

第5章

组合计数与离散概率

5.1 内容提要

定理 5.1(加法原理) 假定 $S_1, S_2, \dots, S_t$ 均为集合, 第 i 个集合 S_i 有 n_i 个元素。若 $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ 为两两不交的集合 (若 $i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset$), 则可以从 $S_1, S_2, \dots, S_t$ 选择出的元素总数为 $n_1 + n_2 + \dots + n_t$ (即集合 $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_t$ 含有 $n_1 + n_2 + \dots + n_t$ 个元素)。

定理 5.2(乘法原理) 如果一项工作需要 t 步完成, 第一步有 n_1 种不同的选择, 第二步有 n_2 种不同的选择, $\dots$, 第 t 步有 n_t 种不同的选择, 那么完成这项工作所有可能的不同的选择总数为 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_t$ 。

排序 n 个不同元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一种排列为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一个排序。

定理 5.3 n 个元素的排列共有 $n!$ 种。

排列 n 个 (不同) 元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 r 排列是 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的 r 元素子集上的排列。 n 个不同元素上的 r 排列的个数记作 $P(n, r)$ 。

定理 5.4 n 个不同元素上的 r 排列数目为 $P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1), r \leq n$ 。

组合 给定集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 包含 n 个元素, 从 X 中无序、不重复选取的 r 个元素称为 X 的一个 r 组合, X 的所有 r 组合的个数记作 $C(n, r)$ 。

定理 5.5 n 个不同元素上的 r 组合数为

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad r \leq n$$

定理 5.6 令 $a_1 a_2 \cdots a_r$ 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个 r 组合。在字典排序中, 第一个 r 组合是 $12 \cdots r$ 。最后一个 r 组合是 $(n-r+1)(n-r+2) \cdots n$ 。设 $a_1 a_2 \cdots a_r \neq (n-r+1)(n-r+2) \cdots n$ 。令 k 是满足 $a_k < n$ 且使得 $a_k + 1$ 不同于 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 中的任何一个数的最大整数。那么, 在字典排序中, $a_1 a_2 \cdots a_r$ 的直接后继 r -组合是 $a_1 \cdots a_{k-1} (a_k + 1) (a_k + 2) \cdots (a_k + r - k + 1)$ 。

定理 5.7 设序列 S 包含 n 个对象, 其中第 1 类对象有 n_1 个, 第 2 类对象有 n_2 个, $\dots$, 第 t 类对象有 n_t 个, 则 S 的不同排序个数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_l!}$$

定理 5.8 X 为包含 t 个元素的集合, 在 X 中允许重复、不计顺序地选取 k 个元素, 共有

$$C(k+t-1, t-1) = C(k+t-1, k)$$

种法选。

定理 5.9 (二项式定理) 设 a 和 b 为实数, n 为正整数, 则

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k$$

$C(n, r)$ 为 $a+b$ 的幂的展开式中的系数, 故称为二项式系数。

定理 5.10 对任意 $1 \leq k \leq n$, $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$ 。

定理 5.11 鸽笼原理(第一种形式) n 只鸽子飞入 k 个鸽笼, $k < n$, 则必存在某个鸽笼包含至少两只鸽子。

定理 5.12 鸽笼原理(第二种形式) 设 f 为有限集合 X 到有限集合 Y 的函数, 且 $|X| > |Y|$, 则必存在 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, X 相当于第一种形式中的鸽子, Y 相当于第一种形式中的鸽笼。鸽子 x 飞入鸽笼 $f(x_1)$ 。由鸽笼原理的第一种形式, 至少有两只鸽子 $x_1, x_2 \in X$ 飞入同一个鸽笼, 即对某两个 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 满足 $f(x_1) = f(x_2)$ 。

定理 5.13 鸽笼原理(第三种形式) 设 f 为有限集合 X 到有限集合 Y 上的函数, $|X| = n, |Y| = m$ 。令 $k = \lceil n/m \rceil$, 则至少存在 k 个元素 $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$, 满足 $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k)$ 。

递推定义函数 为了定义以非负整数集合作为其定义域的函数, 就要规定这个函数在 0 处的值, 并给出从较小的整数处的值来求出当前值的规则。这样的定义称为递推定义。

递推定义集合 递推定义可用来定义集合, 先给出初始元素, 然后给出从已知元素构造其他元素的规则。以这种方式描述的集合是严格定义的。

常数 k 阶齐次线性递推关系 形为 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, c_k \neq 0$ 的递推关系称为常数 k 阶齐次线性递推关系。

特征方程与特征根 方程 $p^k - c_1 p^{k-1} - c_2 p^{k-2} - \dots - c_{k-1} p - c_k = 0$ 叫做 k 阶线性齐次递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \dots - c_k a_{n-k}$ 的特征方程, 其中 p 是一个常数。方程的解 p 叫做该递推关系的特征根。

定理 5.14 令 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ ①

为常数二阶齐次线性关系。

(1) 若 S 和 T 为式①的解, 则 $U = bS + dT$ 也为式①的解。

(2) 若 r 为方程

$$t^2 - c_1 t - c_2 = 0 \quad ②$$

的一个根, 则序列 $r^n (n=0, 1, \dots)$ 为式①的一个解。

(3) 若 a_n 为式①定义的序列,

$$a_0 = C_0, \quad a_1 = C_1 \quad ③$$

且 r_1 和 r_2 为方程②两个不相同的根,则存在常数 b 和 d ,使得

$$a_n = br_1^n + dr_2^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

成立。

定理 5.15 (Master 定理) 设 $a \geq 1, b > 1$ 为常数, $f(n)$ 为函数, $T(n)$ 为非负整数, $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, 则有以下结果:

- (1) $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}), \epsilon > 0$, 那么 $T(n) = \theta(n^{\log_b a})$;
- (2) $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, 那么 $T(n) = \theta(n^{\log_b a} \log n)$;
- (3) $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}), \epsilon > 0$, 且对于某个常数 $c < 1$ 和所有的充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$, 那么 $T(n) = \theta(f(n))$ 。

定理 5.16 对输入规模为 n 的二分法查找, 在最坏情形下的时间复杂度为 $O(\log n)$ 。

生成函数 对于序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$, 多项式 $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 称为序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 的生成函数。

性质 5.1 如果 $b_n = \alpha a_n, \alpha$ 为常数, 则 $B(x) = \alpha A(x)$ 。

性质 5.2 如果 $c_n = a_n + b_n$, 则 $C(x) = A(x) + B(x)$ 。

性质 5.3 如果 $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$, 则 $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ 。

性质 5.4 如果 $b_n = \begin{cases} 0 & n < l \\ a_{n-l} & n \geq l \end{cases}$, 则 $B(x) = x^l \cdot A(x)$ 。

性质 5.5 如果 $b_n = a_{n+l}$, 则 $B(x) = \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{l-1} a_n x^n}{x^l}$ 。

性质 5.6 如果 $b_n = \sum_{i=0}^n a_i$, 则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$ 。

性质 5.7 如果 $b_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$, 且 $A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$ 。

性质 5.8 如果 $b_n = a^n a_n, a$ 为常数, 则 $B(x) = A(ax)$ 。

性质 5.9 如果 $b_n = na_n$, 则 $B(x) = xA'(x)$ 。

性质 5.10 如果 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$, 则 $B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(x) dx$ 。

指数型生成函数 对于序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$, 多项式

$$G_e(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

称为序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 的指数型生成函数。

性质 5.11 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的指数型生成函数分别为 $A_e(x)$ 和 $B_e(x)$, 则

$$A_e(x) \cdot B_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \text{ 其中 } C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

随机试验 随机试验是具有以下几个特点的试验。

- (1) 试验具有明确的目的;
- (2) 在相同条件下可以重复进行;
- (3) 试验的结果不止一个, 所有结果事先都能明确地指出来;

(4) 每次试验之前,预料不到会出现哪个结果。

随机事件 在随机试验中,每一个可能出现的结果叫随机事件。随机事件通常用字母 E 表示。

基本事件 最简单的不能再分的单个事件。

复合事件 由两个或两个以上的基本事件组成的事件。

样本点 在随机试验 E 中,每一个基本事件称为一个样本点。

样本空间 样本点的全体称为样本空间,记作 Ω 。

事件概率 有限样本空间 S 中事件 E 的概率 $P(E)$ 定义为 $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$ 。

概率函数 将样本空间 S 上的每一个结果 x 映射为实数 $P(x)$,满足

$$0 \leq P(x) \leq 1, \quad \text{对 } x \in S$$

且

$$\sum_{x \in S} P(x) = 1$$

事件概率公式 E 为一个事件, E 的概率 $P(E)$ 定义为

$$P(E) = \sum_{x \in E} P(x)$$

定理 5.17 E 为一个事件, E 的补 $\bar{E}$ 的概率满足 $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ 。

定理 5.18 E_1 和 E_2 为两个事件, 则 $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ 。

条件概率 设 B 和 A 为两个事件, 且 $P(A) > 0$ 。给定事件 A 后事件 B 的条件概率定义为

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

条件概率的性质

(1) 对任一事件 B , 有 $P(B | A) \geq 0$ 。

(2) $P(\Omega | A) = 1$ 。

(3) 若 $B_1, B_2, \dots$ 是两两不相容的事件, 则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$ 。

(4) 对任意事件 B_1, B_2 有 $P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A)$ 。

定理 5.19(概率乘法定理) 由条件概率定义, 在 $P(A) > 0$ 的条件下有

$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

同样, 在 $P(B) > 0$ 的条件下有

$$P(AB) = P(B)P(A | B)$$

乘法定理推广到 n 个事件的交事件为

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

独立事件 当 $P(B \cap A) = P(B)P(A)$ 时, 称事件 B 和 A 为独立事件。

定理 5.20 事件 A, B 相互独立的充分必要条件是 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

定理 5.21(Bayes 定理) 设有 n 个种类 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 任意两个类互不相交, 且每个对象必属于其中一类。给定特性 F , 有

$$P(C_j | F) = \frac{P(F | C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^n P(F | C_i)P(C_i)}$$

5.2 例题精选

例 5.1 设 A 为 n 元集, 问

- (1) A 上的自反关系有多少个?
- (2) A 上的反自反关系有多少个?
- (3) A 上的对称关系有多少个?
- (4) A 上的反对称关系有多少个?

解: (1) 在 A 上的自反关系对应的关系矩阵中, 主对角线元素都是 1, 其他位置的元素可以是 1, 也可以是 0, 每个位置有两种选择。这种位置有 $n^2 - n$ 个, 根据乘法法则, 自反关系的个数是 $2^{n^2 - n}$ 个。

(2) 与(1)类似, 反自反关系的个数也是 $2^{n^2 - n}$ 个。

(3) 考虑 A 上对称关系的矩阵。考虑分布处理的方法, 先考虑主对角线上的元素。对于主对角线上的每个位置, 元素可以选择 0 或 1, 有两种选法, 总共有 2^n 种方法。再考虑不在主对角线上的元素, 它们的值的选择并不是完全独立的。因为矩阵是对称的, i 行 j 列的元素 r_{ij} 必须与 j 行 i 列的元素 r_{ji} 相等。因此当矩阵的上三角元素(或下三角元素)的值确定以后, 另一半对称位置的元素就完全确定了。这种能够独立选择 0 或 1 的位置有 $\frac{n^2 - n}{2}$ 个。因此根据乘法法则, 构成矩阵的方法数是 $2^n \times 2^{\frac{n^2 - n}{2}} = 2^{\frac{n^2 + n}{2}}$ 。

(4) 类似于(3)的分析, 也采用分布处理的方法, 区别在于对非主对角线位置元素取值的约束条件不一样。将这些位置分成 $\frac{n^2 - n}{2}$ 组, 每组包含处在对称位置的两个元素 r_{ij} 和 r_{ji} 。根据反对称的性质, r_{ij} 和 r_{ji} 的取值有以下 3 种可能:

$$r_{ij} = 1, \quad r_{ji} = 0;$$

$$r_{ij} = 0, \quad r_{ji} = 1;$$

$$r_{ij} = r_{ji} = 0$$

因此所有这些位置元素的选择方法数为 $3^{\frac{n^2 - n}{2}}$ 。由乘法法则, 考虑到主对角线上的元素的选取, 总方法数是 $2^n \times 3^{\frac{n^2 - n}{2}}$ 。

例 5.2 说明排列生成算法如何生成 163542 的后继。

解: 首先考虑能否在 163542 后找到一个形如 1635__ 的排列。唯一与 163542 不同的形如 1635__ 的排列是 163524, 但 163524 小于 163542, 故 163542 的后继不是形如 1635__ 的排列。

再考虑能否在 163542 后找到一个形如 163__ 的排列, 后 3 个数字必为 $\{2, 4, 5\}$ 的一个排列。由于 542 是 $\{2, 4, 5\}$ 上最大的排列, 形如 163__ 的排列都小于给定的排列。故 163542 的后继不是形如 163__ 的排列。

给定排列的后继不能以 1635 或 163 开头, 原因在于给定的排列中余下的数字按逆序排列(分别为 42 和 542)。故从右向左扫描, 找到第一个数字 d , 使它的右邻 r 满足 $d < r$ 。本例中, 第三个数字 3 满足这个性质, 所以给定的排列的后继以 16 开头。16 后的第一个数字必须大于 3。为找到比给定排列大的最小的排列, 该位应为 4。于是, 给定排列的后

继以 164 开头。为使排列最小,余下的 3 个数字 235 应按升序排列。于是,给定排列的后继为 164235。

例 5.3 把 5 个顶点放到边长为 2 的正方形中,至少存在两个顶点,它们之间的距离小于或等于 $\sqrt{2}$ 。

解: 鸽笼原理可用于判断是否存在给定性质的对象。若鸽笼原理的条件成立,则存在满足条件的对象,但鸽笼原理并不能指出这样的对象怎样去寻找,或是在哪里。运用鸽笼原理时必须确定哪些对象相当于鸽子,而哪些对象相当于鸽笼。本例中 5 个顶点当于鸽子,关键在于鸽笼的确定。若采用如图 5-1(a) 的方式,则不能说明对象具有对象之间的距离小于或等于 $\sqrt{2}$ 这样的性质。而采用如图 5-1(b) 的方式,则可以证明把 5 个顶点放到边长为 2 的正方形中,至少存在两个顶点,它们之间的距离小于或等于 $\sqrt{2}$ 。

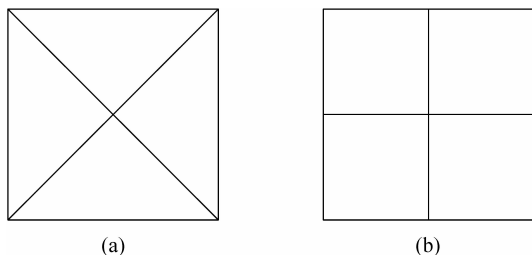


图 5-1 例 5.3 示意图

如图(b)将边长为 2 的正方形分为 4 个边长为 1 的小正方形,根据鸽笼原理,5 个顶点必有两个会放到其中一个小正方形里,这两个点的距离显然小于或等于 $\sqrt{2}$ 。

例 5.4 在计算机中经常需要对数据进行排序,其中有一种排序算法叫插入排序。该算法思想是:假设前 $i-1$ 个数已经排好,从第 $i-1$ 个数开始,从后向前,顺序将已经排好的数与第 i 个数进行比较,直到找到第 i 个数应该放置的适当位置,然后插入第 i 个数。算法开始时 $i=2$,每当上述过程完成后 i 增加 1,直到 $i=n$ 的过程完成为止。

试确定插入排序算法在最坏情况下的比较次数。为了简单起见,不妨设输入是 n 个不同的数构成的数组,其中 $n=2^k$, k 为正整数。

解: 设 $W(n)$ 表示插入排序算法在最坏情况下的比较次数。如果 $n-1$ 个数已经排好,为插入第 n 个数,最坏情况下需要将它与前 $n-1$ 个数中的每一个都进行 1 次比较,因此得到递推方程

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

设该方程的特解为 $W^*(n) = P_1 n + P_2$,将它代入递推方程得

$$P_1 n + P_2 - (P_1(n-1) + P_2) = n - 1$$

化简得 $P_1 = n - 1$,左边是 n 的 0 次多项式,右边是 n 的 1 次多项式。没有常数 P_1 能够使它成立。原因在于:如果特征根是 1,当把特解代入方程后,在等式左边所设特解的最高次项和常数项都被抵消了。为了保证等式两边的多项式的次数相等,必须将特解的次数提高。不妨设特解为 $W^*(n) = P_1 n^2 + P_2 n$,将它代入递推方程得

$$(P_1 n^2 + P_2 n) - (P_1(n-1)^2 + P_2(n-1)) = n - 1$$

化简得

$$2P_1n - P_1 + P_2 = n - 1$$

解得 $P_1 = 1/2, P_2 = -1/2$ 。通解为

$$W(n) = c1^n + n(n-1)/2 = c + n(n-1)/2$$

代入初值 $W(1)=0$, 得 $c=0$, 最终得到 $W(n)=n(n-1)/2$ 。这说明 $W(n)=O(n^2)$ 。

例 5.5 两战士打靶, 已知甲的命中率为 0.9, 乙的命中率为 0.7。两人同时射击同一个目标, 各打一枪。求目标被击中的概率。

解: 设 A : 甲击中目标; B : 乙击中目标。可以假设两人是否同时击中目标都不影响对方是否击中目标, 即 A 与 B 相互独立。于是, 由加法公式, 目标被击中概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.9 + 0.7 - 0.9 \times 0.7 \\ &= 0.97 \end{aligned}$$

故两人同时射击同一个目标, 各打一枪, 目标被击中的概率为 0.97。

例 5.6 在麦当劳餐厅, 一个快乐餐盒中有一份礼物, 它是 4 种可能的礼物中的一种。如果买 5 份快乐餐, 那么得到全部 4 种礼物的概率是多少?

解: 令 U 表示得到 5 份礼物的所有可能的序列的集合, 令 A_i 表示由不包含第 i ($1 \leq i \leq 4$) 种礼物的所有序列组成的 U 的子集。要计算在集合 U 中但不在任何一个集合 A_i 中的元素的个数。

显然 A_1 中的序列仅由第二种、第三种和第四种礼物组成, 于是 $|A_1| = 3^5$ 。由对称性,

$$n_1 = C(4, 1) \times |A_1| = 4 \times 3^5 = 4 \times 243 = 972$$

同样, $A_1 \cap A_2$ 中的序列仅由第三种和第四种礼物组成, 于是 $|A_1 \cap A_2| = 2^5$ 。因此,

$$n_2 = C(4, 2) \times |A_1 \cap A_2| = 6 \times 2^5 = 6 \times 32 = 192$$

类似的推理说明:

$$n_3 = C(4, 3) \times |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4 \times 1^5 = 4 \times 1 = 4$$

$$n_4 = C(4, 4) \times |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1 \times 0^5 = 1 \times 0 = 0$$

于是, 由容斥原理,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = n_1 - n_2 + n_3 - n_4 = 972 - 192 + 4 - 0 = 784$$

从而, 在集合 U 中但不在任何一个集合 A_i 中的元素的个数是

$$|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4^5 - 784 = 1024 - 784 = 240$$

因此, 买 5 个快乐餐盒并得到全部 4 种礼物的概率是

$$240/1024 \approx 0.234$$

例 5.7 三牌戏是容易使人上当的一个例子。共有三张牌, 第一张牌两面白; 第二张牌一面白另一面黑; 第三张牌两面黑 (见图 5-2(a))。发牌者在一个帽子里洗牌 (见图 5-2(b)), 取出一张平放在桌面上。这张牌上面是黑的 (见图 5-2(c))。发牌者现在说: “显然这不是那张两面皆白的牌 (见图 5-2(d)), 它必是黑白或黑黑 (见图 5-2(e)), 愿意一比一地赌另一面是黑的, 因为输赢各半。”这对别人来说是不利的赌博。

实际上有三种可能的情形 (见图 5-2(f))。其一是另一面为白, 其余两种是黑黑牌之一面或者另一面。因此下一面为黑的机会是 2 对 1。

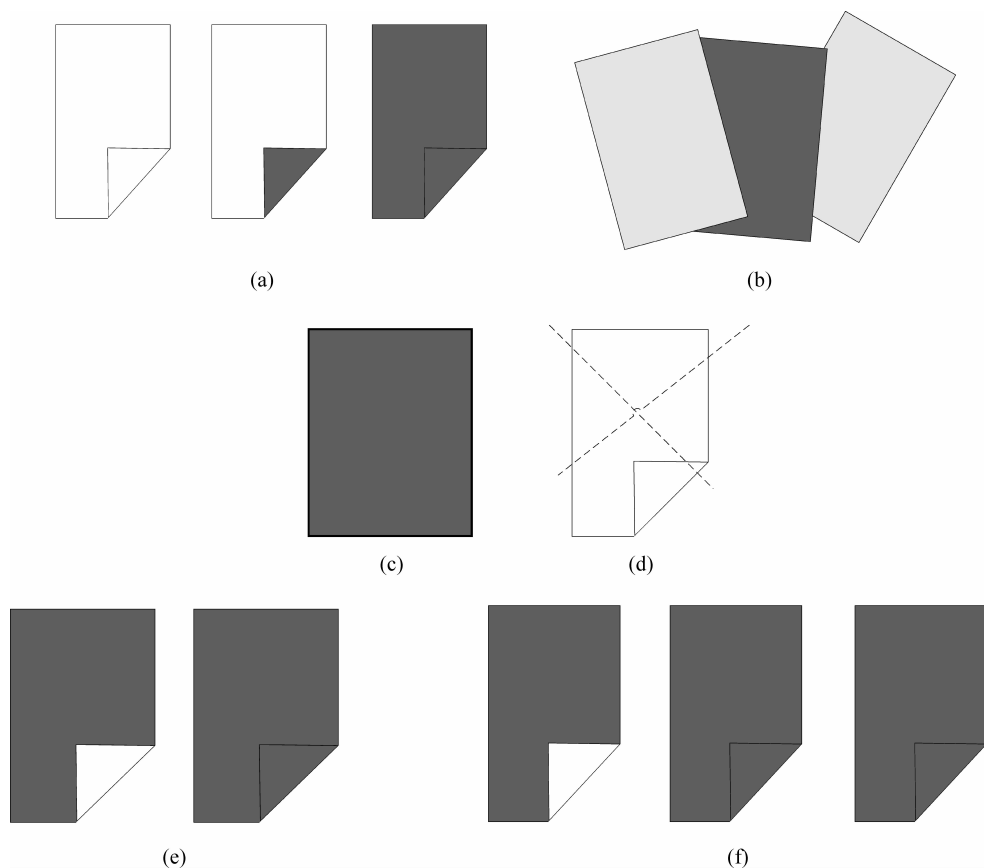


图 5-2 三牌戏示意图

5.3 应用案例

5.3.1 大使馆通信的码字数

问题描述: 某大使馆与它的国家通信,所用的码字由长度为 n 的十进制数字串组成。为了捕捉到传输中的错误,约定每个码字中字符 3 和字符 7 的总个数必须是奇数。可能的码字有多少个?

解答: 设 s_n 表示长度为 n 的容许码字的个数。下面我们推导 s_n 的递推关系。考虑长度为 $n+1$ 的字 W , 它由 s_{n+1} 计数。它的末尾要么是 3 或者 7, 要么都不是。如果它以 3 或者 7 结尾, 那么从 W 中删除最后一个数字得到长度为 n 的字 W^* , 它一定有偶数个 3 和 7。因为共有 10^n 个长度为 n 的十进制数字串, 所以这种字 W^* 共有 $10^n - s_n$ 个。因为 W 的最后一个数字可以是 3 或者 7, 因此可能的这种形式的字 W 共有 $2(10^n - s_n)$ 个。

现在假设容许字 W 不以 3 或 7 结尾, 那么删除它的最后一个数字后得到一个被 s_n 计数的字。因为 W 的最后一个数字有 8 种可能性, 所以这种形式的容许字的个数是 $8s_n$ 。

综合上面两段的结果, 我们得到

$$s_{n+1} = 2(10^n - s_n) + 8s_n = 2 \times 10^n + 6s_n$$

其中, $n \geq 1$ 。显然, $s_0 = 0$, 因为空串不可能有奇数个 3 和 7。可以利用这个递推关系计算出的结果如表 5-1 所示。

表 5-1 用递推关系计算结果

n	S_n
0	0
1	$2 \times 10^0 + 6 \times 0 = 2$
2	$2 \times 10^1 + 6 \times 2 = 32$
3	$2 \times 10^2 + 6 \times 32 = 392$

例如, s_2 计算恰好有一个 3 或 7 的 2 位的串的个数。因为可以用 3 也可以用 7, 又因为这可以是第一个数字也可以是第二个数字, 并且因为剩下的那个数字有 8 种选择, 因此这样的串有 $2 \times 2 \times 8 = 32$ 个。

利用生成函数得到 s_n 的显式公式。设 S 是序列 $\{s_n\}$ 的生成函数, 于是

$$S = s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \cdots$$

有

$$\begin{aligned} S &= s_0 + (2 \times 10^0 + 6s_0)x + (2 \times 10^1 + 6s_1)x^2 + (2 \times 10^2 + 6s_2)x^3 + \cdots \\ &= s_0 + 2x(10^0 + 10^1x + 10^2x^2 + \cdots) + 6x(s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \cdots) \\ &= 0 + 2x(1 + 10x + (10x)^2 + \cdots) + 6xS \\ &= 2x(1 - 10x)^{-1} + 6xS \end{aligned}$$

求解 S , 得到

$$S(1 - 6x) = 2x(1 - 10x)^{-1}$$

或者

$$S = \frac{2x}{(1 - 6x)(1 - 10x)}$$

求常数 a 和 b , 使得

$$\frac{2x}{(1 - 6x)(1 - 10x)} = \frac{a}{1 - 6x} + \frac{b}{1 - 10x} = \frac{a(1 - 10x) + b(1 - 6x)}{(1 - 6x)(1 - 10x)}$$

由分子相等给出方程 $a + b = 0$ 和 $-10a - 6b = 2$ 。很容易解得: $a = -1/2, b = 1/2$ 。因此,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}(1 - 6x)^{-1} + \frac{1}{2}(1 - 10x)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}[(1 - 10x)^{-1} - (1 - 6x)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2}[(1 + 10x + 100x^2 + \cdots) - (1 + 6x + 36x^2 + \cdots)] \end{aligned}$$

从中看到, S 中 x^r 的系数是

$$S_r = \frac{10^r - 6^r}{2}$$

例如, $s_2 = (100 - 36)/2 = 32, s_3 = (1000 - 216)/2 = 392$ 。这些值与先前的计算相吻合。

5.3.2 条条道路通罗马

问题描述: 魔术表演者甲请他的临时助手乙想一个数字, 然后甲用“心灵感应”来感

应乙的数字,如图 5-3 所示,甲可以感应出乙最终停的位置,请说明其中的数学原理。

甲拿一副扑克牌,随便洗,发出来排好,如图 5-3 所示。先数牌,规则是由乙随便选一个 1~10 数字,如 5(乙自己记住,不告诉甲!),按顺序依次数 5 张牌,若第 5 张牌的点数大于 10(J、Q、K),则当作数字 5 继续数下去;若第 5 张牌的点数小于等于 10(A, 2, 3, ..., 10),则按照第 5 张牌的点数依次数下去;重复这一过程直到剩余牌的数目小于要数的数字时,数牌停止。假设选的数字是 5,图 5-3 给出了具体数牌的过程,上方标五星的是每次数的牌,从 ♠7 开始,最终停在 ♦10。【资料来源:刘炯朗,魔术中的数学,中国计算机学会通讯,2015 年第 12 期】



图 5-3 条条道路通罗马

解答:

假设在魔术中乙(助手)想到的数字是 6,而甲不知道乙的数字是什么。甲也选一个数字,如 5(不一定与乙相同),乙和甲都按照上述的规则数牌,数到最后,无法再走下去了,可以发现乙的结果与甲的相同!如图 5-4 所示,其中上方标记橙色的圆点为开始选“5”的路径,上方标记绿色的菱形为开始选“6”的路径。这套魔术的秘密(数学原理)是甲可以把乙停下的位置感应出来。

图 5-5 是“条条道路通罗马”的数学原理。

我们还可以换别的数来试一下,例如开始选 1,图 5-4 中上方标记五星的是数牌的路径,最后也是停在 ♦9 上!事实上,将一副牌排好,在数字 1~10 中随便选一个,按照前面的规则数到最后,停在同一个地方的概率大约为 80%。运气好的话,乙(助手)选的数字跟甲选的数字是会碰头的。假如不碰头,甲可以说:“今天心灵感应有点问题,让我再感应一次”,最后总是能碰头的。

这背后的数学原理是,只要助手和甲走的两条路中间有一点是两条路径碰头的话,那么之后的路径就是完全相同的,最后我们一定到达同一个地方停下来。已知 52 张牌,一