 N 一般不是整数, 应取大于 N 的整数作为滤波器的阶数。(4) 由式(5-60)或式(5-61)确定归一化系统函数 $H_{L0}(s)$ 。(5) 由式(5-62)确定去归一化后的系统函数 $H(s)$ 。

【例 5-4】 设计一切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器, 指标为 $\Omega_p = 2\text{rad/s}$, $\Omega_{st} = 4\text{rad/s}$, $A_p \leq 1\text{dB}$, $A_s \geq 30\text{dB}$ 。

解 (1) 求模拟滤波器的 Ω 和 ϵ 。由式(5-63)及式(5-64)得 $\Omega_c = \Omega_{st} = 4$, $\epsilon = 1 / \sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = 0.0316$ 。

(2) 求模拟滤波器的 N 。由式(5-65)得

$$N = \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\epsilon \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}}\right)}{\operatorname{arccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)} = 3.66, \quad \text{取 } N = 4$$

(3) 确定零极点。

由式(5-49)得 $\beta = \operatorname{arcsinh}(1/0.0316)/4$

由式(5-47)得 $\sigma_1 = -\sinh(\beta) \sin \frac{(2 \times 1 - 1)\pi}{2 \times 4} = -\sinh(\beta) \sin \frac{\pi}{8}$

$$\sigma_2 = -\sinh(\beta) \sin \frac{(2 \times 2 - 1)\pi}{2 \times 4} = -\sinh(\beta) \sin \frac{3\pi}{8}$$

由式(5-48)得 $\Omega_1 = -\cosh(\beta) \cos \frac{(2 \times 1 - 1)\pi}{2 \times 4} = -\cosh(\beta) \cos \frac{\pi}{8}$

$$\Omega_2 = -\cosh(\beta) \cos \frac{(2 \times 2 - 1)\pi}{2 \times 4} = -\cosh(\beta) \cos \frac{3\pi}{8}$$

由式(5-46)得 $s_1 = \sigma_1 + j\Omega_1 = -\sinh(\beta) \sin \frac{\pi}{8} - j\cosh(\beta) \cos \frac{\pi}{8}$

$$s_2 = \sigma_2 + j\Omega_2 = -\sinh(\beta) \sin \frac{3\pi}{8} - j\cosh(\beta) \cos \frac{3\pi}{8}$$

由式(5-58)得 $p_1 = \frac{1}{s_1} = \frac{1}{-\sinh(\beta) \sin \frac{\pi}{8} - j\cosh(\beta) \cos \frac{\pi}{8}}$

$$p_2 = \frac{1}{s_2} = \frac{1}{-\sinh(\beta) \sin \frac{3\pi}{8} - j\cosh(\beta) \cos \frac{3\pi}{8}}$$

由式(5-59)得 $z_1 = j/\cos\left[\frac{(2 \times 1 - 1)\pi}{2 \times 4}\right] = j/\cos(\pi/8)$

$$z_2 = j/\cos\left[\frac{(2 \times 2 - 1)\pi}{2 \times 4}\right] = j/\cos(3\pi/8)$$

(4) 确定归一化系统函数 $H_{L0}(s)$ 。

由式(5-60)得

$$H_{L0}(s) = \frac{(|p_1|^2/|z_1|^2)(s^2 + |z_1|^2)}{[s^2 - 2\operatorname{Re}(p_1)s + |p_1|^2]} \times \frac{(|p_2|^2/|z_2|^2)(s^2 + |z_2|^2)}{[s^2 - 2\operatorname{Re}(p_2)s + |p_2|^2]}$$

(5) 确定系统函数 $H(s)$ 。由式(5-62)得

$$\begin{aligned} H(s) &= H_{L0}(s/\Omega_c) = \frac{(|p_1|^2/|z_1|^2)[(s/\Omega_c)^2 + |z_1|^2]}{\left[\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 - 2\operatorname{Re}(p_1)\frac{s}{\Omega_c} + |p_1|^2\right]} \\ &\quad \times \frac{(|p_2|^2/|z_2|^2)[(s/\Omega_c)^2 + |z_2|^2]}{\left[\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 - 2\operatorname{Re}(p_2)\frac{s}{\Omega_c} + |p_2|^2\right]} \\ &= \frac{3.1623 \times 10^{-2}(s^2 + 18.7452)(s^2 + 109.2548)}{(s^2 + 1.5903s + 6.7427)(s^2 + 5.4690s + 9.6049)} \end{aligned}$$

MATLAB 语句:

```

Wp = 2 * pi;
Ws = 4 * pi;
Ap = 1; As = 30;
% 设计 Chebyshev 滤波器
[N, Wc] = cheb2ord(Wp, Ws, Ap, As, 's');
[num, den] = cheby2(N, As, Wc, 's');
% 计算 Ap, As 及频率响应
omega1 = linspace(0, Wp, 500);
omega2 = linspace(Wp, Ws, 500);
omega3 = linspace(Ws, pi, 500);
H1 = 20 * log10(abs(freqs(num, den, omega1)));
H2 = 20 * log10(abs(freqs(num, den, omega2)));
H3 = 20 * log10(abs(freqs(num, den, omega3)));
fprintf('Ap = %.4f\n', max(-H1));
fprintf('As = %.4f\n', min(-H3));
plot([omega1 omega2 omega3]/pi, [H1, H2, H3]);
grid; xlabel('w/pi'); ylabel('20log10|H(ejw)|')

```

图 5-8 给出了所设计滤波器的频率响应图。

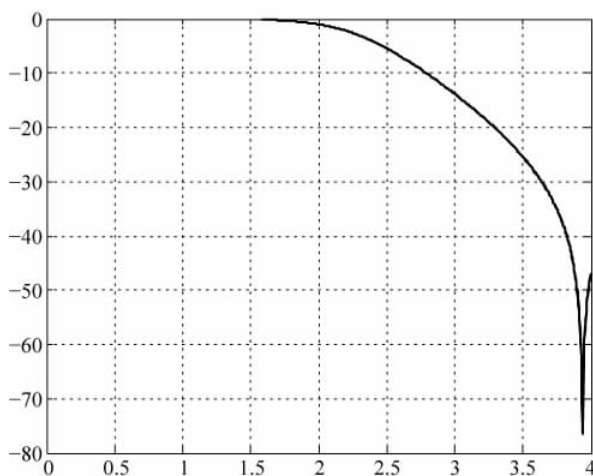


图 5-8 例 5-4 图

【例 5-5】 为获取数字音乐信号,用 48kHz 的频率对模拟信号进行抽样。为减少混叠,在抽样前,用模拟抗混叠滤波器对信号进行滤波。滤波器的指标为

$$f_p = 19\text{kHz}, \quad f_{st} = 24\text{kHz}, \quad \delta_p = 0.05, \quad \delta_s = 10^{-4}$$

由于音乐信号的能量是随频率的增加而衰减的,所以要求拟抗混叠滤波器在通带内的幅度响应是单调下降的。试判断可用的滤波器类型,并确定滤波器的参数 N 及 Ω_c 。

解 根据题意,可选用巴特沃思型或切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器。

由式(5-4)及式(5-5)得,滤波器的通带衰减和阻带衰减分别为

$$A_p = -20\lg(1 - \delta_p) = 0.4455, \quad A_s = -20\lg\delta_s = 80.0\text{dB}$$

对于巴特沃思型模拟低通滤波器,由式(5-38)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(f_{st}/f_p)} \approx 44.2$$

取 $N=44$ 。由式(5-39)得

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} = \frac{2\pi f_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} = \frac{2\pi \times 19 \times 10^3}{(10^{0.1 \times 0.4455} - 1)^{\frac{1}{2 \times 44}}} = 1.2242 \times 10^5 (\text{rad/s})$$

对于切贝雪夫 II 型模拟低通滤波器,则

$$\Omega_c = \Omega_{st} = 2\pi f_{st} = 2\pi \times 10^3 \times 24 = 4.8\pi \times 10^4 (\text{rad/s})$$

$$\epsilon = 1/\sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = 10^{-4}$$

$$N \geq \frac{\text{arccosh}\left(\frac{1}{\epsilon \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}}\right)}{\text{arccosh}(\Omega_{st}/\Omega_p)} \approx 15.5$$

取 $N=16$ 。

5.2.3 椭圆模拟低通滤波器

椭圆滤波器又称为考尔滤波器,其幅度响应在通带和阻带内都呈等波纹形状。与巴特沃思滤波器和切贝雪夫滤波器相比,设计相同指标的模拟滤波器时,该种滤波器所需的阶数最低。 N 阶椭圆模拟低通滤波器的幅度平方函数为

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_N^2(\Omega/\Omega_c)} \quad (5-66)$$

式中, $R_N(x)$ 是 N 阶切贝雪夫有理多项式。 $R_N(x)$ 中含有参数 k 和 k_1 , 两者均为小于 1 的正数。与椭圆滤波器有关的 5 个重要参数是: N 、 ϵ 、 Ω_c 、 k 和 k_1 。椭圆滤波器是既有极点又有零点的滤波器系统,滤波器的阶数 N 越高,通带和阻带中幅度响应的起伏次数就越多,阶数 N 等于幅度响应在通带内(或阻带内)的极大值个数和极小值个数之和。由于椭圆滤波器幅度平方函数的零极点分布十分复杂,本书中不予讨论,只说明该种滤波器的设计方法。

1. 椭圆模拟低通滤波器的主要性质

(1) 当 $|\Omega| < \Omega_c$ 时

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2} \leq |H(j\Omega)|^2 \leq 1 \quad (5-67)$$

(2) 当 $\Omega_c/k < |\Omega| < \infty$ 时

$$0 \leq |H(j\Omega)|^2 \leq \frac{1}{1 + (\epsilon k_1)^2} \quad (5-68)$$

(3) $\Omega=0$ 处的幅度平方函数为

$$|H(j0)|^2 = \begin{cases} 1/(1 + \epsilon^2), & N \text{ 为偶数} \\ 1, & N \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5-69)$$

2. 设计椭圆滤波器时需要的特殊函数

为计算椭圆滤波器的系统函数 $H(s)$, 需利用椭圆积分函数和雅可比 (Jacobi) 椭圆函数作为分析工具。第一类椭圆积分函数定义为

$$u(\varphi, k) = \int_0^\varphi (1 - k^2 \sin^2 x)^{-0.5} dx \quad (5-70)$$

式中, $0 < k < 1$ 。当 $\varphi = \pi/2$ 时, 从式 (5-70) 可得第一类完全椭圆积分函数, 即

$$K(k) = u(0.5\pi, k) = \int_0^{0.5\pi} (1 - k^2 \sin^2 x)^{-0.5} dx \quad (5-71)$$

可利用 MATLAB 函数 `ellipke` 来计算第一类完全椭圆积分函数, 将式 (5-70) 中的 φ 看成 u 的函数, 定义如下的雅可比椭圆函数

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u, k) &= \sin[\varphi(u, k)] \\ \operatorname{cn}(u, k) &= \cos[\varphi(u, k)] \\ \operatorname{dn}(u, k) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2[\varphi(u, k)]} \\ \operatorname{sc}(u, k) &= \tan[\varphi(u, k)] \end{aligned}$$

雅可比椭圆函数 $\operatorname{sn}(u, k)$ 、 $\operatorname{cn}(u, k)$ 和 $\operatorname{dn}(u, k)$ 可利用 MATLAB 函数 `ellip` 来计算。

3. 椭圆滤波器的归一化设计方法

$\Omega_c = 1$ 时的椭圆滤波器称为归一化的椭圆滤波器。

N 为偶数时, 归一化椭圆滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \prod_{l=1}^{N/2} \frac{(|p_l|^2 / |z_l|^2)(s^2 + |z_l|^2)}{[s^2 - 2\operatorname{Re}(p_l)s + |p_l|^2]} \quad (5-72)$$

式中

$$\begin{aligned} z_l &= \frac{1}{k \operatorname{sn}[(2l-1)K(k)/N, k]}, \quad l = 1, 2, \dots, N/2 \\ p_l &= -\frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn} \operatorname{sn}' \operatorname{cn}' + j \operatorname{sn} \operatorname{dn}'}{1 - \operatorname{dn}^2 \operatorname{sn}'^2}, \quad l = 1, 2, \dots, N/2 \\ \operatorname{sn} &= \operatorname{sn}[(2l-1)K(k)/N, k] \\ \operatorname{cn} &= \operatorname{cn}[(2l-1)K(k)/N, k] \\ \operatorname{dn} &= \operatorname{dn}[(2l-1)K(k)/N, k] \\ \operatorname{sn}' &= \operatorname{sn}(v_0, \sqrt{1 - k^2}) \\ \operatorname{cn}' &= \operatorname{cn}(v_0, \sqrt{1 - k^2}) \\ \operatorname{dn}' &= \operatorname{dn}(v_0, \sqrt{1 - k^2}) \\ v_0 &= \frac{K(k)}{NK(k_1)} \operatorname{arcsin}(1/\epsilon, \sqrt{1 - k_1^2}) \end{aligned}$$

N 为奇数时, 归一化椭圆滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(s) = \frac{-p_0}{s - p_0} \prod_{l=1}^{(N-1)/2} \frac{(|p_l|^2 / |z_l|^2)(s^2 + |z_l|^2)}{[s^2 - 2\operatorname{Re}(p_l)s + |p_l|^2]} \quad (5-73)$$

式中

$$\begin{aligned}
 z_l &= \frac{j}{k \operatorname{sn}(2lK(k)/N, k)}, \quad l=1, 2, \dots, (N-1)/2 \\
 p_l &= -\frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn} \operatorname{sn}' \operatorname{cn}' + j \operatorname{sn} \operatorname{dn}'}{1 - \operatorname{dn}^2 \operatorname{sn}'^2}, \quad l=0, 1, 2, \dots, (N-1)/2 \\
 \operatorname{sn} &= \operatorname{sn}[2lK(k)/N, k] \\
 \operatorname{cn} &= \operatorname{cn}[2lK(k)/N, k] \\
 \operatorname{dn} &= \operatorname{dn}[2lK(k)/N, k] \\
 \operatorname{sn}' &= \operatorname{sn}(v_0, \sqrt{1-k^2}) \\
 \operatorname{cn}' &= \operatorname{cn}(v_0, \sqrt{1-k^2}) \\
 \operatorname{dn}' &= \operatorname{dn}(v_0, \sqrt{1-k^2}) \\
 v_0 &= \frac{K(k)}{NK(k_1)} \operatorname{arccsc}(1/\epsilon, \sqrt{1-k_1^2})
 \end{aligned}$$

去归一化, 可得出 Ω_c 为任意值的椭圆模拟低通滤波器的系统函数

$$H(s) = H_{L0}(s/\Omega_c) \quad (5-74)$$

4. 椭圆滤波器的归一化设计步骤

(1) 由通带截频 Ω_p 确定 Ω_c 。

$$\Omega_c = \Omega_p \quad (5-75)$$

(2) 由通带衰减 A_p 确定 ϵ 。由

$$-20 \lg |H(j\Omega_p)| = -10 \lg \frac{1}{1 + \epsilon^2} = A_p$$

得

$$\epsilon = 1/\sqrt{10^{0.1A_p} - 1} \quad (5-76)$$

(3) 由通带截频 Ω_{st} 确定 k 。

$$k = \Omega_p/\Omega_{st} \quad (5-77)$$

(4) 由阻带衰减 A_s 确定 k_1 。由

$$-10 \lg \frac{1}{1 + \epsilon^2/k_1^2} = A_s$$

得

$$k_1 = \epsilon/\sqrt{10^{0.1A_s} - 1} \quad (5-78)$$

(5) 确定滤波器的阶数 N 。

$$N = \frac{K(k)K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(\sqrt{1-k^2}K(k_1))} \quad (5-79)$$

(6) 为保证 $R_N(x)$ 为切贝雪夫有理多项式, 在 N 取整后还需调整椭圆滤波器的参数 k 和 k_1 , 使式(5-79)成立。不同的调整参数 k 和 k_1 的方法, 会产生不同的设计方案。

5. N 取整后参数 k 和 k_1 的调整方法

下面对不同的调整方法进行简述, 具体运用哪一种方法, 可根据情况选择。

(1) 固定 $A_p, \Omega_p, \Omega_{st}$, 使 A_s 达到最大。由式(5-79)重新计算系数 k_1 , 用新计算出的 k_1 代替以前的 k_1 , 确定系统的零点 z_l 和极点 p_l , 从而确定系统函数 $H(s)$ 。通过这样处理, 可使所设计的椭圆滤波器的阻带衰减 A_s 超过设计指标, 而 $A_p, \Omega_p, \Omega_{st}$ 等参数满足设计指标要求。

(2) 固定 $A_p, \Omega_p, \Omega_{st}$, 使 A_p 达到最小。由方法(1)中求得新计算出的 k_1 , 为保证所设计滤波器的阻带衰减 A_s 不变, 需由新计算出的 k_1 重新计算参数 ϵ 。

$$\epsilon = k_1 \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}$$

按这种方法所设计的滤波器在阻带衰减 A_s 超过设计指标, 而 $A_p, \Omega_p, \Omega_{st}$ 等参数满足设计指标要求。

(3) 固定 A_p, A_s, Ω_p , 使 Ω_{st} 达到最小。由式(5-79)重新计算系数 k_1 , 用新计算出的 k_1 代替以前的 k_1 , 确定系统的零点 z_l 和极点 p_l , 从而确定系统函数 $H(s)$ 。通过这样处理, 可使所设计的椭圆滤波器的阻带截频 Ω_{st} 超过设计指标, 而 A_p, A_s, Ω_p 等参数满足设计指标要求。

【例 5-6】 设计一个满足下列指标的椭圆模拟低通滤波器: $\Omega_p = 2\text{rad/s}, \Omega_{st} = 4\text{rad/s}, A_p \leq 1\text{dB}, A_s \geq 30\text{dB}$ 。

解 选择第一种方法: 固定 $A_p, \Omega_p, \Omega_{st}$, 使 A_s 达到最大。

由式(5-75)得 $\Omega_c = \Omega_p = 2\text{rad/s}$

由式(5-76)得 $\epsilon = 1/\sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = 0.5088$

由式(5-77)得 $k = \Omega_p/\Omega_{st} = 0.5$

由式(5-78)得 $k_1 = \epsilon/\sqrt{10^{0.1A_s} - 1} = 0.016\ 099$

由式(5-79)得 $N = \frac{K(k)K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(\sqrt{1-k^2})K(k_1)} = 2.74$

取 $N=3$, 由式(5-79)重新计算 k_1 得

$$k_1 = 0.009\ 637\ 37$$

由式(5-73)及式(5-74)得

$$H(s) = H(s/\Omega_c) = \frac{0.2188(s^2 + 20.6182)}{(s + 1.0798)(s^2 + 0.8681s + 4.0422)}$$

MATLAB 语句:

```
Wp = 2 * pi;
Ws = 4 * pi; Ap = 1; As = 30;
% 设计 Ellipord 滤波器
[N, Wc] = ellipord(Wp, Ws, Ap, As, 's');
[num, den] = ellip(N, Ap, As, Wc, 's');
% 计算 Ap, As 及频率响应
omega1 = linspace(0, Wp, 500);
omega2 = linspace(Wp, Ws, 500);
omega3 = linspace(Ws, pi, 500);
fprintf('Ap = %.4f\n', max(-H1));
fprintf('As = %.4f\n', min(-H3));
```

```
H1 = 20 * log10(abs(freqs(num,den,omega1)));
H2 = 20 * log10(abs(freqs(num,den,omega2)));H3 = 20 * log10(abs(freqs(num,den,omega3)));
plot([omega1 omega2 omega3]/pi,[H1, H2, H3]);grid;xlabel('w/pi');ylabel('20log10|H(ejw)|');
```

图 5-9 给出了所设计滤波器的频率响应图。

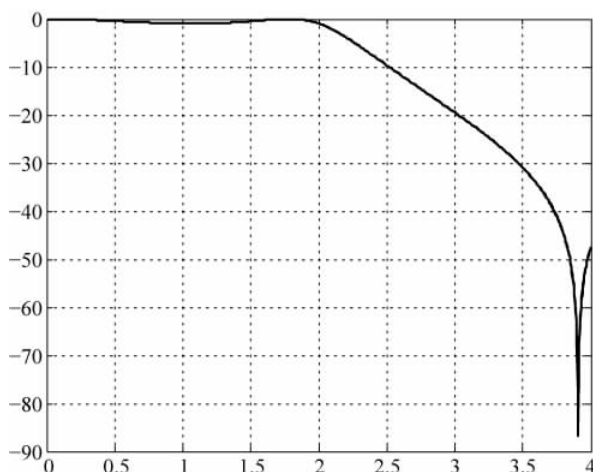


图 5-9 例 5-6 图

5.3 模拟域频率变换

5.2 节讨论了模拟低通滤波器的设计,在实际应用中,还经常需要高通、带通、带阻等其他滤波器。这些滤波器的设计可以通过频率变换的方法转换为低通滤波器的设计,在低通滤波器设计完成后,再通过频率变换将其转换为所需类型的滤波器。为了便于分析,用 $H_L(\bar{s})$ 表示变换前的低通滤波器,称其为原型低通滤波器。 $H_L(j\bar{\Omega})$ 表示原型低通滤波器的频率响应。 $H_L(\bar{s})$ 的通带截频和阻带截频表示为 $\bar{\Omega}_p$ 和 $\bar{\Omega}_{st}$ 。转换后的低通、高通、带通、带阻滤波器的表达式分别用 $H_{LP}(s)$ 、 $H_{HP}(s)$ 、 $H_{BP}(s)$ 、 $H_{BS}(s)$ 表示。

从 $\bar{s}$ 域到 s 域的映射定义为

$$\bar{s} = f(s) \quad (5-80)$$

其中, $f(s)$ 是 s 的有理函数。由变换获得的滤波器为

$$H(s) = H_L(\bar{s}) \big|_{\bar{s}=f(s)} \quad (5-81)$$

由于限定了 $f(s)$ 是有理函数,当 $H_L(\bar{s})$ 是有理函数时,变换后获得的 $H(s)$ 也是有理函数。另外映射还必须保持滤波器的稳定性。 $\bar{s}$ 的左半平面必须映射到 s 的左半平面, $\bar{s}$ 的右半平面必须映射到 s 的右半平面,虚轴 $j\bar{\Omega}$ 必须映射到虚轴 $j\Omega$ 。

5.3.1 原型低通到低通的变换

原型低通到低通的变化定义为

$$H_{LP}(s) = H_L(\bar{s}) \big|_{\bar{s}=s/\Omega_0} \quad (5-82)$$

式中, Ω_0 是一正的参数。在 5.2 节的低通滤波器设计中, 介绍了由归一化低通到低通的频率变换。即通过频率变换将归一化的低通滤波器变换为非归一化的低通滤波器。下面将分析一般的情况, 即 $H_L(\bar{s})$ 不是归一化低通滤波器时, 变换后的低通滤波器的通带截频和阻带截频将如何变化。将 $\bar{s} = j\bar{\Omega}$, $s = j\Omega$ 代入 $\bar{s} = s/\Omega_0$, 可得 $\bar{\Omega}$ 和 Ω 的关系为

$$\bar{\Omega} = \Omega/\Omega_0 \quad (5-83)$$

式(5-83)表示的低通到低通变换的频率对应关系如图 5-10 所示。在图 5-10 中, 当 Ω 从 0 到 $\Omega_0\bar{\Omega}_p$ 变化时, 对应的 $\bar{\Omega}$ 从 0 到 $\bar{\Omega}_p$ 变化。由于 $H_L(\bar{s})$ 的通带是从 $\bar{\Omega}=0$ 到 $\bar{\Omega}_p$, 所以 $H_{LP}(s)$ 的通带是从 $\Omega=0$ 到 $\Omega_0\bar{\Omega}_p$ 。当 Ω 从 $\Omega_0\bar{\Omega}_{st}$ 到 ∞ 变化时, 对应的 $\bar{\Omega}$ 在 $\bar{\Omega}_{st}$ 和 ∞ 之间变化, 因此 $H_{LP}(s)$ 的阻带是从 $\Omega_0\bar{\Omega}_{st}$ 到 ∞ 。即通过低通到低通的频率变换之后, 低通滤波器 $H_{LP}(s)$ 的通带截频与阻带截频分别为 $\Omega_0\bar{\Omega}_p$ 和 $\Omega_0\bar{\Omega}_{st}$ 。

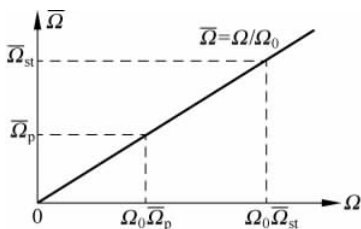


图 5-10 低通滤波器到低通滤波器变换的频率对应关系

5.3.2 原型低通到高通的变换

原型低通到高通的变化为

$$H_{HP}(s) = H_L(\bar{s}) \big|_{\bar{s}=\Omega_0/s} \quad (5-84)$$

式中, Ω_0 是一正的参数。由于低通到高通的变换为一阶的有理函数, 所以变换后所得高通滤波器 $H_{HP}(s)$ 和原型滤波器 $H_L(\bar{s})$ 具有相同的阶数。为了证明变换后仍能保持稳定性, 记

$$\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\Omega}, \quad s = \sigma + j\Omega$$

则 $\bar{s}$ 和 s 的对应关系可写为

$$\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\Omega} = \frac{\Omega_0}{s} = \frac{\Omega_0(\sigma - j\Omega)}{\sigma^2 + \Omega^2} \quad (5-85)$$

式(5-85)表明 $\bar{\sigma}$ 和 σ 有相同的正负号, 因而变换能保持系统的稳定性。

将 $\bar{s} = j\bar{\Omega}$, $s = j\Omega$ 代入 $\bar{s} = s/\Omega_0$, 可得低通到高通变换的频率对应关系为

$$\Omega\bar{\Omega} = \Omega_0 \quad (5-86)$$

低通到高通变换的频率对应关系如图 5-11 所示。当 Ω 在 $[\Omega_0/\bar{\Omega}_p, \infty)$ 范围内变化时, 对应的 $\bar{\Omega}$ 在 $[0, \bar{\Omega}_p]$ 范围内变化。由于 $H_L(\bar{s})$ 是实系数的低通滤波器, 其频率范围

$[0, \bar{\Omega}_p]$ 是 $H_L(\bar{s})$ 的通带, 所以 $H_{HP}(s)$ 的通带频率范围是 $[\Omega_0/\bar{\Omega}_p, \infty)$ 。

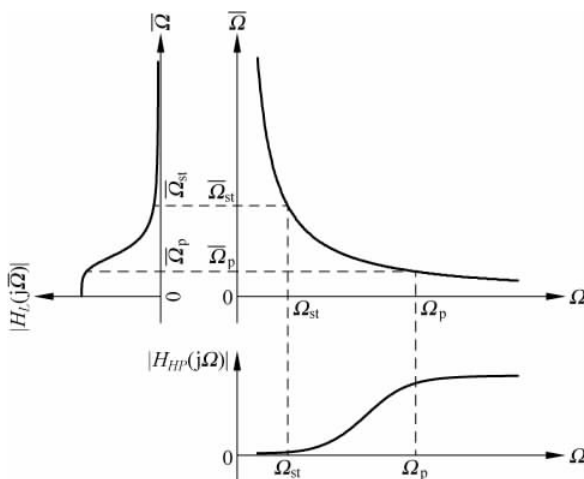


图 5-11 低通滤波器到高通滤波器的频率对应关系

当 Ω 在 0 到 $\Omega_0/\bar{\Omega}_{st}$ 范围内变化时, 对应的 $\bar{\Omega}$ 在 $[\bar{\Omega}_{st}, \infty)$ 范围内变化。其频率范围是 $H_L(\bar{s})$ 的阻带, 所以 $H_{HP}(s)$ 的阻带范围是 $[0, \Omega_0/\bar{\Omega}_{st}]$ 。由式(5-86)获得的高通滤波器的通带截频为 $\Omega_0/\bar{\Omega}_p$, 阻带截频为 $\Omega_0/\bar{\Omega}_{st}$ 。

若要求设计一个通带截频为 Ω_p , 阻带截频为 Ω_{st} 的高通滤波器, 则由以上分析可知, 相应的低通滤波器的频率指标为通带截频为 $\Omega_0/\bar{\Omega}_p$, 阻带截频为 $\Omega_0/\bar{\Omega}_{st}$ 。设高通滤波器的技术指标为 Ω_p 、 Ω_{st} 、 A_p 、 A_s , 则设计高通滤波器的步骤如下:

(1) 由

$$\bar{\Omega}_p = \Omega_0/\Omega_p \quad (5-87)$$

及

$$\bar{\Omega}_{st} = \Omega_0/\Omega_{st} \quad (5-88)$$

确定低通滤波器的指标。 Ω_0 是一可选择的参数, 为便于计算, 常选 $\Omega_0=1$ 。

(2) 设计满足指标 $\bar{\Omega}_p$ 、 $\bar{\Omega}_{st}$ 、 A_p 、 A_s 的低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

(3) 由式(5-84)得到所要求的高通滤波器。

【例 5-7】 设计满足下列条件的模拟巴特沃思型高通滤波器: $f_p=5\text{kHz}$, $f_s=1\text{kHz}$, $A_p \leq 1\text{dB}$, $A_s \geq 40\text{dB}$ 。

解 (1) 将高通指标转换为原型低通滤波器技术指标。由题意可得

$$\bar{\Omega}_p = 1/(2\pi \times 5000)\text{rad/s}, \quad \bar{\Omega}_{st} = 1/(2\pi \times 1000)\text{rad/s}$$

(2) 设计巴特沃思型原型低通滤波器。由式(5-38)及式(5-40)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\bar{\Omega}_{st}/\bar{\Omega}_p)} = 3.28, \quad \text{取 } N = 4$$

$$\bar{\Omega}_c = \frac{\bar{\Omega}_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{1/(2N)}} = 5.033 \times 10^{-5}$$

由式(5-34)可得归一化原型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(\bar{s}) = \frac{1}{(\bar{s}^2 + 0.7654 \bar{s} + 1)(\bar{s}^2 + 1.8478 \bar{s} + 1)}$$

由式(5-35)可得去归一化后原型低通滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H_L(\bar{s}) &= H_{L0}(\bar{s} / \bar{\Omega}_c) = \frac{1}{[(\bar{s} / \bar{\Omega}_c)^2 + 0.7654 \bar{s} / \bar{\Omega}_c + 1][(\bar{s} / \bar{\Omega}_c)^2 + 1.8478 \bar{s} / \bar{\Omega}_c + 1]} \\ &= \frac{6.4166 \times 10^{-18}}{\bar{s}^4 + 1.3152 \times 10^{-4} \bar{s}^3 + 8.6485 \times 10^{-9} \bar{s}^2 + 3.3315 \times 10^{-13} \bar{s} + 6.4166 \times 10^{-18}} \end{aligned}$$

(3) 取 $\Omega_0 = 1$, 由式(5-84)得高通滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H_{HP}(s) &= H_L(\bar{s}) \big|_{\bar{s}=1/s} \\ &= \frac{s^4}{s^4 + 5.192 \times 10^4 s^3 + 1.3478 \times 10^9 s^2 + 2.0497 \times 10^{13} s + 1.5585 \times 10^{17}} \end{aligned}$$

MATLAB 语句:

```
% 高通滤波器的设计
Wp = 1/(2 * pi * 5000);
Ws = 1/(2 * pi * 1000);
Ap = 1; As = 40;
[N, Wc] = buttord(Wp, Ws, Ap, As, 's');
[num, den] = butter(N, Wc, 's');
disp('LP 分子多项式');
fprintf('% .4e\n', num);
disp('LP 分母多项式');
fprintf('% .4e\n', den);
[numt, dent] = lp2hp(num, den, 1);
omega = linspace(0, pi, 500);
disp('HP 分子多项式');
fprintf('% .4e\n', numt);
disp('HP 分母多项式');
fprintf('% .4e\n', dent);
H = 20 * log10(abs(freqs(numt, dent, omega)));
plot([omega]/pi, [H]); grid;
xlabel('w/pi'); ylabel('20log10|H(ejw)|');
```

图 5-12 画出了所设计滤波器的增益响应。

5.3.3 原型低通到带通的变换

Ω_{p2} 和 Ω_{p1} 分别为带通滤波器通带的上、下截频, Ω_{st2} 和 Ω_{st1} 分别为带通滤波器阻带的上、下截频。 A_p 和 A_s 分别为带通滤波器的通带衰减和阻带衰减, 原型低通滤波器到带通滤波器的变换式为

$$H_{BP}(s) = H_L(\bar{s}) \big|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}} \quad (5-89)$$

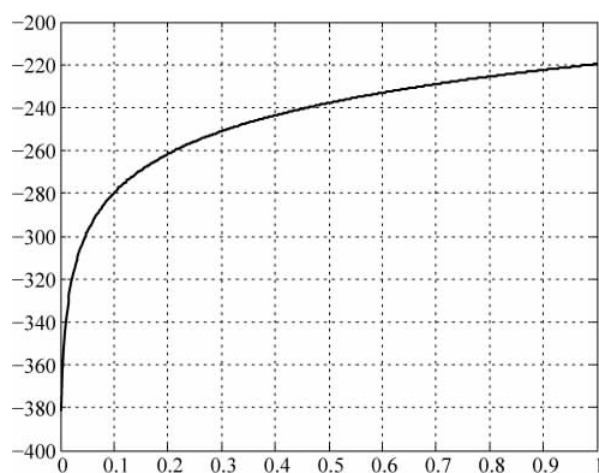


图 5-12 例 5-7 图

式中, B 和 Ω_0 为大于零的参数。典型带通滤波器的幅度响应如图 5-13 所示。

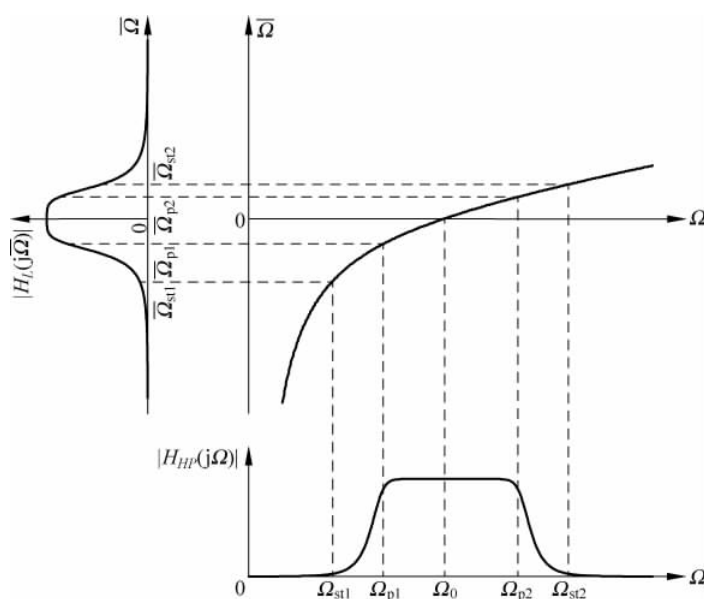


图 5-13 低通滤波器到带通滤波器的频率对应关系

由于低通到带通的变换为二阶有理函数, 所以变换后所得带通滤波器 $H_{HP}(s)$ 的阶数是原型滤波器 $H_L(\bar{s})$ 阶数的两倍。

$$\text{令} \quad \bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\Omega}, \quad s = \sigma + j\Omega$$

$$\text{由式} \quad \bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}$$

可得 $\bar{s}$ 和 s 的对应关系为

$$\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\Omega} = \frac{\sigma}{B} \left(1 + \frac{\Omega_0^2}{\sigma^2 + \Omega^2} \right) + j \frac{\Omega}{B} \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\sigma^2 + \Omega^2} \right) \quad (5-90)$$

式(5-90)表明 $\bar{\sigma}$ 和 σ 有相同的正负号, 所以变换能保持系统的稳定性。

将 $\bar{s} = j\bar{\Omega}$, $s = j\Omega$ 代入 $\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}$, 低通和带通滤波器的频率关系为

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{B\Omega} \quad (5-91)$$

由式(5-91)可得方程

$$\Omega^2 - B\Omega\bar{\Omega} - \Omega_0^2 = 0$$

解方程得

$$\Omega_1 = 0.5(\bar{\Omega}B + \sqrt{(\bar{\Omega}B)^2 + 4\Omega_0^2}) \quad (5-92)$$

$$\Omega_2 = 0.5(\bar{\Omega}B - \sqrt{(\bar{\Omega}B)^2 + 4\Omega_0^2}) \quad (5-93)$$

可以看出, 不管 $\bar{\Omega}$ 如何变化, Ω_1 始终为正值, 而 Ω_2 始终为负值。现只讨论 $\Omega = \Omega_1$ 时, 滤波器幅度响应的情况。

设

$$B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} \quad (5-94)$$

$$\Omega_0^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2} \quad (5-95)$$

将式(5-94)及式(5-95)代入式(5-91)得

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\Omega_{p1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{p1}} = -1 \quad (5-96)$$

$$\bar{\Omega}_{p2} = \frac{\Omega_{p2}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{p2}} = 1 \quad (5-97)$$

若低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 的通带截频 $|\bar{\Omega}_p| = 1$, 那么变换后滤波器的通带范围为 $[\Omega_{p1}, \Omega_{p2}]$, 可以看出, 变换后低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 成为带通滤波器。由式(5-91)可知, $\bar{\Omega} = 0$ 被映射到 $\Omega = \Omega_0$, 带通滤波器通带截频的几何平均值 $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}$ 称为带通滤波器的中心频率。由式(5-91)知, 带通滤波器的两个阻带截频分别被映射到

$$\bar{\Omega}_{st1} = \frac{\Omega_{st1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{st1}} \quad (5-98)$$

$$\bar{\Omega}_{st2} = \frac{\Omega_{st2}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{st2}} \quad (5-99)$$

若低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 的阻带截频为

$$\bar{\Omega}_{st} = \min\{|\bar{\Omega}_{st1}|, |\bar{\Omega}_{st2}|\} \quad (5-100)$$

则变换后的带通滤波器在阻带的衰减能满足设计指标。

带通滤波器的设计步骤如下:

- (1) 根据带通滤波器的上、下载频由式(5-94)及式(5-95)确定参数 B 和 Ω_0 。
- (2) 由式(5-100)确定原型低通滤波器的阻带截频 $\bar{\Omega}_{st}$ 。
- (3) 设计通带截频为 $1(\text{rad/s})$, 阻带截频为 $\bar{\Omega}_{st}$, 通带衰减为 $A_p(\text{dB})$, 阻带衰减为

A_s (dB)的原型低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

(4) 由式(5-89)得到带通滤波器的数学表达式。

【例 5-8】 试设计一个满足下列指标的巴特沃思型带通滤波器 $\Omega_{p1}=6\text{rad/s}$, $\Omega_{p2}=8\text{rad/s}$, $\Omega_{st1}=4\text{rad/s}$, $\Omega_{st2}=11\text{rad/s}$, $A_p \leq 1\text{dB}$, $A_s \geq 32\text{dB}$ 。

解 (1) 由带通滤波器的上、下截频确定变换式中的参数。由式(5-94)及式(5-95)得

$$B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = 2, \quad \Omega_0^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2} = 48$$

(2) 确定原型低通滤波器的阻带截频。由式(5-98)及式(5-99)得

$$\bar{\Omega}_{st1} = \frac{\Omega_{st1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{st1}} = -4, \quad \bar{\Omega}_{st2} = \frac{\Omega_{st2}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{st2}} = 3.3182$$

根据式(5-100),得

$$\bar{\Omega}_{st} = \min\{|\bar{\Omega}_{st1}|, |\bar{\Omega}_{st2}|\} = 3.3182$$

(3) 设计满足下列指标的原型低通滤波器。

$$\bar{\Omega}_p = 1, \quad A_p = 1\text{dB}, \quad \bar{\Omega}_{st} = 3.3182, \quad A_s = 32\text{dB}$$

由式(5-38)及式(5-40)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\bar{\Omega}_{st}/\bar{\Omega}_p)} = 3.6346, \quad \text{取 } N = 4$$

$$\bar{\Omega}_c = \frac{\bar{\Omega}_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{1/(2N)}} = 1.3211$$

由式(5-34)可得归一化原型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(\bar{s}) = \frac{1}{(\bar{s}^2 + 0.7654\bar{s} + 1)(\bar{s}^2 + 1.8478\bar{s} + 1)}$$

由式(5-35)可得去归一化后原型低通滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H_L(\bar{s}) &= H_{L0}(\bar{s}/\bar{\Omega}_c) = \frac{1}{[(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)^2 + 0.7654\bar{s}/\bar{\Omega}_c + 1][(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)^2 + 1.8478\bar{s}/\bar{\Omega}_c + 1]} \\ &= \frac{1}{[(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)^2 + 0.7654\bar{s}/\bar{\Omega}_c + 1][(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)^2 + 1.8478\bar{s}/\bar{\Omega}_c + 1]} \end{aligned}$$

(4) 将原型低通滤波器转换为带通滤波器 $H_{BP}(s)$ 。由式(5-89)可得带通滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H_{BP}(s) &= H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}} \\ &= \frac{48.7372s^4}{s^4 + 2s^3 + 0.103 \times 10^3 s^2 + 0.0971 \times 10^3 s + 2.304 \times 10^3} \\ &\quad \times \frac{1}{s^4 + 0.0049 \times 10^3 s^3 + 0.103 \times 10^3 s^2 + 0.2343 \times 10^3 s + 2.304 \times 10^3} \end{aligned}$$

MATLAB 语句:

% 模拟带通滤波器指标

Ap = 1; As = 32;

```

Wp1 = 6; Wp2 = 8; Wst1 = 4; Wst2 = 11;
% 将模拟带通滤波器指标转换为原型低通滤波器指标
B = Wp2 - Wp1; W0 = sqrt(Wp1 * Wp2);
WLst1 = (Wst1 * Wst1 - W0 * W0) / (B * Wst1);
WLst2 = (Wst2 * Wst2 - W0 * W0) / (B * Wst2);
WLst = min(abs(WLst1), abs(WLst2));
% 设计 BW 型低通滤波器
[N, Wc] = buttord(1, WLst, Ap, As, 's');
[num, den] = butter(N, Wc, 's');
% 将原型低通滤波器转换为带通滤波器
[numt, dent] = lp2bp(num, den, W0, B);
disp('BP 分子多项式');
fprintf(' % .4e\n', numt);
disp('BP 分母多项式');
fprintf(' % .4e\n', dent);
% 画出带通滤波器的增益响应
w = linspace(2, 12, 500);
H = freqs(numt, dent, w);
plot(w, 20 * log10(abs(H))); grid;
xlabel('w'); ylabel('20log10|H(ejw)|');

```

图 5-14 画出了所设计带通滤波器的增益响应曲线。

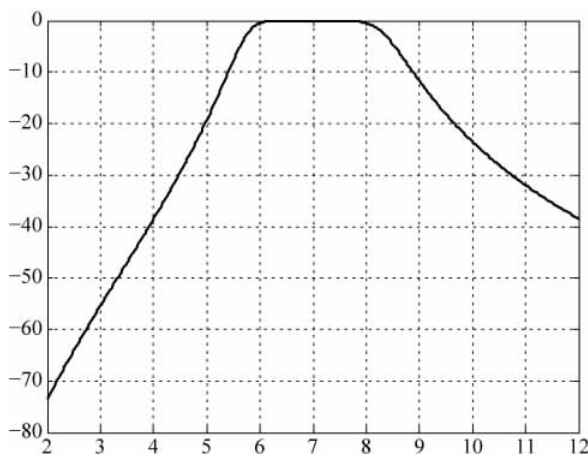


图 5-14 例 5-8 图

5.3.4 原型低通到带阻的变换

低通滤波器到带阻滤波器的变换关系为

$$H_{BS}(s) = H_L(\bar{s}) \bigg|_{\bar{s} = \frac{B_0}{s^2 + \Omega_0^2}} \quad (5-101)$$

式中, B 表示低通滤波器的带宽; Ω_0 表示带阻滤波器的中心频率, 两者均为大于 0 的正

数。将 $\bar{s} = j\bar{\Omega}$, $s = j\Omega$ 代入 $\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{B_s}$ 得

$$\bar{\Omega} = \frac{B\Omega}{-\Omega^2 + \Omega_0^2} \quad (5-102)$$

式(5-102)为原型低通滤波器到带阻滤波器的对应关系,图 5-15 给出了对应曲线,由图可知, $\bar{\Omega} = \infty$ 被映射到 $\Omega = \Omega_0$ 。由该式可得

$$\bar{\Omega}_1 = -\frac{B}{2\bar{\Omega}} + \sqrt{\Omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\bar{\Omega}}\right)^2} \quad (5-103)$$

$$\bar{\Omega}_2 = -\frac{B}{2\bar{\Omega}} - \sqrt{\Omega_0^2 + \left(\frac{B}{2\bar{\Omega}}\right)^2} \quad (5-104)$$

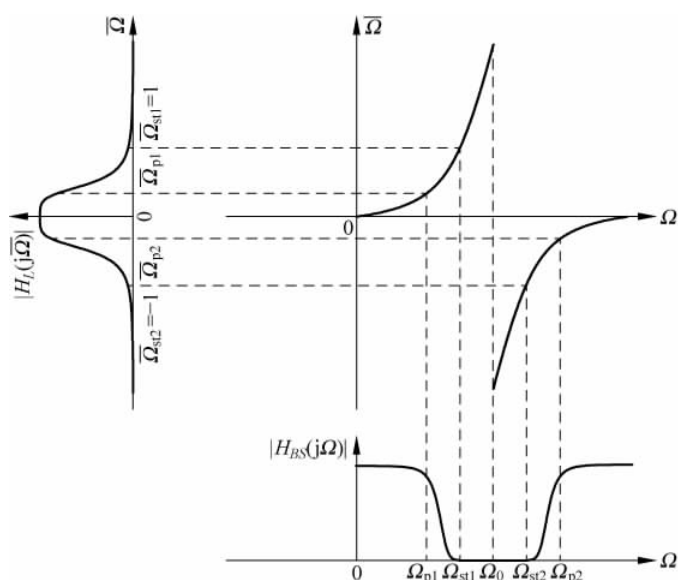


图 5-15 低通滤波器到带阻滤波器的频率对应关系

现只讨论 $\Omega = \bar{\Omega}_1$ 时,滤波器幅度响应的情况。

设

$$B = \Omega_{st2} - \Omega_{st1} \quad (5-105)$$

$$\Omega_0^2 = \Omega_{st1}\Omega_{st2} \quad (5-106)$$

由式(5-102)得

$$\bar{\Omega}_{st1} = \frac{(\Omega_{st2} - \Omega_{st1})\Omega_{st1}}{-\Omega_{st1}^2 + \Omega_{st1}\Omega_{st2}} = 1 \quad (5-107)$$

$$\bar{\Omega}_{st2} = \frac{(\Omega_{st2} - \Omega_{st1})\Omega_{st2}}{-\Omega_{st2}^2 + \Omega_{st1}\Omega_{st2}} = -1 \quad (5-108)$$

由式(5-107)及式(5-108)可知,若低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 的阻带截频为 $|\bar{\Omega}_{st}| = 1$,则变换后滤波器的阻带频率范围为 $[\Omega_{st1}, \Omega_{st2}]$,通过变换,低通滤波器变成了带阻滤波器。

由式(5-102)可知,带阻滤波器通带截频被映射到

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{(\Omega_{st2} - \Omega_{st1})\Omega_{p1}}{-\Omega_{p1}^2 + \Omega_{st1}\Omega_{st2}} \quad (5-109)$$

$$\bar{\Omega}_{p2} = \frac{(\Omega_{st2} - \Omega_{st1})\Omega_{p2}}{-\Omega_{p2}^2 + \Omega_{st1}\Omega_{st2}} \quad (5-110)$$

若低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 的通带截频为

$$\bar{\Omega}_p = \max\{|\bar{\Omega}_{p1}|, |\bar{\Omega}_{p2}|\} \quad (5-111)$$

则变换后的带阻滤波器在通带衰减能满足设计指标。

带阻滤波器的设计步骤如下:

(1) 根据带阻滤波器的阻带上、下载频,由式(5-105)及式(5-106)确定带宽及中心频率。

(2) 根据式(5-111)确定原型低通滤波器的通带截频 $\bar{\Omega}_p$ 。

(3) 设计通带截频为 $\bar{\Omega}_p$,阻带截频为 1(rad/s),通带衰减为 A_p (dB),阻带衰减为 A_s (dB)的低通滤波器 $H_L(\bar{s})$ 。

(4) 由式(5-101)获得带阻滤波器的数学表达式 $H_{BS}(s)$ 。

【例 5-9】 试设计一个满足下列指标的巴特沃思型带阻滤波器: $A_p = 1\text{dB}$, $A_s = 20\text{dB}$, $\Omega_{p1} = 10$, $\Omega_{p2} = 30$, $\Omega_{st1} = 19$, $\Omega_{st2} = 21$ 。

解 (1) 由带阻滤波器通带的上、下载频确定变换式中的参数。由式(5-105)及式(5-106)得

$$B = \Omega_{st2} - \Omega_{st1} = 2, \quad \Omega_0^2 = \Omega_{st1}\Omega_{st2} = 399$$

(2) 确定原型低通滤波器的通带截频。由式(5-109)及式(5-110)得

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{(\Omega_{st2} - \Omega_{st1})\Omega_{p1}}{-\Omega_{p1}^2 + \Omega_{st1}\Omega_{st2}} = 0.0669, \quad \bar{\Omega}_{p2} = \frac{(\Omega_{st2} - \Omega_{st1})\Omega_{p2}}{-\Omega_{p2}^2 + \Omega_{st1}\Omega_{st2}} = -0.1198$$

选取 $\bar{\Omega}_p = \max\{|\bar{\Omega}_{p1}|, |\bar{\Omega}_{p2}|\} = 0.1198$

(3) 设计满足下列指标的巴特沃思原型低通滤波器。

$$\bar{\Omega}_p = 0.1198, \quad A_p = 1\text{dB}, \quad \bar{\Omega}_{st} = 1, \quad A_s = 20\text{dB}$$

由式(5-38)及式(5-40)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\bar{\Omega}_{st}/\bar{\Omega}_p)} = 1.4009, \quad \text{取 } N = 2$$

$$\bar{\Omega}_c = \frac{\bar{\Omega}_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{1/(2N)}} = 0.3170$$

由式(5-34)可得归一化原型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

由式(5-35)可得去归一化后原型低通滤波器的系统函数为

$$H_L(\bar{s}) = H_{L0}(\bar{s}/\bar{\Omega}_c) = \frac{1}{(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)^2 + \sqrt{2}\bar{s}/\bar{\Omega}_c + 1} = \frac{0.1005}{\bar{s}^2 + 0.4483\bar{s} + 0.1005}$$

(4) 将原型低通滤波器转换为带阻滤波器 $H_{BS}(s)$ 。由式(5-101)可得为

$$H_{BS}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{Bs}{s^2 + \Omega_0^2}} = \frac{s^4 + 7.98 \times 10^2 s^2 + 1.5920 \times 10^5}{s^4 + 8.9518s^3 + 8.3780 \times 10^2 s^2 + 3.5718 \times 10^3 s + 1.5920 \times 10^5}$$

MATLAB 语句:

```
% 模拟带阻滤波器指标
Ap = 1; As = 20; Wp1 = 10; Wp2 = 30; Ws1 = 19; Ws2 = 21;
% 将模拟带阻滤波器指标转换为原型低通滤波器指标
B = Ws2 - Ws1; W0 = sqrt(Ws1 * Ws2);
WLp1 = B * Wp1 / (W0 * W0 - Wp1 * Wp1);
WLp2 = B * Wp2 / (W0 * W0 - Wp2 * Wp2);
WLp = max(abs(WLp1), abs(WLp2));
% 设计 BW 型低通滤波器
[N, Wc] = buttord(WLp, 1, Ap, As, 's');
[num, den] = butter(N, Wc, 's');
% 将原型低通滤波器转换为带阻滤波器
[numt, dent] = lp2bs(num, den, W0, B);
disp('BP 分子多项式');
fprintf('%.4e\n', numt);
disp('BP 分母多项式');
fprintf('%.4e\n', dent);
% 画出带阻滤波器的增益响应
W = linspace(6, 35, 500);
H = freqs(numt, dent, W);
plot(W, 20 * log10(abs(H)));
grid;
xlabel('W'); ylabel('20log10|H(ejW)|');
```

图 5-16 画出了所设计带阻滤波器的增益响应曲线。

为了设计时查找参数方便,将模拟频率变换参数列入表 5-1。

表 5-1 模拟频率变换参数对照表

变 换 类 型	频 率 变 换	复频率变换	注 释
原型低通→低通	$\bar{\Omega} = \Omega / \Omega_0$	$\bar{s} = s / \Omega_0$	Ω_0 是一正参数
原型低通→高通	$\bar{\Omega} = \Omega_0 / \Omega$	$\bar{s} = \Omega_0 / s$	Ω_0 是一正参数
原型低通→带通	$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{B\Omega}$	$\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}$	$B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$ $\Omega_0^2 = \Omega_{p1} \Omega_{p2}$
原型低通→带阻	$\bar{\Omega} = \frac{B\Omega}{\Omega^2 - \Omega_0^2}$	$\bar{s} = \frac{Bs}{s^2 + \Omega_0^2}$	$B = \Omega_{s2} - \Omega_{s1}$ $\Omega_0^2 = \Omega_{s1} \Omega_{s2}$

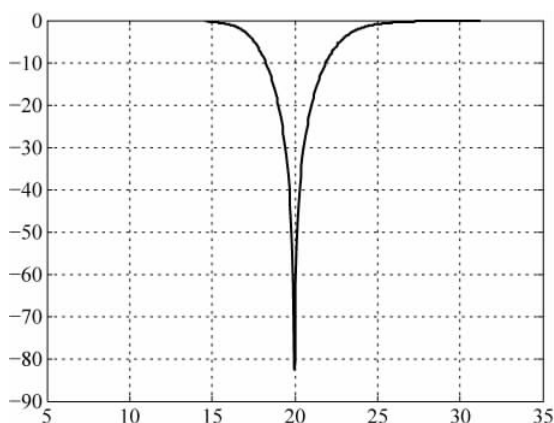


图 5-16 例 5-9 图

5.4 脉冲响应不变法

IIR 滤波器设计的基本方法是首先将数字滤波器的设计指标转换为模拟滤波器的设计指标,然后设计模拟滤波器。在模拟滤波器设计完成后,再将模拟滤波器转换为数字滤波器。在这一节讨论一种将模拟滤波器转换为数字滤波器的方法。

5.4.1 脉冲响应不变法的基本原理

1. 变换原理

通过对模拟滤波器单位脉冲响应 $h(t)$ 等间隔抽样来获取数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$,即

$$h(n) = h(t) \big|_{t=nT} \quad (5-112)$$

式中, T 是抽样间隔。

如果已知模拟滤波器的系统函数 $H(s)$,则可以按下述步骤确定数字滤波器的系统函数 $H(z)$:

- (1) 对 $H(s)$ 进行拉普拉斯逆变换得到 $h(t)$ 。
- (2) 对 $h(t)$ 进行等间隔抽样得到 $h(n)$ 。
- (3) 计算 $h(n)$ 的 z 变换得到 $H(z)$ 。

假设一因果的模拟滤波器的系统函数 $H(s)$ 只有 M 个一阶极点,则 $H(s)$ 可表达为

$$H(s) = \sum_{l=1}^M \frac{A_l}{s - p_l} \quad (5-113)$$

由拉普拉斯逆变换可得单位脉冲响应为

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = \sum_{l=1}^M A_l e^{p_l t} u(t) \quad (5-114)$$

对 $h(t)$ 取样得

$$h(n) = h(nT) = \sum_{l=1}^M A_l e^{p_l nT} u(n) \quad (5-115)$$

对 $h(n)$ 进行 z 变换得

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^M A_l e^{p_l nT} u(n) z^{-n} \\ &= \sum_{l=1}^M A_l \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_l T} z^{-1})^n = \sum_{l=1}^M \frac{A_l}{1 - e^{p_l T} z^{-1}} \end{aligned} \quad (5-116)$$

下面分析 s 平面与 z 平面之间的映射关系。

设 $h(t)$ 的理想采样信号为 $\hat{h}(t)$, 则

$$\hat{h}(t) = h(t) \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \delta(t - nT)$$

对 $\hat{h}(t)$ 进行拉普拉斯变换得

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) e^{-snT} \end{aligned}$$

对 $h(n)$ 进行 z 变换得

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) z^{-n}$$

比较该两式可看出, s 平面与 z 平面之间的映射关系为

$$z = e^{sT} \quad (5-117)$$

设 $s = \sigma + j\Omega$, 则

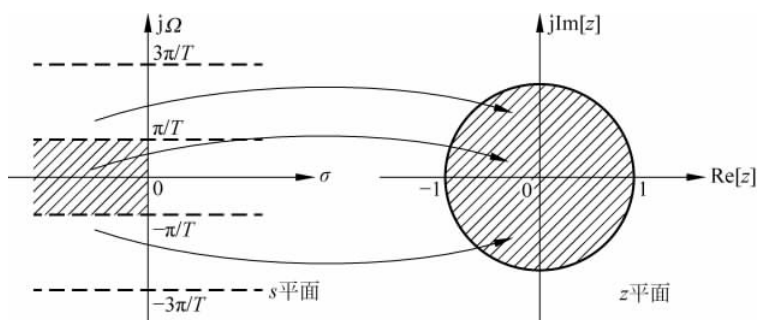
$$z = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \quad (5-118)$$

由式(5-118)可得

$$|z| = e^{\sigma T} \begin{cases} < 1, & \sigma < 0 \\ = 1, & \sigma = 0 \\ > 1, & \sigma > 0 \end{cases} \quad (5-119)$$

从式(5-119)可以看出, 模拟滤波器左半平面的极点被映射到数字滤波器单位圆内的极点, 模拟滤波器右半平面的极点被映射到数字滤波器单位圆外的极点。所以, 脉冲响应不变法能够将一个因果稳定的模拟滤波器变成一个因果稳定的数字滤波器。

图 5-17 给出了 s 平面与 z 平面之间的映射关系。可以看出, s 平面上的每一条宽度为 $2\pi/T$ 的横条都将重复地映射到 z 平面上, 每一横条的左半部分映射到 z 平面单位圆以内, 右半部分映射到 z 平面单位圆以外, s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆上。虚轴上每一段长为 $2\pi/T$ 的线段都映射到 z 平面单位圆的一个圆周上。这反映了 $H(z)$ 与 $H(s)$ 的周期延拓关系, 说明从 z 平面到 s 平面的映射不是单值映射。

图 5-17 脉冲响应不变法 s 平面与 z 平面的映射关系

2. 混叠失真

由脉冲响应不变法获得的数字滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与模拟滤波器的频率响应 $H(j\Omega)$ 的关系为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left[j\left(\Omega - \frac{2\pi n}{T}\right)\right] \quad (5-120)$$

若模拟滤波器的频率响应带限于折叠频率 $\Omega_s/2$ 以内, 即

$$H(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2} \quad (5-121)$$

则数字滤波器的频率响应才能不失真地重现模拟滤波的频率响应, 有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H(j\Omega), \quad |\Omega| \leq \pi \quad (5-122)$$

但是, 任何实际的模拟滤波器, 其频率响应都不可能是严格带限的, 因此不可避免地存在频谱的混叠现象, 图 5-18 给出了频谱混叠的示意说明。从图中可以看出, 用脉冲响应不变法设计出数字滤波器的频率响应在 $\omega = \pi$ 附近不同程度地偏离了模拟滤波器的频率响应, 严重时所设计的数字滤波器不能满足设计指标。对于此现象, 可通过减小抽样间隔或增大模拟滤波器在阻带的衰减, 使混叠引起的误差在可接受的范围内。对模拟高通和带阻滤波器, 由于存在严重的混叠, 因而不能用脉冲响应不变法将模拟高通和带阻滤波器转换为数字滤波器。因此, 用脉冲响应不变法设计数字滤波器的缺点是存在频谱混叠现象。

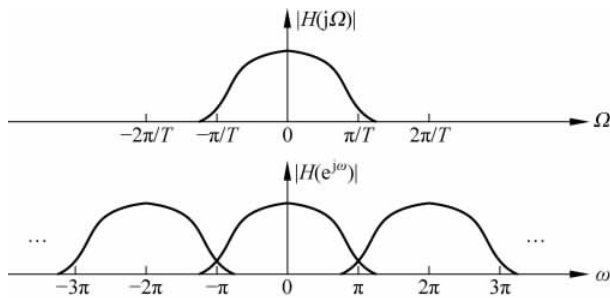


图 5-18 脉冲响应不变法的频率混叠现象

用脉冲响应不变法设计数字滤波器的优点是频率变换是线性的,即

$$\omega = T\Omega \quad (5-123)$$

式(5-123)表示了用脉冲响应不变法将模拟滤波器转换为数字滤波器时模拟频率与数字频率的对应关系。

5.4.2 脉冲响应不变法设计数字滤波器的方法

用脉冲响应不变法设计数字滤波器的方法步骤如下:

(1) 利用模拟率和数字频率的关系

$$\Omega = \omega/T \quad (5-124)$$

将数字滤波器的频率指标 ω_s 转换为模拟滤波器的频率指标 Ω_s 。

(2) 根据模拟滤波器的技术指标设计模拟滤波器 $H(s)$ 。

(3) 用脉冲响应不变法,将模拟滤波器 $H(s)$ 转换为数字滤波器 $H(z)$ 。

为消除式(5-120)中的因子 $1/T$ 对数字滤波器幅度响应的影响,可将 $H(s)$ 乘以常数因子 T ,然后对 $TH(s)$ 做部分分式展开,对展开的每一项做式(5-116)的变换即可获得数字滤波器 $H(z)$ 。

【例 5-10】 利用巴特沃思型模拟低通滤波器和脉冲响应不变法设计一数字低通滤波器,该滤波器满足下列指标: $\omega_p = \pi/3$, $A_p = 3\text{dB}$, $N=1$ 。

解 (1) 将数字低通指标转换成模拟低通指标。由式(5-124)得,模拟滤波器的通带截频为

$$\Omega_p = \omega_p/T$$

(2) 设计 $\Omega_p = \omega_p/T$, $A_p = 3\text{dB}$ 的一阶巴特沃思型模拟低通滤波器。由于 $A_p = 3\text{dB}$, 所以

$$\Omega_c = \Omega_p = \omega_p/T$$

根据式(5-31),有

$$H(s) = \frac{1}{s/\Omega_c + 1} = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

(3) 将模拟低通滤波器转换成数字低通滤波器。为了消除模、数滤波器频率响应幅度中的 $1/T$,常将 $TH(s)$ 转化成 $H(z)$ 。由式(5-116)得

$$H(z) = \frac{T\Omega_c}{1 - e^{-\Omega_c T} z^{-1}} = \frac{\omega_c}{1 - e^{-\omega_c} z^{-1}}$$

在数字滤波器的设计过程中,参数 T 可以被抵消,故常取 $T=1$ 。

【例 5-11】 利用巴特沃思型模拟低通滤波器和脉冲响应不变法设计一数字低通滤波器,该滤波器满足下列指标: $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_{st} = 0.6\pi$, $A_p \leq 2\text{dB}$, $A_s \geq 15\text{dB}$ 。

解 (1) 将数字低通指标转换成模拟低通指标。

$$\Omega_p = 0.2\pi, \quad \Omega_{st} = 0.6\pi, \quad A_p \leq 2\text{dB}, \quad A_s \geq 15\text{dB}$$

(2) 设计巴特沃思型模拟低通滤波器。由式(5-38)及式(5-40)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\Omega_{st}/\Omega_p)} = 2, \quad \Omega_c = \frac{\Omega_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{1/(2N)}} = 0.8013$$

由式(5-34)可得归一化原型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

由式(5-35)可得去归一化后原型低通滤波器的系统函数为

$$H_L(\bar{s}) = H_{L0}(\bar{s}/\Omega_c) = \frac{1}{\left(\frac{\bar{s}}{\Omega_c}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{\bar{s}}{\Omega_c} + 1} = \frac{0.6421}{\bar{s}^2 + 1.1356\bar{s} + 0.6421}$$

设 $\Omega_0=1$, 由式(5-82)可得模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(s) = H_L(\bar{s}) = \frac{0.6421}{s^2 + 1.1356s + 0.6421}$$

(3) 将模拟低通滤波器转换成数字低通滤波器。将 $H(s)$ 分解为

$$H(s) = \frac{-0.5678j}{s - s_1} + \frac{0.5678j}{s - s_2}$$

极点为 $s_1 = -0.5678 + 0.5654j$, $s_2 = -0.5678 - 0.5654j$ 。取 $T=1$, 由式(5-116)可得数字低通滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{-0.5678j}{1 - e^{s_1}z^{-1}} + \frac{0.5678j}{1 - e^{s_2}z^{-1}} = \frac{0.3448z^{-1}}{1 - 0.9571z^{-1} + 0.3212z^{-2}}$$

MATLAB 语句:

```
% 所设计数字滤波器指标
wp = 0.2 * pi; wst = 0.6 * pi; Ap = 2; As = 15; fs = 1;
% 巴特沃思型模拟低通滤波器指标
Wp = wp * fs; Wst = wst * fs;
N = buttord(Wp, Wst, Ap, As, 's');
Wc = Wp / (10 ^ (0.1 * Ap) - 1) ^ (1/N/2);
[numa, dena] = butter(N, Wc, 's');
% 数字滤波器指标
[numd, dend] =impinvar(numa, dena, fs);
w = linspace(0, pi, 512);
H = freqz(numd, dend, w);
% 数字滤波器幅度响应的幅度归一化
norm = max(abs(H));
numd = numd/norm;
plot(w/pi, 20 * log10(abs(H/norm))); grid;
xlabel('w'); ylabel('20log10|H(ejw)|');
% 计算所设计数字滤波器的 Ap 和 As
w = [wp, wst];
h = freqz(numd, dend, w);
fprintf('Ap = %.4f\n', -20 * log10(abs(h(1))));
fprintf('As = %.4f\n', -20 * log10(abs(h(2))));
```

图 5-19 画出了所设计滤波器的增益响应曲线。

【例 5-12】 利用脉冲响应不变法将下述模拟滤波器转化为数字滤波器, 假设 $T=2s$ 。

$$H_1(s) = \frac{\lambda}{(s + \beta)^2 + \lambda^2}$$

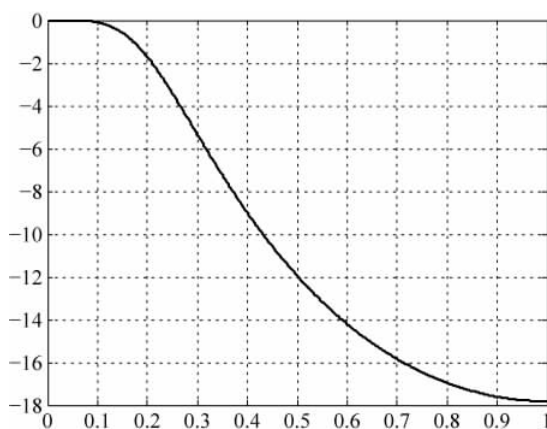


图 5-19 例 5-11 图

解 (1) 用部分分式法将 $H_1(s)$ 展开为

$$H_1(s) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s + \beta - j\lambda} - \frac{1}{s + \beta + j\lambda} \right)$$

由式(5-110)得

$$H_1(z) = \frac{T}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{-(\beta - j\lambda)T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-(\beta + j\lambda)T} z^{-1}} \right] = \frac{T e^{-\beta T} \sin(\lambda T) z^{-1}}{1 - 2e^{-\beta T} \cos(\lambda T) z^{-1} + e^{-2\beta T} z^{-2}}$$

5.5 双线性变换法

双线性变换法是一种能克服脉冲响应不变法频谱混叠的滤波器设计方法,是常用的 IIR 滤波器设计方法。

5.5.1 基本原理

利用脉冲响应不变法将模拟滤波器转换为数字滤波器时,模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间为多值对应的关系,这是由于 $H(j\Omega)$ 的周期化造成的,从而使数字滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 产生混叠现象。利用双线性变换法将模拟滤波器转换为数字滤波器时,可使模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间为一一对应的关系,从根本上克服了脉冲响应不变法存在的混叠现象。

双线性变换是一种应用非常广泛的将模拟滤波器转换为数字滤波器的方法,双线性变换的基本思想是利用数值积分的方法将模拟滤波器系统转换为数字滤波器系统。

假设一阶模拟滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{s + a} \quad (5-125)$$

该系统可用微分方程描述为

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t) \quad (5-126)$$

在区间 $[(n-1)T, nT]$ 内进行积分,得

$$\int_{(n-1)T}^{nT} \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{(n-1)T}^{nT} [x(t) - ay(t)] dt \quad (5-127)$$

左端展开得

$$y(nT) - y[(n-1)T] = \int_{(n-1)T}^{nT} [x(t) - ay(t)] dt = \int_{(n-1)T}^{nT} x(t) dt - a \int_{(n-1)T}^{nT} y(t) dt \quad (5-128)$$

图 5-20 给出了近似计算曲线面积的示意说明。

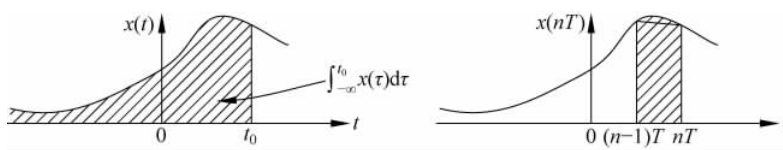


图 5-20 连续面积的近似计算

图 5-20 中,曲线面积近似等于梯形面积,故

$$\int_{(n-1)T}^{nT} x(t) dt \approx \frac{T}{2} \{x(nT) + x[(n-1)T]\} \quad (5-129)$$

同理有

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y(t) dt \approx \frac{T}{2} \{y(nT) + y[(n-1)T]\} \quad (5-130)$$

将式(5-129)及式(5-130)代入式(5-128)并整理得

$$y(nT) - y[(n-1)T] \approx \frac{T}{2} \{x(nT) - ay(nT) + x[(n-1)T] - ay[(n-1)T]\} \quad (5-131)$$

设 $y(n) = y(nT)$, $x(n) = x(nT)$, 则有

$$(1 + aT/2)y(n) - (1 - aT/2)y(n-1) \approx \frac{T}{2} [x(n) + x(n-1)] \quad (5-132)$$

对式(5-132)两端进行 z 变换并整理得

$$H(z) \approx \frac{(T/2)(1 + z^{-1})}{(1 + aT) - (1 - aT)z^{-1}} = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + a} \quad (5-133)$$

比较式(5-125)和式(5-133)得 $H(s)$ 与 $H(z)$ 的关系为

$$H(z) \approx H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (5-134)$$

从 s 平面到 z 平面的映射为

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (5-135)$$

式(5-135)为双线性变换公式。

由式(5-135)得

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s} \quad (5-136)$$

令 $s = \sigma + j\Omega$, 则式(5-136)可写为

$$z = \frac{2/T + \sigma + j\Omega}{2/T - \sigma - j\Omega} \quad (5-137)$$

对式(5-137)两端取模得

$$|z| = \sqrt{\frac{(2/T + \sigma)^2 + \Omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \Omega^2}} \quad (5-138)$$

从式(5-138)可以看出, 当 $\sigma < 0$ 时, $|z| < 1$, 即 s 平面的左半平面映射到 z 平面的单位圆内。当一个模拟系统是因果稳定的系统时, 其极点都落在 s 平面的左半平面。经过双线性变换后, 这些极点都被映射到 z 平面的单位圆内。所以一个因果稳定的模拟系统经双线性变换后是一个因果稳定的数字系统。当 $\sigma = 0$ 时, $|z| = 1$, 即 s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆上。当 $\sigma > 0$ 时, $|z| > 1$, 即 s 平面的右半平面映射到 z 平面的单位圆外。

下面研究模拟频率 Ω 和数字频率 ω 的关系。

令 $s = j\Omega$, $z = e^{j\omega}$, 由式(5-135)得

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

整理得

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5-139)$$

从式(5-139)可以看出, 模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间是一一对应的关系, 因此 $H(e^{j\omega})$ 的频谱不会产生混叠现象。

从图 5-21 可以看出, 若模拟滤波器 $H(s)$ 是一个通带截频为 $\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$, 阻带截频为 $\Omega_{st} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_{st}}{2}\right)$ 的模拟低通滤波器, 则经过双线性变换后获得的数字滤波器也是一个低通滤波器, 数字滤波器的通带截频和阻带截频分别为 ω_p 和 ω_{st} 。

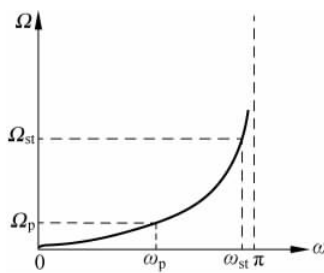


图 5-21 模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间的对应关系

图 5-22 画出了一个模拟滤波器的幅频响应及该滤波器经过双线性变换后的数字滤波器的幅度响应曲线。从图中看出, 只有当模拟滤波器的幅频响应为分段常数时, 双线性变换后的数字滤波器才能保持模拟滤波器的幅度响应。在其他情况下, 数字滤波器的

幅度响应会发生畸变。图 5-22 中模拟滤波器在过渡带的幅度响应是线性的,而经过双线性变换后的数字滤波器的幅度响应则是非线性的。所以双线性变换法只适合于设计幅度响应为分段常数的数字滤波器。

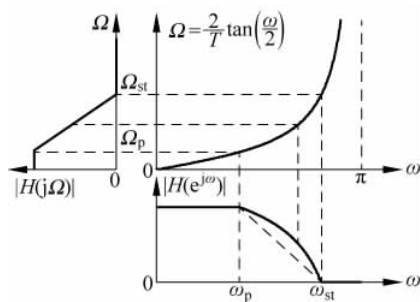


图 5-22 双线性变换的频率非线性对数字滤波器幅度响应的影响

5.5.2 设计方法

用双线性变换法设计数字滤波器的步骤如下。

(1) 由模拟频率和数字频率的关系

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

将数字滤波器的频率指标 ω_k 转换为模拟滤波器的频率指标 Ω_k 。

(2) 由模拟滤波器的设计指标确定 $H(s)$ 。

(3) 用双线性变换法公式将 $H(s)$ 转换为 $H(z)$ 。

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

参数 T 的取值和最终的设计结果无关,为简单起见,一般取 $T=2$ 。

【例 5-13】 利用巴特沃思型模拟低通滤波器和双线性变换法设计满足指标 $\omega_p = \pi/3, A_p = 3\text{dB}, N=1$ 的数字低通滤波器,并与脉冲响应不变法设计的数字低通滤波器比较。

解 (1) 将数字低通滤波器的频率指标转换为模拟滤波器的频率指标。由式(5-139)得模拟低通滤波器的通带截频为

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

(2) 设计 3dB 截频为 Ω_p 的一阶巴特沃思原型模拟低通滤波器。即

$$N = 1, \quad \Omega_c = \Omega_p$$

由式(5-31)可得归一化一阶巴特沃思原型模拟低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s} + 1}$$

由式(5-35)可得去归一化后原型低通滤波器的系统函数为

$$H_L(\bar{s}) = H_{L0}(\bar{s}/\Omega_c) = \frac{1}{\bar{s}/\Omega_c + 1} = \frac{1}{\frac{\bar{s}T}{2\tan(\omega_p/2)} + 1}$$

设 $\Omega_0=1$, 由式(5-82)可得模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(s) = H_L(\bar{s}) = \frac{1}{\frac{sT}{2\tan(\omega_p/2)} + 1}$$

(3) 用双线性变换法将模拟滤波器转换为数字滤波器。由式(5-133)得

$$H_1(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\tan(\omega_p/2)(1+z^{-1})}{1 + \tan(\omega_p/2) + [\tan(\omega_p/2) - 1]z^{-1}} = \frac{0.366 + 0.366z^{-1}}{1 - 0.2697z^{-1}}$$

由式(5-116)得用脉冲响应不变法设计的数字低通滤波器的系统函数为

$$H_2(z) = \frac{T\Omega_c}{1 - e^{-\Omega_c T} z^{-1}} = \frac{\omega_c}{1 - e^{-\omega_c} z^{-1}} = \frac{\omega_p}{1 - e^{-\omega_p} z^{-1}} = \frac{\pi/3}{1 - e^{-\pi/3} z^{-1}}$$

(4) 与脉冲响应不变法设计的数字低通滤波器的比较。

令 $z=e^{j\omega}$, 可分别获得两者的幅度响应 $H_1(e^{j\omega})$ 及 $H_2(e^{j\omega})$ 。图 5-23 给出了用两种方法设计的数字滤波器的幅度响应曲线图。

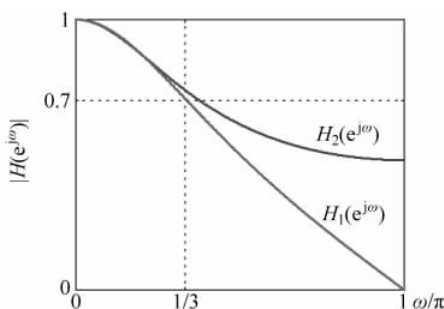


图 5-23 两种方法设计数字滤波器的幅度响应对比

从图 5-23 中可以看出, 脉冲响应不变法存在频谱混叠, 所设计的数字低通滤波器不满足给定指标。而双线性变换法不存在频谱混叠, 所设计的数字低通滤波器满足给定指标。

从该例可以看出, 参数 T 的取值和最终的设计结果无关。

【例 5-14】 利用双线性变换法设计满足下列指标的切贝雪夫 I 型低通数字滤波器: $\omega_p=0.1\pi$, $\omega_{st}=0.4\pi$, $A_p\leq 1\text{dB}$, $A_s\geq 25\text{dB}$ 。

解 本题用 MATLAB 程序求解, 这样会节省许多工作量。

(1) 将数字低通指标转换成模拟低通指标。取 $T=2$, 则 $f_s=1/T=0.5$ 。由式(5-139)得

$$\Omega_p = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 0.1584, \quad \Omega_{st} = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_{st}}{2}\right) = 0.7265$$

(2) 设计切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器。

由 MATLAB 语句 `[N, Wc]=cheblord(0.1584, 0.7256, 1, 25, 's')`

及 $[\text{num}, \text{den}] = \text{cheby1}(N, 1, W_c, 's')$

可得模拟滤波器的分子多项式及分母多项式系数分别为

$$\begin{aligned} \text{num} &= 0 \quad 0 \quad 0.0246 \\ \text{den} &= 1.0000 \quad 0.1739 \quad 0.0277 \end{aligned}$$

利用该两式可得

$$H(s) = \frac{0.0246}{s^2 + 0.1739s + 0.0277}$$

由 MATLAB 语句 $[\text{numd}, \text{dend}] = \text{bilinear}(\text{num}, \text{den}, 0.5)$

可得经双线性变换后的数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 的分子多项式及分母多项式系数分别为

$$\begin{aligned} \text{numd} &= 0.0205 \quad 0.0410 \quad 0.0205 \\ \text{dend} &= 1.0000 \quad -1.6185 \quad 0.7106 \end{aligned}$$

利用该两式可得

$$H(z) = \frac{0.0205 + 0.0410z^{-1} + 0.0205z^{-2}}{1 - 1.6185z^{-1} + 0.7106z^{-2}} = \frac{0.0205(1 + z^{-1})^2}{1 - 1.6185z^{-1} + 0.7106z^{-2}}$$

MATLAB 语句:

```
% 所设计数字滤波器指标
wp = 0.1 * pi; wst = 0.4 * pi; Ap = 1; As = 25; fs = 0.5;
% 切贝雪夫 I 型模拟低通滤波器设计
Wp = 2 * fs * tan(wp/2)
Wst = 2 * fs * tan(wst/2)
[N, Wc] = cheblord(Wp, Wst, Ap, As, 's')
[num, den] = cheby1(N, Ap, Wc, 's')
% 用双线性变换法设计数字滤波器
[numd, dend] = bilinear(num, den, fs)
w = linspace(0, pi, 512);
H = freqz(numd, dend, w);
% 数字滤波器幅度响应的幅度归一化
norm = max(abs(H));
numd = numd/norm;
plot(w/pi, 20 * log10(abs(H/norm)));
axis([0 0.5 -40 0]);
grid; xlabel('w/pi'); ylabel('20log10|H(ejw)|');
% 计算所设计数字滤波器的 Ap 和 As
w = [wp, wst]; h = freqz(numd, dend, w);
fprintf('Ap = %.4f\n', -20 * log10(abs(h(1))));
fprintf('As = %.4f\n', -20 * log10(abs(h(2))));
```

图 5-24 画出了所设计滤波器的增益响应曲线。

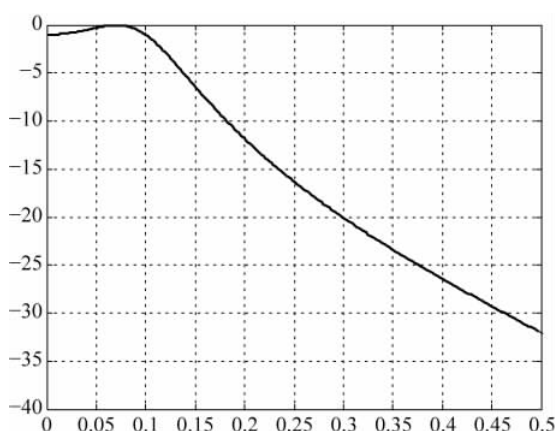


图 5-24 例 5-14 图

【例 5-15】 试设计满足下列指标的巴特沃思型数字带阻滤波器：

$$\omega_{p1} = 2.8113\text{rad/s}, \quad \omega_{p2} = 2.9880\text{rad/s}, \quad A_p \leq 1\text{dB},$$

$$\omega_{st1} = 2.9203\text{rad/s}, \quad \omega_{st2} = 2.9603\text{rad/s}, \quad A_s \geq 10\text{dB}$$

解 脉冲响应不变法不适合设计数字带阻滤波器,因此采用双线性变换法设计。

(1) 将数字带阻滤波器指标转换成模拟带阻滤波器指标。取 $T=2$, 利用 $\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$ 将数字滤波器的指标转换为模拟滤波器的指标。

$$\Omega_{p1} = 6\text{rad}, \quad \Omega_{p2} = 13\text{rad}, \quad \Omega_{st1} = 9\text{rad}, \quad \Omega_{st2} = 1\text{rad}, \quad A_p \leq 1\text{dB}, \quad A_s \geq 10\text{dB}$$

(2) 将带阻滤波器的指标转换成原型低通滤波器指标。由式(5-105)及式(5-106)得

$$B = \Omega_{st2} - \Omega_{st1} = 2, \quad \Omega_0 = \sqrt{\Omega_{st1}\Omega_{st2}} = 9.9499$$

由式(5-109)、式(5-110)及式(5-111)得

$$\bar{\Omega}_p = \max\left(\left|\frac{B\Omega_{p1}}{-\Omega_{p1}^2 + \Omega_0^2}\right|, \left|\frac{B\Omega_{p2}}{-\Omega_{p2}^2 + \Omega_0^2}\right|\right) = 0.3714$$

取 $\bar{\Omega}_{st} = 1$ 。

(3) 设计原型巴特沃思型模拟低通滤波器。由式(5-38)及式(5-40)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg(\bar{\Omega}_{st}/\bar{\Omega}_p)} = 2, \quad \bar{\Omega}_c = \frac{\bar{\Omega}_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{1/(2N)}} = 0.5774$$

由式(5-34)可得归一化原型低通滤波器的系统函数为

$$H_{L0}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

由式(5-35)可得去归一化后原型低通滤波器的系统函数为

$$H_L(\bar{s}) = H_{L0}(\bar{s}/\bar{\Omega}_c) = \frac{1}{\left(\frac{\bar{s}}{\bar{\Omega}_c}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{\bar{s}}{\bar{\Omega}_c} + 1} = \frac{0.3333}{\bar{s}^2 + 0.8165\bar{s} + 0.3333}$$

(4) 将原型模拟低通转换为模拟带阻滤波器。由式(5-101)得模拟带阻滤波器的系统函数为

$$H_{BS}(s) = H_L(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s - \frac{B_0}{s^2 + \Omega_0^2}}{s^2 + \Omega_0^2}} = \frac{s^4 + 198s^2 + 9801}{s^4 + 4.899s^3 + 210s^2 + 485s + 9801}$$

(5) 将模拟带阻滤波器转换成数字带阻滤波器。取 $T=2$, 由式(5-134)得

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.9522 + 3.7327z^{-1} + 5.5624z^{-2} + 3.7327z^{-3} + 0.9522z^{-4}}{1 + 3.8241z^{-1} + 5.5601z^{-2} + 3.6412z^{-3} + 0.9067z^{-4}}$$

【例 5-16】 利用双线性变换法将下列模拟滤波器转化为数字滤波器, 假设 $T=2s$ 。

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}$$

解 由式(5-134)得

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{2}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1\right) \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 4\right)} = \frac{\frac{1}{9}(1+z^{-1})^2}{1 - \frac{1}{9}z^{-2}}$$

5.6 IIR 滤波器的基本结构

IIR 数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 无限长, 其系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面上存在极点, 因而结构上存在反馈回路, 其结构是递归的。实现 IIR 数字滤波器的结构主要有直接型、级联型和并联型三种基本结构。

5.6.1 直接型结构

IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 的一般表达式为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} \quad (5-140)$$

将式(5-140)表达为

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} \quad (5-141)$$

整理得

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} - Y(z) \sum_{j=1}^N a_j z^{-j} \quad (5-142)$$

对式(5-142)作反变换得

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (5-143)$$

设 $M=N$, 可得到 IIR 滤波器的直接 I 型结构图, 如图 5-25 所示。

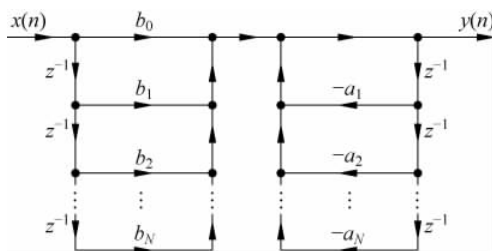


图 5-25 IIR 数字滤波器直接 I 型结构图

对于式 (5-140), 令

$$H_1(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}}$$

则有

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad (5-144)$$

交换 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 两级联子系统的级联顺序并不影响整个系统的特性, 则 $H(z)$ 可表达为

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (5-145)$$

将图 5-25 中左右两个子系统对调, 并将 $H_2(z)$ 系统的延迟器和 $H_1(z)$ 系统的延迟器合为一体, 即可得到如图 5-26(a) 所示的信号流图, 这种形式的结构称为直接 II 型结构。将直接 I 型滤波器和直接 II 型滤波器的结构相比较, 可以看出, 直接 II 型滤波器的延时器数目比直接 I 型滤波器的延时器数目减少了一半。由转置定理可知, 在信号流图中, 若改变所有支路的传输方向, 并交换输入和输出信号的位置, 那么系统函数不变。根据以上结论, 可以得到如图 5-26(b) 所示的转置直接 II 型滤波器的结构。直接滤波器和转置

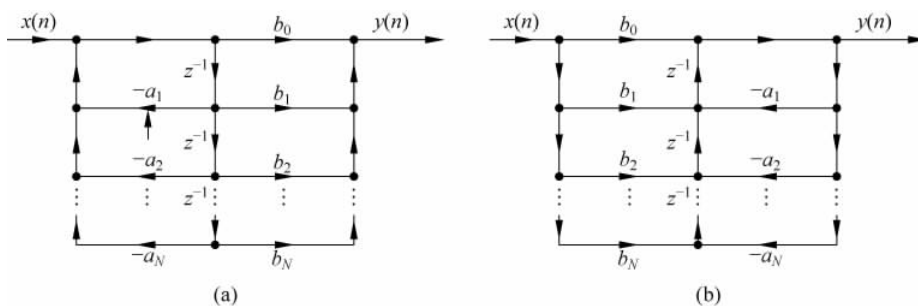


图 5-26 IIR 数字滤波器直接 II 型结构

(a) 直接 II 型结构; (b) 转置直接 II 型结构

直接Ⅱ型滤波器的结构均只有 N 个延时器,对无限精度系统,这两种结构的系统函数相同,两者没有区别,但是,对于有限字长的系统,两者产生的误差却不相同。

直接结构的滤波器突出的优点是结构简单、直观,所使用的延时器数量少,结构便于实现。其缺点是改变某一系数 $\{a_k\}$ 将影响所有的极点,改变某一系数 $\{b_k\}$ 将影响所有的零点。而且,该种结构的滤波器对有限字长过于敏感,易出现不稳定现象。对于三阶以上的 IIR 数字滤波器,基本不采用该种结构,而采用后面介绍的级联型及并联型等结构。

5.6.2 级联型结构

将系统函数的分子和分母都分解为一阶多项式的乘积即可获得级联型结构。对于物理可实现系统,其系统函数的分子、分母多项式均为实系数。若系统有复数零点、极点,它们一定成对出现。将滤波器系统函数 $H(z)$ 的分子和分母分解为一阶和二阶实系数因子之积的形式,其表达式可表示为

$$H(z) = K \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - z_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \alpha_{1,k} z^{-1} + \alpha_{2,k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 + \beta_{1,k} z^{-1} + \beta_{2,k} z^{-2})} \quad (5-146)$$

为方便在软硬件系统中实现零极点的设置,习惯上将共轭复数零点、极点用二阶实系数因子表示,将一阶实系数因子也用二阶因子表示,此时系统函数可表示为

$$H(z) = A \prod_{i=1}^L \frac{1 + \alpha_{1,i} z^{-1} + \alpha_{2,i} z^{-2}}{1 + \beta_{1,i} z^{-1} + \beta_{2,i} z^{-2}} = A \prod_{i=1}^L H_i(z) \quad (5-147)$$

式(5-147)中, $H_i(z)$ 称为滤波器的二阶基本节, L 表示 $N/2 \sim N$ 范围内的某一整数。根据式(5-147),先画出各子系统的直接型图,然后将各子系统级联,就可得到滤波器的级联型结构图,如图 5-27 所示。从图中可以看出,整个滤波器系统可由 L 个二阶基本节级联构成。当子系统是一阶系统时,只需要在式(5-146)中,令 $\alpha_{2i} = \beta_{2i} = 0$ 即可。

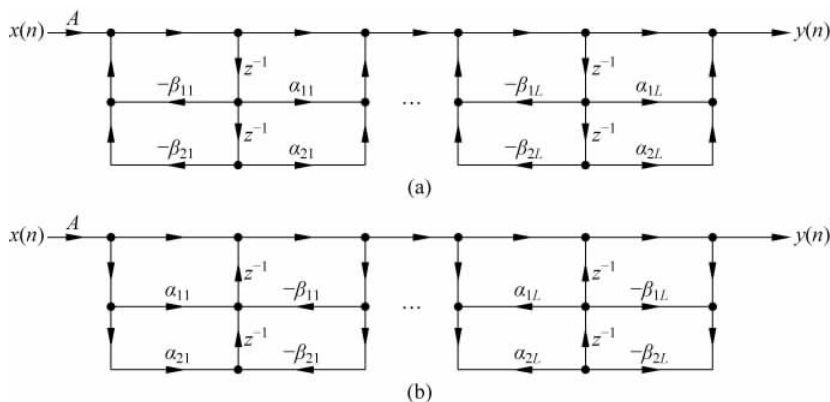


图 5-27 IIR 数字滤波器级联型结构图

(a) 直接Ⅱ型结构的级联型结构图; (b) 转置直接Ⅱ型结构的级联型结构图

级联型结构的优点是所需的存储单元较少,在所实现的硬件系统中,可由一个二阶基本节时分复用而获得所需滤波器。另外,级联型结构中,每个基本节系数变化只影响该子系统的零极点,因此易于准确地实现系统零极点的设计,滤波器的频率特性也易于调整。而且,级联型结构对滤波器系数变化的敏感度较小,受有限字长的影响比直接性滤波器低,改变各二阶节级联的先后顺序,滤波器的特性可得到优化。

【例 5-17】 一个滤波器由下面差分方程描述,求出它的级联形式结构并画出零极点图。

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) \\ = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

解 本例采用 MATLAB 程序求解。

MATLAB 程序:

```
b = [1, -3, 11, -27, 18];
a = [16, 12, 2, -4, -1];
[sos, g] = tf2sos(b, a);
[zer, pol] = tf2zp(b, a);
zplane(zer, pol); disp('sos'); disp(sos);
disp('g'); disp(g);
disp('zer'); disp(zer);
disp('pol'); disp(pol);
```

程序运行结果为

```
sos = 1.0000    -3.0000    2.0000    1.0000   -0.2500   -0.1250
      1.0000    0.0000    9.0000    1.0000    1.0000    0.5000
g = 0.0625
zer = -0.0000 + 3.0000i
      -0.0000 - 3.0000i
      2.0000
      1.0000
pol = 0.5000
      -0.5000 + 0.5000i
      -0.5000 - 0.5000i
      -0.2500
```

其中, $-0.0000 + 3.0000i$ 和 $-0.0000 - 3.0000i$ 两个零点与 $-0.5000 + 0.5000i$ 和 $-0.5000 - 0.5000i$ 两个极点合并成的二阶基本节为

$$H_1(z) = \frac{(1 - j3z^{-1})(1 + j3z^{-1})}{[1 - (-0.5 + j0.5)z^{-1}][1 - (-0.5 - j0.5)z^{-1}]} = \frac{1 + 9z^{-2}}{1 + 0.5z^{-2}}$$

2.0000 和 1.0000 两个零点与 0.5000 和 -0.2500 两个极点合并成的二阶基本节为

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - (-0.25z^{-1})} = \frac{0.5 - 1.5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.25z^{-1} - 0.125z^{-2}}$$

所以
$$H(z) = 0.0625 \frac{0.5 - 1.5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.25z^{-1} - 0.125z^{-2}} \frac{1 + 9z^{-2}}{1 + 0.5z^{-2}}$$

$H(z)$ 的零极点如图 5-28 所示。

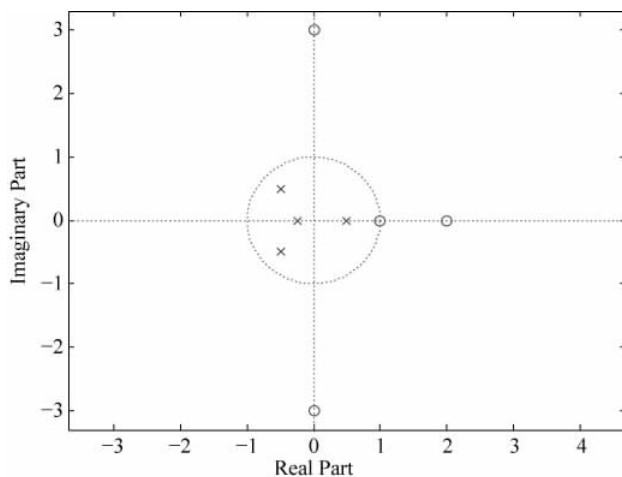


图 5-28 例 5-17 的零极点图

$H(z)$ 的结构如图 5-29 所示。

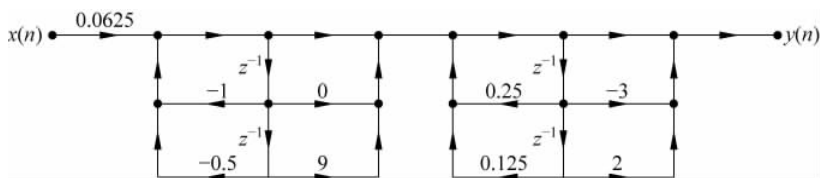


图 5-29 系统的级联结构

5.6.3 并联型结构

将滤波器的系统函数 $H(z)$ 按部分分式法展开成若个求和项, 即可得并联型结构。在部分分式展开的过程中, 将由共轭复数形成的极点所对应的部分分式合并为二阶实系数式, 并且系统中的一阶基本节采用二阶基本节的形式表示, 则 $H(z)$ 可表达为

$$H(z) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^L \frac{\gamma_{0,k} + \gamma_{1,k}z^{-1}}{1 - \beta_{1,k}z^{-1} - \beta_{2,k}z^{-2}} \quad (5-148)$$

根据式(5-148), 可得到并联型结构图, 如图 5-30 所示。

从结构的构造特点上可以看出, 并联型结构的滤波器运行速度较快, 各基本节之间的误差互不影响。而且其极点的位置可单独调节。但不能直接调整零点, 因为各子系统的零点不是整个系统的零点。当要求准确传输零点时, 应采用级联型结构的滤波器。在

有限字长的条件下,系数的量化误差会导致 IIR 子系统的极点与 FIR 子系统的零点不能抵消。如果系数的量化误差使极点移到单位圆外,将造成 FIR 系统不稳定。因此通常在 r 圆上进行。

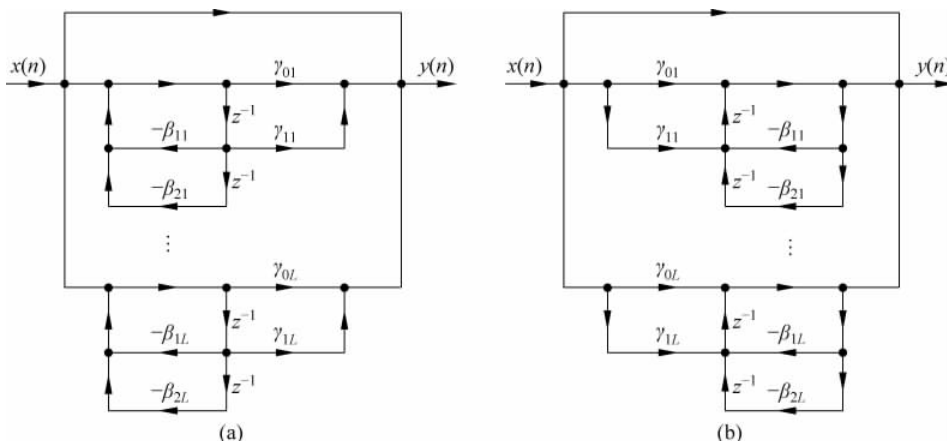


图 5-30 IIR 数字滤波器的并联型结构

(a) 直接 II 型结构的并联型结构; (b) 转置直接 II 型结构的并联型结构

【例 5-18】 求例 5-17 中差分方程的并联结构。

解 本例用 MATLAB 程序求解。

MATLAB 程序:

```
b = [1, -3, 11, -27, 18]; a = [16, 12, 2, -4, -1];
[r, p, k] = residuez(b, a); disp('r'); disp(r); disp('p'); disp(p); disp('k'); disp(k);
```

运行结果为

```
r = -5.0250 - 1.0750i, -5.0250 + 1.0750i, 0.9250, 27.1875
p = -0.5000 + 0.5000i, -0.5000 - 0.5000i, 0.5000, -0.2500, k = -18
```

所以

$$H(z) = -18 + \frac{-5.025 - 1.075j}{1 - (-0.5 + 0.5j)z^{-1}} + \frac{-5.025 + 1.075j}{1 - (-0.5 - 0.5j)z^{-1}} \\ + \frac{0.925}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{27.1875}{1 + 0.25z^{-1}}$$

将该式右端第二、三项合并,第四、五项合并,可得

$$H(z) = -18 + \frac{-10.05 - 3.95z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}} + \frac{28.1125 - 13.3625z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} - 0.125z^{-2}}$$

$H(z)$ 的结构如图 5-31 所示。

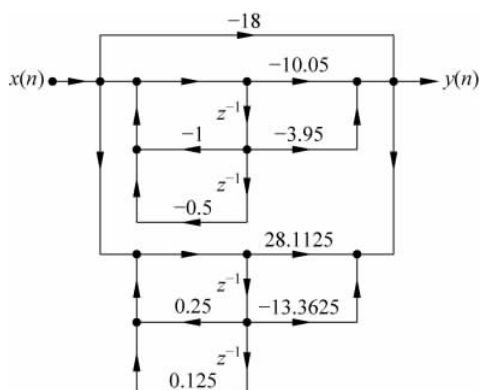


图 5-31 例 5-18 系统的并联结构

【例 5-19】 已知某三阶数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{3 + \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

试画出其直接型、级联型和并联型结构图。

解 本例用公式法求解。

(1) 直接型

将系统函数 $H(z)$ 表达为

$$H(z) = \frac{3 + \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{6}z^{-3}}$$

直接型结构图如图 5-32(a)所示。

(2) 级联型

将系统函数 $H(z)$ 表达为一阶、二阶实系数分式之积,即

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{3 + \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

级联型结构图如图 5-32(b)所示。

(3) 并联型

用部分分式法可将 $H(z)$ 表达为部分分式之和的形式,即

$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

并联型结构图如图 5-32(c)所示。

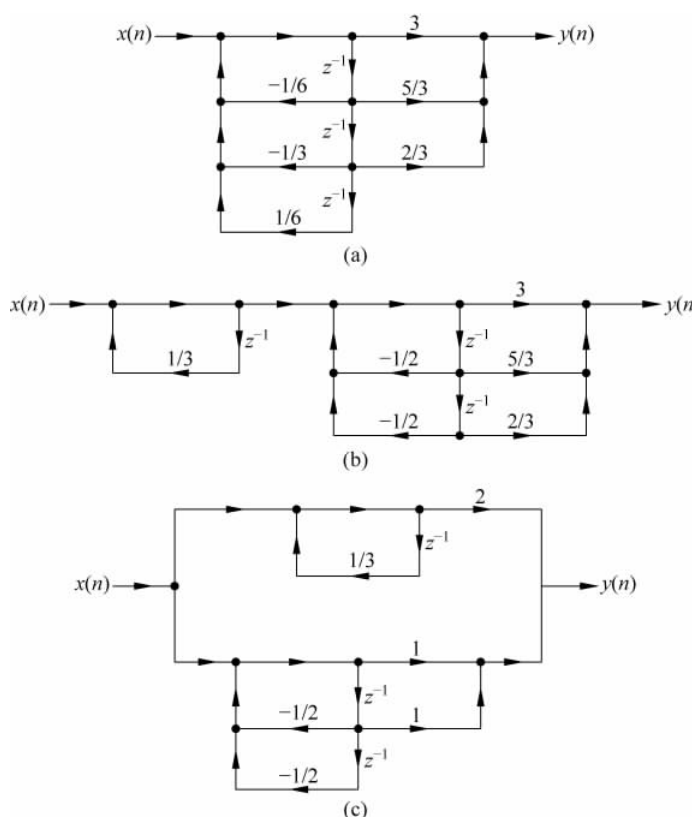


图 5-32 例 5-19 的直接 II 型结构图

(a) 直接型; (b) 级联型; (c) 并联型

5.7 与本章相关的 MATLAB 函数

1. 利用 MATLAB 语言设计模拟低通滤波器

MATLAB 信号处理工具箱提供了常用的设计模拟低通滤波器的函数。在实际应用中,可方便地调用这些函数来完成模拟滤波器的设计。

(1) 巴特沃思型低通滤波器

$$[N, W_c] = \text{buttord}(W_p, W_{st}, A_p, A_s, 's')$$

函数 `buttord` 的输入参数 W_p (rad/s) 和 W_{st} (rad/s) 分别表示滤波器的通带和阻带截止频率, A_p (dB) 和 A_s (dB) 表示滤波器的通带和阻带衰减, 's' 表示所设计的是模拟滤波器。函数 `buttord` 的返回参数 N 为 BW 型滤波器的阶数, W_c 为 Butterworth 型低通滤波器的 3dB 截止频率。由带阻方程确定, 由参数 N, W_c 得出的滤波器在阻带正好满足设计指标, 而在通带存在裕量。

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{butter}(N, W_c, 's')$$

确定阶数为 N , 3dB 截频为 W_c (radian/s) 的 Butterworth 型低通滤波器分子和分母多项式。's' 表示模拟域。

$$[z, p, k] = \text{butter}(N)$$

确定 N 阶归一化的巴特沃思型低通滤波器的零点、极点和增益 (gain)。

(2) Chebyshev I 型低通滤波器

$$[N, W_c] = \text{cheblord}(W_p, W_{st}, A_p, A_s, 's')$$

确定模拟 Chebyshev I 型低通滤波器的阶数 N 及通带截频 W_c , 其中 $W_c = W_p$ (rad/s)。

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{cheby1}(N, A_p, W_c, 's')$$

确定阶数为 N , 3dB 截频为 W_c (radian/s) 的 Chebyshev I 型低通滤波器分子和分母多项式。's' 表示模拟域。

$$[z, p, k] = \text{cheblap}(N, A_p)$$

确定 N 阶归一化的 Chebyshev I 型低通滤波器的零点、极点和增益 (Gain)。

(3) Chebyshev II 型低通滤波器

$$[N, W_c] = \text{cheb2ord}(W_p, W_{st}, A_p, A_s, 's')$$

确定模拟 Chebyshev II 型低通滤波器的阶数 N 及通带截频 W_c , 其中 $W_c = W_p$ (rad/s)。

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{cheby2}(N, A_p, W_c, 's')$$

确定阶数为 N , 3dB 截频为 W_c (radian/s) 的 Chebyshev II 型低通滤波器分子和分母多项式。's' 表示模拟域。

$$[z, p, k] = \text{cheb2ap}(N, A_p)$$

确定 N 阶归一化的 Chebyshev I 型低通滤波器的零点、极点和增益 (Gain)。

(4) 椭圆滤波器

$$[N, W_c] = \text{ellipord}(W_p, W_{st}, A_p, A_s, 's')$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ellip}(N, A_p, W_c, 's')$$

函数 `ellipord` 的返回参数 N 表示椭圆滤波器的阶数, $W_c = W_p$ 。

函数 `ellip` 确定阶数 N , 通带衰减为 A_p , 阻带衰减为 A_s , 通带内截频为 W_c 的椭圆滤波器系统函数 $H_{LP}(s)$ 的分子多项式和分母多项式。在滤波器的阶数确定后, 采用椭圆滤波器设计的第一种参数调整方法, 重新计算参数 k_1 。因而所设计滤波器的阻带衰减超过设计指标, 其他指标满足设计指标。

2. 利用 MATLAB 实现模拟域频率变换

(1) 低通到高通的变换

$$[\text{numt}, \text{dent}] = \text{lp2hp}(\text{num}, \text{den}, W_0)$$

(2) 低通到带通的变换

$$[\text{numt}, \text{dent}] = \text{lp2bp}(\text{num}, \text{den}, W_0, B)$$

(3) 低通到带阻的变换

$$[\text{numt}, \text{dent}] = \text{lp2bs}(\text{num}, \text{den}, W_0, B)$$

3. 利用脉冲响应不变法设计数字滤波器

MATLAB 提供的 `impinvar(num,den,Fs)` 函数,可实现利用脉冲响应不变法将模拟滤波器转化为数字滤波器,其调用格式为

$$[\text{numd},\text{dend}]=\text{impinvar}(\text{num},\text{den},\text{fs})$$

式中,num 和 den 分别表示模拟滤波器系统函数 $H(s)$ 的分子多项式系数和分母多项式系数;fs 是抽样频率,单位为 Hz; numd 和 dend 分别表示数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 的分子多项式系数和分母多项式系数。

4. 利用双线性变换法设计数字滤波器

MATLAB 提供的 `bilinear(num,den,fs)` 函数可以实现双线性变换,其调用形式为

$$[\text{numd},\text{dend}]=\text{bilinear}(\text{num},\text{den},\text{fs})$$

式中,num 和 den 分别表示模拟滤波器系统函数 $H(s)$ 的分子多项式和分母多项式系数;fs 为抽样频率,其数值为 $\text{fs}=1/T$ 。numd 和 dend 分别表示数字滤波器 $H(z)$ 的分子多项式和分母多项式系数。

习题

5-1 试用巴特沃思型及切贝雪夫 I 型低通滤波器模型,设计满足下列指标的模拟低通滤波器。

$$f_p = 2.1\text{kHz}, \quad f_{st} = 8\text{kHz}, \quad A_p = 0.5\text{dB}, \quad A_s = 30\text{dB}$$

5-2 试分别用巴特沃思型和切贝雪夫 I 型滤波器模型,设计满足下列指标的模拟低通滤波器。

$$0.8 \leq |H(j\Omega)| \leq 1, \quad 0 \leq \Omega \leq 5$$

$$|H(j\Omega)| \leq 0.1, \quad \Omega \geq 10$$

5-3 试用巴特沃思型低通滤波器模型设计截频 $\Omega_p=5\text{rad/s}$,通带衰减 $A_p=1\text{dB}$ 的三阶模拟高通滤波器。

5-4 设计满足下列指标的模拟巴特沃思型高通滤波器。

$$f_p = 5\text{kHz}, \quad f_{st} = 1\text{kHz}, \quad A_p = 1\text{dB}, \quad A_s = 40\text{dB}$$

5-5 试用一阶巴特沃思型低通滤波器模型设计中心频率为 $\Omega_0 \text{ rad/s}$,通带宽度为 Brad/s ,通带衰减 $A_p=3\text{dB}$ 的一阶模拟带通滤波器。

5-6 试用一阶巴特沃思型低通滤波器模型设计中心频率为 $\Omega_0 \text{ rad/s}$,通带宽度为 Brad/s ,通带衰减 $A_p=3\text{dB}$ 的一阶模拟带阻滤波器。

5-7 用脉冲响应不变法及巴特沃思型模拟滤波器模型设计满足下列指标的带通数字滤波器。

$$\omega_0 = 0.5\pi \text{ rad}, \quad \omega_{p2} = 0.55\pi \text{ rad}, \quad \omega_{p1} = 0.45\pi \text{ rad}, \quad A_p = 3\text{dB},$$

$$\omega_{st2} = 0.6\pi \text{ rad}, \quad \omega_{st1} = 0.4\pi \text{ rad}, \quad A_s = 10\text{dB}$$

5-8 用脉冲响应不变法及切贝雪夫 I 型滤波器模型设计满足下列指标的数字带通滤波器。

$$\omega_0 = 0.5\pi \text{ rad}, \quad \omega_{p2} = 0.55\pi \text{ rad}, \quad \omega_{p1} = 0.45\pi \text{ rad}, \quad A_p = 3\text{dB},$$

$$\omega_{st2} = 0.6\pi \text{ rad}, \quad \omega_{st1} = 0.4\pi \text{ rad}, \quad A_s = 10\text{dB}$$

5-9 用双线性变换法及巴特沃思型模拟滤波器模型,设计满足下列指标的数字低通滤波器。

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad}, \quad \omega_{st} = 0.6\pi \text{ rad}, \quad A_p \leq 2\text{dB}, \quad A_s \geq 15\text{dB}$$

5-10 用双线性变换法及三阶巴特沃思型模拟滤波器模型设计一个通带截频 $\omega_p = 0.5\pi \text{ rad}$, 通带衰减 $A_p = 1\text{dB}$ 的数字高通滤波器。

5-11 用双线性变换法设计满足下列指标的巴特沃思型数字带通滤波器。

$$\omega_{p1} = 0.25\pi \text{ rad}, \quad \omega_{p2} = 0.35\pi \text{ rad}, \quad A_p = 1\text{dB},$$

$$\omega_{st1} = 0.2\pi \text{ rad}, \quad \omega_{st2} = 0.4\pi \text{ rad}, \quad A_s = 15\text{dB}$$

要求设计出的巴特沃思型数字带通滤波器写成四阶子式的积,用带阻指标确定巴特沃思型模拟滤波器的 Ω_c 。

5-12 用双线性变换法设计满足下列指标的巴特沃思型数字带阻滤波器。

$$\omega_{p1} = 0.2\pi \text{ rad}, \quad \omega_{p2} = 0.8\pi \text{ rad}, \quad A_p \leq 1\text{dB},$$

$$\omega_{st1} = 0.5\pi \text{ rad}, \quad \omega_{st2} = 0.6\pi \text{ rad}, \quad A_s \geq 26\text{dB}$$

5-13 分别用脉冲响应不变法和双线性不变法设计一个数字切贝雪夫 II 型带通滤波器,给定指标如下:

- (1) 波纹 $A_p \leq 2\text{dB}$, $200\text{Hz} \leq f \leq 400\text{Hz}$;
- (2) 衰减 $A_s \geq 20\text{dB}$, $f \leq 100\text{Hz}$, $f \geq 600\text{Hz}$;
- (3) 抽样频率 $f_s = 2\text{kHz}$ 。

要求写出 $H(z)$ 的表达式,画出系统的幅频响应曲线。

5-14 分别用直接 I 型、直接 II 型、级联型和并联型结构实现以下系统:

$$(1) H(z) = \frac{z^3}{(z-0.4)(z^2-0.6z+0.25)};$$

$$(2) H(z) = \frac{z^2(z+0.5)}{(z-0.7)(z^2-0.2z+0.9)}。$$